佐藤周友氏「数論的スキームに対する新しいコホモロジー理論とその応用」

数論的スキームとは整数環上有限型なスキームのことで，代数体上の多様体 (たとえばモジュラー曲線) の整数環上のモデルなどがその典型的な例であり，数論幾何学においては重要な研究対象です．佐藤周友氏は，それ以前には存在しなかった数論的スキームに対するよいコホモロジー理論をエタールコホモロジー理論を用いて構成しました．また応用としては，数論的スキームのゼータ関数の特殊値問題や数論的スキームのモチフィックコホモロジーの研究に大きな貢献をもたらしました．

エタールコホモロジー理論は 1960 年代 Grothendieck が Weil 予想を解決するために開発したスキームのコホモロジー理論で数論幾何学の礎ともいえる重要な理論です．一般にスキーム X のエタールコホモロジーは,「コホモロジー群の係数が X の各点の剰余体の標数と素である」という条件のもとによい定義が存在していました．体 k 上の多様体を考える時には，コホモロジー群の係数が k の標数と互いに素であればよいわけです．ところが，たとえば X が整数環のスペクトラムとすると X の剰余体たちの標数として全ての素数が現れます．よって一般に数論的スキーム X に対する上述の条件が本質的な制約であることがわかります．以下素数 p を固定します．佐藤氏は p-進消滅サイクルに関して非常に深い研究を行うことにより，正則で半安定な還元をもつ数論的スキーム X に対する全く新しい p-進係数コホモロジー理論を構成し，(p が X の点の剰余体の標数と素でない状況においても) p が X の各点の剰余体の標数と素である場合と同様なよい性質を持つことを示しました．以下，この新しいコホモロジー理論を**佐藤コホモロジー**と呼ぶことにします．特に，佐藤コホモロジーに対する**コホモロジー群の有限性**と**ポアンカレ双対性**は重要な結果であります．これらの結果は，p-進消滅サイクルの精緻な計算に基づくもので，このような非常な技術的困難を克服した佐藤氏の力量には感服せざるを得ません．

次に佐藤コホモロジー理論の応用をいくつか述べます．佐藤コホモロジーの最初の応用として，数論的スキームのゼータ関数の特殊値 (つまり整数点での冪級数展開の最初のゼロでない係数) への応用が挙げられます．代数体の Dedekind ゼータ関数の $s = 0$ での特殊値を与える公式 (いわゆる類数公式) においては，代数体のイデアル類群や単数群が登場しますが，これらの数論的不変量は佐藤コホモロジーを用いて表すことができます．Dedekind ゼータ関数を一般化した数論的スキーム X のゼータ関数の特殊値に対しても，佐藤コホモロジーを用いて表示することが可能であると期待されています．実際，**X が代数体上の曲線の整数環上のモデルの場合は，*Bloch*-加藤の玉河数予想を認めるとこのような表示が可能である**ことが佐藤氏により示されています．数論的スキームのゼータ関数の特殊値に対しては Birch-Swinnerton 予想，Beilinson 予想，さらにこれらを精密化した Bloch-加藤の玉河数予想といった名高い予想が数論幾何学の中心的問題として存在しますが，佐藤氏のコホモロジーはこの問題に対して新たな展望を与えるものといえます．

次に佐藤コホモロジーの数論的スキームの**高次 *Chow* 群**への応用について説明します．高次 Chow 群は Bloch により定義されたスキームに付随する重要な不変量です．Chow 群

が最も基本的な例ですが，代数体のイデアル類群や単数群も数論的スキームの高次 Chow 群の特殊な例として見ることができます．これは高次 Chow 群が代数幾何のみならず整数論においても重要な役割を果たすべき存在であることを示唆しています．Bloch は，体上の滑らかな多様体にたいして高次 Chow 群が**モチフィックコホモロジー**に期待される性質を持つことを示しました．モチフィックコホモロジーを歴史の舞台に初めて登場させたのは Grothendieck です．代数多様体に付随する様々なコホモロジー理論の中で普遍的なコホモロジー理論が存在することを彼は想定しました．Beilinson がこれをより正確な予想として定式化して以来，モチフィックコホモロジー理論は数論幾何の中心的問題として世界的に活発な研究が行われてきました．

高次 Chow 群あるいはモチフィックコホモロジーが整数論においても非常に重要視される理由のひとつは，数論的スキームのゼータ関数の整数点での位数や特殊値をあらわす予想 (先述した Birch-Swinnerton 予想，Beilinson 予想，Bloch-加藤予想) においてモチフィックコホモロジーが基本的な役割を果たすことであります．これに関連するもうひとつの基本的な予想が次の高次 Chow 群にたいする有限性予想です．

予想：X を数論的スキームとすれば，その高次 Chow 群は有限生成である．

この予想は上述の数論的多様体のゼータ関数の特殊値の予想においても仮定されている数論幾何学の基本的な予想あります．予想が成り立つことが知られている基本的な例として，X を代数体の整数環としたとき，その高次 Chow 群としてその代数体のイデアル類群および単数群が現れます．よって上の予想は古典的整数論から知られているこれらの群の有限性定理の高次元スキームへの一般化であるといえます．最近までこの予想に対する肯定的な結果はこの例を除いて殆ど知られておりませんでした．

佐藤氏は，**数論的スキームの高次 *Chow* 群から佐藤コホモロジーへのサイクル写像**を定義しました．一方，先述したように佐藤氏は佐藤コホモロジーの有限性定理を示しています．よって佐藤氏のサイクル写像の同型が示されれば高次 Chow 群の有限性も得られます．これは今まで手がかりが殆どなかった高次 Chow 群の有限性予想への重要な貢献を与えるものです．実際，Jannsen 氏と斎藤秀司氏の共同研究により，ある条件の下で佐藤氏のサイクル写像が同型であることが示されています．

佐藤コホモロジーの構成は，Beilinson-Lichtenbaum による**モチフィック複体**（つまりそのコホモロジー群がモチフィックコホモロジーを与えるような Zariski 層の複体で，Bloch の高次 Chow 群を与えるサイクル複体を Zariski 層化したもの）を具体的に計算したいという動機によっています．実際，**佐藤氏のサイクル写像が，佐藤コホモロジーを定義するために佐藤氏が構成したエタール層の複体とモチフィック複体の p-進係数版のエタール層化の間の同型を導く**ことを佐藤氏は示しました．

総じていえば，佐藤氏の業績はモチフィックコホモロジー理論という哲学的指導原理に支えられ，p-進 Hodge 理論などの深い理論を駆使し，さらに強力な計算力に裏打ちされたものといえます．佐藤氏の業績は世界的にも高い評価を得ており，代数学賞を受賞するのに相応しいものであります．