

数学への尽きせぬ想い

東京理科大学 名誉教授 秋山仁

概要：

学生時代に数学の魅力の虜になって以来、私はずっと数学の世界を流浪してきました。私の旅を振り返ると、富士の高嶺に咲く大輪の花々を追いかめるのではなく、鄙びた山里の路傍にひっそりと咲く名もない草花を見つけ胸をときめかせているような旅だったと思います。本講演では、数学の美しさを市民の方々に楽しんでもいただくことを目的とし、旅の途中で見つけた可憐な花々を3つ（1. ハムサンドで腹ごしらえ、2. 今日からあなたは芸術家、3. みんなを喜ばせたパズル）紹介しましょう。

1. ハムサンドで腹ごしらえ

以下に示す結果（定理1）は1985年に、Noga Alon氏と共に研究した結果である。

定理 1（無交差完全単体存在定理 [3]） d 次元ユークリッド空間 R^d における一般の位置にある dn 個の点の集合を $\mathcal{A}$ とし、 $\mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_d$ を $\mathcal{A}$ の d 個の n 元部分集合（ n 個の元からなる集合）への分割とする。すなわち、

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j), \ |A_i| = n \ (i = 1, \dots, d)$$

を満たすとする。このとき n 個の $(d-1)$ 次元単体で、各単体は各 $A_i (1 \leq i \leq d)$ の点をちょうど1個ずつ頂点として持ち（このような単体を**完全単体**という）、かつ、それら n 個の単体は無交差（すなわち、どの2つも互いに交わらない）であるものが存在する。

本講演では、定理1の3次元の場合の概略を紹介しよう。

定理 1'（定理1の3次元版） 空間において、一般の位置（どの4点も同一平面上にはない）に $3n$ 個の点が配置されている。それらの点を勝手に n 個ずつ赤、青、黄色で塗る。このとき、 n 個の完全単体（三角形領域）が存在し、そのどの2個の完全単体も共有点を持たない。

Borsuk–Ulam の定理から次の定理が導ける。

定理 A（ハム・サンドイッチ定理） 空間に3種類の物質 M_1, M_2, M_3 が存在しているとする。このとき、 M_1, M_2, M_3 の各物質を同時に等分するようなある平面が存在する（図1）。

〔注意〕 この定理において各物質 $M_i (i = 1, 2, 3)$ は連結である必要はない。また、等分する基準（測度）は体積でも質量でもよい（ここでは体積とする）。物質 M_1, M_2, M_3 をそれぞれ

パン、ハム、野菜と考えれば、これら 3 つの物質から作られるハム・サンドイッチをその形を保ったまま、どの物質に関しても等分するような平面（切り方）が存在することを、この定理は意味しているので、このような名前が冠されている。

【定理 1' の証明の概略】 定理 1' を n に関する帰納法で証明する。

定理 A（ハム・サンドイッチ定理）を利用するため、定理 1' の $3n$ 個の各点を、その点を中心とする半径 ε （ ε は十分小さい正数）の球で置き換える。 n 個の赤い球、 n 個の青の球、 n 個の黄の球で置き換える。ここで、定理 A を用いると、それぞれの色の n 個の球の合計体積を半分ずつに分けるような平面 H が存在する。



図 1 ハムサンドの 2 等分

る。 $3n$ 個の点の配置が一般の位置であることを考慮すると、次の場合が考えられる：

場合 1 n が偶数のとき：このとき、次の 2 つの場合に帰着できる。

- (i) 平面 H の上側と下側に、どの色についても $n/2$ 個ずつの球が存在する（図 2）
- (ii) 平面 H で 1 種類の色（たとえば赤）の 2 個の球 R_1, R_2 が切られ、他の色の球については、 H の上側と下側に $n/2$ 個ずつ存在する（図 3）。

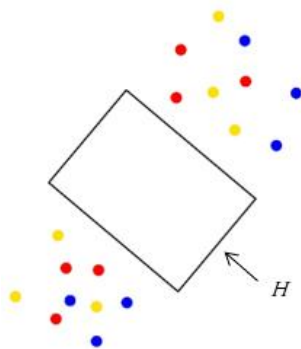


図 2 $n = 6$ のとき

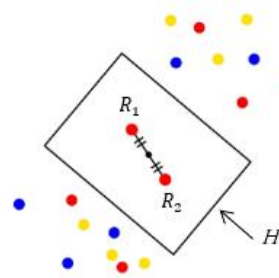


図 3 $n = 6$ のとき

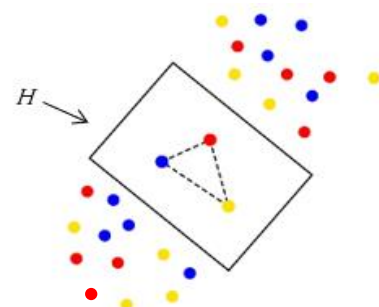


図 4 $n = 9$ のとき

次に $\varepsilon \rightarrow 0$ とし、それぞれ球を再び点に戻す。このとき、

配置 (i) の場合： H の上側と下側の各半空間に同数個の赤、青、黄の点が存在し、帰納法の仮定により H の上側、下側でそれぞれ交差しない完全単体が存在する。よって全体でも交差しない完全単体が合計 n 個存在する。

配置 (ii) の場合：平面 H の上側の半空間と R_1 で交差しない完全単体が存在し、また、 H の下側の半空間と R_2 で交差しない完全単体が存在する。

場合 2 n が奇数のとき:

赤, 青, 黄色の球が 1 個ずつ H で半分に切られ, H の上側, 下側にそれぞれ $(n-1)/2$ 個ずつの赤, 青, 黄色の点が存在する (図 4) .

帰納法の仮定により H の上側, 下側それぞれに交差しない完全単体が存在する. よって, H 上の 1 つの完全単体とあわせて合計 n 個の交差しない完全単体が存在する. ■

2. 今日からあなたは芸術家

オランダの版画家マウリッツ・エッシャーの初期の頃の作品は, 爬虫類, 鳥, 魚, 動物などの繰り返し模様 (タイル張り模様) によるものです. エッシャーが繰り返し模様の作品をつくり出すキッカケとなったのは, 旅行でグラナダのアルファンブラ宮殿を訪れたことだったと言われています. 彼は, その宮殿の壁, 天井, 床などに張り巡らされたタイル張り模様に感動し, アルファンブラ宮殿に何日も通い詰めデッサンしたそうです. アルファンブラ宮殿は 13 世紀から 14 世紀にかけてこの地を征服していたイスラム帝国の国王が建てた城であり, イスラム教は偶像崇拝を禁じているため, アラベスクなどの装飾模様に特化した芸術がこの城にふんだんに取り入れられたのです. 繰り返し模様には, 鏡映, 点対称, 滑り鏡映に関して, 本質的に異なるものが 17 種類あることが知られていますが, アルファンブラ宮殿の模様の中には 17 種類すべてのタイプが存在していることが確認されているそうです.

本講演では, エッシャー風の繰り返し模様を作る簡単な方法を紹介しましょう.

正四面体のどんなネットも必ずタイルになる

多面体 P の表面を切り開いて得られる, 連結で自己交差しない (重なる部分がない) 図形を P のネットと呼ぶ (図 1).

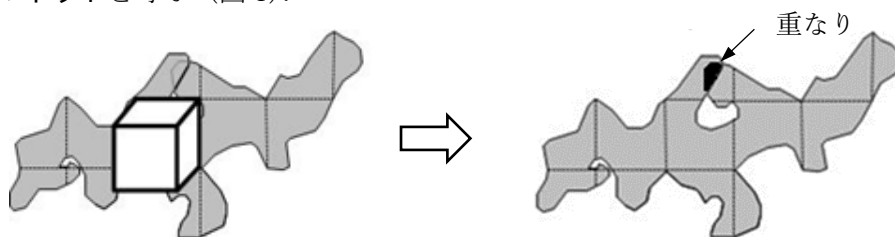


図 1 立方体を切り開いた図形に自己交差 (重なり) がある (黒い部分)

正四面体を切り開いて, 色々な形のネットをつくってみて, 次のことに気がつきました ; 正四面体の任意のネットはタイルになっている」 (図 2)

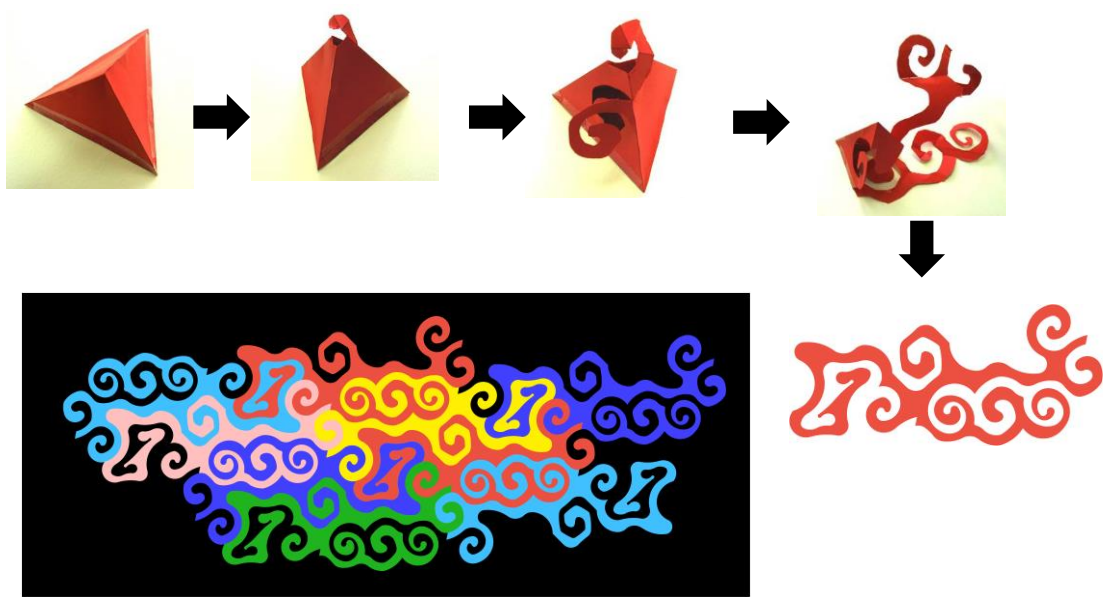


図2 正四面体のネットによるタイル張り

ある凸多面体（二面体も含む）のどんなネットもタイルになっているとき、その凸多面体を**タイル・メーカー**と呼びます。正四面体以外のタイル・メーカーをすべて探しましょう。まず、手始めに、ティッシュの箱（直方体）を調べてみましょう。ティッシュの箱を勝手に切り開いた形はすべてタイルになっているでしょうか？ 切り開いてみて、ひとつでもタイルにならない形があればタイル・メーカーとは言えません。たとえば、図3のように切り開いたネットはタイルにならないので、直方体はタイル・メーカーでないことがわかります。

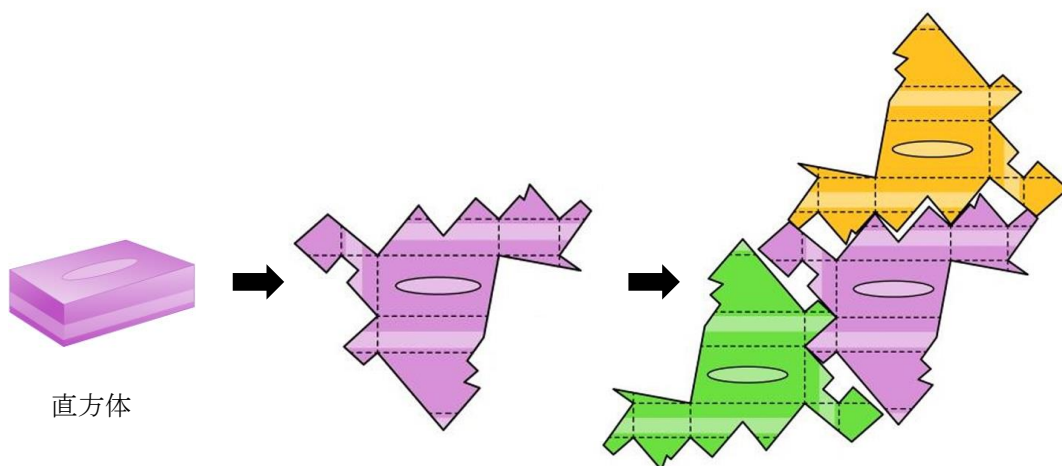


図3 直方体のタイルにならないネットの1例

次に証明に必要な用語を説明します．凸多面体 P の星ネットとは P の表面上の頂点以外の 1 点 x と P の各頂点を結ぶ最短線に沿って P を切り開いて得られるネットのことをいいます（図 4）．等面四面体とは 4 つの面がすべて合同な（鋭角）三角形からなる四面体のことをいいます．相似でない等面四面体が無数に存在することに注意しましょう．

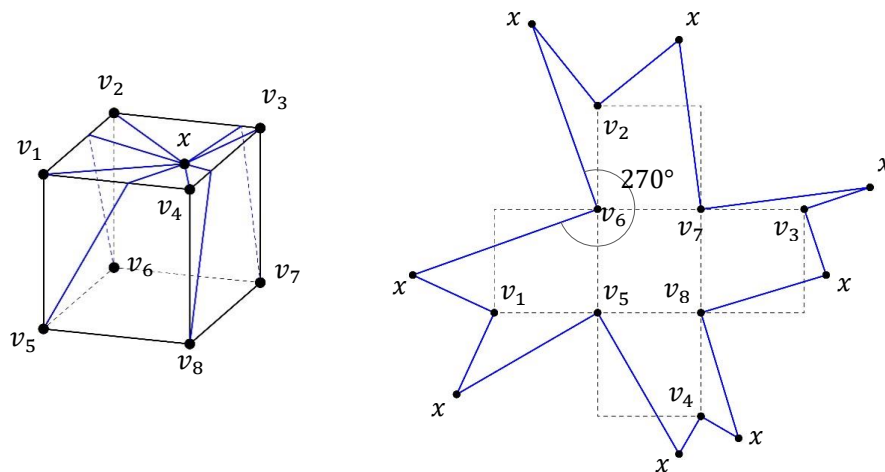
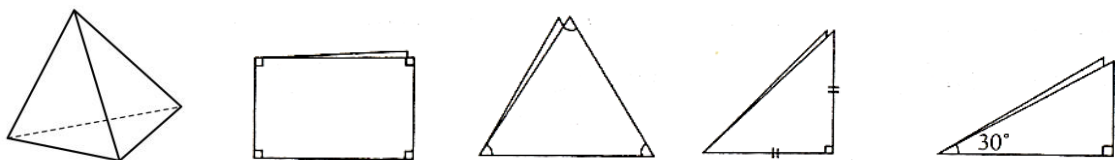


図 4 星ネット

タイル・メーカー定理とその証明の概略を紹介しましょう：

タイル・メーカー定理 [1, 2, 8]

タイル・メーカーである凸多面体（二面体も含む）は，等面四面体，長方形二面体，正三角形二面体，直角二等辺三角形二面体，半正三角形二面体であり，それ以外にはない（図 5）．



等面四面体

長方形二面体

正三角形二面体

直角二等辺
三角形二面体

半正三角形二面体

図 5 5 種類のタイル・メーカー

[必要性の証明]

ステップ 1 凸多面体（二面体も含む） P がタイル・メーカーであるための必要条件を求める． P の頂点を $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ とし， P はタイル・メーカーであると仮定する．各頂点 v_i に集まる面の頂点 v_i での内角の総和を記号 $S(v_i)$ で表す． P の表面上に点 x をとり， x と各

頂点を結ぶ最短線に沿って P を切り開き、 P の星ネット D をつくる．次に、星ネット D を (☆) のように改造したネット D' を作る：

(☆) x と各頂点 v_i を結ぶ辺 e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に沿って P を切り開く際に、直線的に切る代わりに、辺 e_i に i 個のジグザグの切込みを加えて切る (図 6)．辺 e_i に i 個のジグザグの切り込みを加えた辺を e'_i とする．

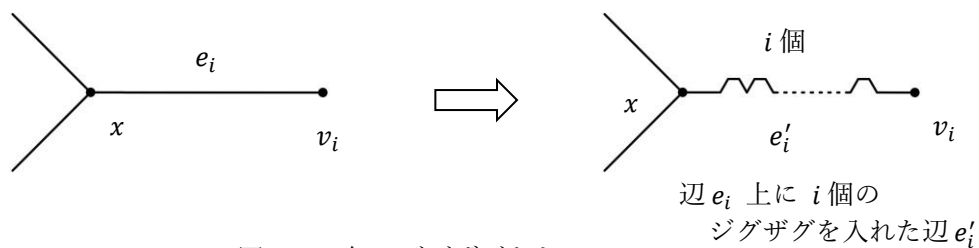


図 6 i 個のジグザグをもつ辺

P はタイル・メーカーなので、 D' は平面をタイル張りする． D' による平面のタイル張りを T' とする．各 i に対して D' の辺 e'_i は i 個のジグザグの切り込みを持つので、 T' において、辺 e'_i は e'_i としか噛み合わない．よって、 T' において、 D' の頂点 v_i のまわりには他の D' の同じ頂点 v_i が集まらなければならない (図 7)．

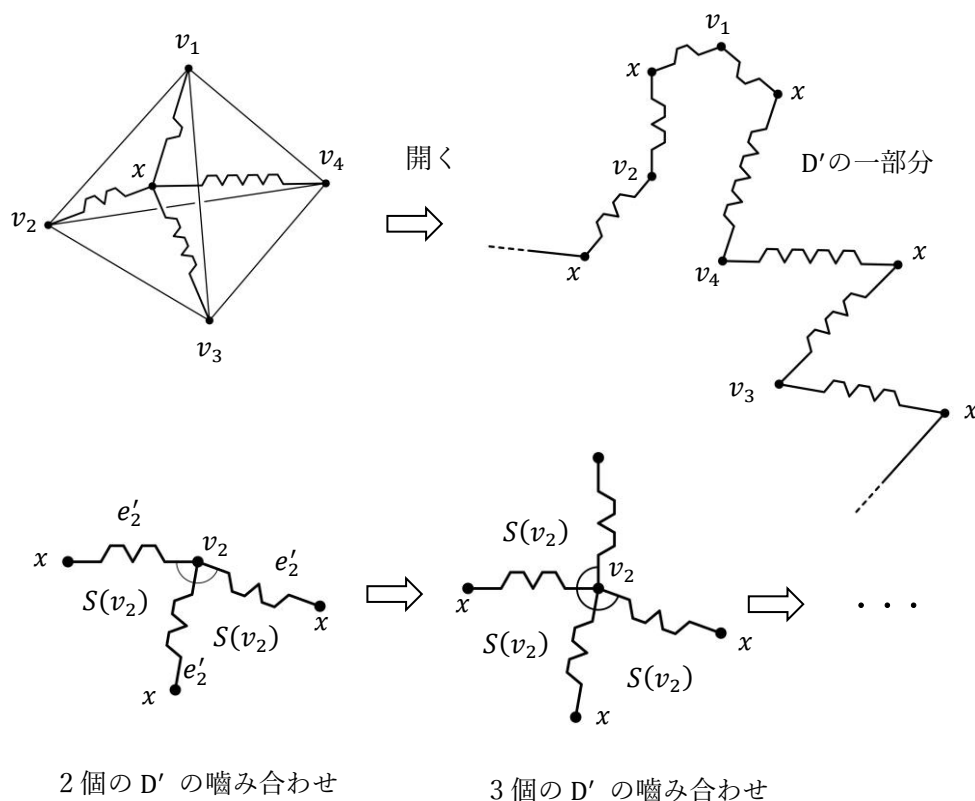


図 7 D' によるタイル張り

したがって,

“P の各頂点 $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ について, その頂点での内角の総和 $S(v_i)$ は 360° の約数である”. … (1)

ことが必要である.

次に P が凸二面体のときと凸多面体のときに分けて議論する.

ステップ 2-1 P が凸二面体の場合

P の頂点 v を $v_i (i = 1, 2, \dots, k)$ の任意の 1 頂点とし, 頂点 v における内角を θ とすると, P の頂点 v における表と裏の面の内角の合計 $S(v) = 2\theta$ である. よって, 条件(1)より 2θ が 360° の約数であることが必要である. すなわち, ある整数 n に対して,

$$2n\theta = 360^\circ, \text{ 即ち, } \theta = 180^\circ/n \dots (*)$$

であることが必要である.

また, $n = 1$ とすると P の頂点の角が 180° になってしまうので, $n \geq 2, \theta \leq 90^\circ$ である.

一方, k 角形の内角の和は $(k-2) \times 180^\circ$ であるから, $k \leq 4$ である.

以下に $k = 4, k = 3$ のそれぞれに分けて考察すると, P は長方形二面体, 正三角形二面体, 直角二等辺三角形二面体, 半正三角形二面体である (図 5).

ステップ 2-2 P が凸多面体の場合

P の必要条件(1)をさらに絞り込むことによって, 「多面体 P は $n + 2$ 個の頂点, $3n$ 本の辺, $2n$ 個の鋭角三角形を面に持つ ($n \geq 2$)」ことがわかるので, P は等面四面体だけである.

以上より, タイル・メーカーとなる凸多面体は等面四面体, 長方形二面体, 正三角形二面体, 直角二等辺三角形二面体, および半正三角形二面体しかあり得ない. □

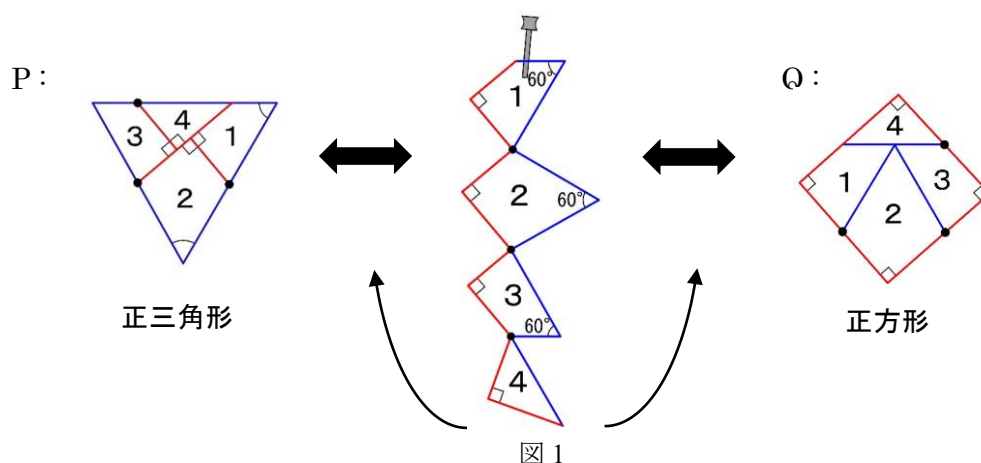
[例] 図 8 は正四面体から作った“松と寿”のタイル張りです.



図 8 松と寿

3. みんなを喜ばせたパズル

1905 年 5 月，英王立協会の会合に招かれたイギリスの数学者アンリ・デュードニー（1857～1930）は，「仕立屋のパズル」を披露しました．仕立て屋のパズルとは「正三角形をいくつかの断片に切り分け，それらを並べ替えて正方形を作れ」という問題です．彼は，マホガニーの正三角形の板を図 1 左のように四つの断片に切り分け，それら断片の隅を真鍮のちょうつがい（ヒンジ）で鎖状につないだ模型を使って（図 1 中），鎖の上端を固定し，他端を時計回りに回転させると正三角形（図 1 左）になり，反時計回りに回転させると正方形になる（図 1 右）様子を实演し，聴衆を多いに喜ばせたそうです [10]．



このように，図形をいくつかの断片に切り分けて鎖状につないだ断片の一つを固定し，他端を左右に回転させて，図形 P や図形 Q を得る時，P と Q を**変身ペア**（または**分解回転合同ペア**）と呼ぶことにします．また，以後，正三角形と正方形の変身ペアを**デュードニー・ペア**と呼ぶことにします．本講演ではデュードニー・ペアの背後に潜む数理を一般化し，変身ペアである 2 つの図形に関する必要十分条件を示しましょう．

変身図形ペアの作り方 [2, 6, 8]

1. n 個の直線分または曲線分 $v_i v_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1, n), v_{n+1} = v'_1$ から成る鎖 $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v'_1$ を作り，鎖の両端点を v_1, v'_1 とする（図 2 (a)）．この鎖を時計回り，反時計回りに回転させ，両端点の v_1 と v'_1 をヒンジで結合させ，閉路を作る（図 2 (b), (c)）．このようにして n 個の曲線分で囲まれる閉領域を得る．時計回りに回転して得られる閉領域を**トランク**という．また，反時計回りに回転して得られる閉領域を**共役トランク**といい，それぞれ記号 T, T' で表す．また， T, T' の境界をそれぞれ**閉路 C**，**共役閉路 C'**と呼ぶ．一般に，ひとつのトランク T に対して，形の異なる無数の共役トランク T' が存在することに注意せよ．

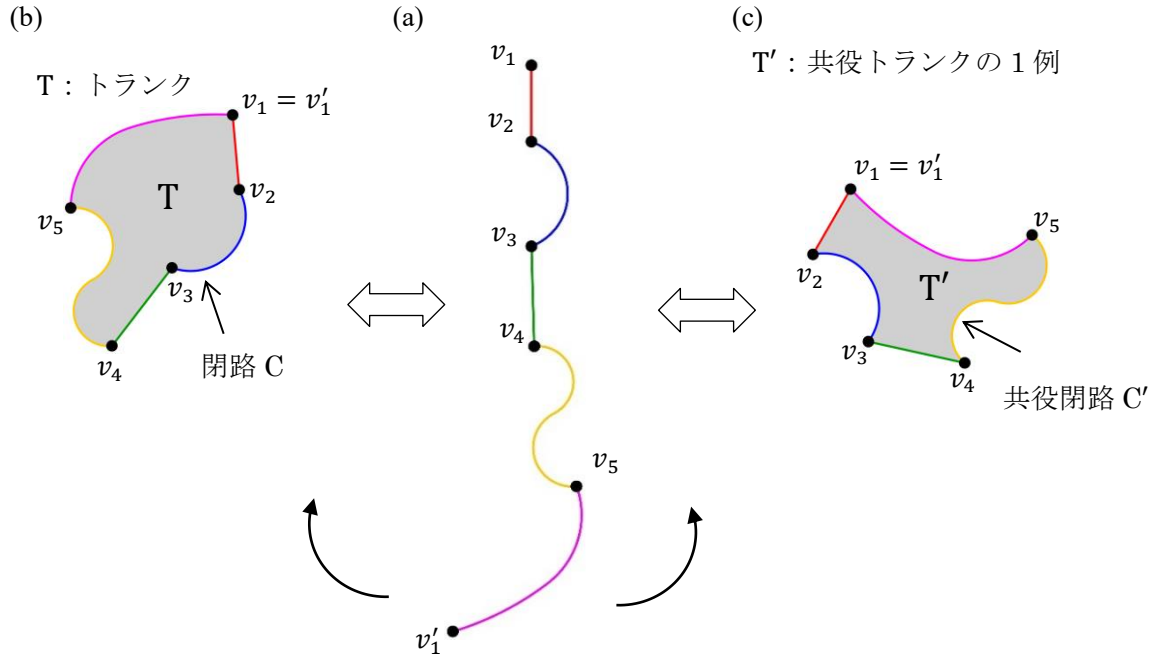


図 2 トランク T と共役トランク T' ($n = 5$ の場合)

2. T, T' それぞれの内部（または境界）に、 n 個の頂点を結ぶ切断木 CT_Q, CT_P を描き、その切断木の辺に沿って T, T' のそれぞれを n 個の部分領域に分割する（図 3）.

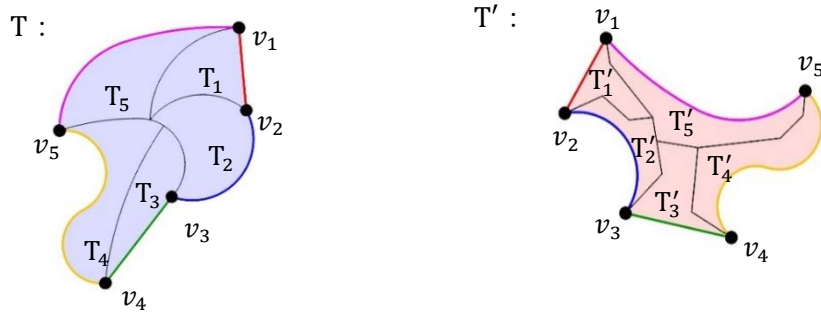


図 3 青の切断木が CT_Q , 赤の切断木が CT_P

3. 辺 $v_i v_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を境界にもつ T の断片（部分領域）を T_i とする（ただし、 $v_{n+1} = v_1$ とする）。また、2 つの断片 T_i と T_{i+1} を頂点 v_{i+1} でヒンジする ($i = 1, 2, \dots, n - 1$)。このようにして得られる断片の鎖を **T-鎖** と呼ぶ（図 4 (a)）。同様に **T'-鎖** を作る（図 4 (b)）。

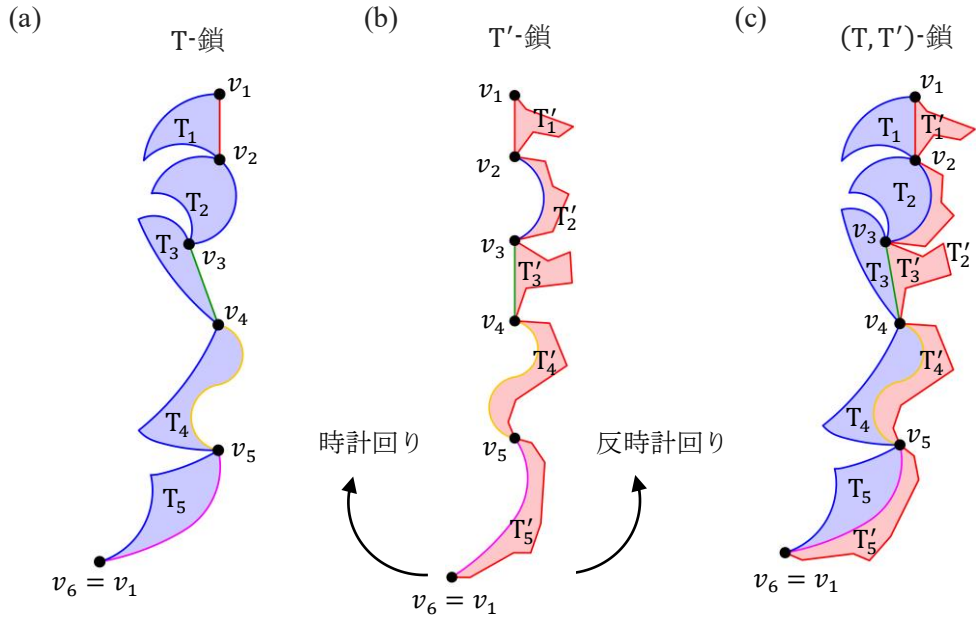


図 4 (a) T-鎖 (b) T'-鎖 (c) (T, T')-鎖

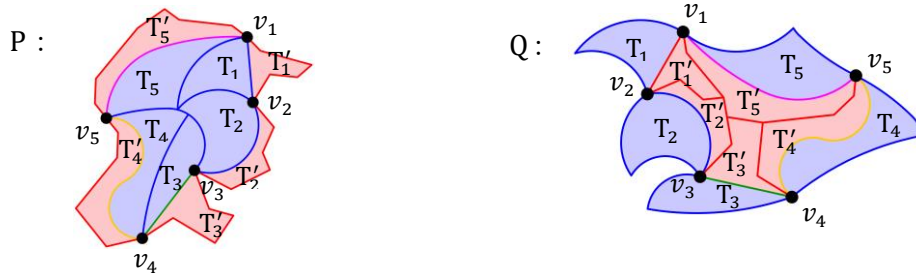


図 5 (T, T')-鎖から作られた変身ペア P と Q

4. 2 つの鎖 T-鎖と T'-鎖の対応する辺 $v_i v_{i+1}$ を貼り合わせる．このようにして得られた鎖を (T, T')-鎖と呼ぶ(図 4 (c)).
5. (T, T')-鎖をそれぞれ時計回り，反時計回りに回転させると，変身ペア P と Q ができる (図 5)．

以上より，次の結果を得る．

定理 1 (変身の基本定理) [2, 6, 8]

図形 P, Q が互いに変身ペアであるための必要十分条件は，ある (T, T')-鎖が存在し，それを時計回り，反時計回りに回転すると P, Q が得られることである．

変身図形のペアの正体は？

実は、変身図形のペアは任意の凸多面体の表面に存在しているものに他ならなかった！

その定理に必要な用語をまず次に示そう：

2 つの切断木 CT_1 と CT_2 が**無交差**である（または交差し**ない**）とは、 CT_1 が CT_2 に接してもよいが横切らないことである。

W を多面体とし、 CT を W のすべての頂点を通る、 W の表面上に描かれた全域切断木とする。このとき、切断木 CT が**生成する W のネット**とは、 W を CT の辺に沿って切り開いてできるネットのことである。 W の切断木 CT_1 と CT_2 が無交差なとき、それらを**分離する閉路 C** とは C が W の頂点すべてを通過し、 C が分ける 2 つの領域のうちの一方の領域に CT_1 を含み、他方に CT_2 を含むことである。

定理 2（多面体ネットの変身定理） [2, 5, 8]

W を任意の多面体とする。 W の表面上の互いに交差し**ない**切断木を CT_P, CT_Q とする。このとき、 CT_P, CT_Q それぞれが生成するネット P, Q は変身ペアである。

上述の定理の一例を図示したものが図 6（ダチョウとカエル）である。

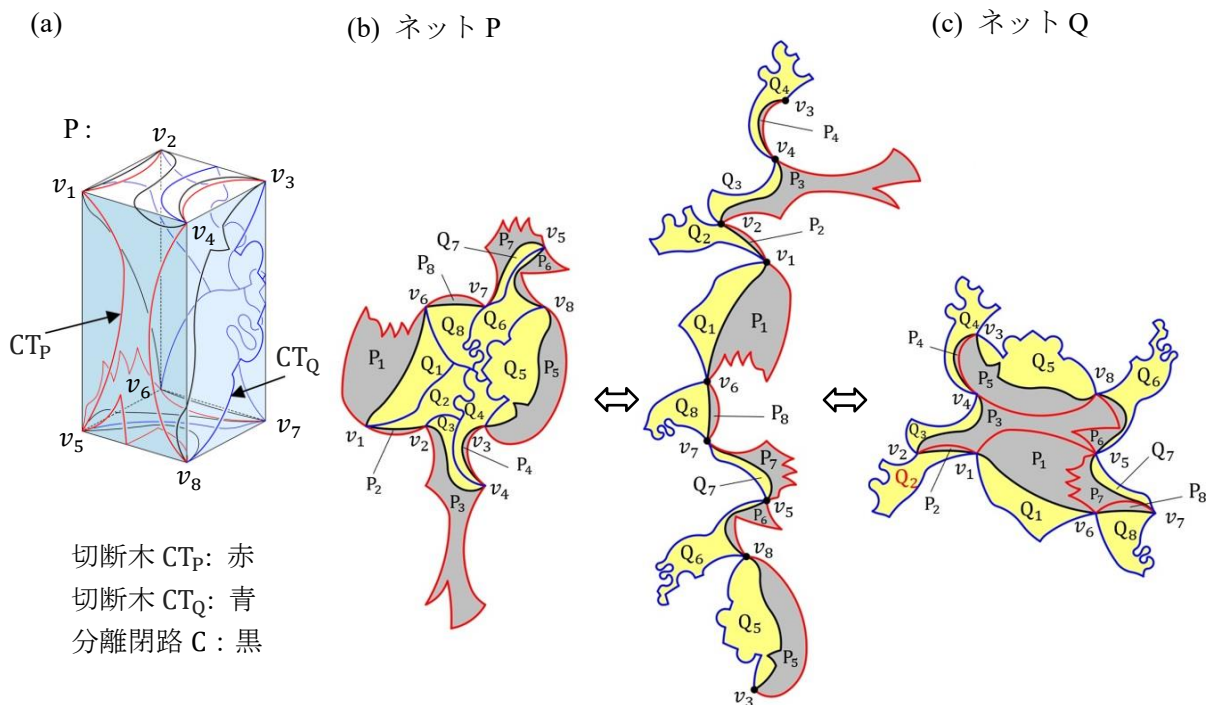


図 6

[定理 2 の証明の概略]

CT_P (赤辺) と CT_Q (青辺) は多面体 W の表面上で互いに交差してない切断木であるので、 W の表面上に CT_P (赤) と CT_Q (青) を分離する閉路 C (黒) を描くことができる (図 6 (a)). この閉路 C によって 2 つに分離される W の表面領域のうち、 CT_P の辺だけを内部に含む閉領域を T' とし、 CT_Q の辺だけを内部に含む閉領域を T とする.

CT_P が生成する W のネット P には C が囲む閉領域 T が内接している. そのとき、 T は CT_Q のすべての青辺を内部に含んでいる (図 6 (b)). 一方、 CT_Q が生成する W のネット Q には C' が囲む閉領域 T' が内接している (すなわち、 T と T' は共役トランクの関係である). さらに、 T' は CT_P のすべての赤辺を内部に含んでいる (図 6 (c)). よって、 (T, T') -鎖が作れ (図 6 中央), 定理 1 (変身の基本定理) より、 P と Q は互いに変身ペアである. $\square$

定理 2 の逆

P, Q を変身ペアとする. このとき、ある多面体 W が存在し、2 つのネット P, Q それぞれを生成する無交差な切断木 CT_P, CT_Q が W の表面上に存在する (因みにこのような多面体を P, Q の親多面体という).

定理 2 の逆を証明するために、次の定理 A を用いる:

定理 A (ブラゴ・ザルガラーの定理) [9, 11]

多角形の周を適切に張り合わせ、球と同型な形ができたとき、それをあるひとつの多面体に折り直せる.

[定理 2 の逆の証明]

図形 P, Q が変身可能であることから、定理 1 (変身の基本定理) より、ある (T, T') -鎖が存在し、 P, Q はどちらも (T, T') -鎖を回転してできる図形である. すなわち、互いに共役の関係にあるトランク T と T' が存在して、 P は T の周のまわりに T' を分割した断片が付着した図形であり、 Q は T' の周のまわりに T を分割した断片が付着した図形である (図 7 (a)).

P の周は T' の内部にある切断木 CT_P の各辺が 2 回ずつ現れているので、それらの辺 (またはその一部のこともある) どうしがピッタリ重なるように P の周を接着する. このようにして、つぶれた紙風船状の立体 W_1 を得る (図 7 (b)左). また、同様に、 T の内部にある CT_Q の状態になるように、 Q の周上の辺どうしを接着すると、立体 W_2 を得る (図 7 (b)右). W_1 と W_2 は T と T' をそれらの周 C, C' の合同な部分どうしで貼り合わせたことによって得られる立体 W_3 (図 7 (c)) である. すなわち、 W_1 と W_2 は合同である.

このようにして得られた立体 $W_1 (=W_2)$ は、 P または Q の少なくとも一方が多角形のと
き、定理 A により、ひとつの多面体に確定できる。また、 P または Q のどちらも多角形で
ないとき、 P (または Q) の曲線部を直線に近似することによって定理 A により、 $W_1 (=$
 $W_2)$ はひとつの多面体に確定できることがわかる。

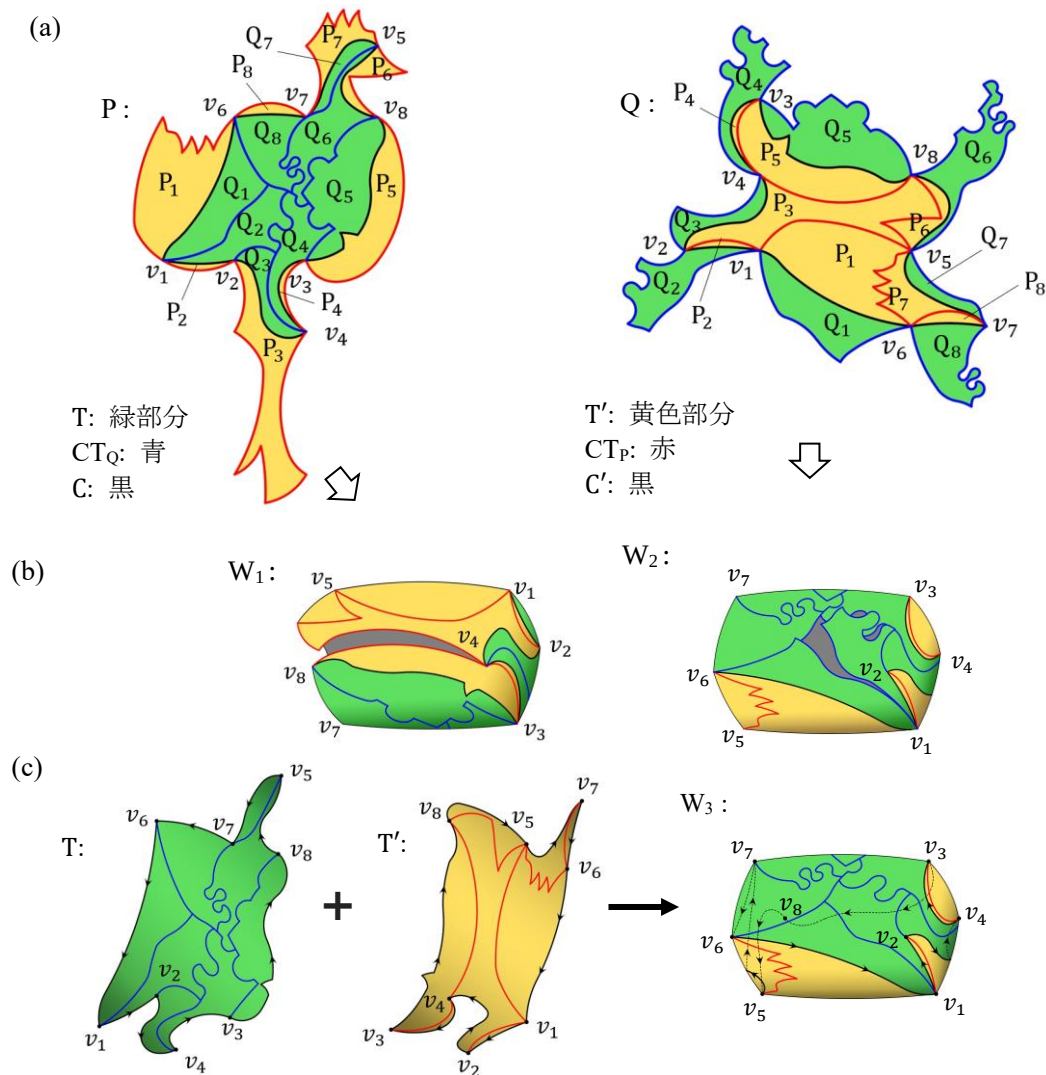


図 7 (a), (b) 各 P, Q の周を貼り合わせ W_1, W_2 を得る
(c) T と T' を貼り合わせ W_3 を得る

よって、 CT_P, CT_Q はともに、あるひとつの多面体 (または二面体) W の無交差な切断木
である。また、図形 P の周とそのトランク T の周 C の接点を v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とするとき、
 $W_1 (=W_2)$ 上で、 v_i における面角の和 $S(v_i)$ はトランク T および共役トランク T' の頂点 v_i
における内角の和だから 360° ではなく、かつ、 v_i 以外の任意の点 v では $S(v) = 360^\circ$ であ
る。よって、図形 P, Q はそれぞれ頂点を v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とする $W (=W_1=W_2)$ のネット
である。□

定理 2 とその逆が成り立つことより，次の定理を得る．

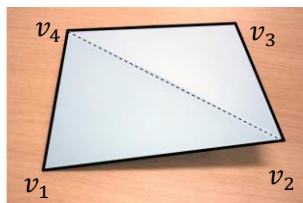
定理 3 親多面体存在定理 [4, 8]

2 つの図形 P, Q が変身ペアであるための必要十分条件は，ある多面体 W が存在し， W が P, Q の親多面体であることである．

デュードニー・ペアの親多面体

変身図形の研究の緒端になったデュードニー・ペアの正三角形と正方形に対する親多面体 W を示そう．親多面体 W は，図 9 に示す平べったい等面四面体である．即ち， W をそれぞれ赤線，青線に沿って切り開くと正方形，正三角形になる [7, 8]．

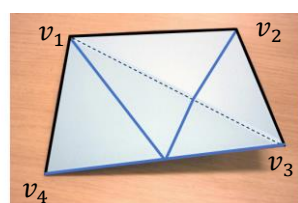
W :



W を上から見た図



W を下から見た図



P, Q の親多面体 W :
(平べったい) 等面四面体

赤辺 (CT_2) は
 Q を生成する切断木

青辺 (CT_1) は
 P を生成する切断木

図 9 デュードニー・ペアの親多面体

参考文献

- [1] J. Akiyama, *Tile-Makers and Semi-Tile-Makers*, Amer. Math. Monthly 114, 602-609(2007), MR2341323
- [2] 秋山仁, 離散幾何学フロンティア, 近代科学社(2020)
- [3] J. Akiyama & N. Alon, *Disjoint Simplices and Geometric Hypergraphs*, Combinatorial Mathematics: Annals of the New York Academy of Sciences 555, 1-3 (1989), MR1018601
- [4] J. Akiyama, E. Demaine and S. Langerman, *Polyhedral Characterization of Reversible Hinged Dissections*, Graphs and Combinatorics, 36(2) (2020), 221-229, MR4081157
- [5] J. Akiyama, S. Langerman, K. Matsunaga: *Reversible Nets of Polyhedra*, LNCS 9943, 13-23 (2016), MR3595568
- [6] J. Akiyama and K. Matsunaga, *Generalization of Haberdasher's puzzle*, Discrete Comput. Geom. 58 (1),30-50 (2017), MR3638328
- [7] J. Akiyama and K. Matsunaga, *A Prettier Shell on the Seashore: The Conway Criterion*, Math. Intelligencer, 43(2) (2021), 99-107, MR4278482
- [8] J. Akiyama and K. Matsunaga, *Treks into Intuitive Geometry (2nd Ed.)*, Springer (2024), MR4770087
- [9] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller: *Isometric piecewise linear immersions of two-dimensional manifolds with polyhedral metrics into $\mathbb{R}^3$* , St. Petersburg Mathematical Journal, 7(3), 369-385 (1996), Translated by S. G. Ivanov
- [10] G. N. Frederickson, *Dissections: Plane and Fancy*, Cambridge University Press (1997)
- [11] J. O'Rourke: *How to Fold It: The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra*, Cambridge University Press (2011)