2006年度代数学賞

花村昌樹氏「混合モチーフの理論の構成」

「モチーフ」を一言で述べるなら，代数多様体全体のなす圏から加法的な圏を自然に構成し，そこにおいてホモロジー代数を展開し，代数多様体の様々なコホモロジー理論の背後にある普遍的コホモロジー理論を見出すこと，ということになるでしょう．

モチーフのアイデアは1970年代の Grothendieck にさかのぼります．彼は Weil 予想を解決するためエタールコホモロジー理論を開発し，有限体上の多様体の合同ゼータ関数を，エタールコホモロジーへのフロベニウス作用の固有多項式で表示しました．Weil 予想で残された部分，すなわちフロベニウス作用の固有値の絶対値に関する予想を解決するアイデアとして，モチーフの概念が登場したのでした．Weil 予想自体は Deligne が別の方法で解決しましたが，Grothendieck のモチーフの哲学は，Deligne の混合 Hodge 構造理論で導入された weight の概念と融合して,「混合モチーフ」の概念へと発展したのです.

少し専門的になりますが，Grothendieck の純モチーフと混合モチーフの違いを説明したいと思います.

基礎体 k を固定しておきます．k 上の射影的かつ非特異な多様体に対して定義される種々のコホモロジー理論（Weil コホモロジー理論）の背後に共通原理として潜むものが Grothendieck の k モチーフの圏 $\mathcal{M}_k$ です．彼は,「標準予想」を仮定すると，$\mathcal{M}_k$ が存在して半単純なアーベル圏をなすことを示しました．一方，射影的とも非特異とも限らない一般の多様体の一般コホモロジー理論についても，その共通原理として混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}_k$ があると予想されました．$\mathcal{MM}_k$ は $\mathcal{M}_k$ を含む圏ですが，半単純な圏ではありません．半単純でないことから，$\mathcal{MM}_k$ においては Ext など，非自明なホモロジー代数理論が展開されます．実際 k 上の多様体 X のモチヴィックコホモロジー $H^n_M(X,\mathbb{Z}(r))$ を $\mathcal{MM}_k$ における高次 Ext 群（$\mathcal{MM}_k$ の導来圏における射の空間）として定義すると，これが k 上の多様体の普遍的なコホモロジー理論を与えることが期待されました．S. Bloch は，多様体 X の代数的サイクルや Chow 群 $CH^r(X)$ を一般化して，高次サイクルや高次 Chow 群 $CH^r(X,q)$ を導入するとともに，高次 Chow 群と代数的 K 群の関係を明らかにしました．Bloch の仕事は，滑らかな多様体 X に対するモチヴィックコホモロジーと高次 Chow 群との間の等式 $H^n_M(X,\mathbb{Z}(r)) = CH^r(X,2r-n)$ を強く示唆するもので，これがその後の $\mathcal{MM}_k$ の構成の道標となりました．この等式は，多様体 X のモチヴィックコホモロジーが数論的にも重要な不変量であることを示します．その理由は，数論的多様体（有限体や代数体上定義された多様体）のゼータ関数の整数点における零点の位数や，そこでの冪級数展開の最初の係数を予想する公式（Tate 予想，Birch–Swinnerton 予想，Lichtenbaum 予想，Beilinson 予想，Bloch–Kato

予想）においては，代数的 K 群や Bloch の高次 Chow 群が基本的な役割を果たすからです.

混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}_k$ の圏の構成はこのように代数幾何学・数論幾何学における基本的課題ですが，花村氏はこの構成問題に本質的な貢献を行ないました．k 上の混合モチーフの圏 $\mathcal{MM}_k$ それ自身が存在するかはまだ不明ですが，花村氏は $\mathcal{MM}_k$ の導来圏に相当するはずの圏 $\mathcal{DM}_k$ と，k 上の多様体 X に付随する混合モチーフと呼ぶべき対象 $M(X) \in \mathcal{DM}_k$ を構成し，これらを用いて，非特異な多様体 X に対する公式

$$CH^r(X, 2r-n) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{DM}_k}(M(\mathrm{Spec}(k)), M(X)(r)[n])$$

を証明したのです．この公式は Bloch の高次 Chow 群を，モチヴィックコホモロジー，つまり $\mathcal{DM}_k$ における射の空間として表現しています．また $\mathcal{DM}_k$ の t-構造に関するいくつかの予想を仮定すると，$\mathcal{MM}_k$ に相当する部分圏を取り出すことも可能となります.

花村氏とは独立に，Voevodsky と Levine もそれぞれ同様の性質をもつ圏の構成を行っていますが，方法はまったく異なります.（Voevodsky と Levine の構成した圏が同値であることはすでにわかっていましたが，花村氏は自身の構成した圏と彼らの圏が同値であることを示しました)．花村氏の $\mathcal{DM}_k$ の構成は,「$\mathcal{DM}_k$ の対象とは，射影的で滑らかな多様体に付随するモチーフの “複体”である」という自然な着想に基づいています. 具体的には，Deligne がその混合 Hodge 構造の理論において用いた hypercovering を改良した cubical hyperresolution の手法と “複体”概念を一般化することにより対象を構成しているのです．多少単純化すると，$\mathcal{DM}_k$ の対象はデータ $(K^m, f^{m,n})$ です．ここで $K^m = \bigoplus_{\alpha \in I(m)} (X_\alpha, r_\alpha)$ は適当な集合 $I(m)$ で添字付けられた非特異射影多様体 X_α と Tate twist に対応する整数 r_α の組で，$f^{m,n} = (f^{m,n}_{\alpha,\beta})$ は K^m から K^n への “境界写像”で、$X_\alpha \times_k X_\beta$ 上の Bloch の高次サイクルにより与えられます．境界写像 $K^m \to K^n$ が $n = m \pm 1$ の場合のみにある通常の複体概念を拡張しているわけです.

以上の構成は Bloch の高次 Chow 群をホモロジー代数的に扱うことを可能とします. これは少なからぬ利点で，たとえば花村氏自らこの理論を用いて，Goresky–MacPherson の交叉コホモロジーの理論を “交叉 Chow 群”あるいは ‘交叉高次 Chow 群”の理論へと発展させています．また花村氏は氏の混合モチーフ理論を更に発展させ，パラメータ付混合モチーフともいうべき「混合モチーフ層」の理論を構築しつつあります．多様体 X 上の混合モチーフ層の圏 $\mathcal{MM}(X)$ は，X 上の Perverse 層の圏や Hodge 加群の圏の共通原理としてその存在が期待されているものであって，$X = \mathrm{Spec}(k)$ の場合の $\mathcal{MM}(X)$ が上述の $\mathcal{MM}_k$ にほかなりません．$\mathcal{MM}(X)$ の構成はまだ未完成で，花村理論の今後の発展が期待されます.

モチヴィックコホモロジーは代数幾何学および数論幾何学において重要な役割を担う研究対象であり，花村氏の仕事はこの分野に大きな実りをもたらすものと期待されます. 氏の業績は国際的にも高い評価を受けており，代数学賞受賞にふさわしいものです.