

会員ニュース

小谷元子氏と砂田利一氏の日本学士院賞受賞によせて

東北大学大学院理学研究科

楯 辰哉

小谷元子先生（理化学研究所領域総括，理化学研究所開拓研究所長，東北大学材料科学高等研究所特別研究顧問）と砂田利一先生（明治大学名誉教授，東北大学名誉教授）が，研究題目「対称性を持った無限グラフの離散幾何解析（共同研究）」により日本学士院賞を受賞されました．筆者にとって，砂田先生は大学院生時代の恩師であり，小谷先生は同じ研究分野における大先輩です．そのようなお二人が学士院賞を受賞され，とても嬉しい気持ちです．今回の学士院賞は両先生の共同研究に対して授与されるとのことです．お二人が共同研究されていたのは，1990年代半ばから2010年前くらいまでだと思いますが，その間，お二人とも東北大におられた時期がありました．筆者は東北大の大学院生でしたが，小谷先生が東北大に赴任されて1年後くらいに異動しましたので，当時の東北大でのお二人のご研究の様子については，残念ながら詳しくは存じ上げません．お二人とも以前からスペクトル幾何学に関連した研究をされていたので，分野的な重なりもあり共同研究に繋がったのではないだろうかと推察しています．

お二人は多数の共著論文を執筆されておられますが，日本学士院賞の受賞理由を拝見したところ，以下の3本の共著論文の内容が，主な受賞理由であろうと想像しています．

- [A] Albanese maps and off diagonal long time asymptotics for the heat kernel, Commun. Math. Phys. 209 (2000), 633–670.
- [S] Standard Realizations of crystal lattices via harmonic maps, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 1–20.
- [L] Large deviation and the tangent cone at infinity of a crystal lattice, Math. Z. 254 (2006), 837–870.

そこで僭越ではございますが，これらの論文の内容を振り返りつつ関連する研究に言及したいと思います．

小谷・砂田は一連のご研究において有限グラフのアーベル被覆グラフを結晶格子と呼び，その幾何学やその上でのランダムウォークの幾何解析的な性質を調べられました．結晶格子はその名の通り現実の結晶のモデルとなるものですが，抽象的に定義されていますので空間における適切な実現を考える必要があります．そのために小谷・砂田はリーマン幾何学における調和写像の考え方を用います．有限グラフ X_0 からリーマン多様体 (M, g) への写像が離散版エネルギー汎関数の臨界点であるとき，その写像を X_0 から (M, g) への調和

写像と呼びます．論文 [S] では、 (M, g) がコンパクトな場合、写像の各ホモトピー類に調和写像が存在することなどの基礎的な定理が証明されていますが、さらに (M, g) を平坦トーラスに特殊化し、基本群の間の全射を誘導する写像のホモトピー類において、体積一定の制限のもとで平坦計量 g についても最小化する写像と平坦計量が本質的にただ一組存在することが示されています．その写像を離散 Albanese 写像と呼び、離散 Albanese 写像を被覆空間にリフトしたもの、あるいはその像が [S] において結晶格子の標準的実現と呼ばれている概念です．閉リーマン面の Albanese 写像の離散類似的な形で構成されるため、このように呼ばれています．結晶格子の標準的実現は結晶学において archetypical representation と呼ばれる概念と同等のものであると、砂田先生がご高著 “Topological Crystallography” (Springer Japan, 2013 年) で言及しておられますが、結晶学における上記の概念の発見は時期的には論文 [S] とほぼ同時期ようです．被覆空間論を巧みに利用し代数幾何学的な対象の離散類似を構築し、しかも具体的に計算できるような形で発見された標準的実現は、応用研究でも重要な数学概念だと思います．

標準的実現はそれ自身幾何学的に興味深いもので、例えば小谷・砂田 (2003 年) により、与えられた結晶格子の周期実現のうち最大対称性も持つことが証明されています．また、砂田 (2008 年) により、強等方性と呼ばれる大きな空間対称性と最大対称性を持つ 3 次元格子はダイヤモンド格子と、 K_4 格子あるいはダイヤモンド・ツインと呼ばれる格子のみであることが証明されました． K_4 格子とは 4 頂点完全グラフ (通常 K_4 と書かれます) の極大アーベル被覆の標準的実現のことで、組み合わせ論的な構造自身は 1930 年代に Laves によって最初に発見されていた結晶構造です． K_4 格子は炭素単体の結晶としてはまだ合成されていないようですが、材料科学の分野で伊藤らのグループ (2009 年) により K_4 -炭素結晶構造の電子特性が研究され、金属的な側面を持つことが明らかになりました．なお、結晶格子以外の被覆グラフの実現については、梶ヶ谷・田中 (2021 年) によるグラフのリーマン面への標準的実現の存在と一意性に関する結果があります．また Dechant 氏らのグループ (2021 年) によるグラフの物性研究において、エネルギー汎関数に反発相互作用の項を導入した場合の実現が提案されるなど、小谷・砂田による標準的実現とそのアイデアは材料科学へ応用されています．

しかし小谷・砂田の共同研究は、結晶格子の標準的実現の構成という幾何学的なものだけでなく、確率論的な対象であるランダムウォークという、一見するとまったく異なる数学分野との連携に真の重要性があるものと思います．まず論文 [S], [A] に先立ち、小谷・白井・砂田 (1998 年) により結晶格子のランダムウォークの推移確率の長時間漸近公式が得られています．しかし中心極限定理のように指数関数の項を導き出すには、その指数関数に現れる距離を導出する必要があります．論文 [A] で結晶格子に対する局所中心極限定理が得られていますが、そこでは、指数関数に現れる距離が結晶格子の標準的実現によって定

まるものであることが明らかにされています。なお、[A] では勝田・砂田 (1988 年) により確立された、被覆変換群の指標で定義される平坦直線束と twisted Laplacian に関する技術を使用することで、コンパクト多様体のアーベル被覆上の熱核とランダムウォークの推移確率の長時間挙動が並行して議論されています。また、先ほど言及しました標準の実現の最大対称性が、ランダムウォークの長時間挙動に関する結果を利用して証明されたように、一連の共同研究では確率論と幾何学を連携させて理論が展開されています。なお、推移作用素の中心極限定理は石渡 (2003 年) により被覆変換群が巾零群であるような被覆グラフ (巾零被覆グラフ) 上のランダムウォークに拡張され、石渡・河備・小谷 (2017 年) では結晶格子上で非対称なランダムウォークの漸近挙動、そして石渡・河備・難波 (2020 年) では巾零被覆グラフ上の非対称なランダムウォークに対する中心極限定理へと発展しました。さらに小谷 (2002 年) により、結晶格子上の磁場のもとでの推移作用素の中心極限定理も得られていますが、これに関しては小谷先生ご自身によるご高著「離散幾何解析入門」(岩波書店, 2024 年) で日本語の解説を読むことができます。

中心極限定理とならんで重要なのが大偏差原理で、ランダムウォークの到達可能領域の境界付近での推移確率の指数減衰度に関連した事象です。論文 [L] においては、到達可能領域のスケール極限は凸多面体になり、それが大偏差原理のレート関数の本質的な定義域と一致し、さらに結晶格子の Gromov-Hausdorff 極限で得られるノルム空間の単位球体となること、そしてさらにこの凸多面体と与えられた有限グラフの組み合わせ論的な構造の対応関係が詳しく調べられています。ランダムウォークの大偏差原理という漸近解析的な事象の幾何学的側面に関する論文 [L] の内容は、田中 (2011) による巾零被覆グラフ上の研究に発展しました。このように論文 [A], [S], [L] は、ワクワクしながら物語を読むような楽しさを読み手に与え続けている論文で、多くの研究者を巻き込み様々な拡張や関連研究が行われています。

ところで、離散幾何解析という用語は、小谷先生と砂田先生の一連の共同研究を分野として表現するもので、従来の幾何解析という多様体上の解析的な対象を幾何学的な視点から研究することを目的とする分野に対して、対象を離散的な空間に広げるという発想で名付けられたものと思います。現在では世界的に広まった呼び名になっていますが、筆者は大学院生時代に砂田先生から「離散と幾何と解析という単語を並べた訳のわからない分野のように感じるかもしれませんね」という冗談を聞いたことがあります。しかし上記の通りこれらすべての数学分野を結びつけて一つの数学的事象を浮き彫りにするお二人の一連の共同研究は、離散幾何解析と呼ぶに相応しいと思います。今回あらためて一連の共同研究を概観し、理論の美しさや深さを感じ、そして純粋数学にとどまらない影響力の大きさを思い、日本学士院賞を受賞するに誠に相応しい共同研究であると実感した次第です。

小谷元子先生と砂田利一先生の偉大な御功績に、心より深く敬意を表します。