2011 年代数学賞　石井志保子氏
「特異点とアーク空間の研究」

石井志保子氏は，日本を代表する特異点理論研究者として国際的に広く知られています。特異点理論は伝統的に局所環理論から研究されていたわけですが，そこへ大域双有理幾何の視点を組織的に導入した点で，氏の理論は画期的なものといえます。

氏の初期における代表的な業績は，渡辺公夫氏が導入した「多重種数」と「小平次元」による孤立特異点の分類理論です。

正規孤立特異点 (X,x) に対してその特異点解消 $(\tilde{X},E)$ を x の逆像 E が単純正規交差因子となるように選び（ログ特異点解消），

$$\delta_m = \dim \frac{H^0(\tilde{X}\setminus E,\ \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}))}{H^0(\tilde{X},\mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E))}$$

を (X,x) の m 種数と定義します。分子は非特異部分 $X\setminus x$ 上の多重微分形式の空間，分母はそのうち L^2 可積分なものが作る部分空間なので，どちらも特異点解消によらず，したがって m 種数は特異点の内在的不変量です。また $m\to+\infty$ のときの δ_m の漸近挙動によって小平次元 κ が定義されます（渡辺）。２次元の場合だと，$\kappa=-\infty$ であること，有理特異点であること，商特異点であること，この３つが同値であり，また $\kappa=0$ は楕円特異点です。大域双有理幾何の場合と同様に孤立特異点においても，小平次元が $-\infty, 0,$ あるいは空間次元 n と一致する特異点が基本的要素となり，低次元ならば $\kappa=-\infty,0$ となる特異点の分類が可能です。ただ $\kappa=n-1$ が起こらないのは，大域双有理幾何と大きく違う点です。

孤立特異点の分類について石井氏は，Du Bois 特異点であるという Hodge 構造的条件と $\kappa\le 0$ という幾何学的条件との同値性 [1] や，平坦変形における多重種数の上半連続性 [2] といった，基本的結果を証明しました。石井氏の 90 年代前半までにおける一連の業績は，猿橋賞を受賞するなど内外から高い評価を得ており，その主要部は大学院向け教科書『特異点入門』（シュプリンガー東京，1997）に整理出版されています。なおこの教科書出版の後になりますが，３次元狭義ログ標準特異点の指数の上限を決定した論文 [3] は，上記一連の仕事の続編として，大域的高次元分類理論にも影響を与えた先駆的かつ重要な成果でした。

さて２１世紀に入ると，石井氏はアーク空間の研究に着手しました。

複素直線 $\mathbb{C}$ の原点 0 の形式近傍から複素代数多様体 X への正則写像(代数的には X の正則関数の層 $\mathcal{O}_X$ から形式的べき級数環 $\mathbb{C}[[z]]$ への $\mathbb{C}$ 代数としての準同型）を X 上のアークとよび，このようなアーク全体が作る空間 $\mathrm{Arc}(X)$ を X のアーク空間と呼びます。アーク f に $f(0)$ を対応させることによって，全射 $\pi\colon \mathrm{Arc}(X) \to X$ が定まります。X が n 次元非特異で $x_1, \ldots, x_n$ がその局所座標ならば，対応 $f \mapsto (f^*x_1, \ldots, f^*x_n)$ によって，π のファイバーは無限次元アフィン空間 $(z\mathbb{C}[[z]])^{\oplus n}$ に過ぎません。しかし X が特異点をもつ場合，アーク空間の構造は格段に複雑となりよくわからないことが多いのです。

1968 年の論文で J. F. Nash は，次のような考察を行いました。正規代数多様体 X の特異点集合を Y とします。Y を通る X のアーク全体 $\mathrm{Arc}(X, Y)$ は X のアーク空間 $\mathrm{Arc}(X)$ の閉部分集合で，$\mathrm{Arc}(Y) \subset \mathrm{Arc}(X, Y) \subset \mathrm{Arc}(X)$ が当然なりたちます。ログ特異点解消 $\mu : \tilde{X} \to X$ を，$\mu^{-1}(Y)$ をとり，$E_1, \ldots, E_n \subset \tilde{X}$ を μ の例外因子の既約成分とします。$\tilde{X}$ 上のアーク f は射影 μ と合成することによって X 上のアークを定めるので，自然な写像 $\mathrm{Arc}(\tilde{X}) \to \mathrm{Arc}(X)$ があり，$\mathrm{Arc}(X, Y)$ の逆像は $E_1, \ldots, E_n$ のいずれかを通るアークの集合 $\mathrm{Arc}(\tilde{X}, E_1) \cup \cdots \cup \mathrm{Arc}(\tilde{X}, E_n)$ となります。逆に $\mathrm{Arc}(X, Y) \setminus \mathrm{Arc}(Y)$ の元は自然に $\mathrm{Arc}(\tilde{X})$ に持ち上がりますから，$\mathrm{Arc}(X, Y)$ の一つ一つの既約成分は $\mathrm{Arc}(X, E_i)$ のいずれかひとつに含まれます。このようにして $\mathrm{Arc}(X, Y)$ の既約成分が作る集合 I から，ログ特異点解消に現れる例外因子の成分が作る集合への写像ができます。実際には特異点解消は無数にあり，むだなブローアップをしてできる因子などは意味がないので，非本質的なものをすべて除いた本質的成分（本質的例外因子）の集合 J (曲面特異点の場合，J は極小特異点解消における例外曲線の集合）を考えることにより，(X, Y) から標準的に Nash 写像 $I \to J$ が定まることになります。この写像は実は単射です。

以上の考察のもとに，Nash は「Nash 写像は全単射か？」という問題を提出し，(X, Y) が 曲面上の A 型有理二重点ならば実際全単射であることを示しました。この問題は一見易しそうですが，実際は曲面の場合ですら難問です。

J. Kollár との共著 [4] において，石井氏は Nash の問題についてきわめて重要な結果を発表しました。それは

a) (X, Y) がトーリックなら Nash 写像は全射である。

b) ４次元の孤立特異点 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^6 = 0$ について，$\mathrm{Arc}(X, 0)$ は既約であるが，その本質的例外因子は２個ある 。特に Nash 写像

は全射でない。

というものです。この論文はある意味決定的な成果ですけれども，２次元３次元の特異点については Nash の問題はなお未解決のままです。

[4] の発表後も，石井氏は上記成果を，さまざまな場合に拡張しました。たとえば解析的局所 pretoric 多様体の場合もトーリックと同様に Nash 写像の全射性が成り立ちます [5]。また [6] では Ein-Lazarsfeld-Mustata の結果を一般化して，代数多様体 X のアーク空間の既約閉集合全体がつくる集合から，関数体 $\mathbb{C}(X)$ の因子的付値全体の集合への全射を定義し，これを用いることで因子的付値についてのある種の有限性定理を示しています。

以上のように，石井氏は多重種数やまたトーリック幾何といった大域的手法を駆使して特異点の本質に迫る研究を息長く続けています。特にアーク空間についての最近の研究ははきわめてインパクトが高く，代数学賞を受賞するにふさわしい業績です。

文献

1. S. Ishii, *On isolated Gorenstein singularities*, Math. Ann. **270** (1985), 541 – 554.

2. S. Ishii, *Small deformations of normal singularities*, Math. Ann. **275** (1986), 139 – 148.

3. S. Ishii, *The quotients of log-canonical singularities by finite groups*, Adv. Studies Pure Mth. **29** (2000), 135 – 161.

4. S. Ishii and J. Kollár, *The Nash problem on arc families of singularities*, Duke Math. J. **120** (2003), 601 – 620.

5. S. Ishii, *The local Nash problem on arc families of singularities*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), 1207 – 1224.

6. T. de Fernex, L. Ein and S. Ishii, *Divisorial valuations via arcs*, Publ Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), 425 – 428.