

強非周期タイルってなんだろう？

筑波大学 数理物質系 教授

秋山 茂樹

2026 年度日本数学会年会市民講演会（東京理科大学）で、このタイトルで講演をさせていただいた。このように多数の数学者以外を含む聴衆を前にお話しをするのは初めてでとても緊張した。

講演当時、私は大学で管理職をしていた。大学執行部から「この AI の時代に数学で何を教えるのか」「そもそも教えることはあるのか」とさえ問われることがあった。その際の私の答えは「数学を分かる感動」である。この感動は本人にとって少し難しい証明を本当に理解した時に生まれるもので、たとえ古代ギリシャの数学であっても証明を理解できたとき人は感動する。ここが重要なのだが、この感動体験を持っている人は悲しいほど少ない。その感動体験を多くの人に伝えるのは大事だと思う。多分、私の力量不足で、大学執行部には伝わらなかったかもしれない。数学が税金で支えられているのは非自明だし、少なくとも説明しようとする態度は要るのだろう。今回の講演では、通常市民向け行事で回避される「証明」を一部紹介し、その感動を伝えようと試みた。成功したか否かは私にはわからない。ただ、仮に不評であっても数学者は証明を伝えていかなければならないと私は信じる。多いに越したことはないけれど、聴衆の一部でも感動が伝わればこれは成功なのだ。

本稿はその講演内容をもとに、強非周期タイル集合の考え方を概説するものである。タイル張りの周期性の定義から始め、ワンタイル、アンマンタイル、ペンローズタイル、スミス帽およびスミス亀を例に、強非周期性の証明で現れる基本的な考え方を説明する。さらに、スツルム語、アンマン棒、スツルム格子を通じて、実二次無理数の傾きから強非周期タイル集合を構成する最近の方向について述べる。

1 タイル張りとは周期性

タイル張りを考えるため、まず用語を定義する。本稿ではタイルとは多角形を指す。タイルからなる有限集合をタイル集合 A とし、運動群 G を平行移動を含む平面の合同変換群の部分群とする。タイル集合 A の各要素を G の元で動かして、平面を重なりなく、かつ隙間なく埋め尽くしたものをタイル張りという。隣接するタイルが多角形の辺をぴったり端から端までを共有するとき、そのタイル張りを辺対辺タイル張りという。

図 1 は、講演で最初に用いたタイル集合と運動群の例である。平行四辺形と正三角形からなるタイル集合を、平行移動と回転で動かす場合を考えると、辺対辺でない配置も現れ

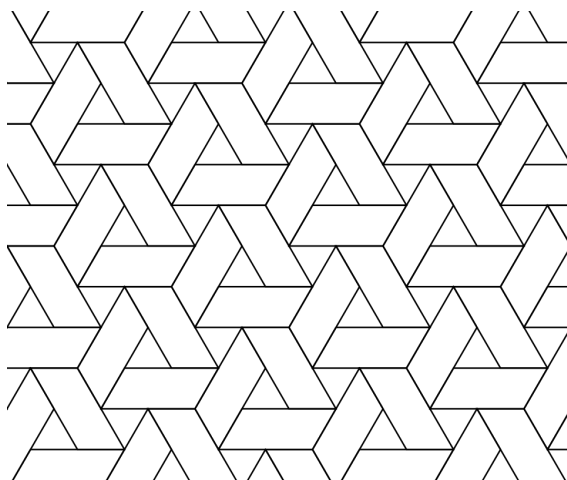


図 1: 平行四辺形 1 つと正三角形 1 つ. 運動群は平行移動と回転からなる.

ているので辺対辺タイル張りでない. ただし, 平行四辺形の長辺を中点で分割すれば, その同じ図形的状況を辺対辺タイル張りとして扱うことができる. したがって, 辺対辺という性質は多角形の辺として何を採用するかにも依存している.

タイル張り T 全体をベクトル τ で平行移動したとき, もとのタイル張りと同じタイル張りが現れるならば, τ を T の周期という. 自明な周期 $\tau = 0$ しかないタイル張りを非周期的タイル張りという. タイル張りに非自明な周期がある場合, そのタイル張りには繰り返し構造が含まれている. 特に, タイル集合 $\mathcal{A}$ によって周期 $\tau_1 \neq 0$ をもつ辺対辺タイル張りが可能ならば, $\mathcal{A}$ により一次独立な τ_1, τ_2 の二つの周期をもつタイル張りも可能である. これは辺対辺という性質を用いてある幅の廊下においてみられるパターンの全体に鳩ノ巣原理を適用するやりかたで証明できる ([4, 5]). 従って, タイル張りに周期があれば, 平行四辺形型の基本領域を繰り返して平面を埋め尽くす状況に帰着できる.

つまりタイル張りの周期性とは「有限なパターンの繰り返しかどうか」という問題と思える. 周期的なタイル張りが作れる場合には, 一つの基本領域を繰り返せばよい. 単に「タイル張り」と言ったとき多くの人はこのような周期性があるものを思い浮かべるだろう. 一方, 平面全体を埋めることができるにもかかわらず, どのように埋めてもこのような基本領域が現れないタイル集合が存在する. これが次節で述べる強非周期タイル集合である.

2 強非周期タイル集合

定義 1 (強非周期タイル集合). タイル集合 $\mathcal{A}$ が次の二条件を満たすとき, $\mathcal{A}$ を強非周期タイル集合という.

1. $\mathcal{A}$ によって平面をタイル張りできる.
2. $\mathcal{A}$ によって得られるタイル張りはすべて非周期的である.

まず強非周期という形容詞はタイル集合 (有限個の多角形) に対するもので、タイル張りを形容するものではないことを強調しておく. この定義で重要なのは、あるタイル集合からなる非周期的なタイル張りが一つ存在するだけでは不十分であるという点である. 同じタイル集合から周期的なタイル張りも作れるならば、それは強非周期タイル集合ではない. 強非周期性は、タイル集合と許された運動群に対して、周期的な配置を完全に排除することを要求する性質である.

講演では、有名な強非周期タイル集合として、ワントイル、ペンローズタイル、アンマンタイル、テイラー・ソコラタイル、スミス帽を挙げた. これらは互いに異なる発想に基づいており、強非周期タイル集合の構成が新しいアイデアの宝庫であることを示している.

強非周期性の証明は一般に二段階からなる. 第一に、そのタイル集合で平面を実際にタイル張りできることを示す. 第二に、どのタイル張りにも周期が存在しないことを示す. 前者は置換規則など何らかの仕掛けによりいくらでも大きい球を含むパッチ (タイル張りの一部) を作ることで示す. これが可能となればカントールの対角線論法のような議論でタイル張りの存在が証明される. 後者は大枠でいえば周期があったと仮定して、局所規則や補助的な直線構造からなんらかの矛盾を導くことになる. このどちらにも様々なアイデアがみられ数学的に非常に興味深い. 以下では、この二段階がいくつかの例でどのように現れるかを説明する.

3 ワントイル

ワントイルでは、タイル集合は辺に色を塗った有限個の正方形からなる. 許される運動群は平行移動のみである. 二つのタイルは辺と辺がぴったり重なるように配置し、隣り合うタイルの辺は同色でなければならない. これはマッチング規則と呼ばれる.

ワン (Hao Wang) は 1961 年に、このような条件のもとでタイル張りできるならば、一次独立な二つの周期をもち、長方形パターンの繰り返しとしてタイル張りが得られると予想した. しかし、この予想は正しくないことを弟子の Berger は 1964 年に 2 万個を超すタイルによる反例を作って示した. ワントイルの歴史は、その個数を減らしていく歴史でもあった. その後、Robinson, Kari, Culik らの構成を経て、Jeandel–Rao [6] は 2021 年に 11 個のタイルに到達した. さらに彼らは 10 個では不可能なことを全検索で示したので、これが決定版である. この歴史のなかで特別に光り輝くものは Kari [7] のタイルである. このわずか数ページの論文は今も人々に感動を与えている.

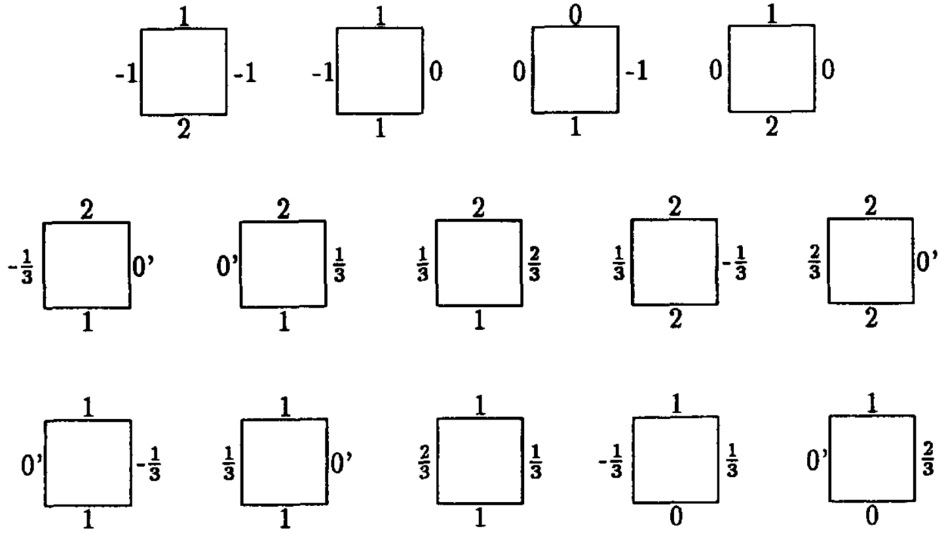


図 2: Kari によるワンタイル

Kari の構成では，タイルの四辺に対応する値を上左下右の順で a, b, c, d とし， $q = 2$ または $q = 2/3$ に対して

$$qa + b = c + d \quad (1)$$

という関係を満たすように作られている．これは，上の辺の値 a に q を掛けて下の辺の値 c に出力し，左右の b, d が余りを左から右へ伝える，という一種の計算機として理解できる．Kari はタイルに計算機を埋め込んだのである．仮に長方形の基本領域からなる二つの周期をもつタイル張りがあったとして横に並んだ n 個のタイルについて式 (1) を足し合わせると，左右の余りが相殺され，

$$q(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c_1 + c_2 + \cdots + c_n \quad (2)$$

が得られる．

非周期性の証明は次の通り．もし周期的なタイル張りが存在すれば，横向きの有限列が繰り返され，周期によって同じ列に戻るため，式 (2) を反復して $2^u(2/3)^v = 1$ という関係が得られる．しかし，これは $u = v = 0$ でなければ成り立たない．したがって，非自明な周期があるという仮定に矛盾する．

一方，タイル張り可能性については，同じタイルを計算機とみなす考え方をを用いる．傾き α ，切片 ρ のスツルム語 (5 節を参照のこと) を横向きの数列として取り， $0 < \alpha < 2$ ， $\rho = 0$ の場合を考えると一行下に移行するごとにスツルム語の傾きが 2 倍または $2/3$ 倍されることがわかる．この手順は増加と減少の組み合わせなので $0 < \alpha < 2$ の間でいくらで

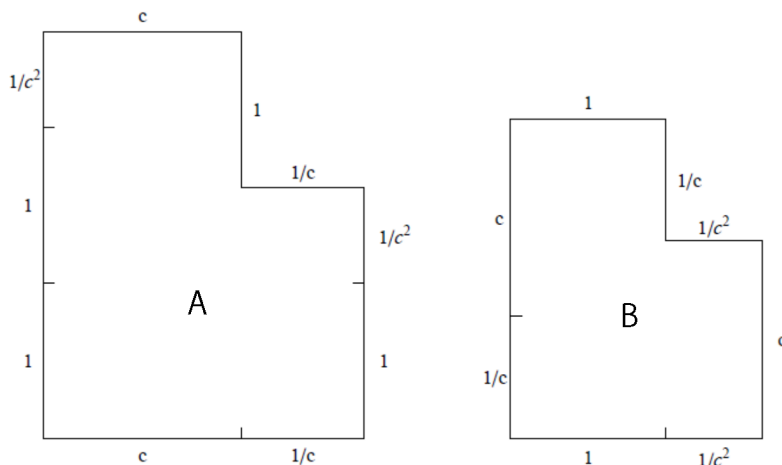


図 3: アンマンタイル集合

も続けることが可能である．これでいくらかでも大きい球を含むパッチの存在が保証されたのでタイル張りは存在する．

Jeandel-Rao の与えた 11 がワンタイルの最小数であるが，ワンタイルは形は正方形で平行移動のみしか許されていない．タイルの形を自由にしたり，運動群に平行移動以外の回転や裏返しを含めたりすると，必要なタイルの枚数を減らせる可能性がある．以下はその様な例を述べよう．

4 アンマンタイルと置換規則

ロバート・アンマンもまた強非周期タイル張りの歴史の中の重要人物である．数学者ではなく強非周期タイル張りの問題に魅せられたアマチュアである．郵便局で郵便の仕分けに従事し，その傍ら新しい強非周期タイルを多く作り出した．ここではアンマンタイルの一種 ([1]) を紹介する．黄金比を $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ と書きその平方根 $c = \sqrt{\tau}$ とおく．図 3 はアンマンタイル集合の一種で，切れ目が入っているところは辺が二つに分かれている (180° の角) と考える．二枚のタイルは切れ目を無視すれば相似比 c で相似である．この二枚のタイルからなるタイル集合は平面の合同変換群に関し，マッチング規則として辺対辺を採用すると強非周期的となる．

アンマンタイルでは，タイル張り可能性を示すために置換規則を用いる．すなわち，タイルを定数倍 c に拡大し，それをもとのタイルで分割する操作を繰り返す．この操作を反復すれば，有限の局所規則から平面全体のタイル張りを構成できる．図 4 はパッチがらせ

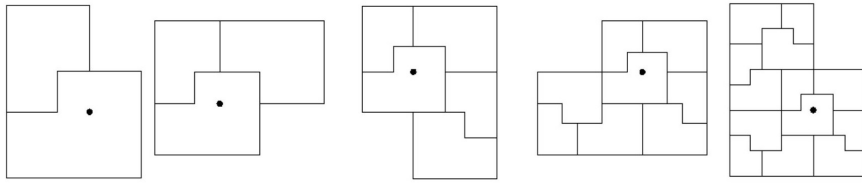


図 4: アンマンタイルの置換規則

ん状に広がっていく様子を示している。

非周期性の証明では、タイルの局所的なはまり方を詳しく調べる。第一段階として、左側の大タイル A だけではタイル張りできず、さらに右側の小タイル B の凹みを埋める方法が一通りに限られる。これにより、 A, B のタイル張りは拡大された cA, cB のタイル張りでもある。これが上記の置換規則と一致していることに注意しよう。

もし、この cA, cB のタイル張りともなす方法が一意的で、さらに cA, cB が A, B によるタイルと同じ働きをするなら、この置換操作を出来上がったタイル張りに何回でも繰り返すことができる。もし非自明な周期 v があれば、これは超タイル cA, cB のタイル張りの周期でもある。さらに超超... 超タイルによるタイル張りの周期でもある。超タイルは c 倍操作を繰り返すと v の長さより大きい円盤を含むが、これは超超... 超タイルが周期 v で自己交差することを意味し、周期であることに矛盾する。

この証明では「同じ働き」という言葉の数学的な意味が難しい。 cA, cB には A, B にはなかった切れ目があり、辺対辺タイル張りを見たときの辺の定義が異なるからである。この辺の定義の変更が、出来上がるタイル張りには影響を与えないことを場合分けをして示す必要がある。

この場合、明確にこのプロセスが記述できるが一般にタイルのマッチング規則が「同じ働き」をするという文は数学的内容が明示しにくい。これが強非周期性の証明を読みにくくする原因にもなる。多くの場合、ある補助線や点線を入れても入れなくても、タイルのマッチング規則が変わらないことを示す必要がある。

5 スツルム語とアンマン棒

スツルム語は、ある意味でもっとも周期性に近い非周期性を実現する重要な無限語である。周囲長 1 の円を α ずつ進む回転運動を考え、その軌道が長さ α の区間 (灰色の領域) に入れば 1、外にあれば 0 と読む。このようにして得られる 0 と 1 の列は、傾き α が無

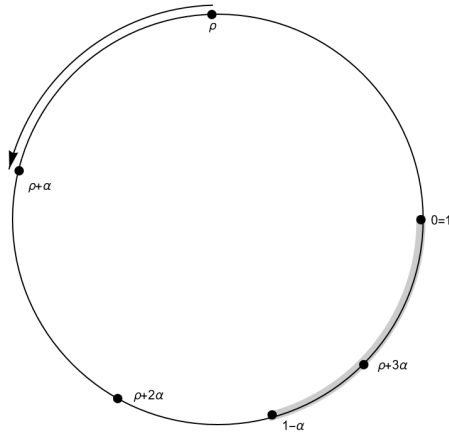


図 5: スツルム語: 灰色の領域に入れば 1, 外にあれば 0 と読む. この絵で 00010....

理数のとき非周期的であり, 複雑度が最小の非周期無限語となる. スツルム語生成の原点にあたる円の上の初期値 ρ をスツルム語の切片という.

アンマン棒とは, タイルの表面に描かれた線分である (図 6a はアンマンタイルの例). ペンローズタイルは二枚からなる強非周期タイル集合として最もよく知られているが, その一種である太った菱形, やせた菱形にアンマン棒を引くことができる (図 6b). タイル張りは辺対辺とし, マッチング規則としてアンマン棒が直線状につながることを要求する. この直線構造はタイル張りの局所的な規則によって非周期性を強制する役割をもっており, アンマンによって導入された. アンマンがコミュニケーションの取りにくい人物であったこともあり発見当時から不思議なものと考えられてきた. 現在でもその性質は謎めいているといってよいが, 強非周期性の証明において自己相似構造を強制するために決定的な役割を果たすことが知られている.

驚くべきことに, 今まで知られている強非周期タイル集合でアンマン棒の描けるものについては, 平行に隣り合うアンマン棒のなす廊下の間隔は二種からなり, スツルム語となっている. これは強非周期タイルの研究では初期から観察されている事実である ([5, Chapter10.6] を参照のこと). また前々節の Kari の構成もスツルム語を用いるが, Jeandel-Rao の最小ワントイルにも実は 2 倍 $2/3$ 倍ではなく黄金比をかける操作が出現する.

6 スミス帽, 幽霊, スミス亀

近年の話題として, 一元からなる強非周期タイル集合であるスミス帽, 幽霊 (スペクター) の発見がある. スミス帽 ([8]) は一元集合であり運動群は平面の合同変換群全体である. 一

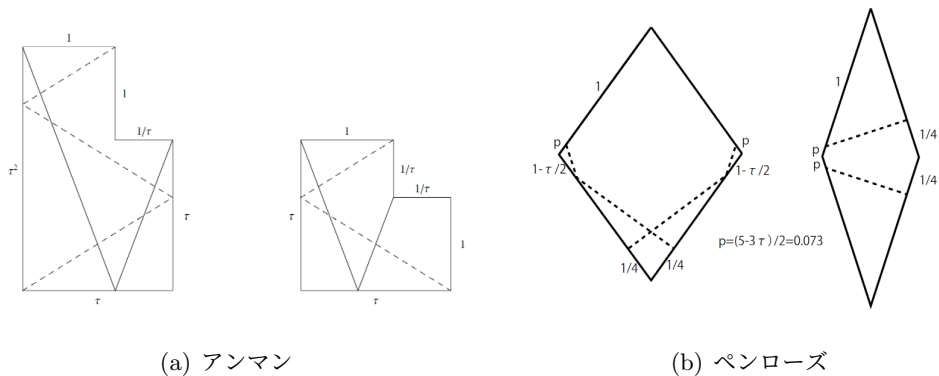


図 6: アンマン棒: 線が直線的につながることをマッチング規則とする.

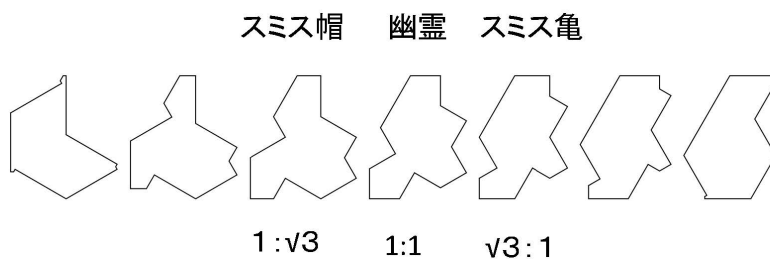


図 7: スミス帽, 幽霊, スミス亀の関係. 比 $1:\sqrt{3}$, $1:1$, $\sqrt{3}:1$.

方, 幽霊 ([9]) も一元集合だが運動群は裏返しを含まず平行移動と回転のみからなる. スミス帽は辺の比に関して 1-パラメータの変形を許す. 図 7 は変形の様子である.

スミス亀はスミス帽のパラメータ族に属するが, アンマン棒が引ける特によりものである. 図 8 はアンマン棒を描いたスミス亀によるタイル張りである.

証明の第一段階はタイル張りできることを示すことである. オリジナルの論文では置換規則が毎回少しずつ変化する手法で示されているが, 荒木義明氏との共同研究 [2] により, よりやさしい方法を 2025 年に発表した.

証明の鍵として, スツルム語に現れる回文が用いられる. 回文をパッチとして実現すると, そのパッチはほぼ点対称なものになる. この性質が, タイル張り可能性の構成に利用される. できあがったタイル張りに周期がないことを示すためにアンマン棒が役立つ. こ

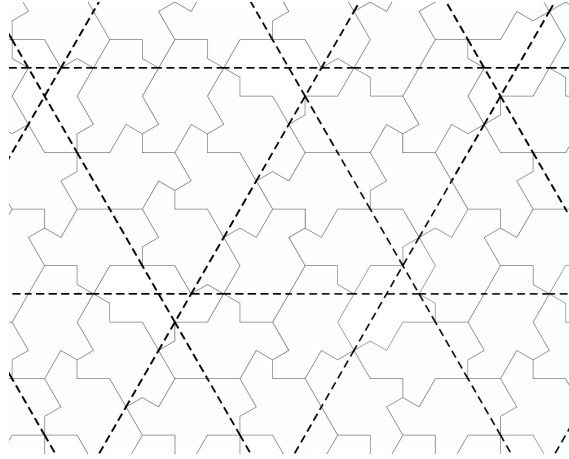


図 8: アンマン棒は直線状につながる

のアンマン棒は、前節の例とは異なり非周期性を強制する役割はない。タイル張りができるとすれば必然的に直線状につながることが示される。しかし非周期性を証明するときの補助構造として機能する。

出来上がったタイル張りの非周期性の証明のアイデアは、表と裏のアンマン棒の長さの比が $1:4$ であることにある。異なる傾きの二つの直線群を固定すると、アンマン棒の交わりと裏タイルが一對一に対応する。さらに、アンマン棒の生ずる自然な頻度が定義でき

$$\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

となる。この頻度は周期的タイル張りであれば有理数でなければならないため、周期が存在しない。

7 スツルム格子

以上の例を踏まえると、アンマン棒やスツルム語に共通する構造を公理化したくなる。そこで「スツルム格子」なるものを定義する。ここでは概略を述べるが、それは三つの平行直線群からなり、互いに 120° 回転した方向をもつ。二直線が交わると他方向の直線はこの交点のすぐ近くを通過して小正三角形をなす。この小正三角形は二直線の交点に対して一意的に決まりすべて合同である。これを数学的に定式化したのがスツルム格子である。図 9 を見よ。このように定義すると様々な興味深い性質を導くことができ、完全に分類することができる。スツルム格子にも傾き α が定義できる。傾きが無理数の時には廊下幅は二つあってスツルム語に対応する。

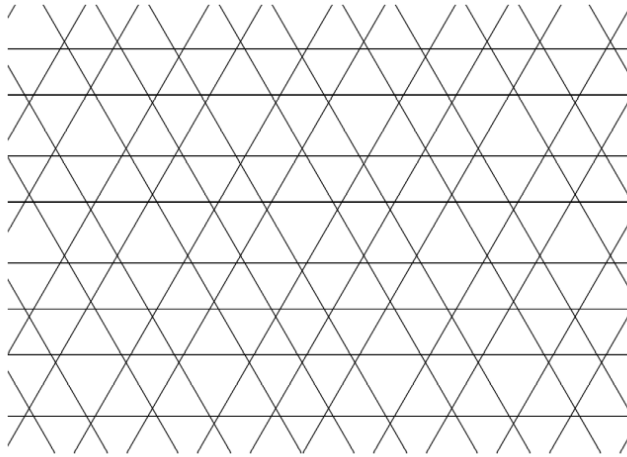


図 9: スツルム格子

定理 2 (秋山・浜田・伊藤 [3]). スツルム格子の傾きが無理数のとき, 3 方向とも同じ傾きのスツルム語に対応する. さらに, 切片 ρ_1, ρ_2, ρ_3 の和が整数ならば, 傾き α の 3 つのスツルム語によりスツルム格子を構成できる. 和が整数でなければスツルム格子にはならない.

定理 2 は, スツルム格子の構造を 3 方向のスツルム語に分解して理解できることを示している. スツルム語は一次元の非周期構造であるが, スツルム格子ではそれが複数方向に組み合わされる. その際, 切片の和が整数であるという条件が, 三つの方向を矛盾なく貼り合わせるための整合条件として現れる.

8 実二次無理数からの構成

さらに面白いことにスツルム格子から強非周期タイル集合を構成できる. スツルム格子から小三角形を全て取り除き, 残された線分に関するボロノイ分割を考えるとボロノイ胞は大中小の 3 種類に分かれる.

定理 3 (秋山・浜田・伊藤 [3]). $(0, 1)$ 内の任意の実二次無理数について, その傾きのスツルム格子からできるボロノイ胞タイルに組み替えて, その上にアンマン棒を描けばボロノイ胞の有限個の合併で作られた強非周期タイル集合を作ることができる.

構成の鍵はスツルム格子であり, これをアンマン棒として採用する. このアンマン棒にはオリジナルと同様のマッチング規則を与える. タイル張りに周期があると仮定すると, アンマン棒の配置に周期が現れるはずである. しかし, アンマン棒がスツルム語的な無理数

傾きを反映していれば，そのような周期性は許されない．したがって，このような無理数傾きのスツルム語を強制すればよい．そのためには，大中小のボロノイ胞タイトルの頻度を制御するのである．定理 3 の証明の鍵は，準結晶の研究で用いられる Delone 集合の bounded displacement 同値という考え方である．この考え方が頻度の制御のために効果的に用いられる．

この構成は，いままで知られている強非周期性の証明と比較すると論理的に平易である．傾きとして実二次無理数を指定したときに，対応するスツルム格子とボロノイ胞タイトルから強非周期タイトル集合を作るアルゴリズムを与える．図 10 はそのような考察で作られた例の一つである．

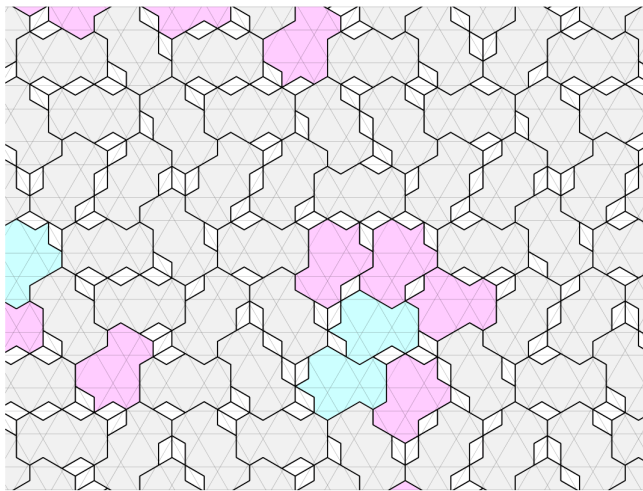


図 10: スツルム格子を用いた強非周期タイトル集合によるタイトル張り．

9 おわりに

強非周期タイトル集合の発見の歴史の特徴は，数学の非専門家の寄与が非常に大きいことである．アンマン，スミスは本稿で述べたが他にも，驚くような歴史的な発見はアマチュアによることが多い．広く知られていないかもしれないがスミス帽以前に一元からなる強非周期タイトル集合は見つかっており，テイラー・ソコラタイトルと呼ばれている．この発見者のテイラーも数学者ではない．

強非周期タイトル集合は，平面を埋め尽くすことができるにもかかわらず，どのタイトル張りにも周期が現れないという，一見相反する二つの性質を同時に満たす対象である．ワンタイトルではマッチング規則と数の入出力が，アンマンタイトルやペンローズタイトルでは置換

規則とアンマン棒が、スミス亀では回文パッチとアンマン棒の頻度が、強非周期性の証明に非予定調和的に現れる。

これらの例に共通するのは、局所的な規則が大域的な構造を強制するという点である。タイルの辺の色、凹凸、補助線、置換規則はいずれも局所的な情報であるが、それらが無限平面全体の配置を制御し、周期的な繰り返しを排除する。スツルム語やスツルム格子は、そのような局所規則と無理数的な非周期構造を結びつける言葉を与えている。しかしこれらはなぜ現れたのだろうか？ その突然の出現は不思議な印象を人々に与える。

スツルム格子による構成は実二次無理数の傾きから得られる強非周期タイル集合の構成を、より見通しよく記述する。しかしこれは数学者好みの一般化と予定調和であって、真の独創性とは異なる方向かもしれない。

AIは進歩し、そのパターン認識と模倣の技術は人間の「独創性」とは何かを問いかけている。強非周期タイル集合の歴史をみると、毎回異なるアイデアが何もないところから突然現れ人々を驚かせる。タイル張りの数学は、この独創性に関する問いに対する一つの示唆を与えているのかもしれない。

この原稿をまとめるにあたり、共同研究を進めている筑波大学博士課程の浜田忠久氏、伊藤克樹氏に詳しい指摘をいただきました。お礼を申し上げます。

参考文献

- [1] S. Akiyama. A note on aperiodic Ammann tiles. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 48, No. 3, pp. 702–710, 2012.
- [2] S Akiyama and Y Araki. An Alternative Proof for an Aperiodic Monotile. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 74, No. 3, pp. 771–792, 2025.
- [3] S Akiyama, T. Hamada, and K. Ito. Sturmian lattices and aperiodic tile sets. *arXiv:2506.19362*.
- [4] コリン・アダムズ著（秋山訳）タイル張りの数学入門 丸善出版 2026
- [5] B. Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- [6] E. Jeandel and M. Rao. An aperiodic set of 11 Wang tiles. *Adv. Comb.*, 2021:1, 37pp.
- [7] J. Kari. A small aperiodic set of Wang tiles. *Discrete Math.*, Vol. 160, No. 1-3, pp. 259–264, 1996.

- [8] D. Smith, J. S. Myers, C. S. Kaplan, and C. Goodman-Strauss. An aperiodic monotile. *Combinatorial Theory*, Vol. 4-1, 2024.
- [9] D. Smith, J. S. Myers, C. S. Kaplan, and C. Goodman-Strauss. A chiral aperiodic monotile. *Combinatorial Theory*, Vol. 4-2, 2024.