

2002年度代数学賞

栗原将人氏「岩澤理論の研究」

栗原氏は高次元局所類体論，代数的整数論，岩澤理論などを研究していますが，とりわけ岩澤理論においてすばらしい成果をあげていることが評価されました。

よく知られているように，代数関数体からは自然にヤコビ多様体が構成され，因子類群を完全に記述します．岩澤健吉氏は1950年代の半ば以来，代数関数体のヤコビ多様体にあたるものが代数体に対してもあるべきだ，という問題意識から， Z_p 拡大（代数体の無限次ガロア拡大で，そのガロア群が p 進整数環 Z_p と同型になるもの）の研究を開始，「岩澤の類数公式」をはじめとする深遠な理論（岩澤理論は現代整数論におけるもっとも重要な理論のひとつです）を展開するなかで「代数的に定義される p 進ゼータ関数」と「 p 進解析的に定義されるゼータ関数」との不思議な関係を予見しました．具体的には「アーベル体の円分的 Z_p 拡大をとって，ガロア群をイデアル類群の p 成分に作用させたとき，その特性イデアルは久保田-Leopoldt の p 進 L 関数で生成されるであろう」というもので，岩澤主予想と呼ばれ，1984年 B. Mazur と A. Wiles により解決されます．

岩澤の主予想に出てくる特性イデアル類はイデアル類群の0次の Fitting ideal ですが，このような Fitting ideal について，栗原氏は岩澤主予想をさらに精密化した予想を定式化して，いくつかの重要な場合には実際に成立することを示しています．また，高次の Fitting ideals についても氏は新しい予想を提出し，ある場合にはこの予想も成り立つことを確かめました．氏は岩澤主予想の精密化に成功するとともに，高次の Fitting ideals と p 進 L 関数の関係にも新しい光を当てたこととなります．

一方，岩澤理論における未解決の問題として「総実な体については，円分 Z_p 拡大の岩澤不変量は消えるだろう」という R. Greenberg の予想があります．この予想に関連して栗原氏は「有理数体 Q の最大アーベル拡大のイデアル類群は巨大な無限生成群であるのに，その最大実部分体においてはイデアル類群が消えてしまう」ことを証明しました．この結果は専門家の誰もが予想しなかった驚くべき結果であり，総実な体とそれ以外の体の違いを際立たせるものです．

さてイデアル類群の理論である本来の岩澤理論の自然な拡張として，楕円曲線の Tate-Shafarevich 群の岩澤理論を作ろうというのはきわめて自然な問題意識でしょう．代数体 k 上定義された楕円曲線 E について， k の円分的 Z_p 拡大をとり，その p^n 次中間体における Tate-Shafarevich 群の位数を $p_n^e g_n$ ， $(p, g_n) = 1$ とおいて，この e_n を計算することを考えます． E が p の上のすべての素点で ordinary reduction を持つ場合には，若干の条件を仮定すると岩澤氏の類数公式と同一の形をした公式

$$e_n = n\lambda + p^n\mu + \nu, \quad n \gg 0$$

(λ, μ は適当な非負整数, ν は整数) が成り立つことが知られていました (B. Mazur).
しかし “ordinary” の条件は本質的で, この仮定をはずすとまったく何もわからない状況
だったのです.

これに対し栗原氏は, 楕円曲線 E が modular で (有理数体上定義されていれば E は
modular です) p で supersingular reduction を持つ場合に e_n を計算し, とくに L 関数の
1 での値 $L(1, E)$ と周期 $\Omega(E)$ との比が素数 $p \neq 2$ で割り切れないとの仮定のもとでは,

$$e_n = [n\lambda + p^n\mu], \quad \lambda = -1/2, \quad \mu = p/(p^2 - 1), \quad n \gg 0.$$

が成立することを証明しました (ただし, $[*]$ は Gauss の記号). 栗原氏の公式で不変
量として分数が現れることは, 従来 of 公式にはなかった新しい現象であり, 岩澤理論に
新局面をもたらした成果といえるでしょう.