

## 藏野和彦氏 「局所環上の交点理論と Cohen-Macaulay 加群論への応用」

藏野和彦氏は、可換環論を主として研究されていて、可換環論、代数幾何学の様々な分野で大変顕著な業績を挙げています。

藏野氏の代表的な業績としては、可換環上の交点理論、特に Riemann-Roch 理論を可換環論へ応用して興味深い成果を得て、現象の理由を説明できるようにしたことです。

Riemann-Roch の定理は代数幾何学で大変重要な理論ですが、一般の可換環に適用するためには特異点のある scheme 上で成立する必要があります。この理論は 1970 年代に Baum-Fulton-MacPherson によって見出され、scheme 上の接続層の  $K$ -群と Chow 群の間の自然な同型射  $\tau$  の存在を保証しており、scheme にほとんど何の仮定もなく成立します。

この特異点を許した Riemann-Roch 理論は 1980 年代に Paul Roberts によって可換環論に導入され、可換環論の大問題であった「消滅定理」を肯定的に解決しました。

これ以後しばらくは交点理論は、可換環論では使われていなかったのですが、Riemann-Roch 理論を可換環論の別の問題に対して適用してその有用性を再認識したことが、藏野氏の顕著な業績です。

藏野氏は局所環上の有限生成加群の  $K$ -群に対し、長さ<sup>1</sup>と射影次元が有限な加群との  $\text{tor}$  の長さの交代和というペアリングを考えることにより「数値的同値」の概念を定義し、数値的同値で割ると有限生成加群の  $K$ -群は格子になることを示しました。代数幾何学で、サイクルの数値的同値の概念は大変重要ですが、この概念を導入することにより、可換環論でも「数値的同値」が使えるようになったわけです。

数値的同値で割った格子に実数体をテンソルして、その中の positive element で生成される錐は、代数幾何学では ample cone に対応するものです。局所環上のペアリングの場合、極大コーエン・マコーレー加群 (MCM) が positive element の役割を果たすと考えられます。このようにして Riemann-Roch 理論と MCM の表現論とのつながりが見えてきました。

藏野氏は Kansas 大の H. Dao 氏との共同研究で、コーエン・マコーレー錐 (MCM で張られる錐) は原点で真に尖っていることを証明しました。このことから任意の自然数  $r$  に対して、階数  $r$  の MCM が存在する領域は、有限次  $\mathbf{R}$  ベクトル空間の中の有界集合であることを証明し、階数  $r$  の MCM は数値的同値で割ると有限個であることを示しました。特に、3次元の孤立特異点をもつ超曲面で階数 1 の MCM 加群の同型類は有限個であることを示しました<sup>1</sup>。因子類群の中で、MCM イデアルは単位元 (環自身) の付近にかたまっていって出てくるという現象を、コーエン・マコーレー錐を見ることによって説明できたとと言えます。

<sup>1</sup> 4次元以上の孤立特異点をもつ完全交叉は UFD なので、階数 1 の MCM 加群は自由加群です。

また、藏野氏は局所環上の有限生成加群の  $K$ -群と Chow 群の間の自然な同型射  $\tau$  を詳しく解析しました。  $\tau$  は、局所環を正則局所環の像に書いて定義されます。  $\tau$  がその正則局所環のとり方によって変わる例があるのかは、現在においても未解決問題です。完備化によって有限生成加群の  $K$ -群の間に誘導される射の核が torsion であれば、  $\tau$  はその正則局所環のとり方に依らないことがわかります。この問題に関して、孤立特異点であれば完備化によって誘導される有限生成加群の  $K$ -群の射は単射であること<sup>2</sup>、しかし  $K$ -群の間の射の核が torsion でない例の存在<sup>3</sup>を示しました。P. Roberts が証明した完全交叉の場合の消滅定理は、環  $A$  に対応する  $K$ -群の中のサイクル  $[A]$  が、  $\tau$  によって Chow 群内のサイクル  $[\text{Spec}A]$  に写ることが証明のキーですが、その性質を満たす環を「Roberts 環」と定義し、完全交叉以外にも非常に多くの Roberts 環があることを示しました。また射影多様体の Todd 類から局所環の  $\tau([A])$  を計算する方法を発見し、非常に多くの例を作ることが可能になり、例えば Gorenstein 環で Roberts 環でない例の存在などもわかりました。また、Hochster によって定義されたテータペアリングを用いて、UFD でない 3 次元の孤立特異点を持つ超曲面では、Dutta-Hochster-McLaughlin による一般化された消滅定理の反例の現象が必ず起こる<sup>4</sup>ことを証明しました。

藏野氏の業績は可換環論、代数幾何学の様々な分野にまたがっていますが、いくつかの例を挙げると、交点数の正值性予想と symbolic power の関係<sup>5</sup>、射影平面に関する永田予想と symbolic Rees 環の関係<sup>6</sup>、正規射影多様体の Cox 環 (multi section ring) が UFD になること<sup>7</sup>、Cox 環の標準因子の決定<sup>8</sup>、変数係数の交代行列の pfaffian で生成されたイデアルの自由分解に関する研究 (シジジーが標数によることの証明) などが挙げられます。このように藏野氏の業績は大変深く顕著で代数学賞に大変ふさわしいと云えます。

---

<sup>2</sup> 鴨井祐二 との共同研究

<sup>3</sup> V. Srinivas との共同研究

<sup>4</sup> H. Dao との共同研究

<sup>5</sup> P. Roberts との共同研究

<sup>6</sup> D. Cutkosky との共同研究

<sup>7</sup> J. Elizondo, 渡辺敬一との共同研究

<sup>8</sup> 橋本光靖との共同研究