オイラーがつなぐ生物たち

--八目鰻、ウロコムシ、カエル、アゲハチョウ・・・・・・--

日本数学会　市民講演会
2024年3月16日

奈良女子大学　岡数学研究所　松澤淳一

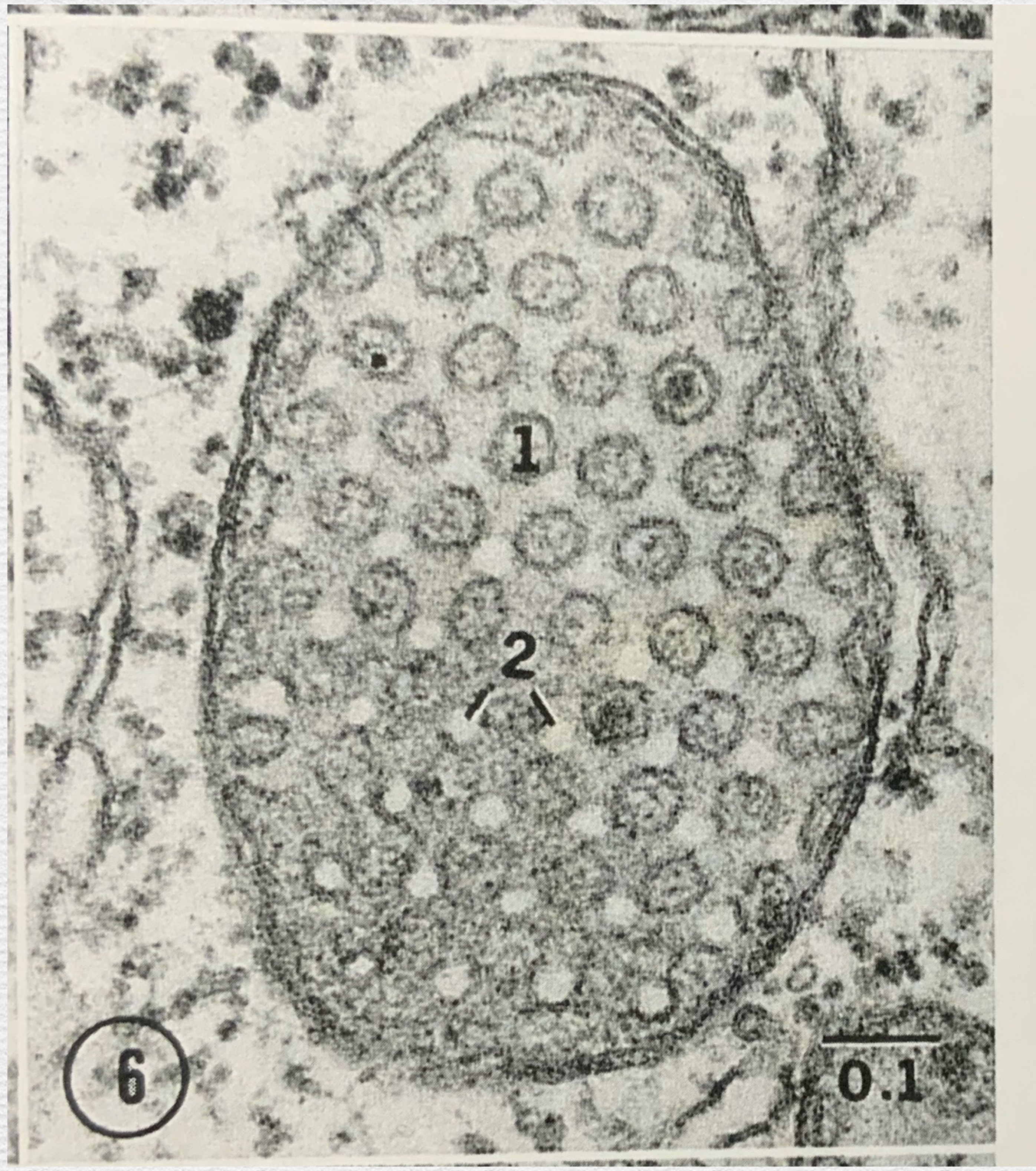
これからウロコムシ、カエルなどの写真が出ますので、

嫌いな方はご注意下さい。

アフリカツメガエル

Brian Gratwicke - Flickr: Xenopus laevis, CC 表示 2.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23752908による

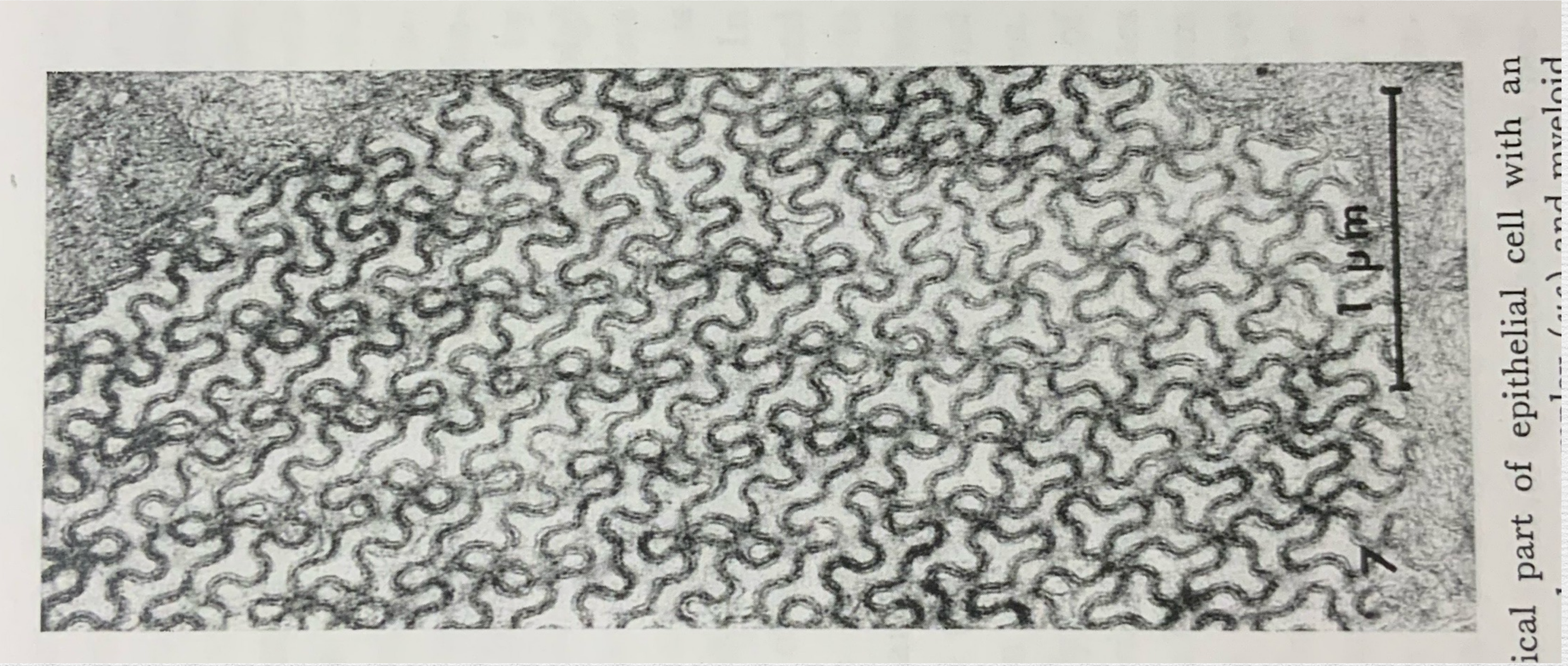
アフリカツメガエルのミトコンドリア



M. R. Kalt, The anatomical record, vol. 182(1) , pp53-60, 1975

ヤツメウナギ

ヤツメウナギの網膜色素細胞



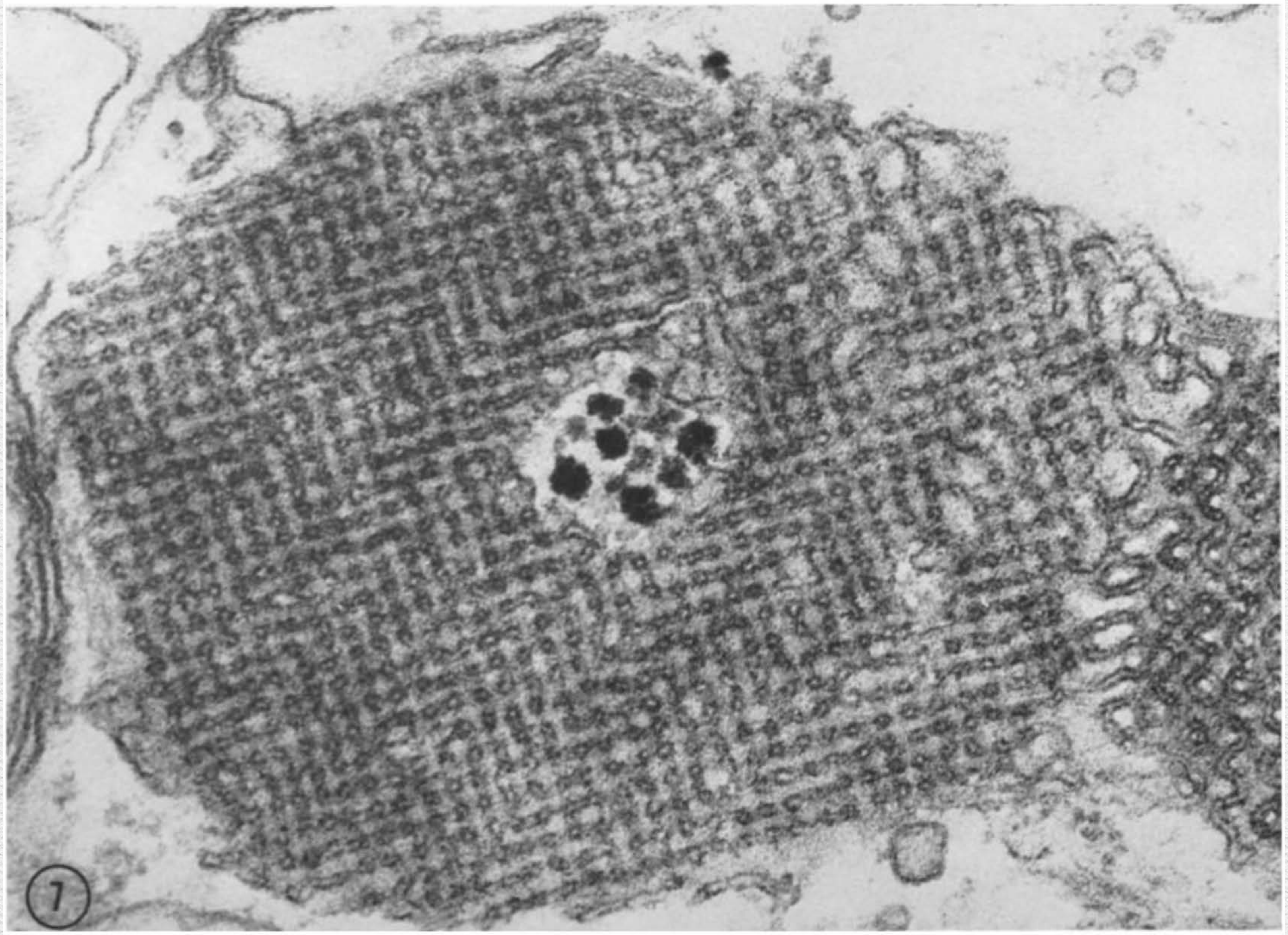
P.Öhman, Acta Zoologica, vol. 55(4), pp245-253, 1974

ウロコムシ(scaleworm)

Sus barbatus, CC BY-SA 4.0

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lepidonotus_oculatus_MV_F164625.png

ウロコムシの発光器



© 1966 J. M. Bassot, J.Vell Biol.,
https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2107038/pdf/135.pdf

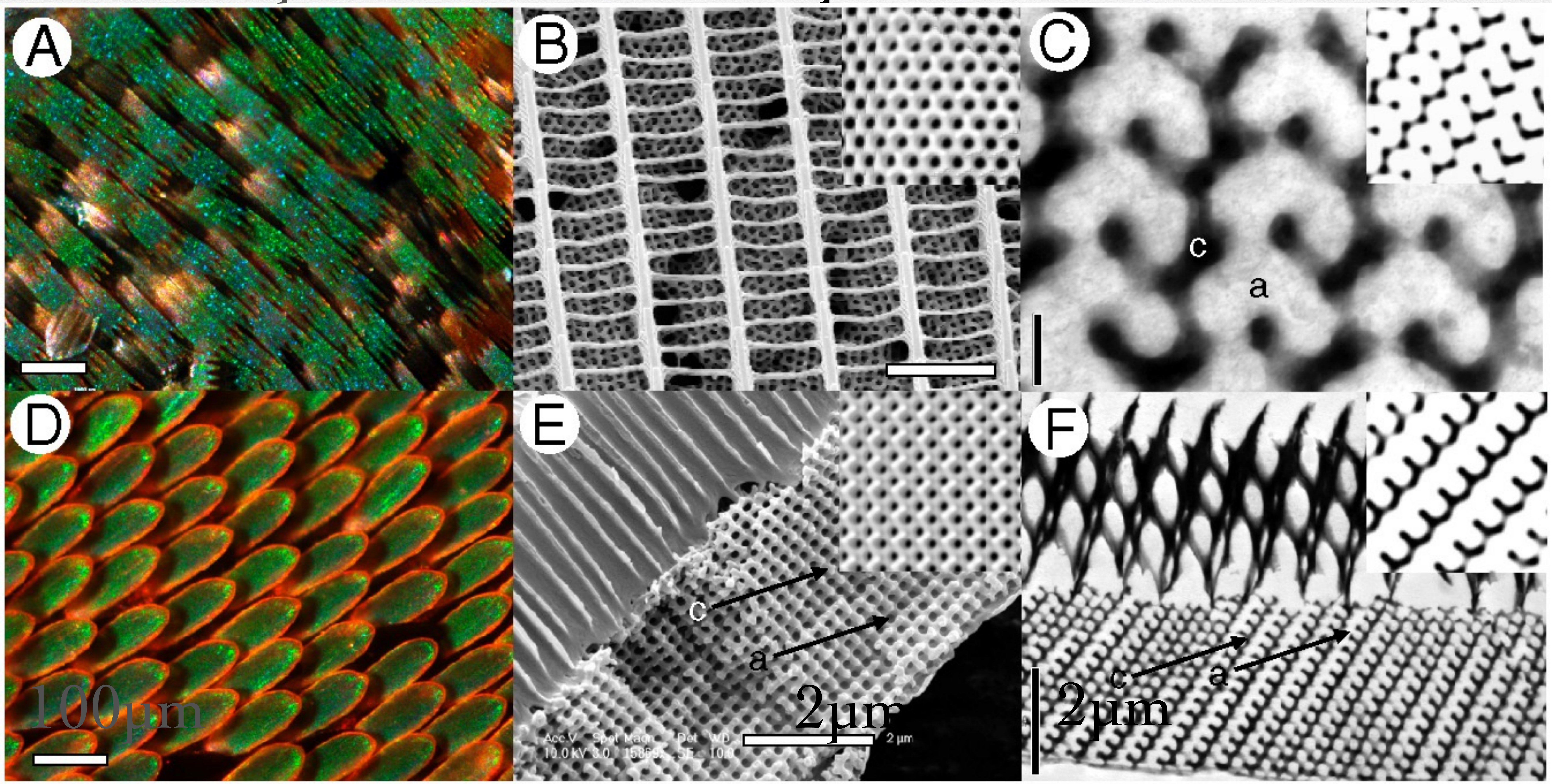
シジミチョウ(*Callophrys gryneus*)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Juniper_Hairstreak,_Megan_McCarty105.jpg

マエモンジャコウアゲハ (Pasides sesotris)

蝶の鱗粉　構造色

100μm　　2.5μm　　200nm



Saranathan et al.　PNAS | June 29, 2010 | vol. 107 | no. 26 | 11681

https://doi.org/10.1073/pnas.0909616107

いったいどんな立体構造なのだろうか？

Schwarzの極小曲面

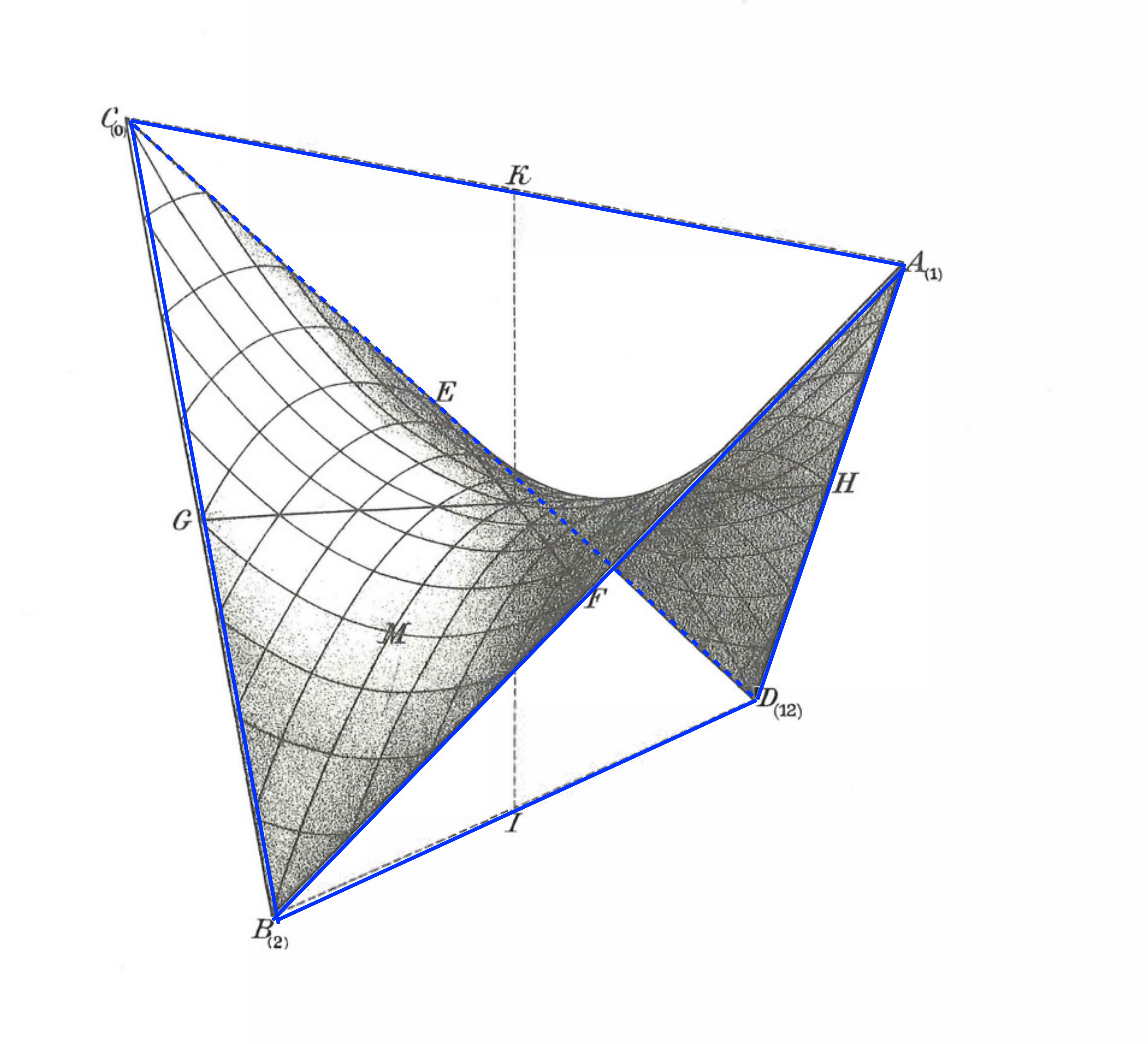
- H. A. Schwarz (1843 - 1921) ドイツの数学者
- 鏡像原理、Cauchy-Schwarzの不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

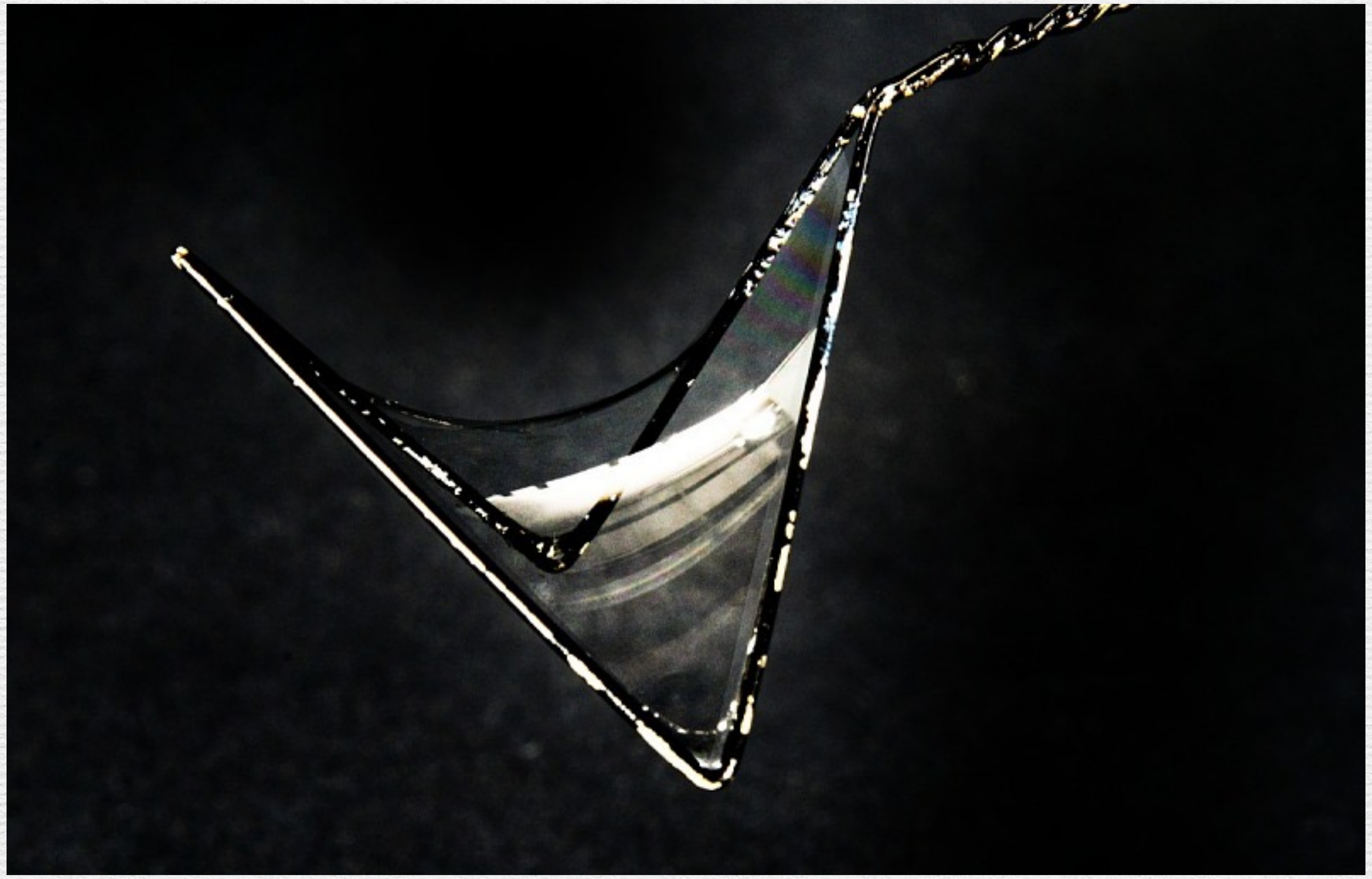
4つの角が60°の空間4辺形を境界とする極小曲面の決定

100ページの大論文(1867)

正4面体の4辺を辺とする極小曲面



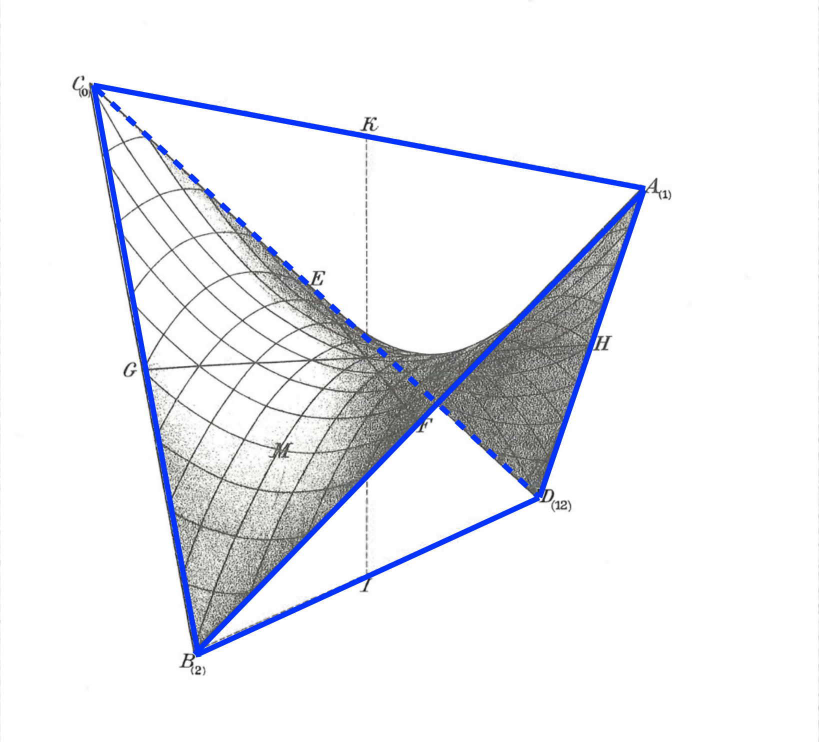
正四面体の4辺を枠とする石けん膜

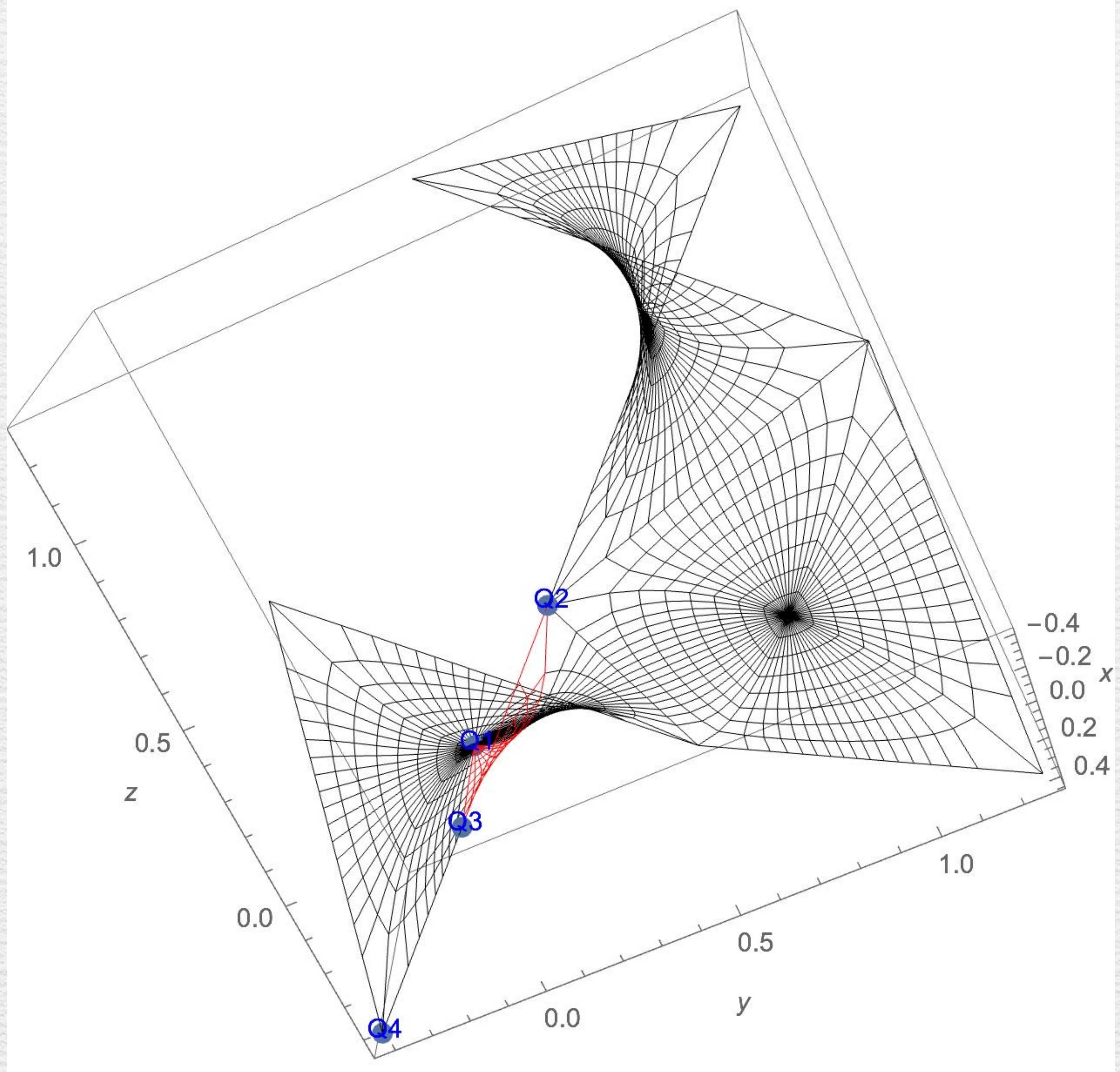


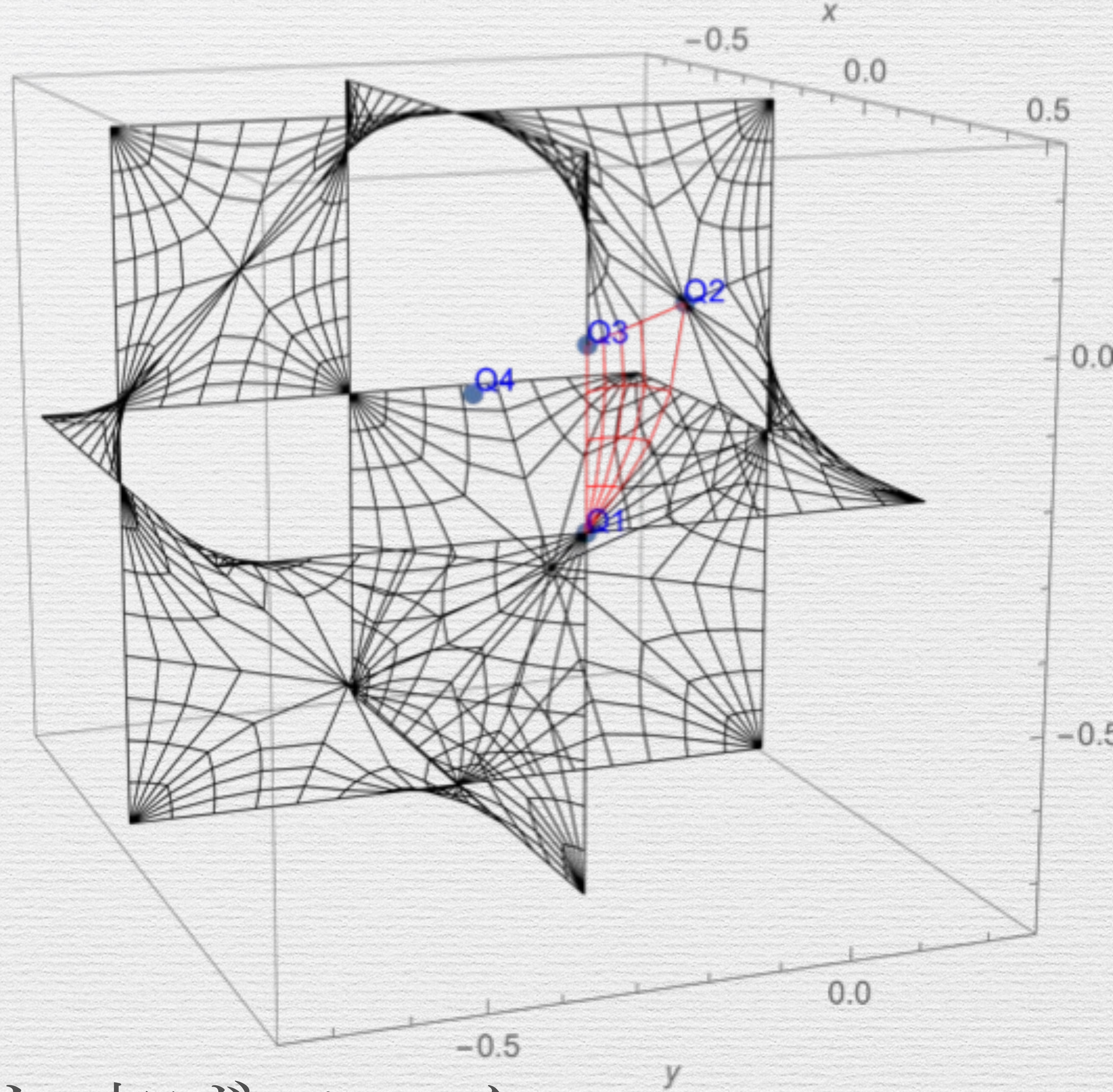
National Musium of American HIstory

https://americanhistory.si.edu/collections/object-groups/geometric-models-minimal-surfaces-as-soap-films

Schwarz 極小曲面

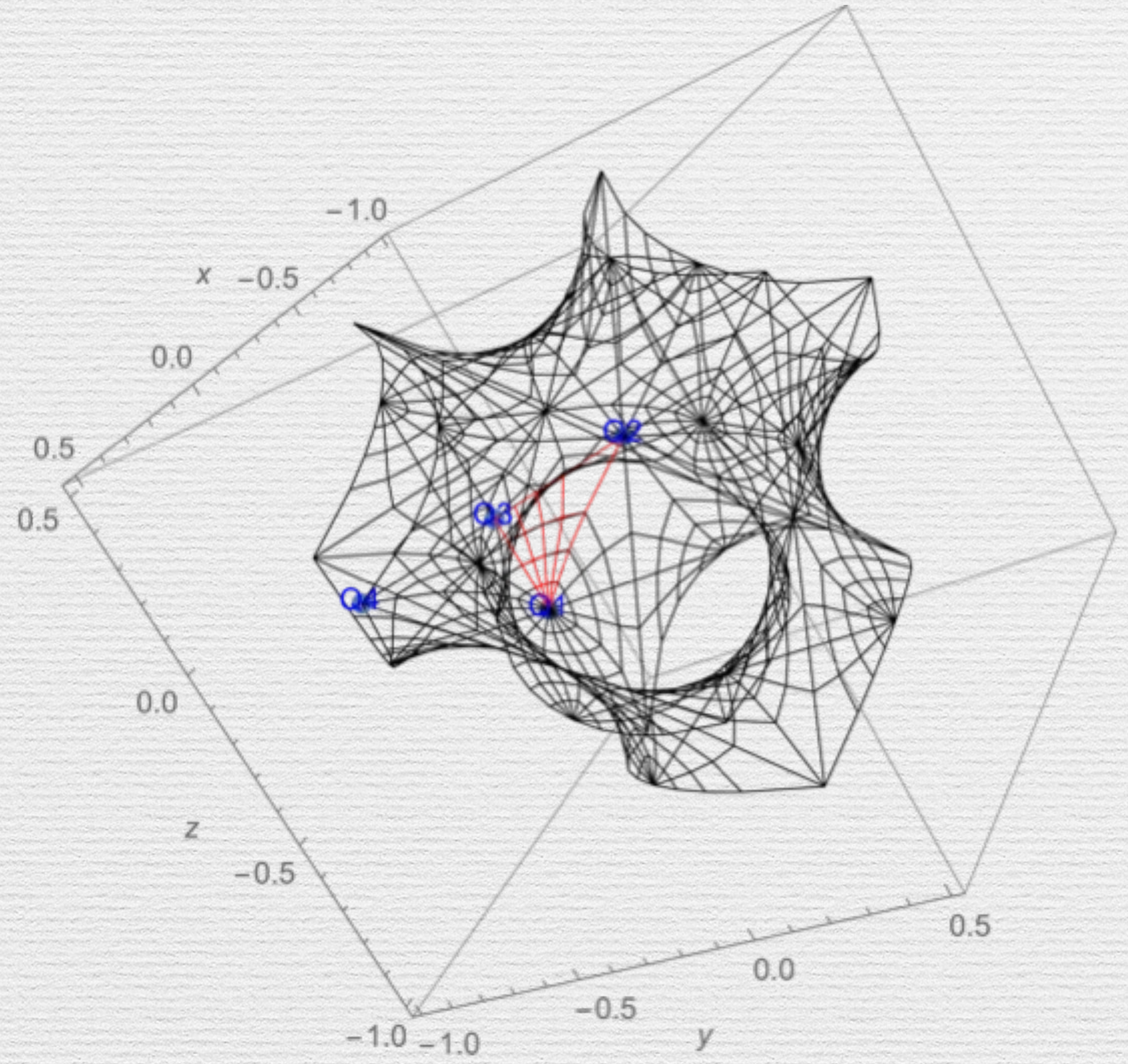


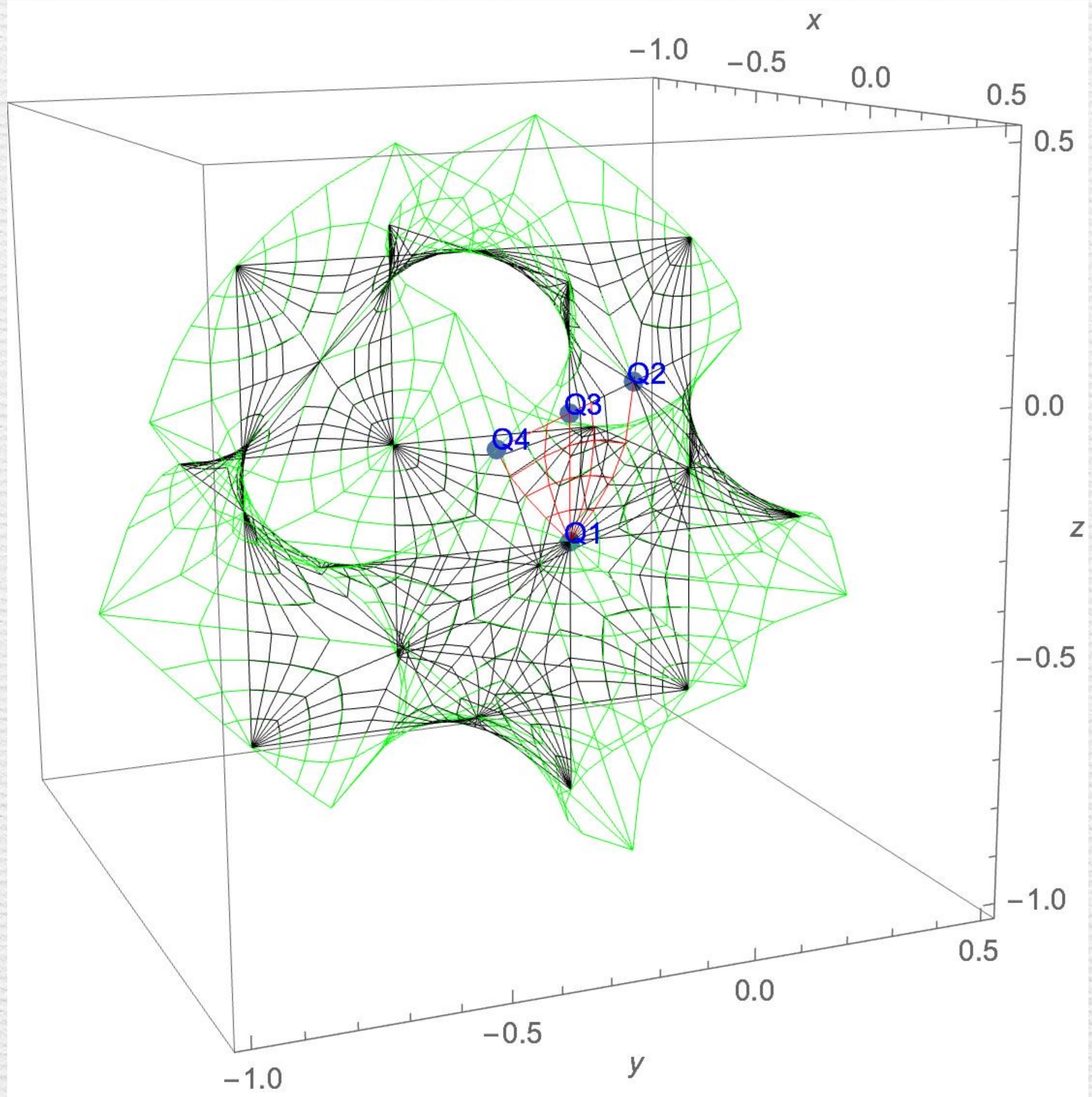


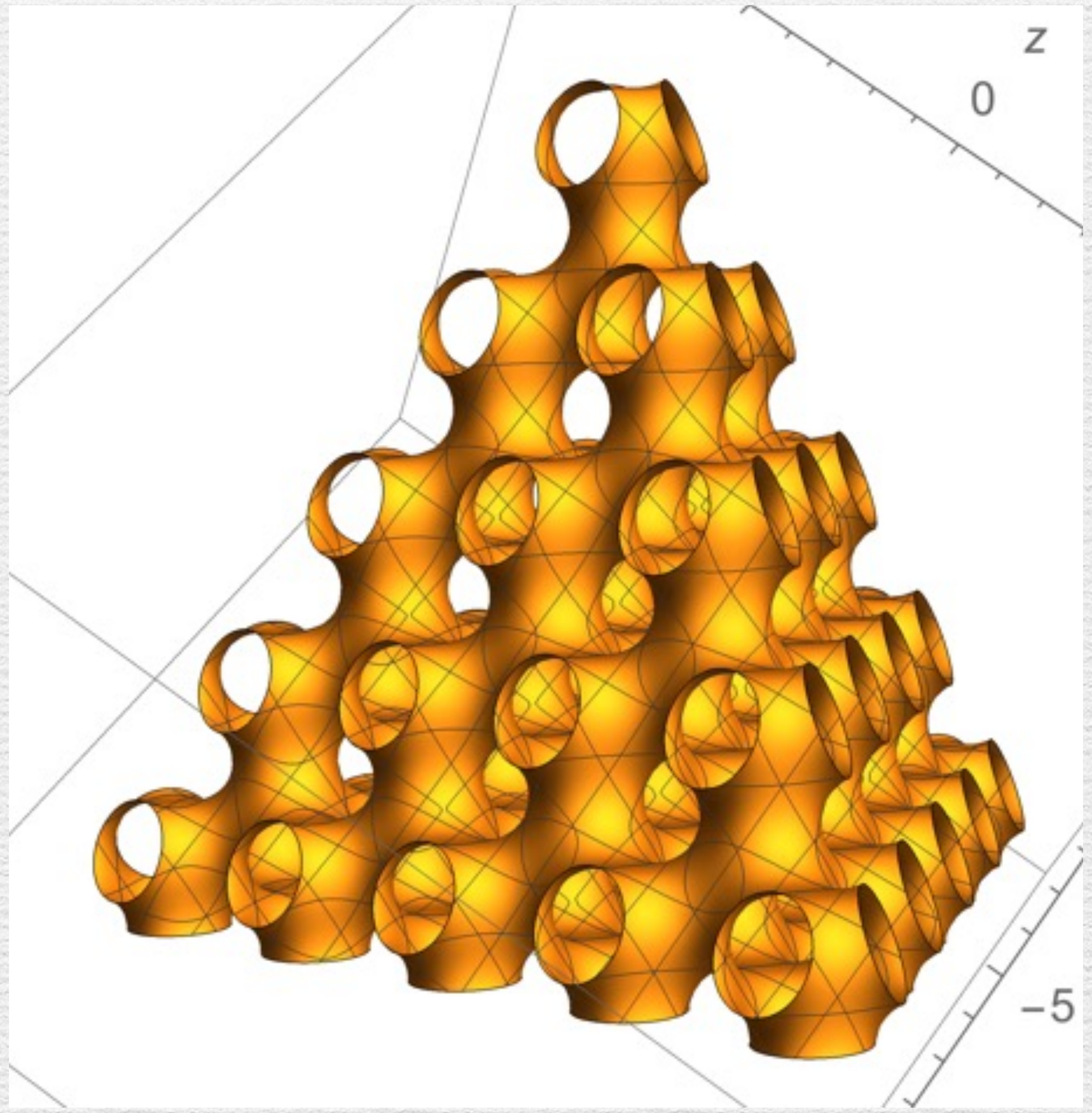


辺の回りに180°回転させて曲面を広げていく。
(Schwarzの鏡像原理)

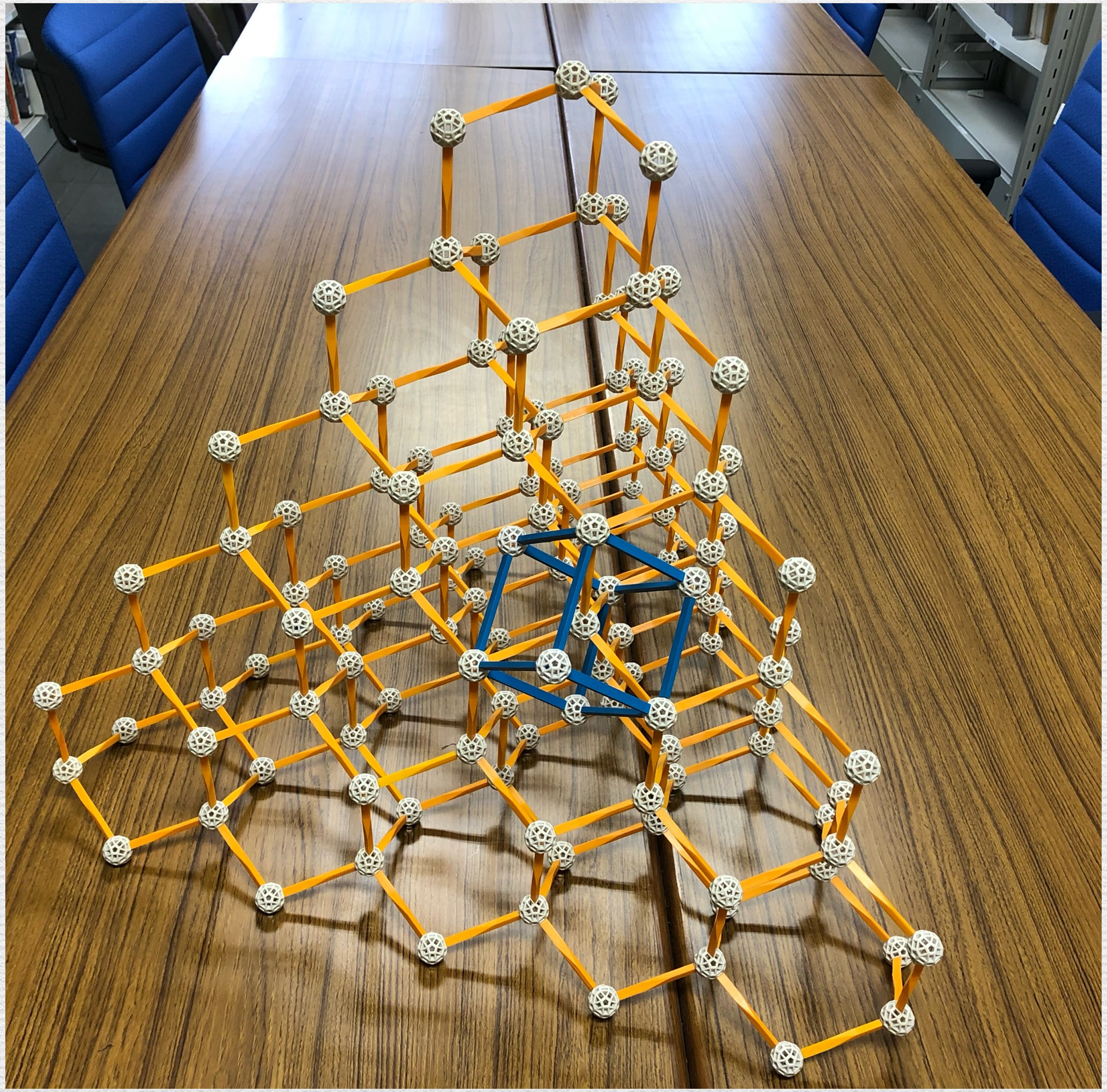
Schwarz 極小曲面
(Diamond 曲面=D曲面)

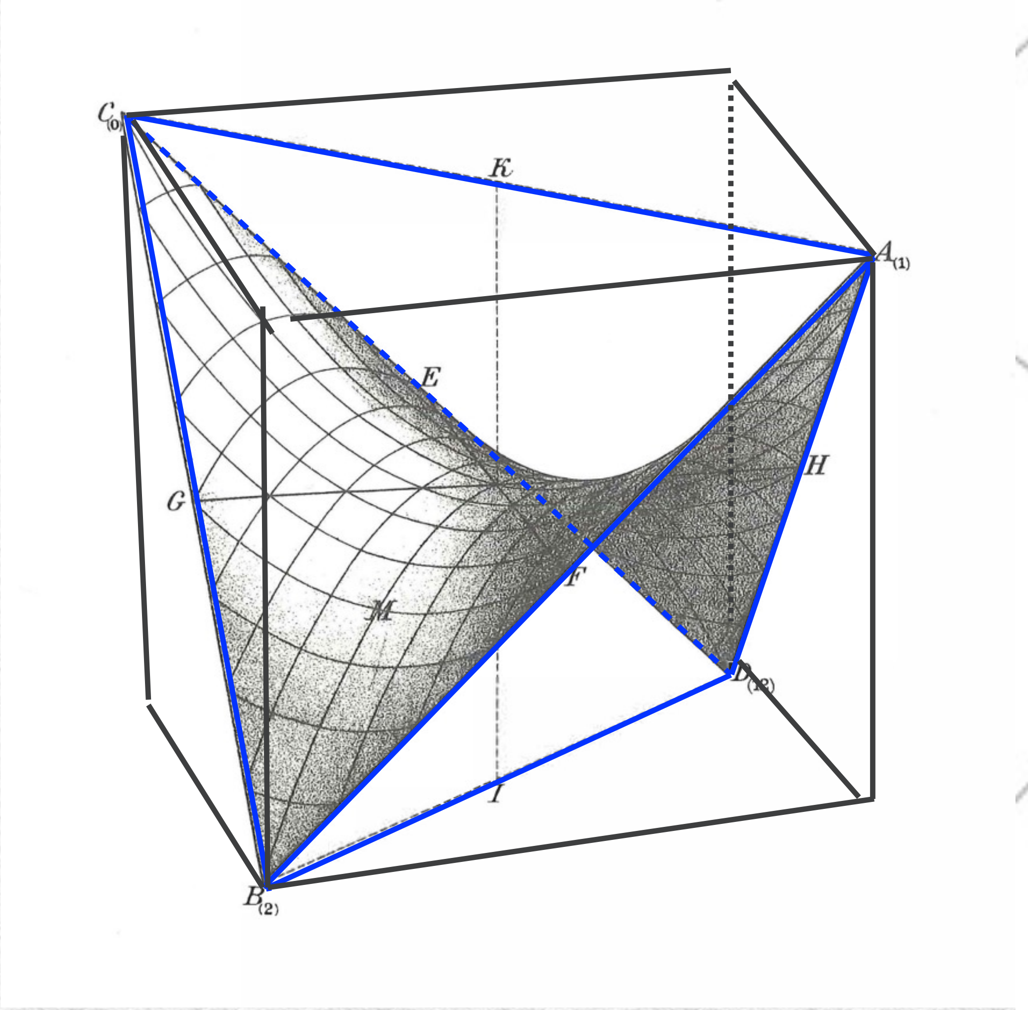


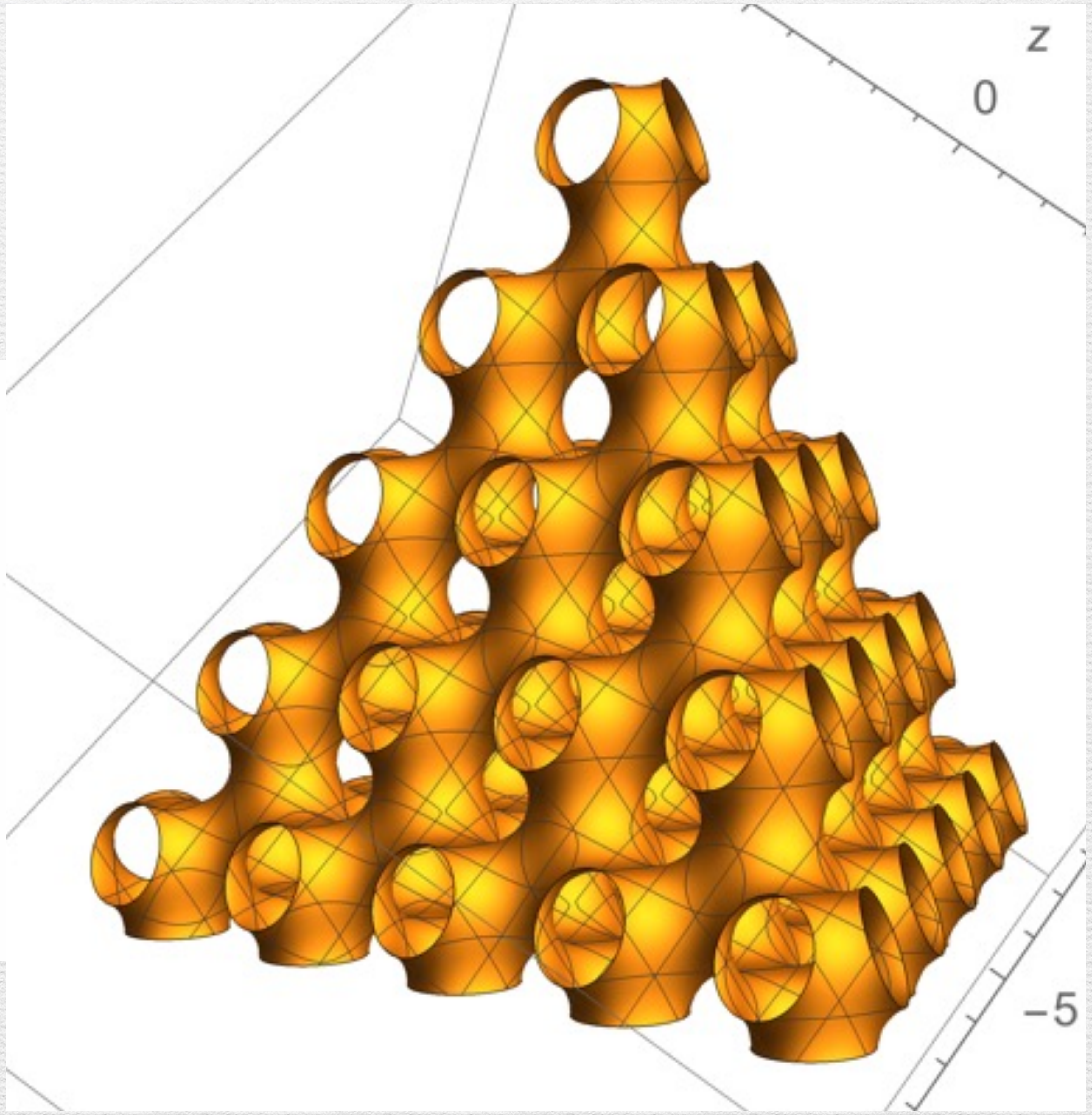




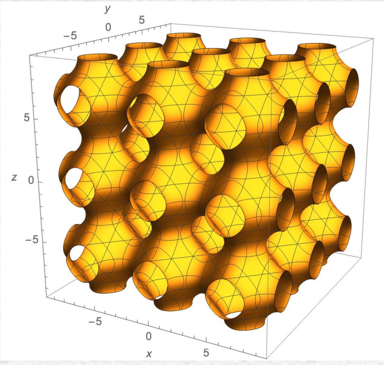
ダイヤモンド格子

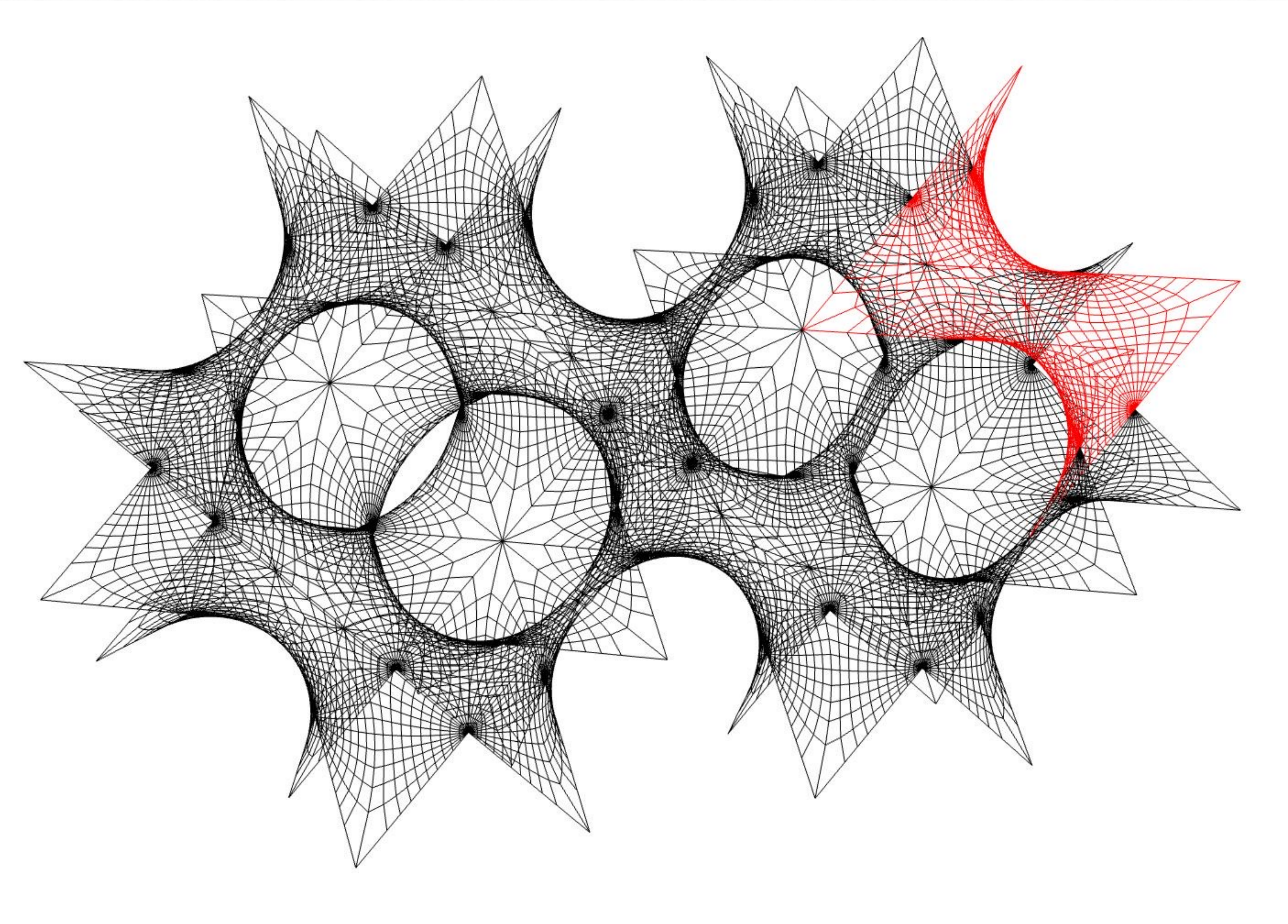


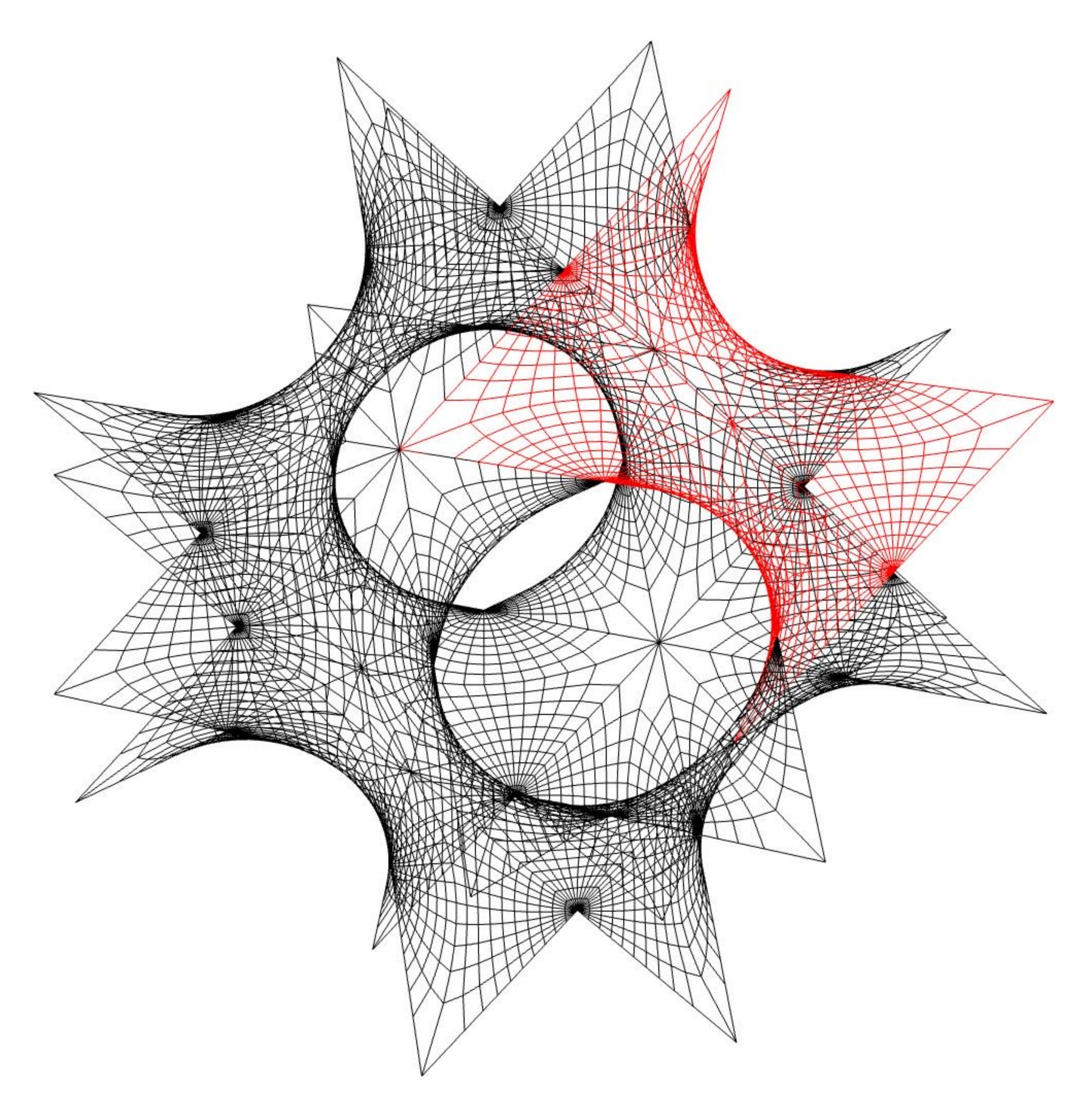




Schwarz 極小曲面
（Primitive 曲面=D曲面の共役）



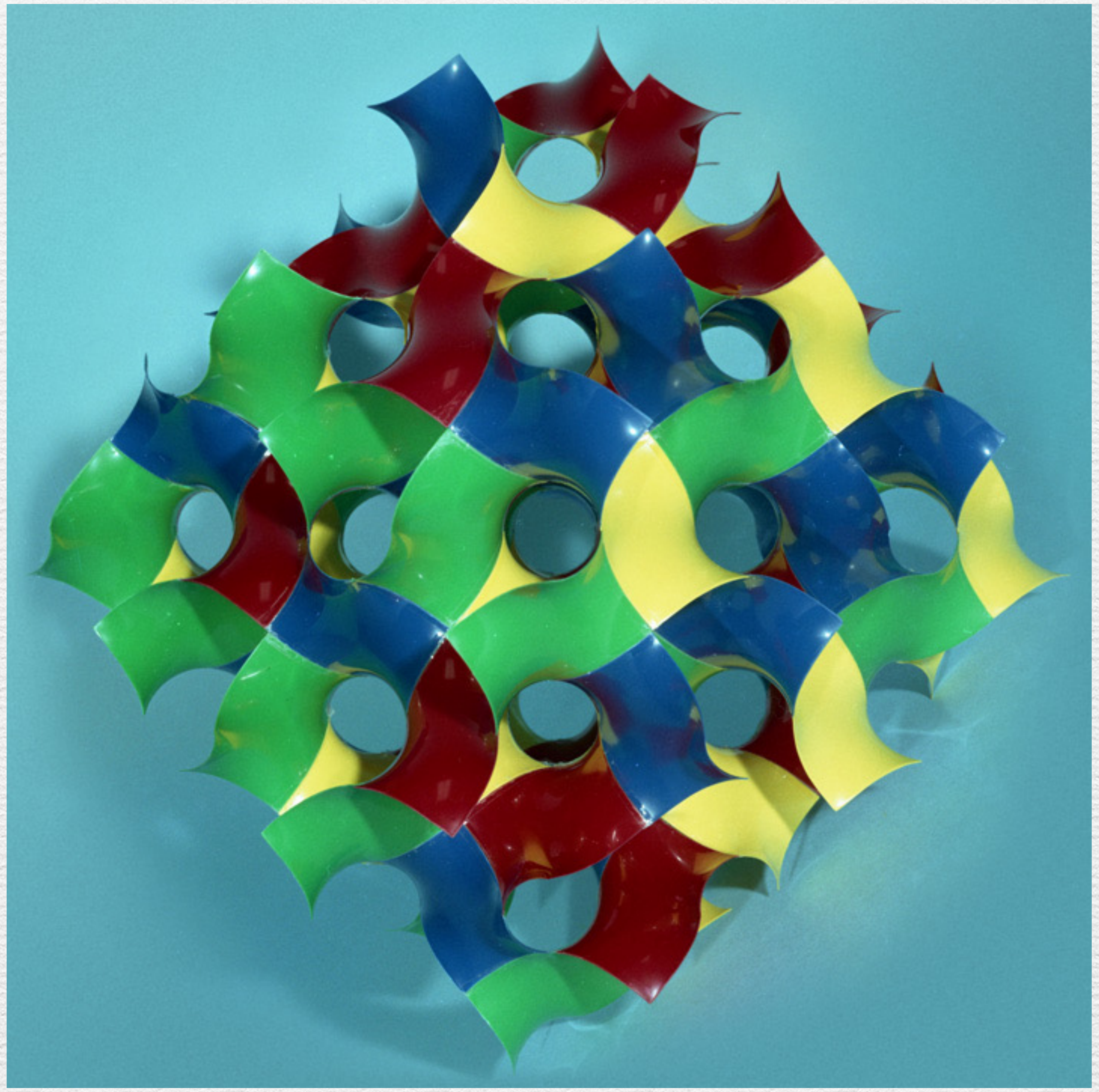


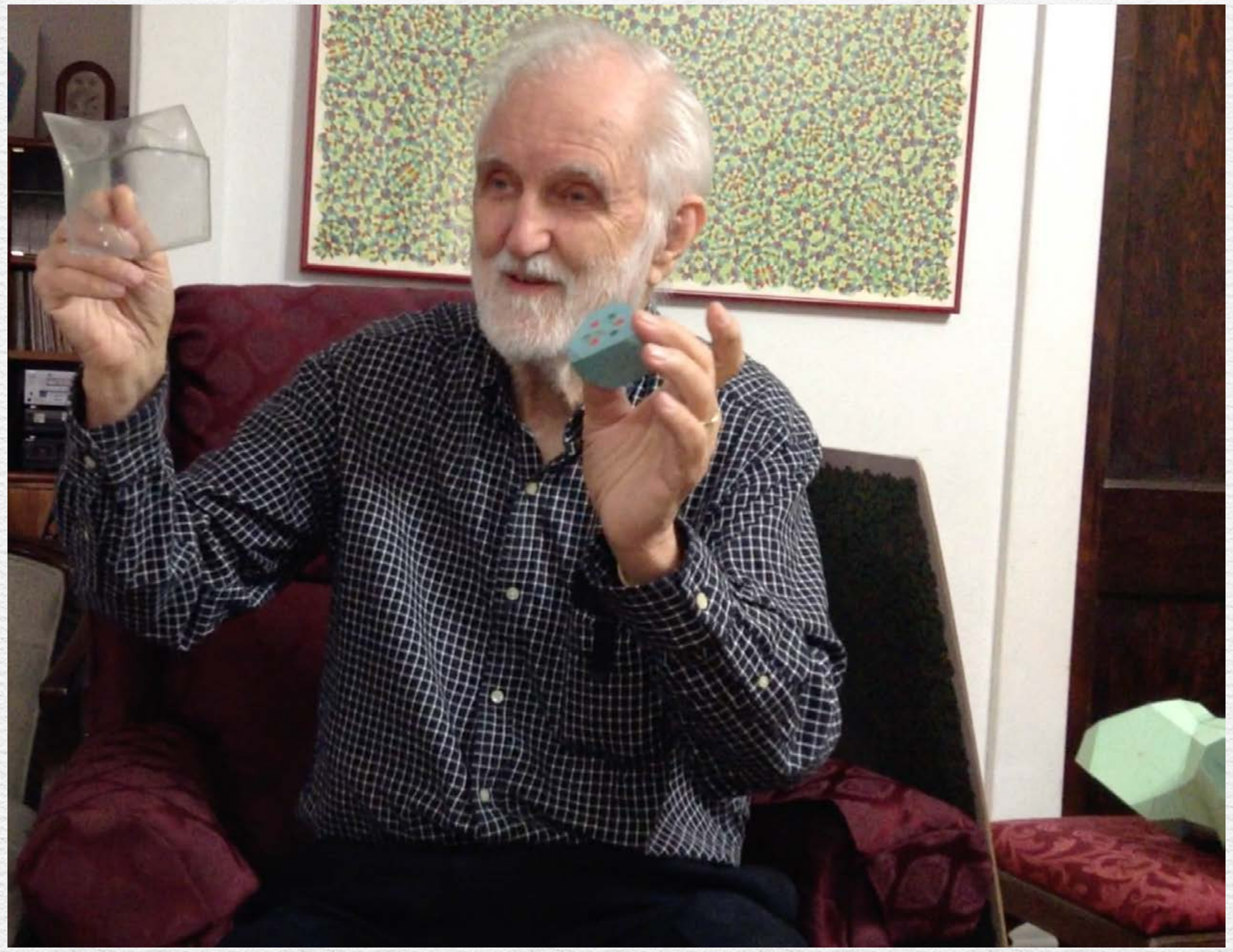


Alan Schoen アラン·ショーン 1924-2023

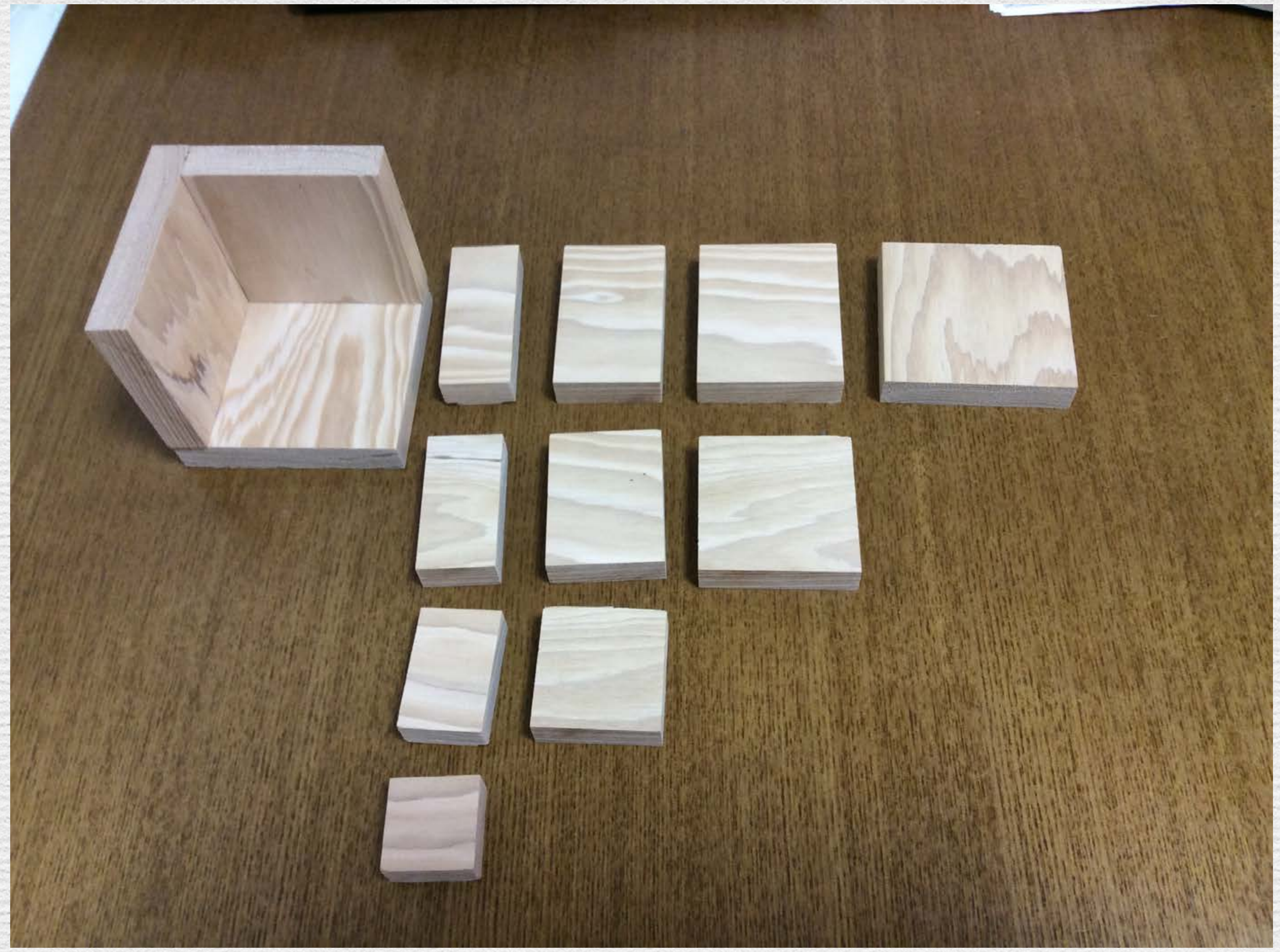
- 固体物理学者
- Gyroid極小曲面を発見。
- 第2次大戦後アメリカ進駐軍の一員として日本に滞在
- NASAで研究。その後、南イリノイ大学へ。
- Schoen Geometry : https://schoengeometry.com パズルもあり面白い

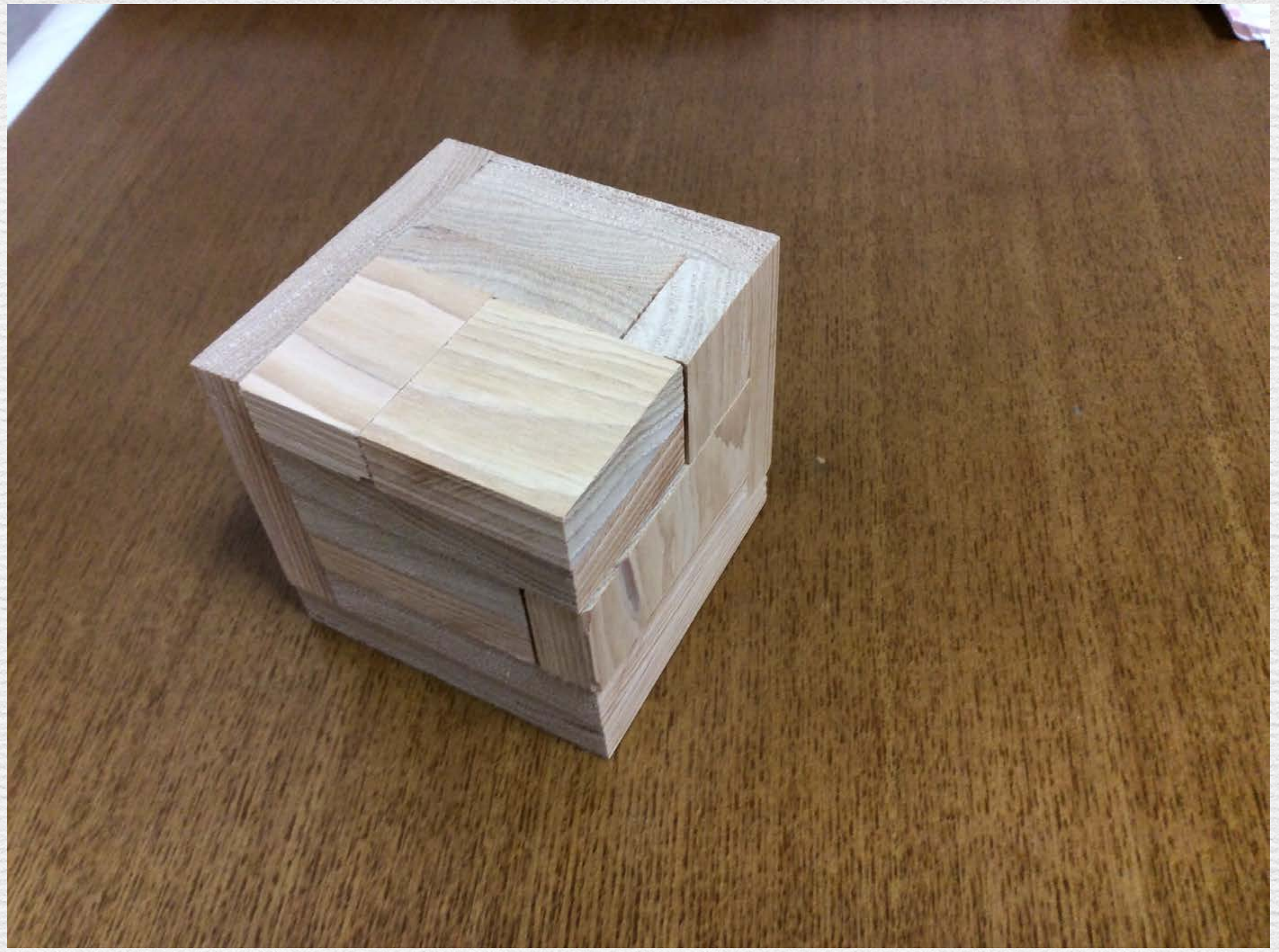
Gyroid極小曲面
（G曲面）



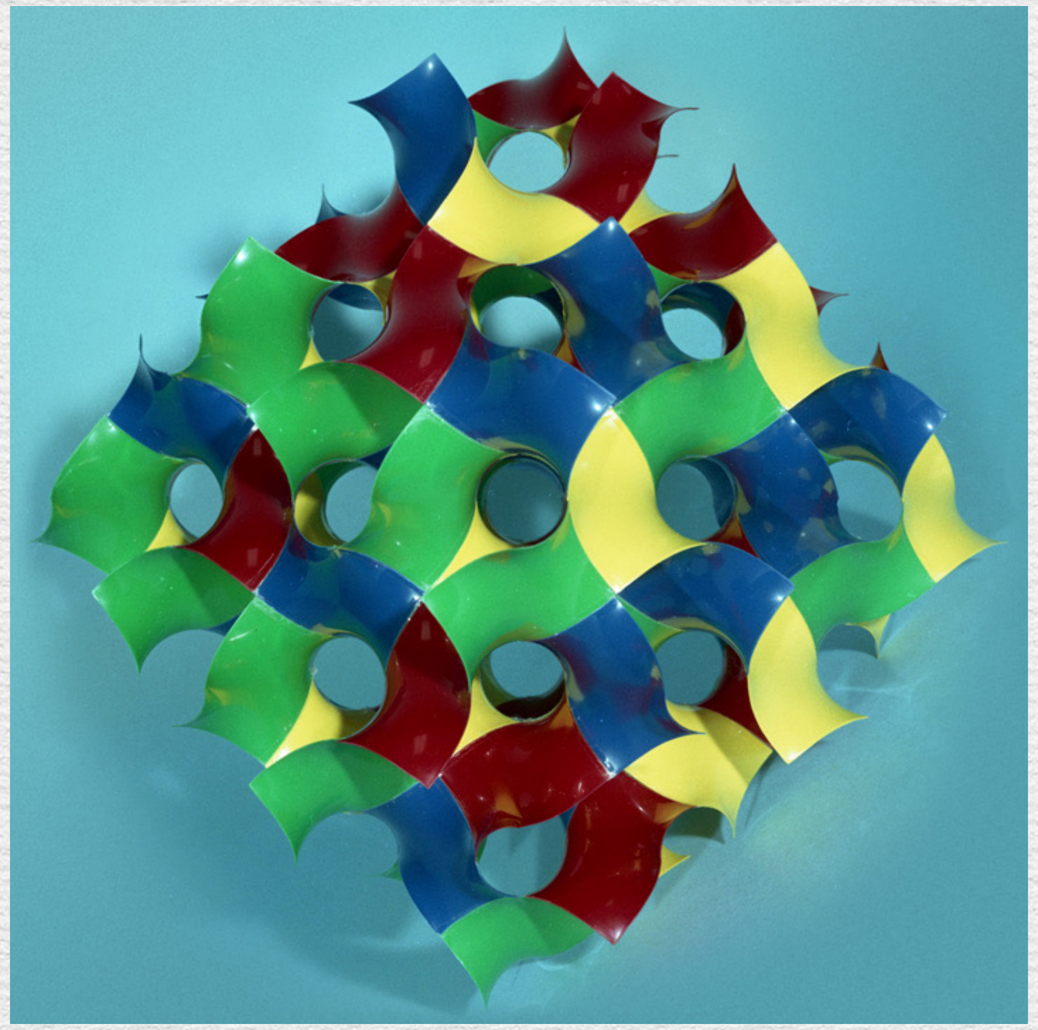


ショーン氏のパズルの一つ





G曲面：ジャイロイド曲面
名前の由来

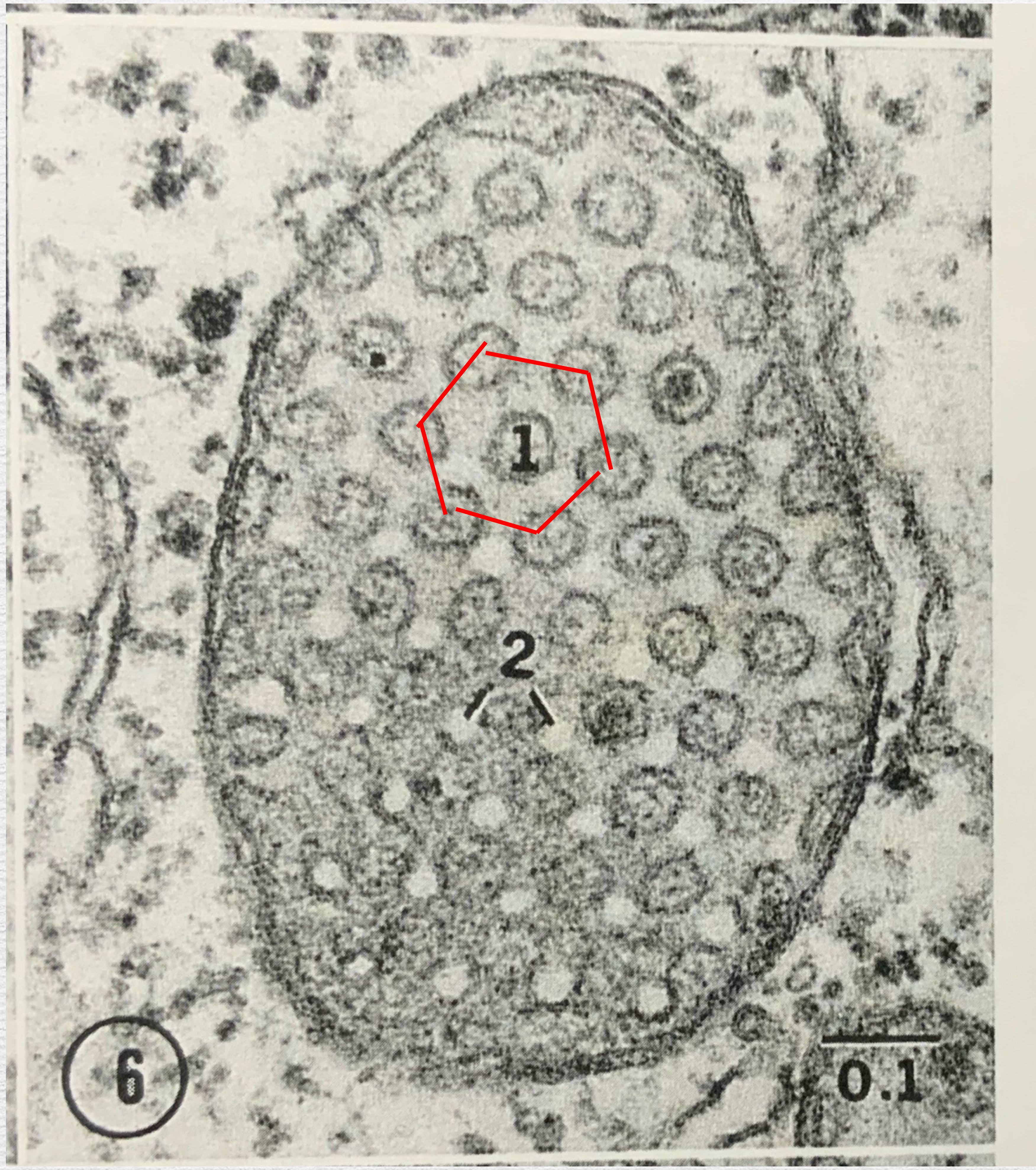


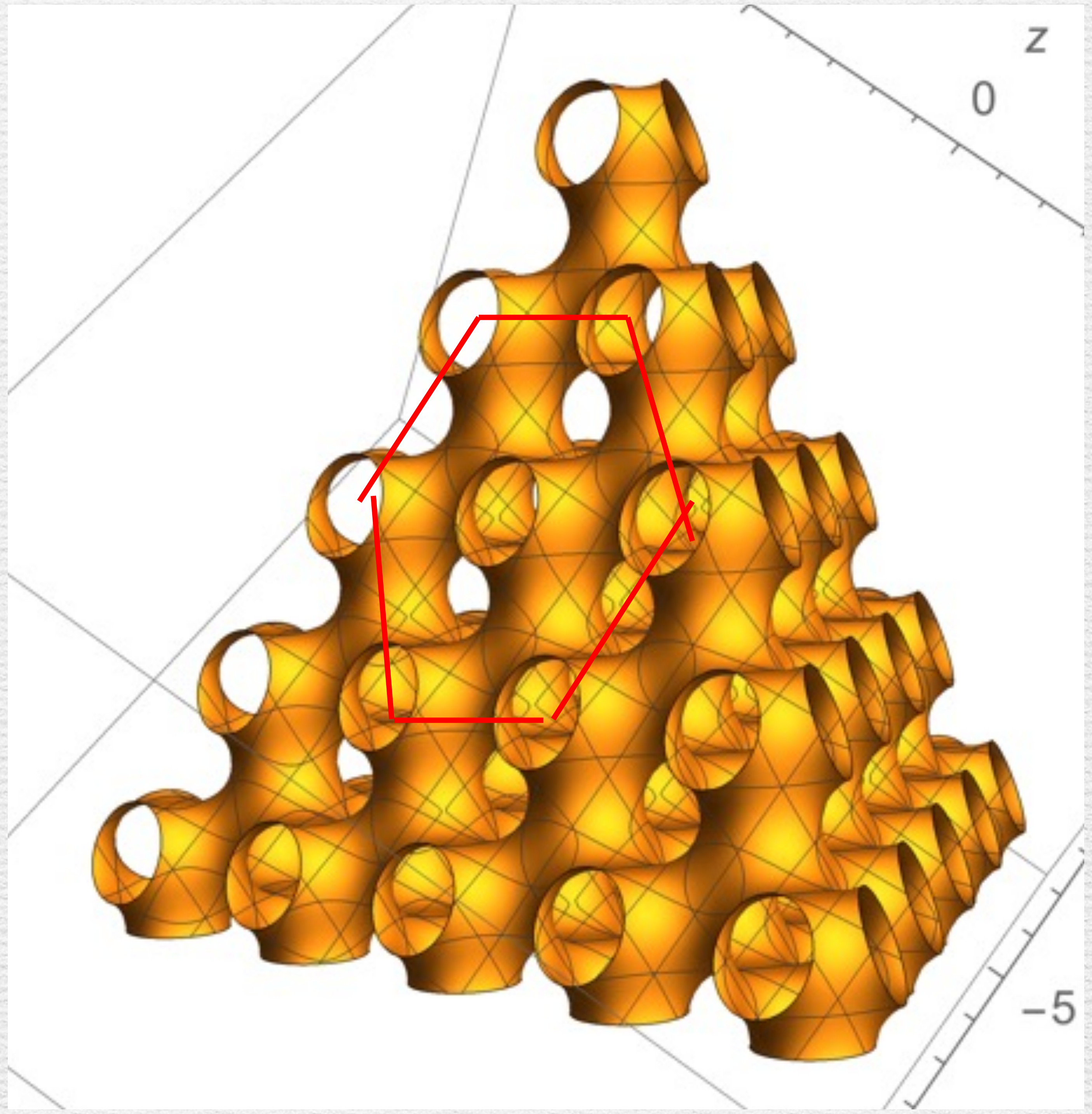
gyro-　回転，　らせん

gyroscope ジャイロスコープ

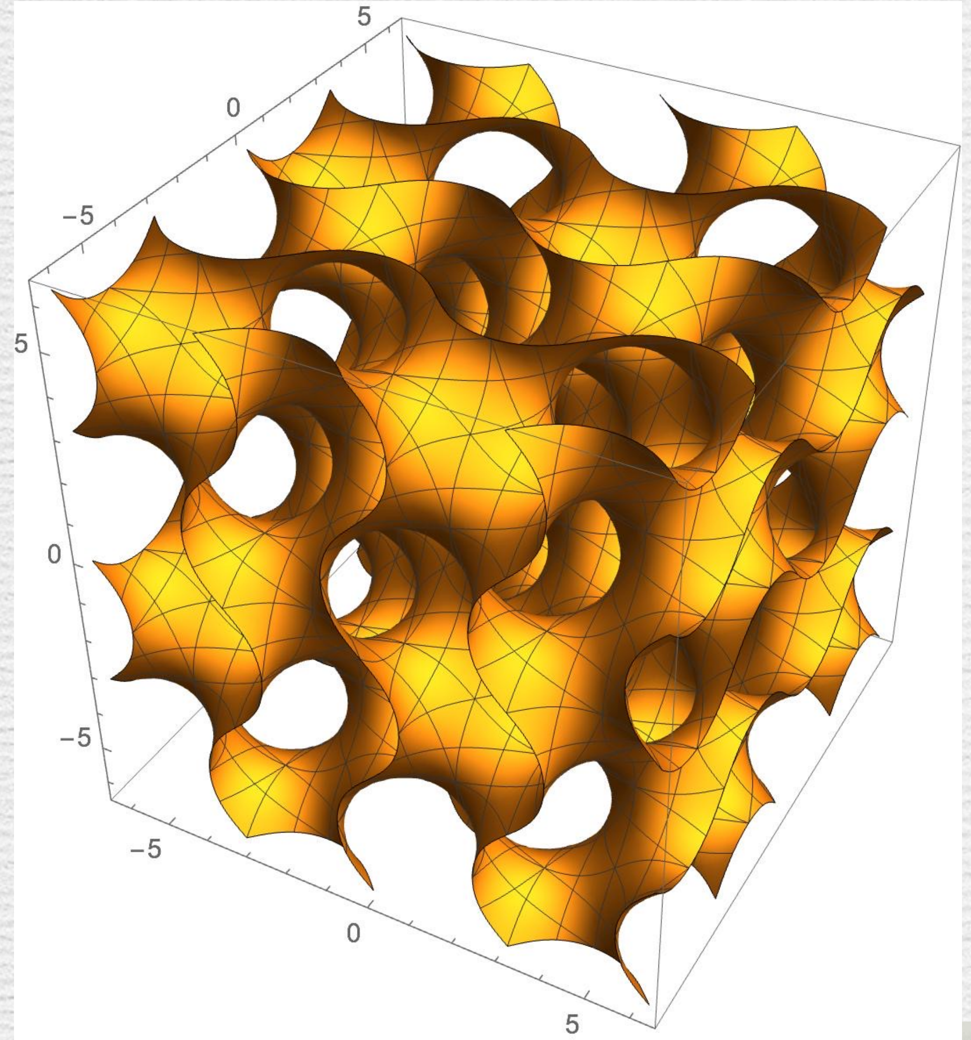
gyrocompass ジャイロコンパス

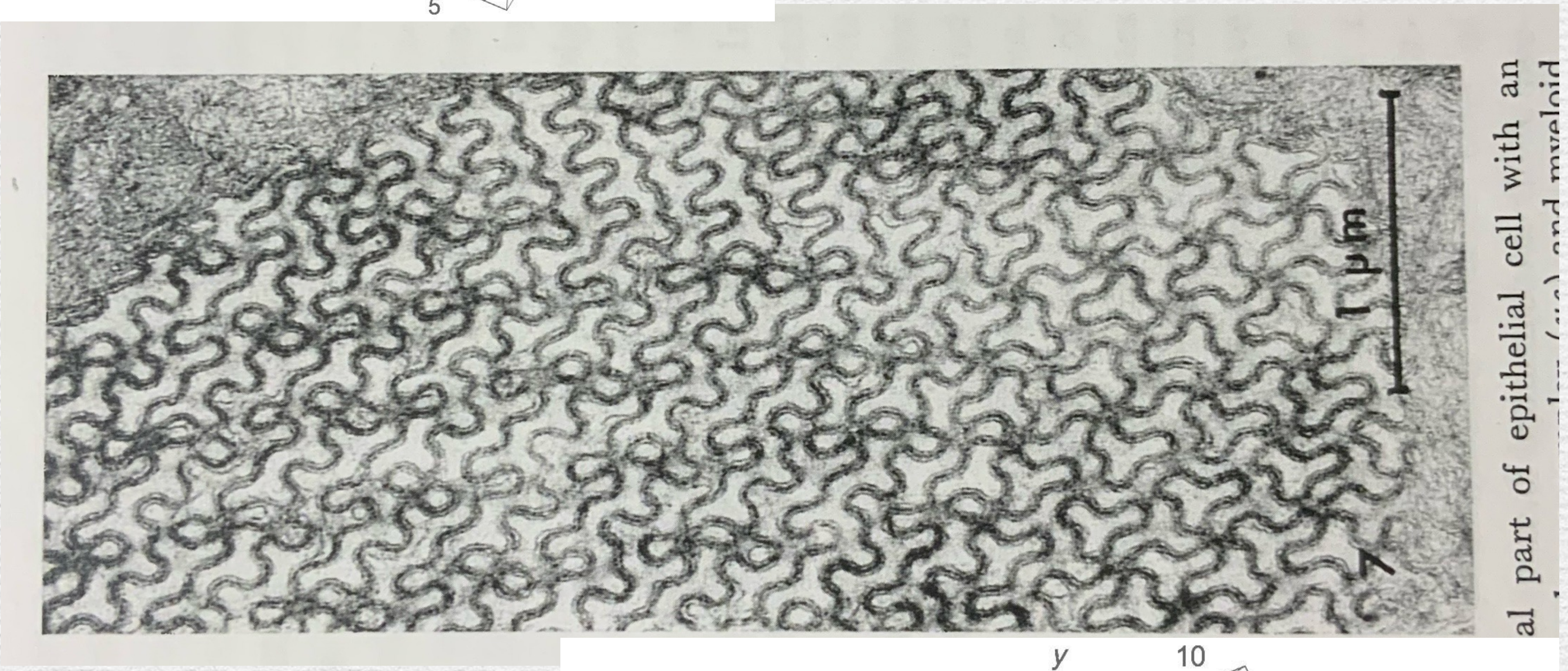
カエルの細胞のミトコンドリアとD曲面

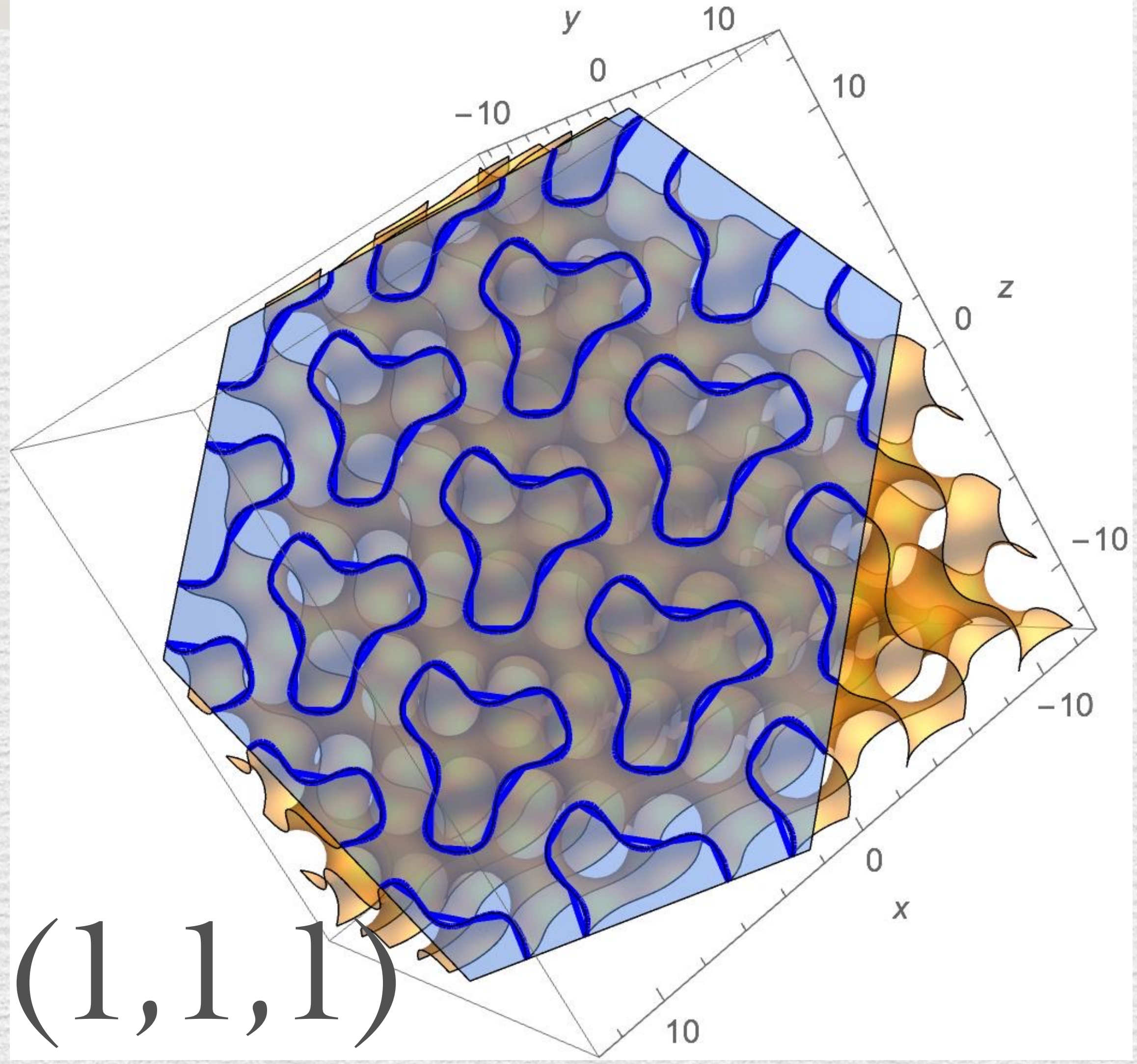




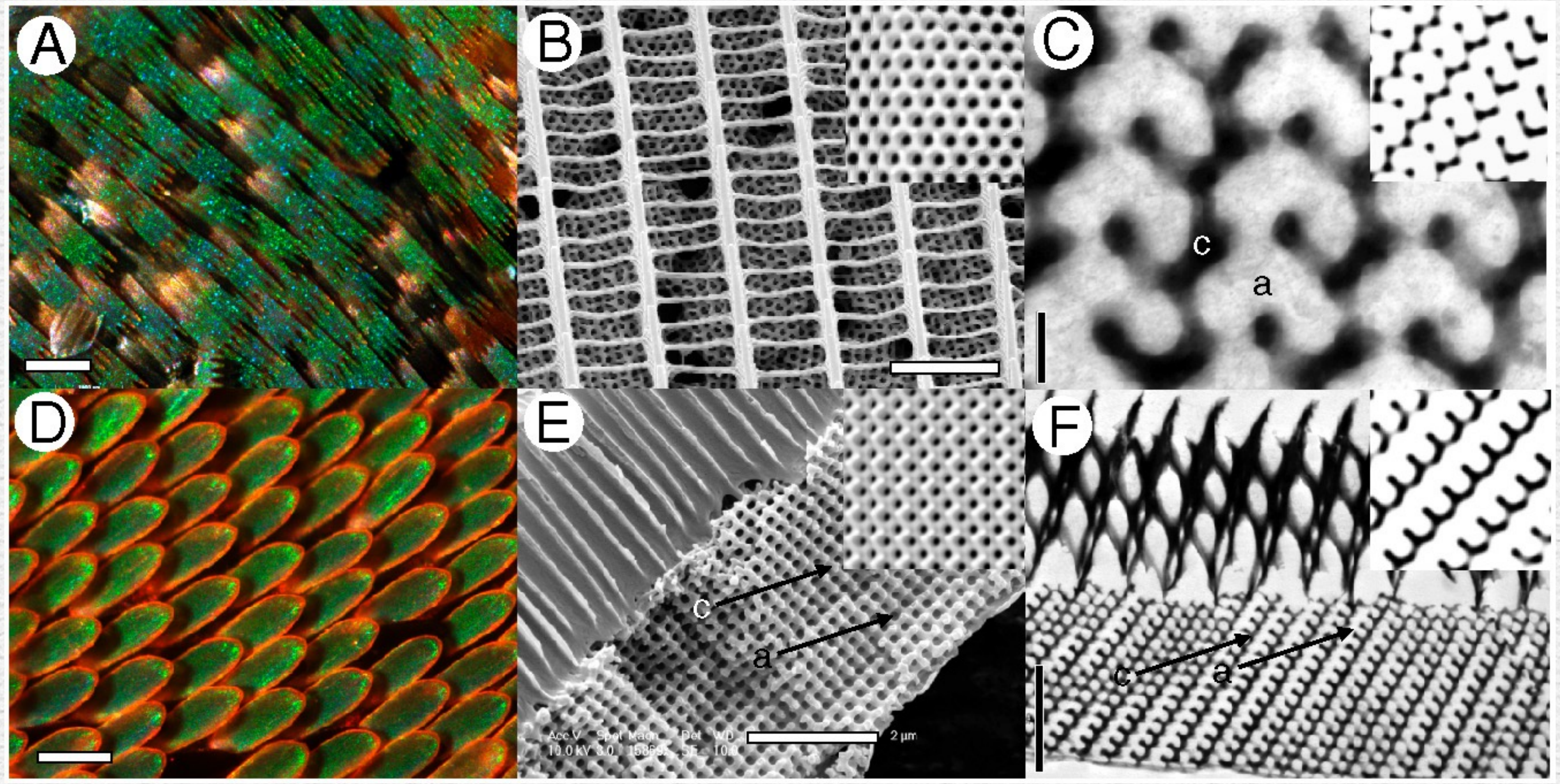
ヤツメウナギの網膜色素細胞
蝶の羽の鱗粉とGyroid曲面

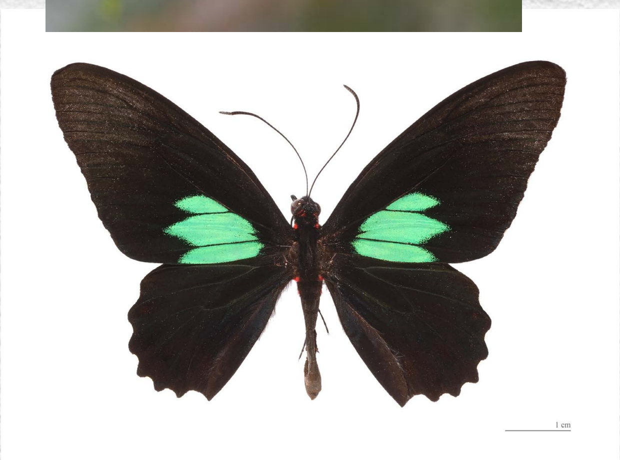


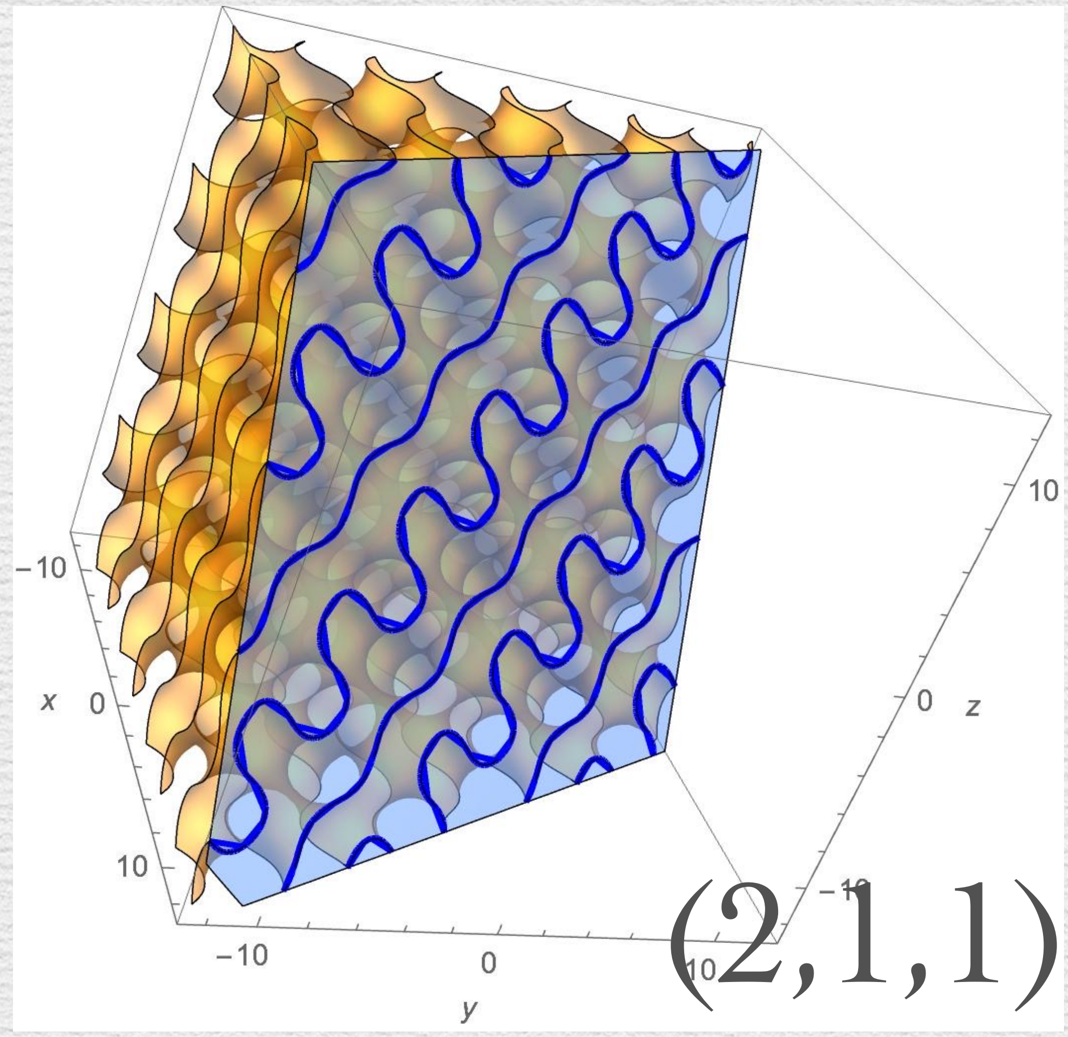




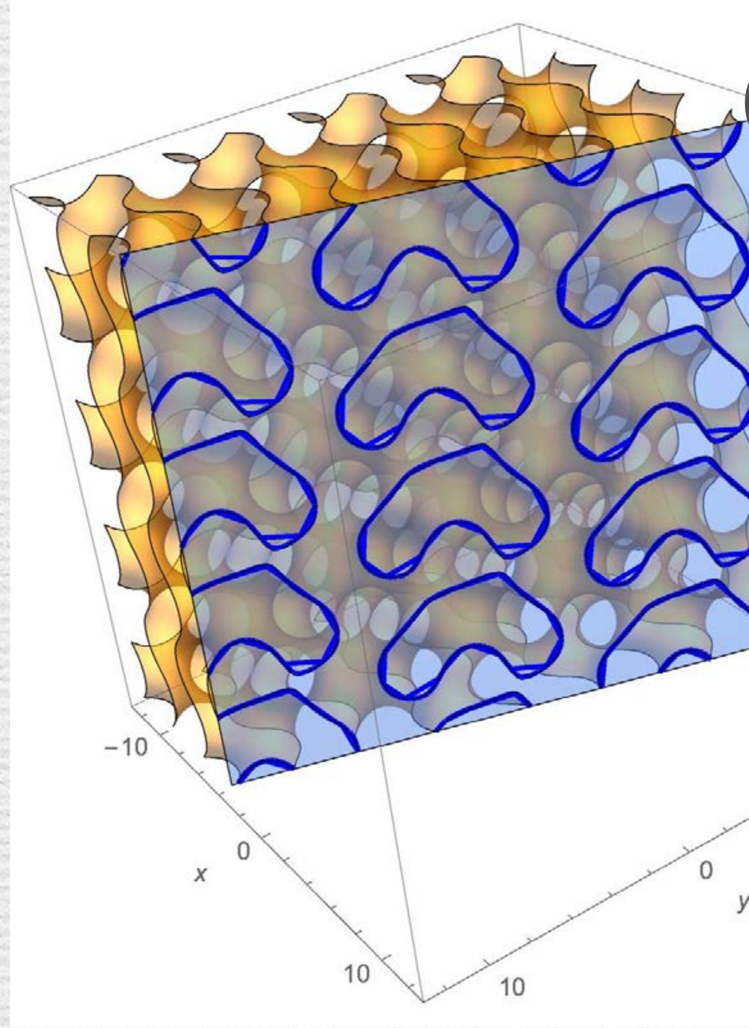
(1,1,1)





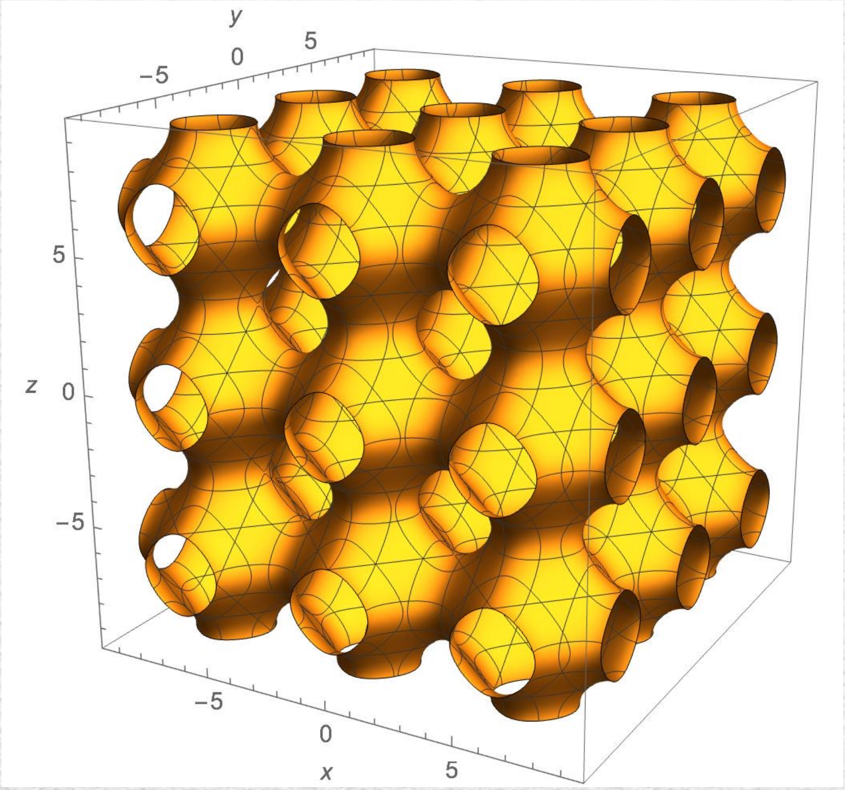


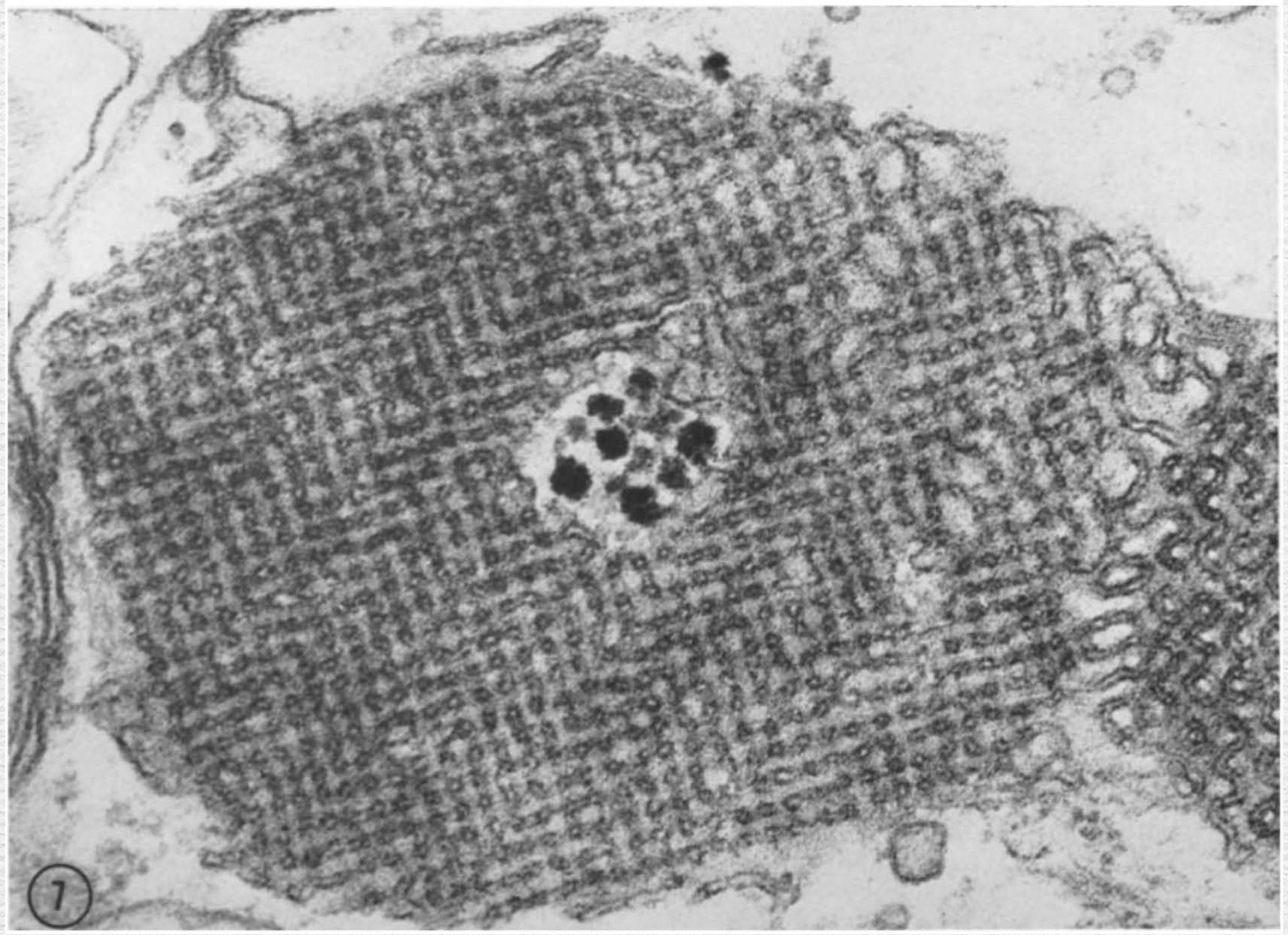
(2,1,1)

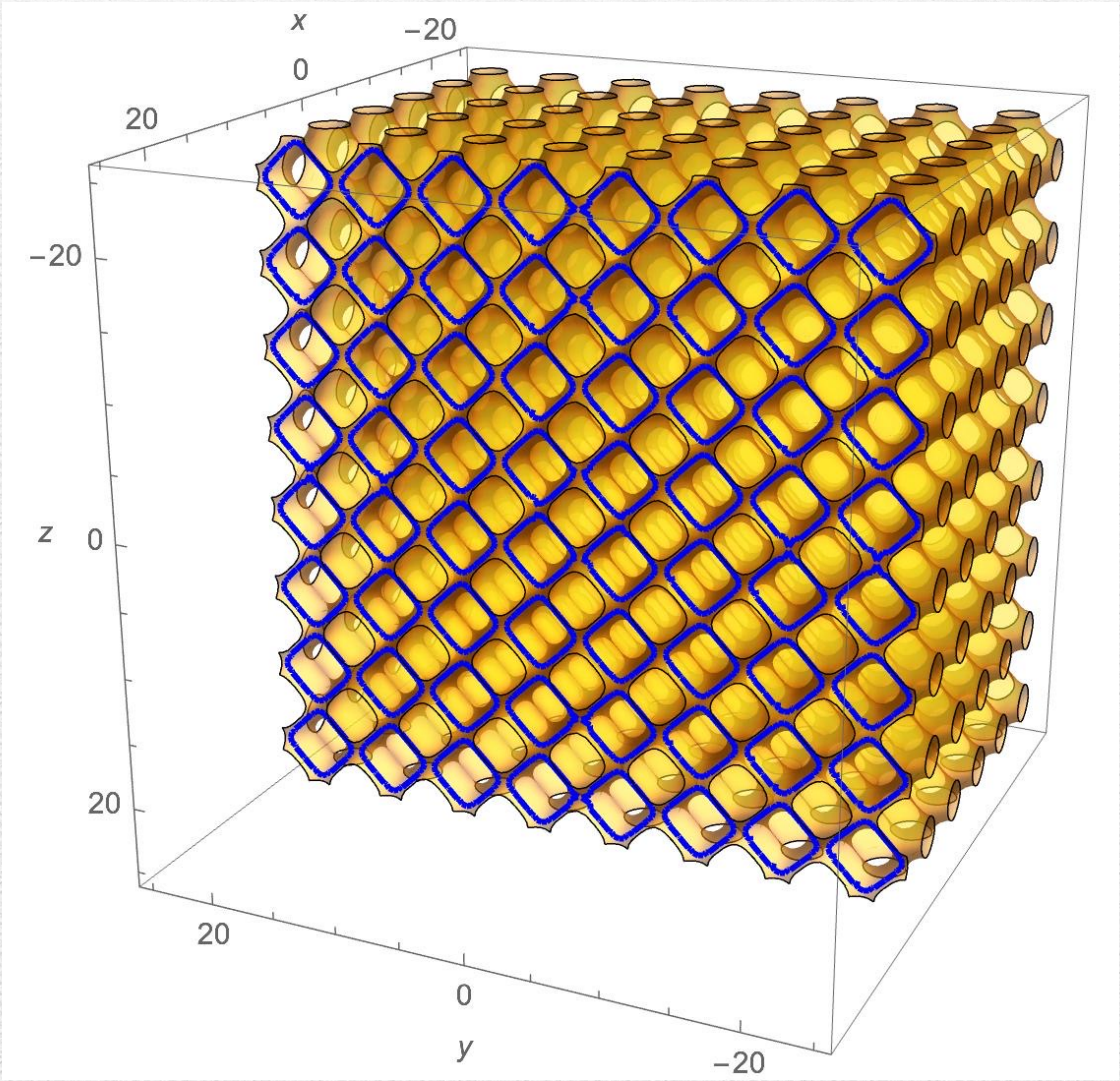


(3,1,0)

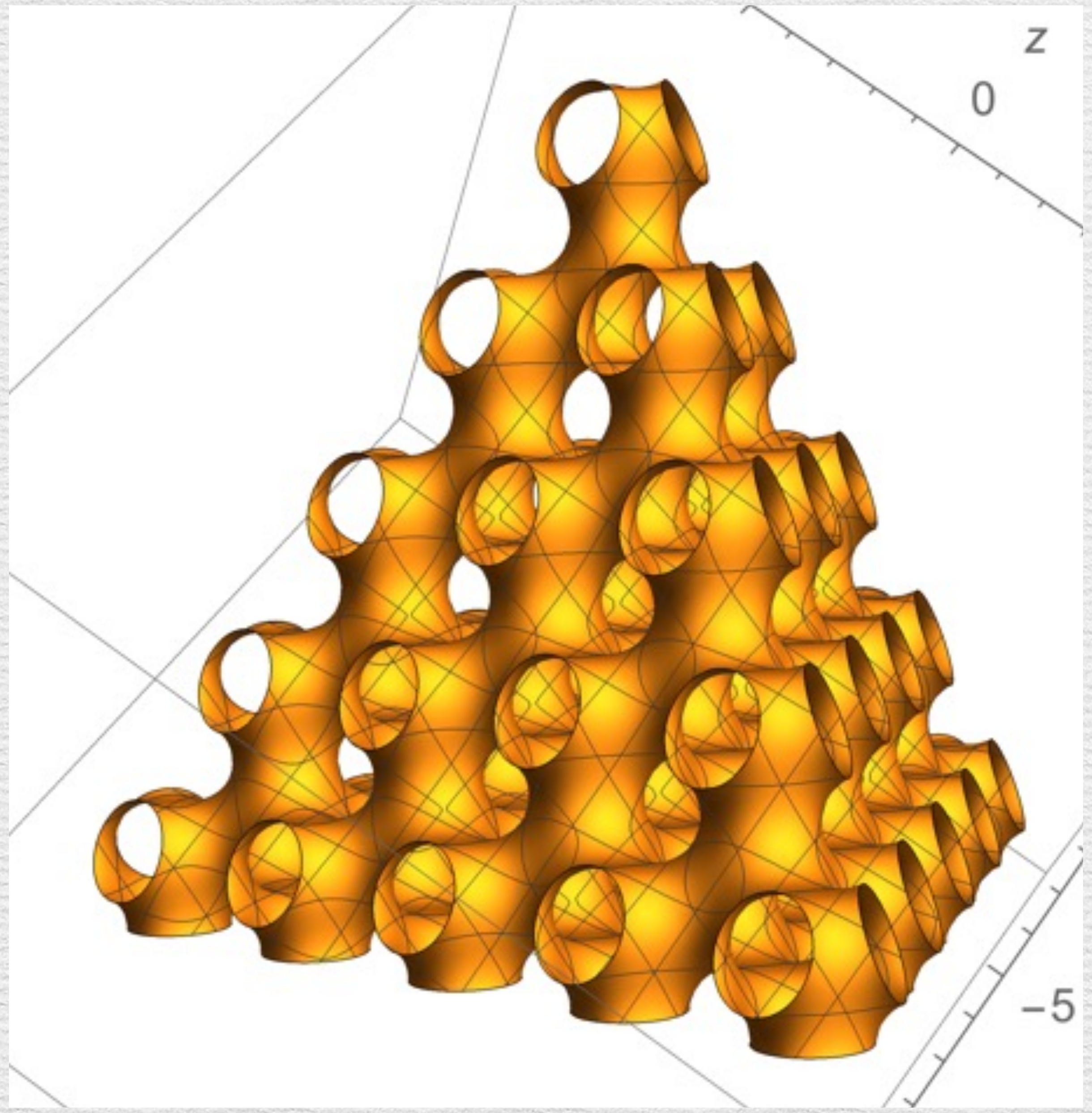
ウロコムシの発光器とP曲面

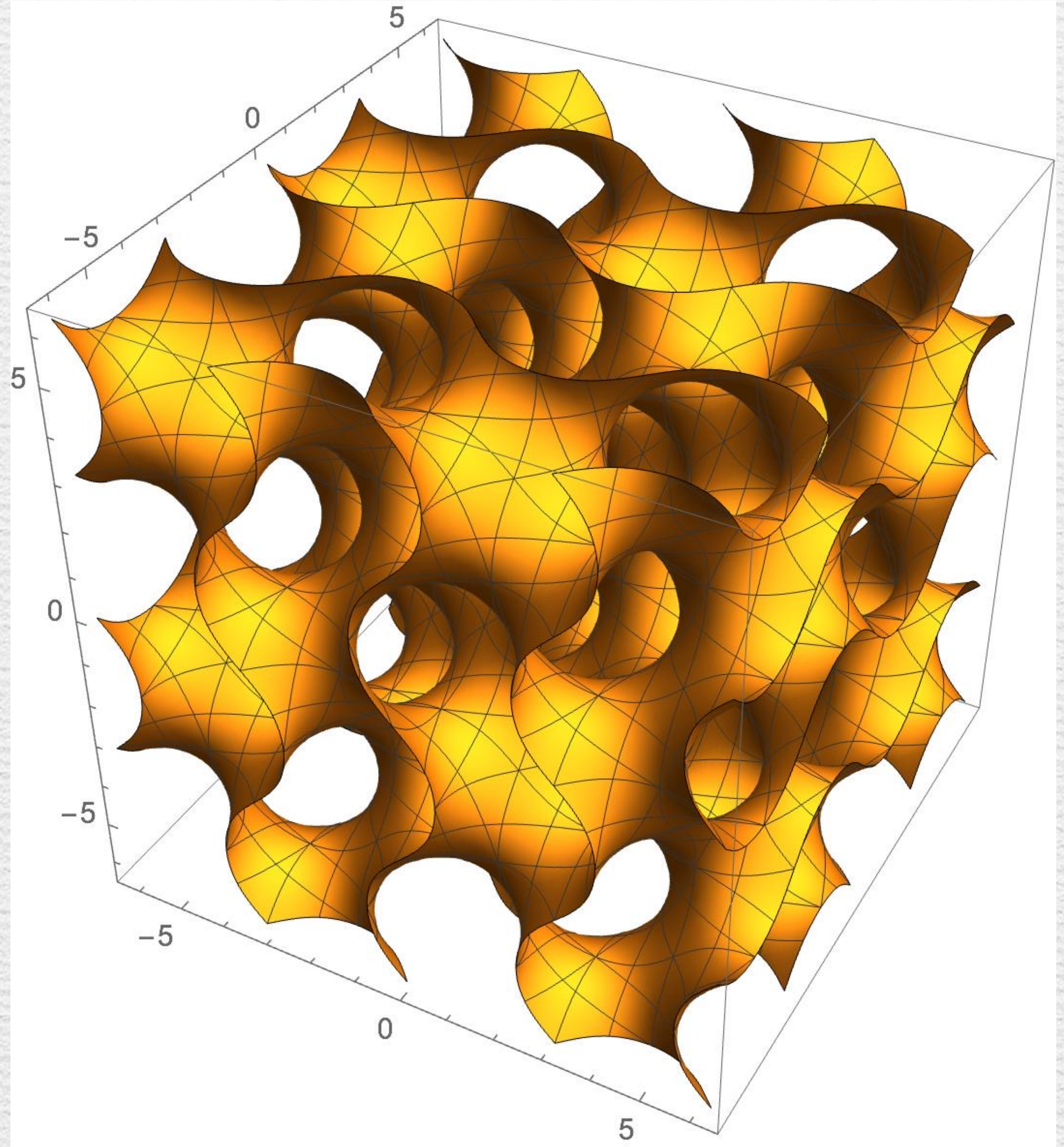


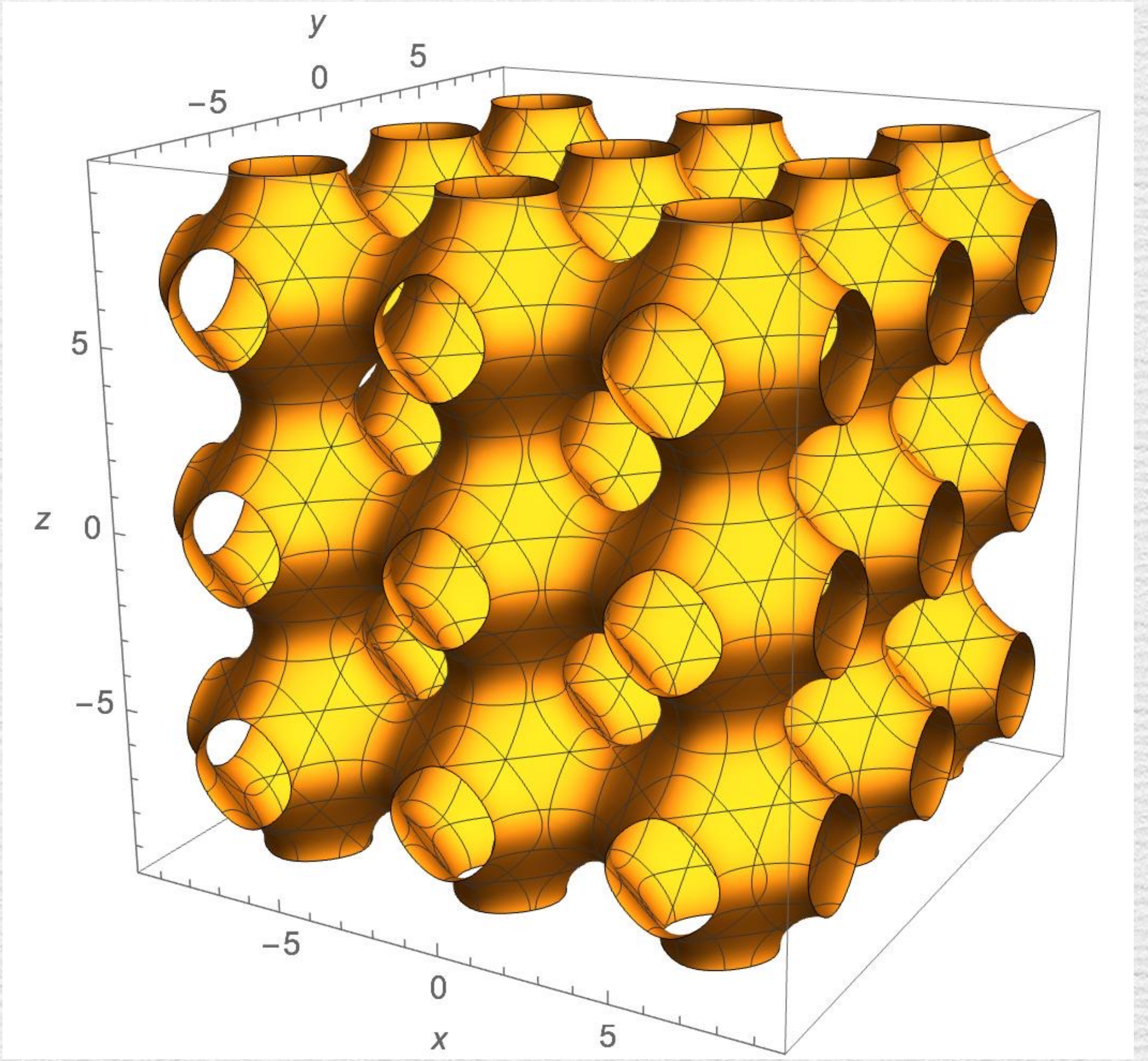




細胞の界面と極小曲面







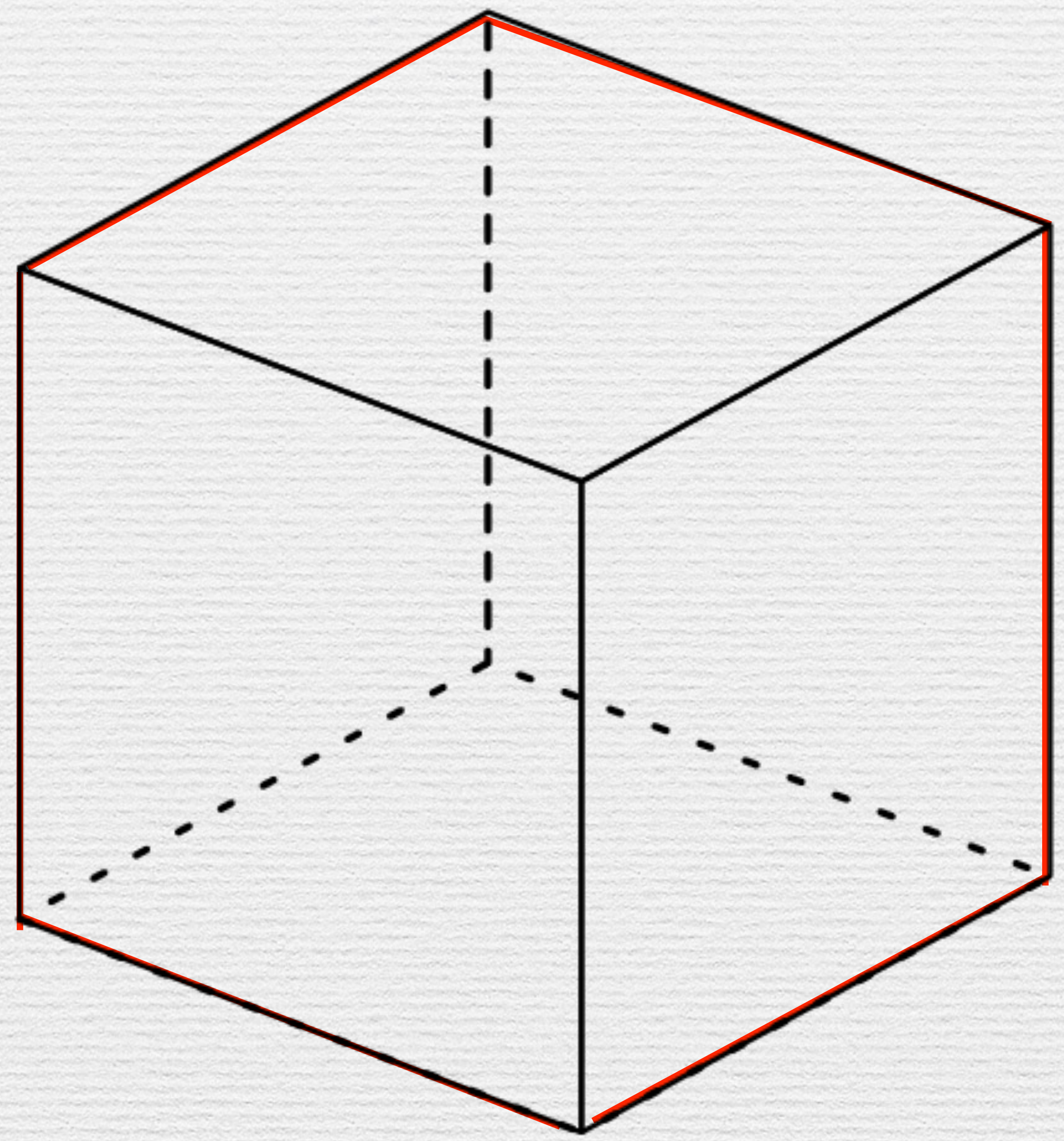
これらの曲面の特徴は？

- 極小曲面　同じ境界を持つ曲面の中で面積極小
- 周期性：3方向に同じ形が繰り返し現れる
- 高い対称性：3次元空間の繰り返し模様＝230種類

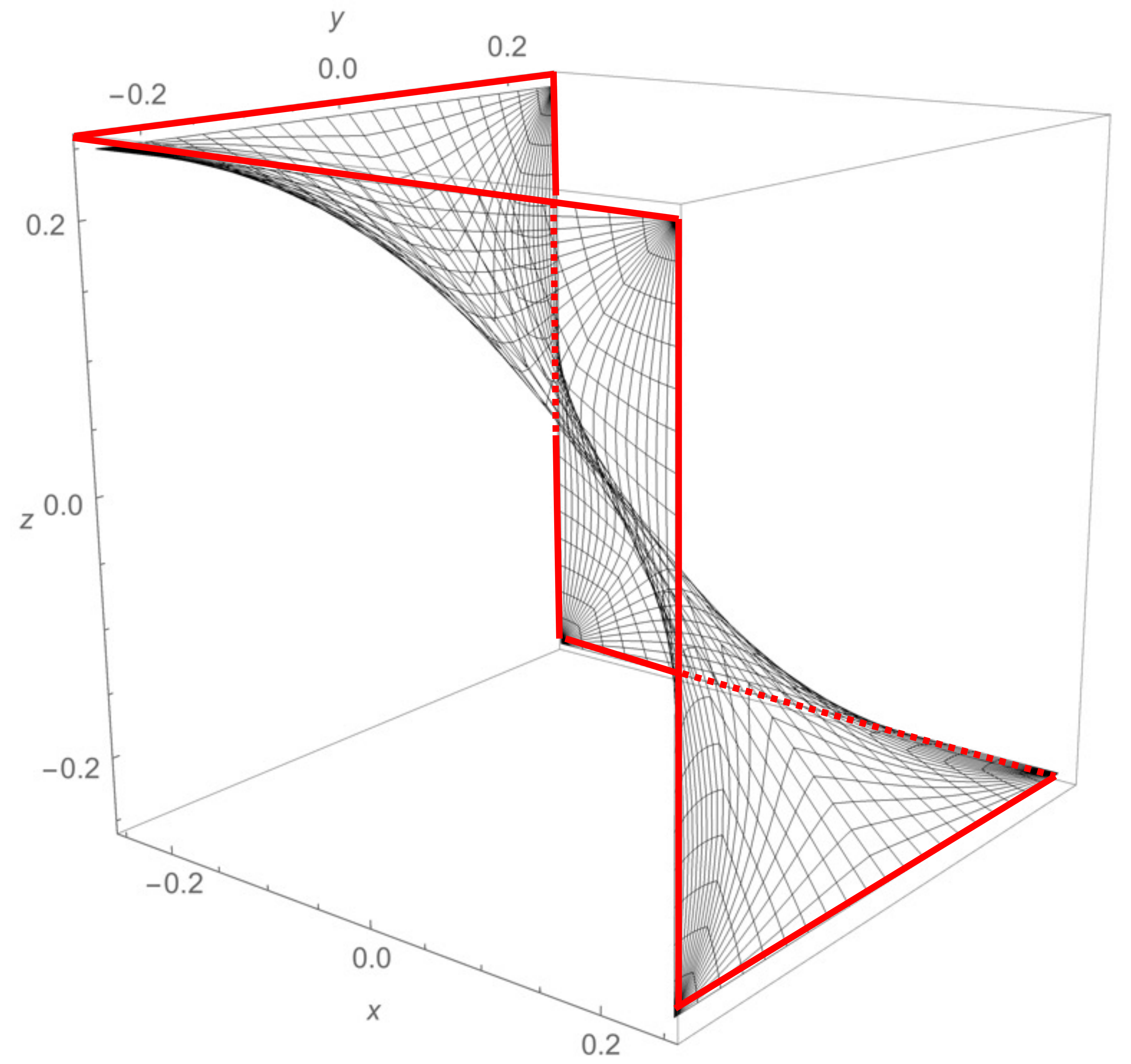
International Table of Crystallography の分類番号：

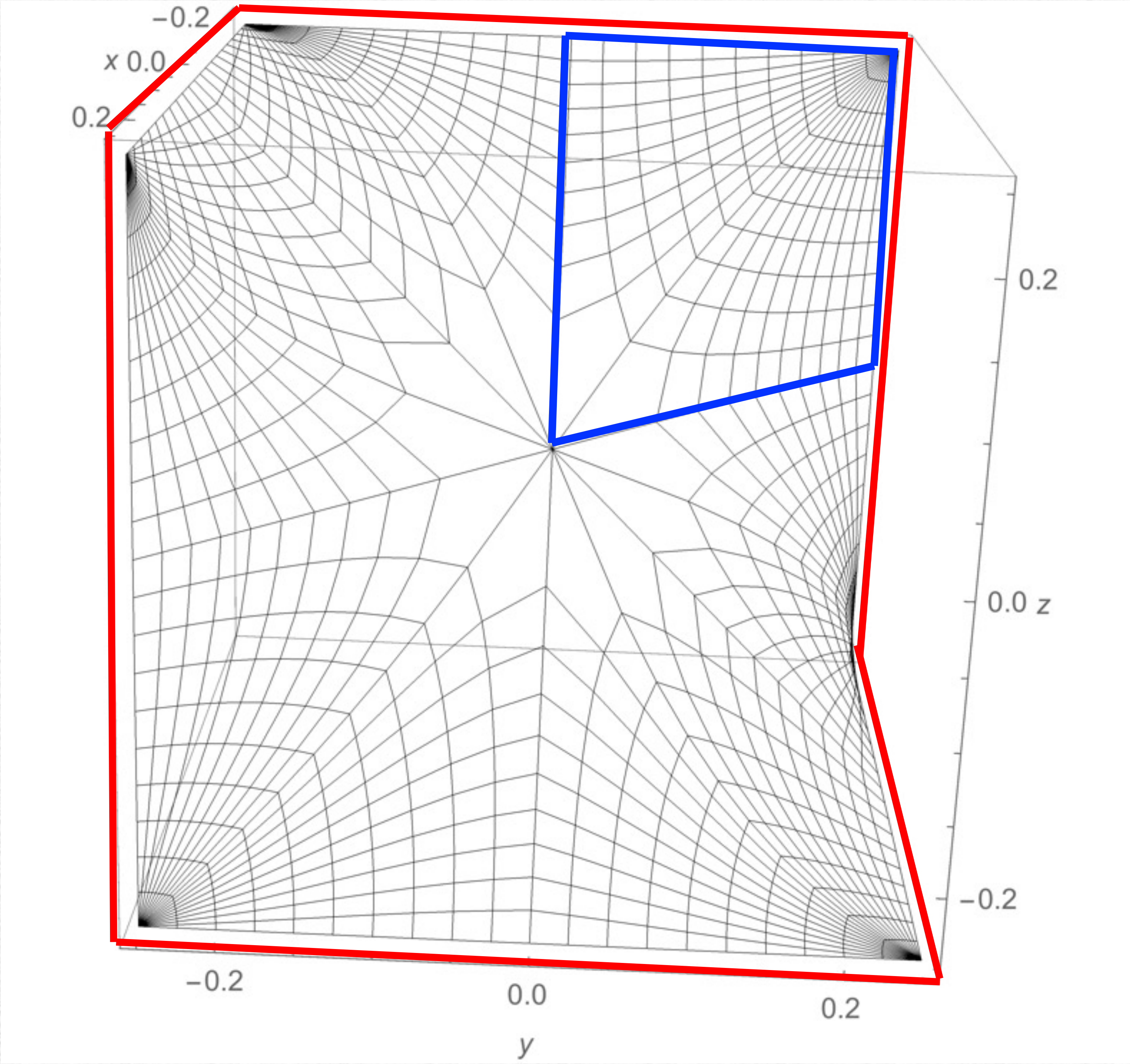
D: No.224, G:No.230, P:229

立方体と空間6角形



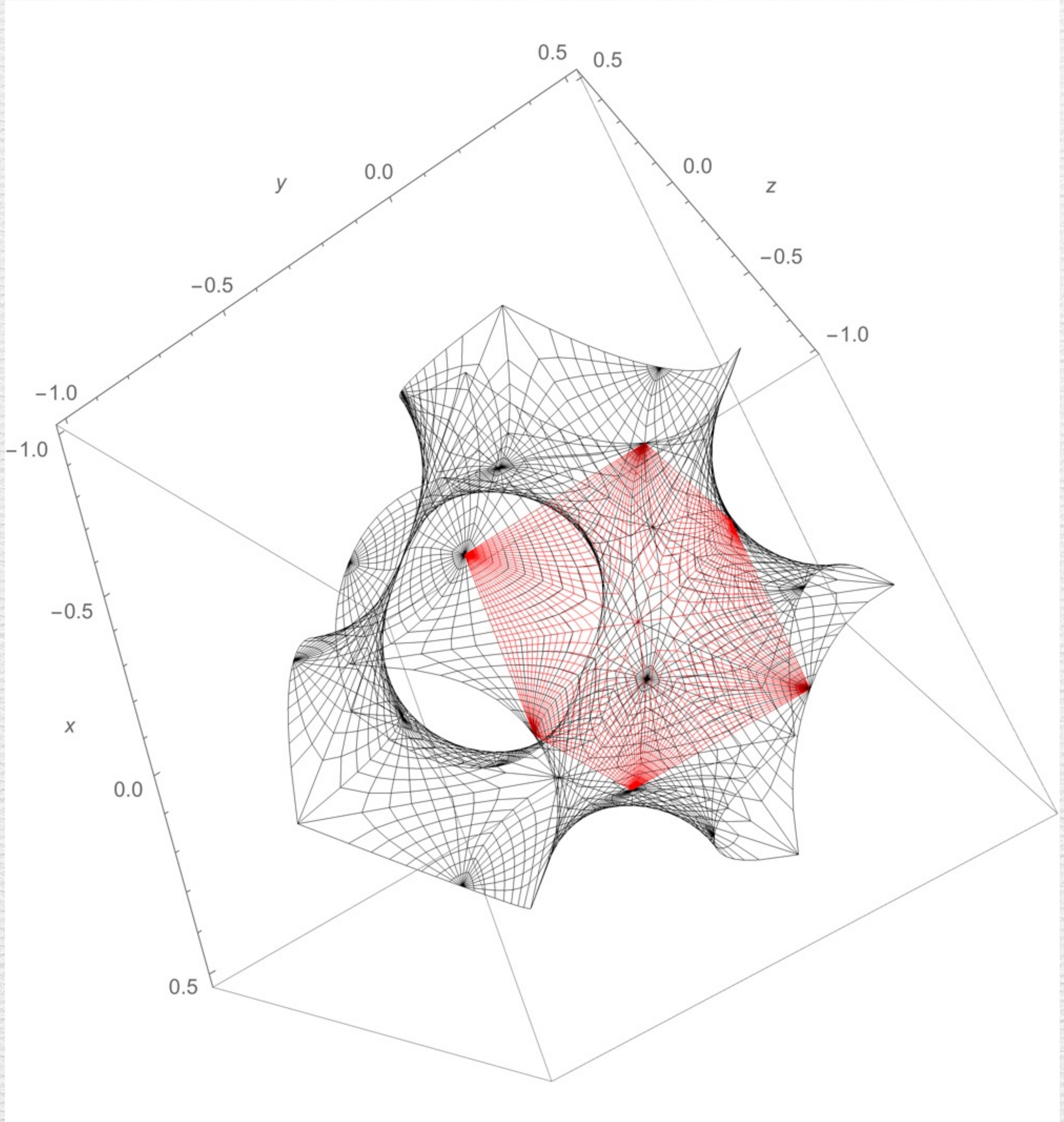
D曲面と空間6角形

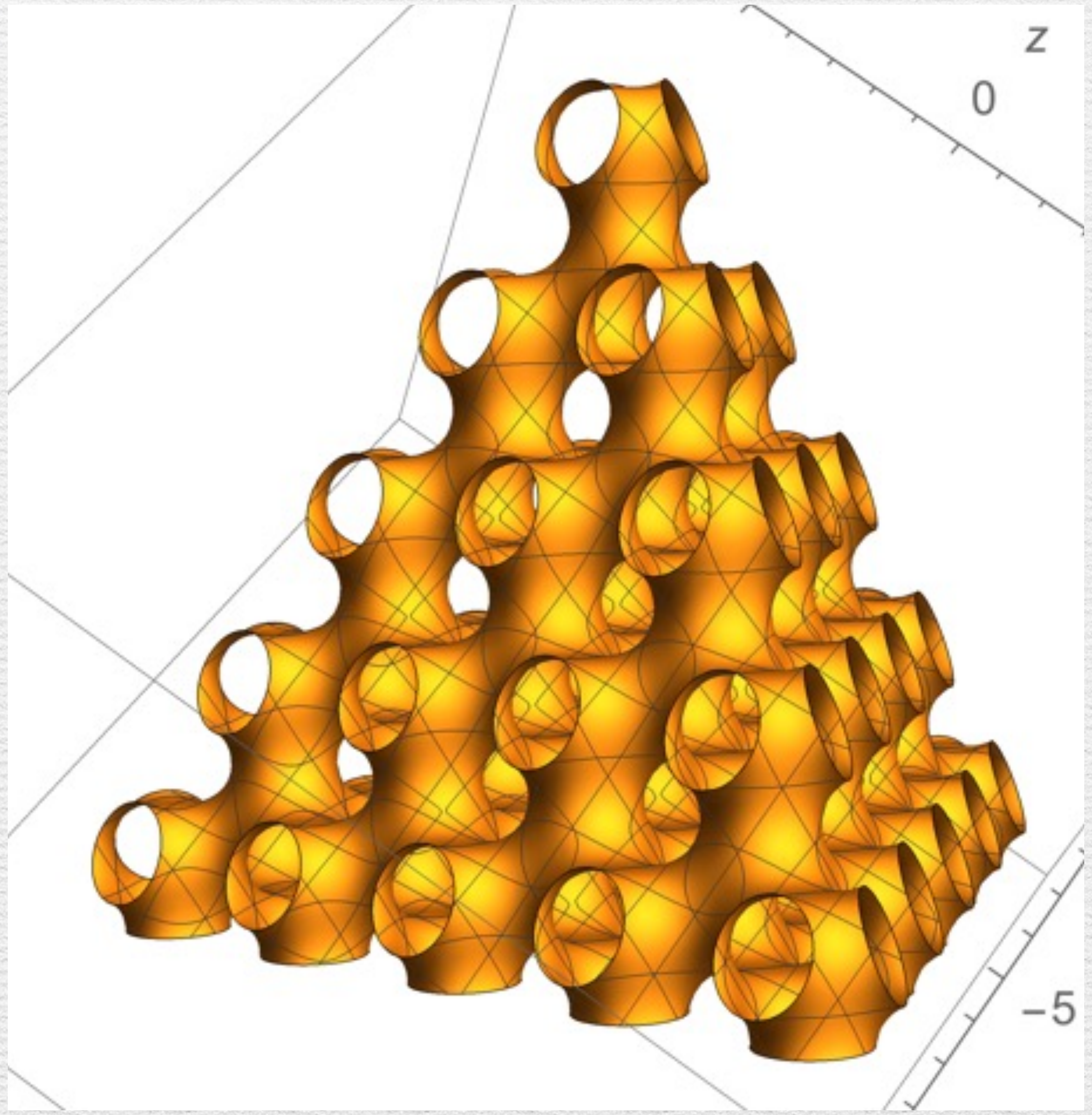




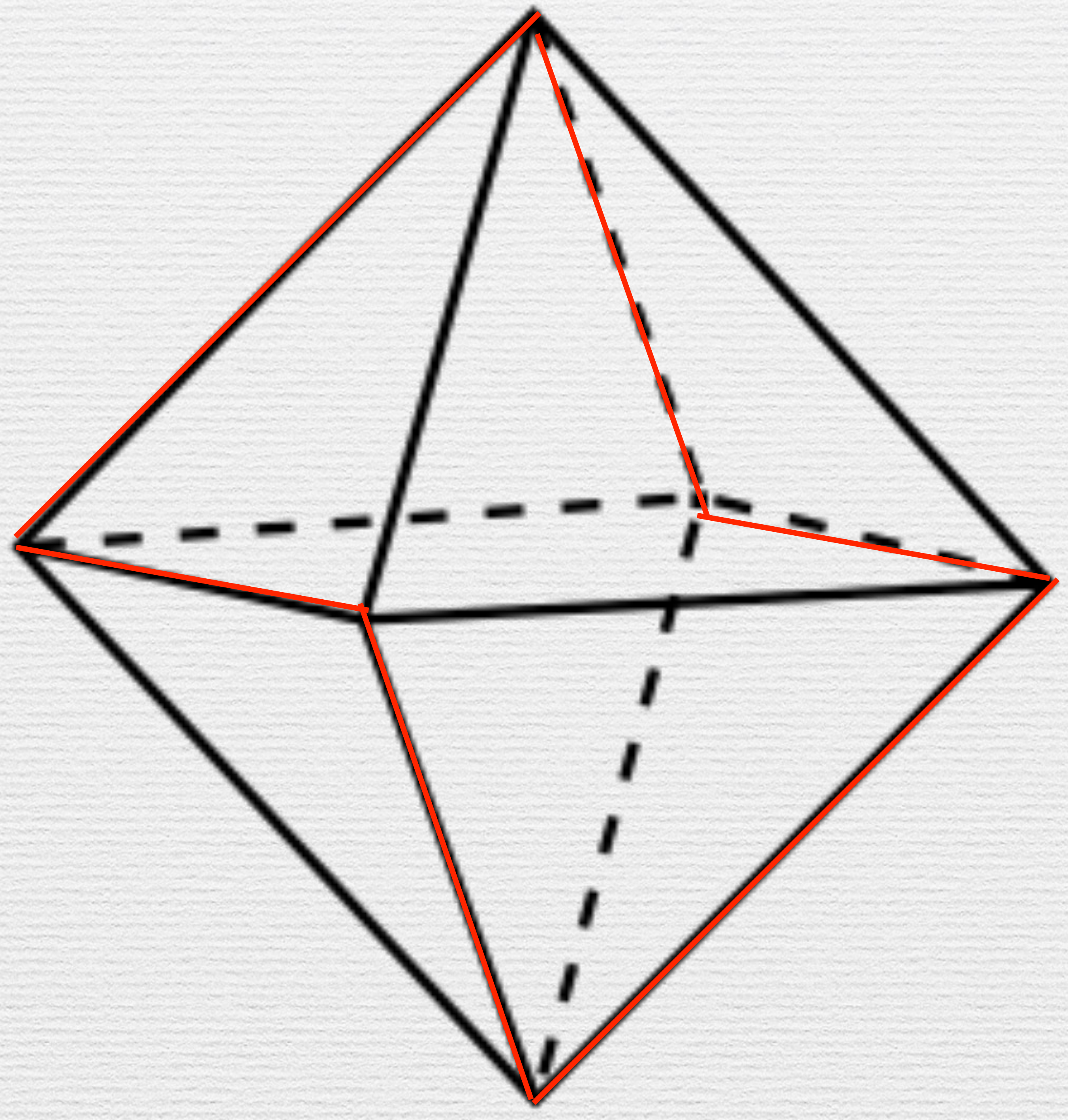
上の曲面の1/4が青の部分

D曲面の中の6角形

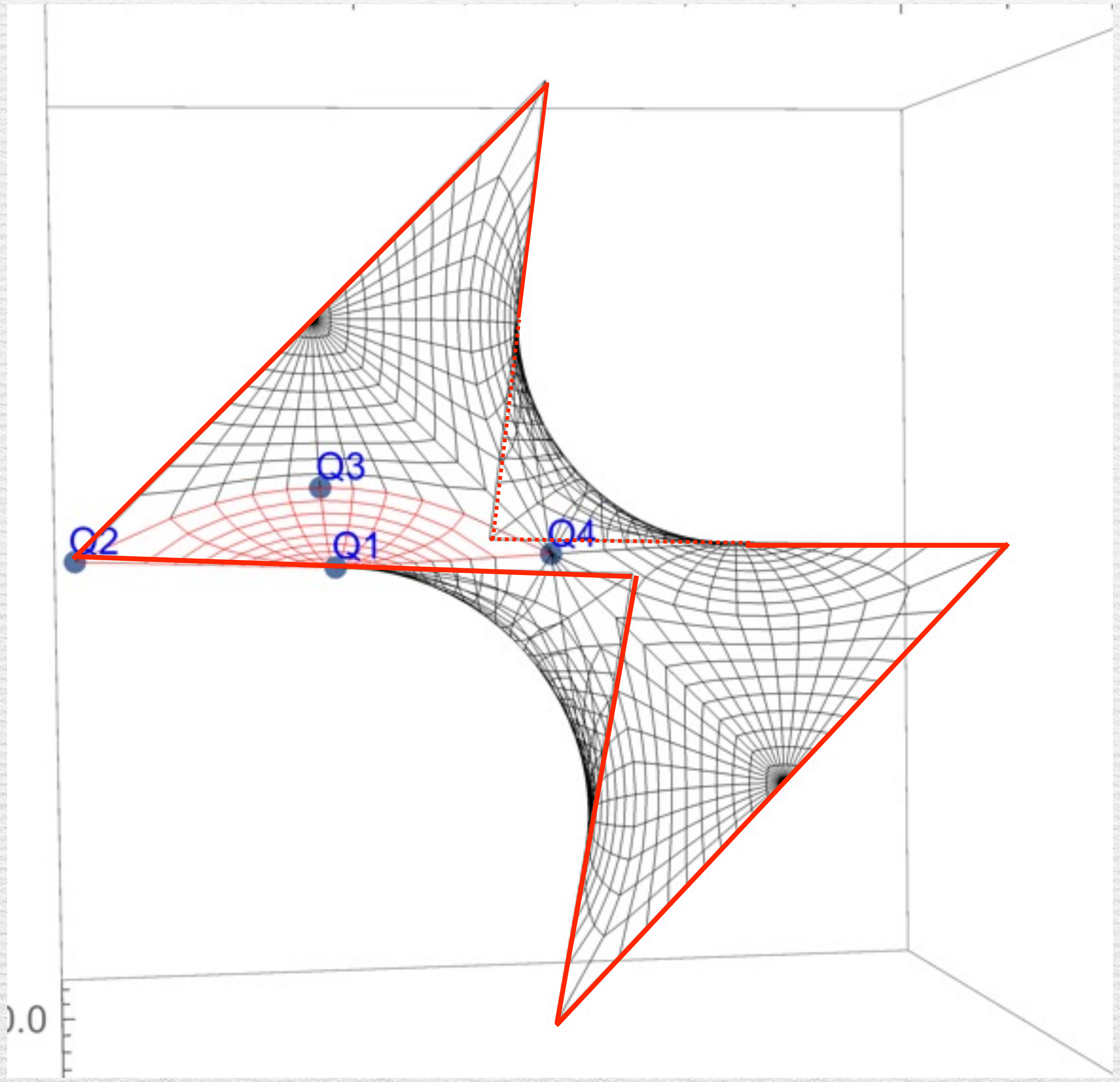




正8面体と空間6角形

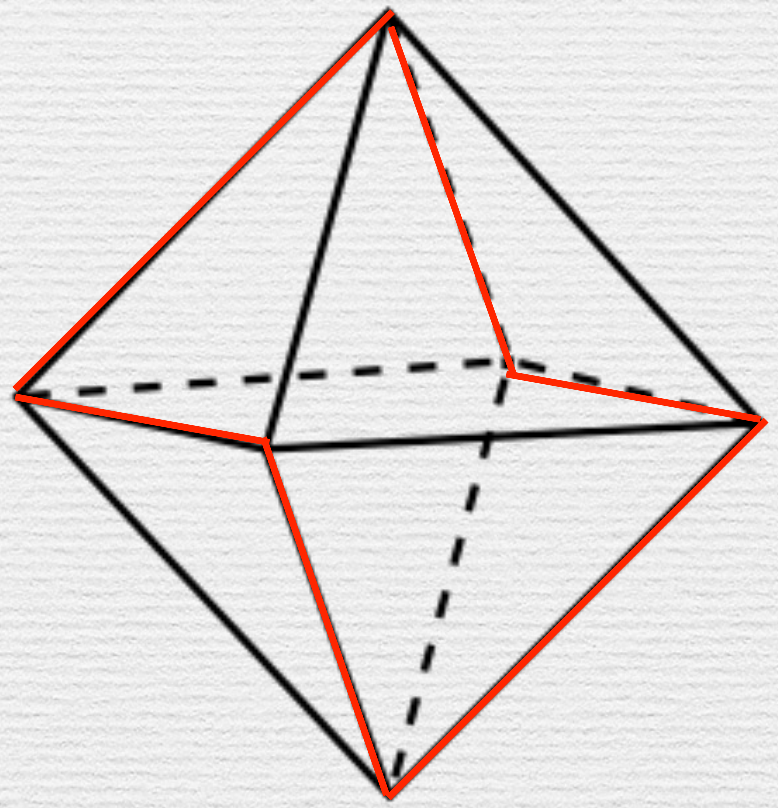


P曲面と空間６角形

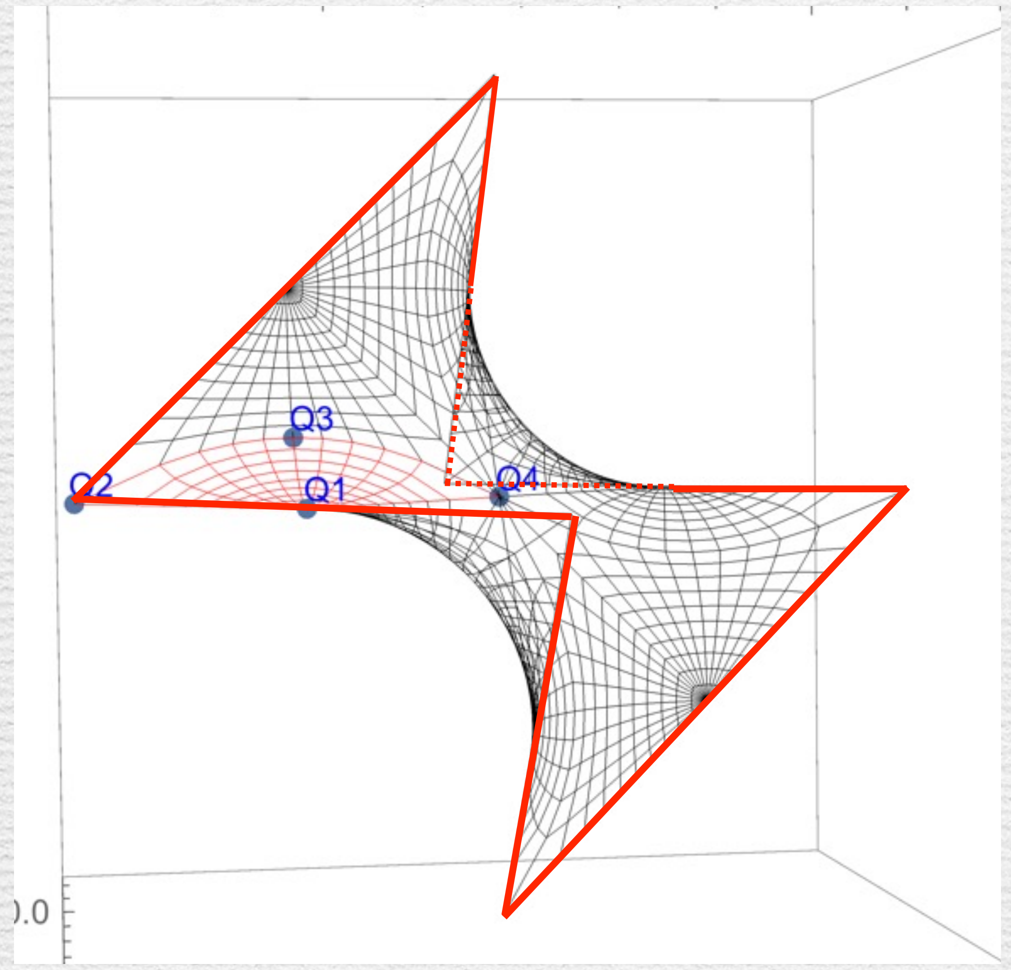


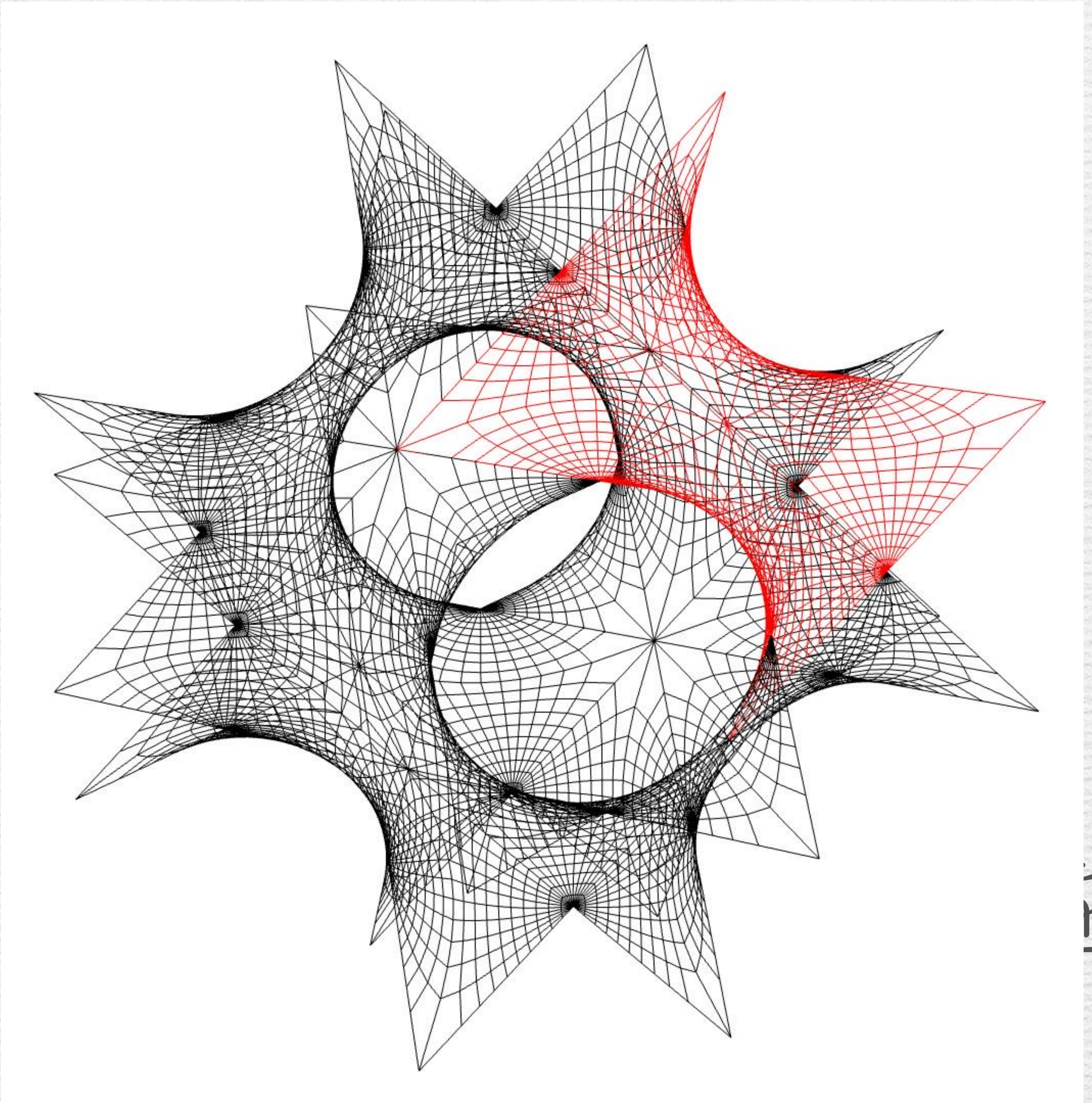
正8面体の

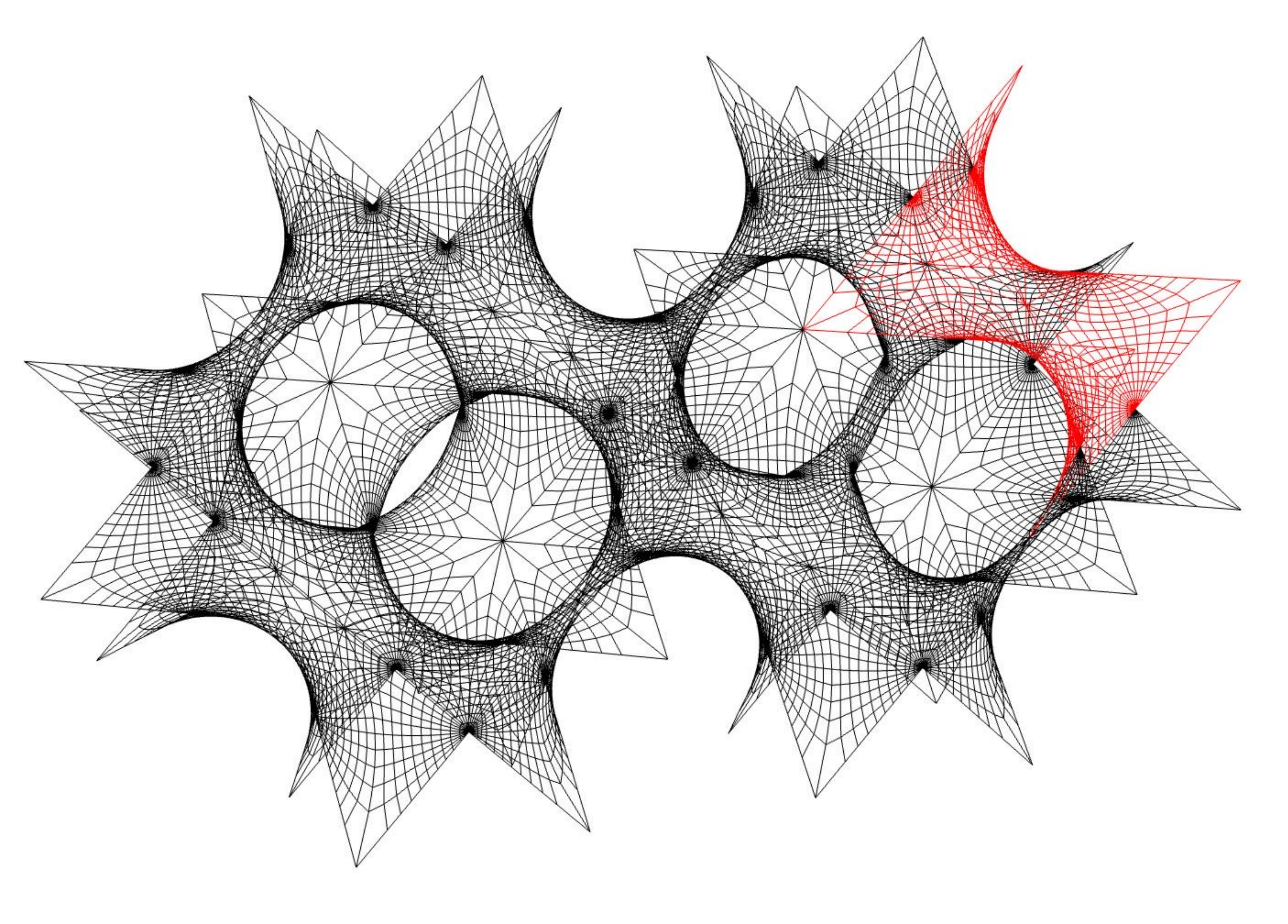
6角形を張る極小曲面



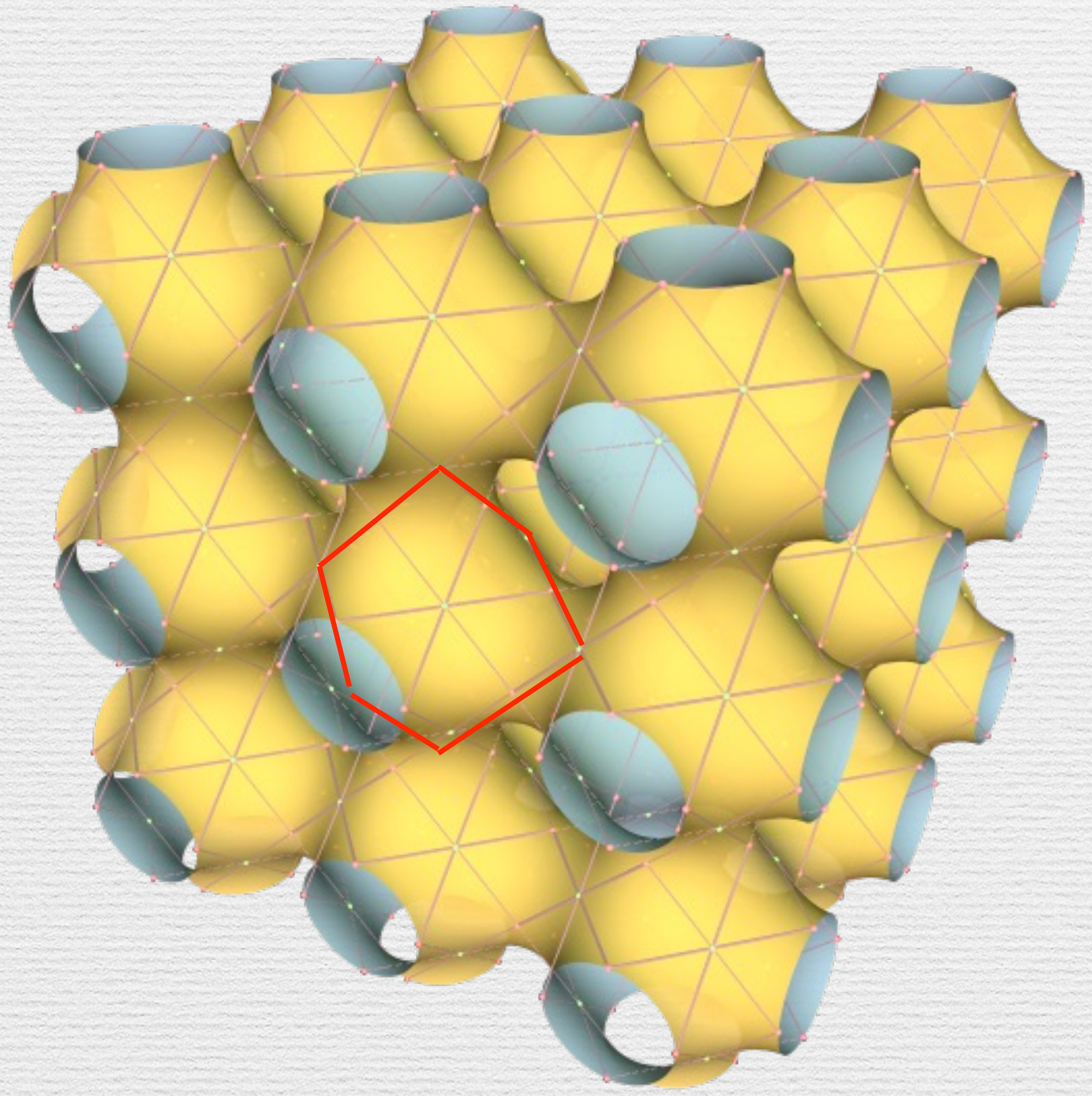
P曲面と６角形

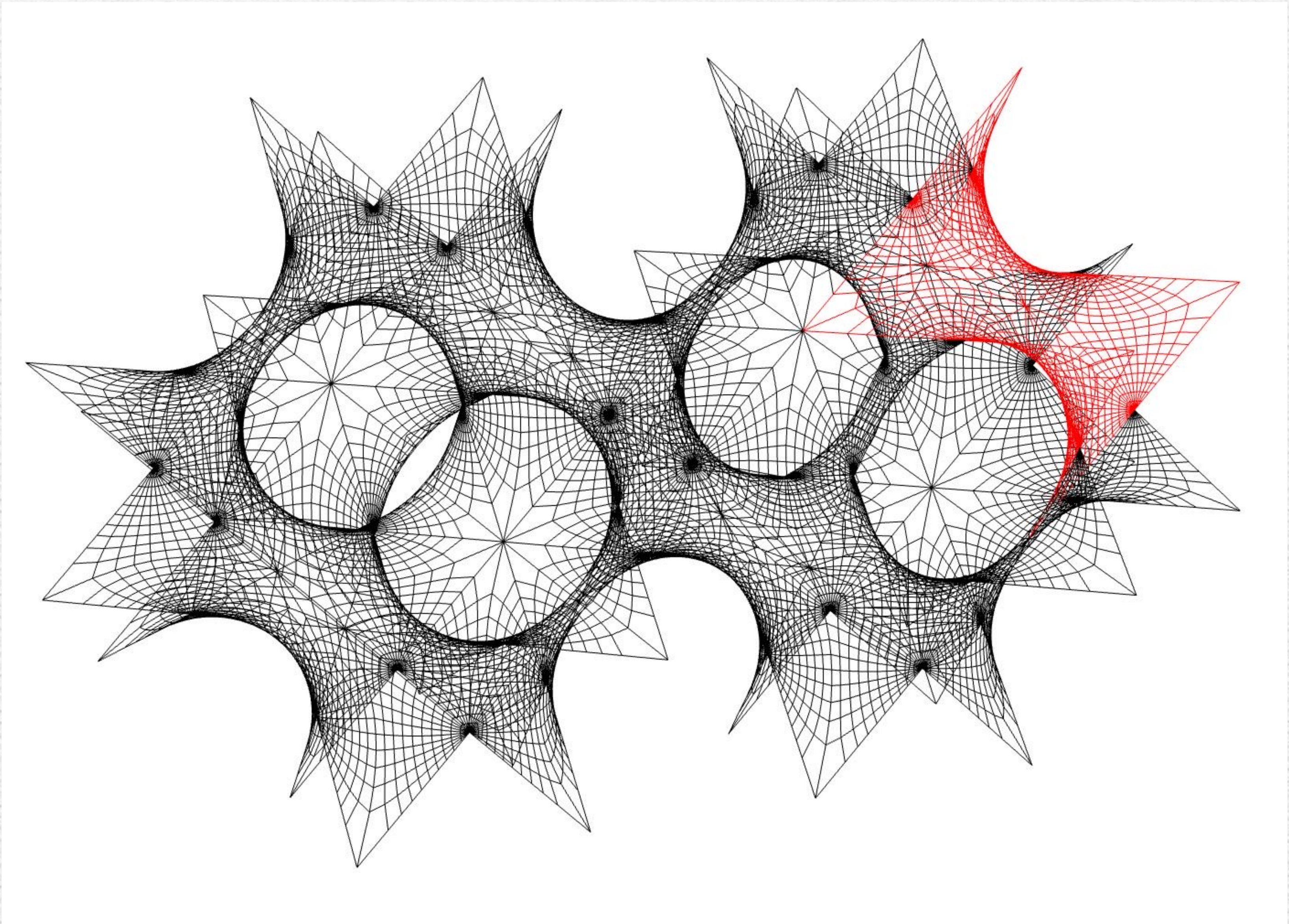






P曲面と正8面体の6角形

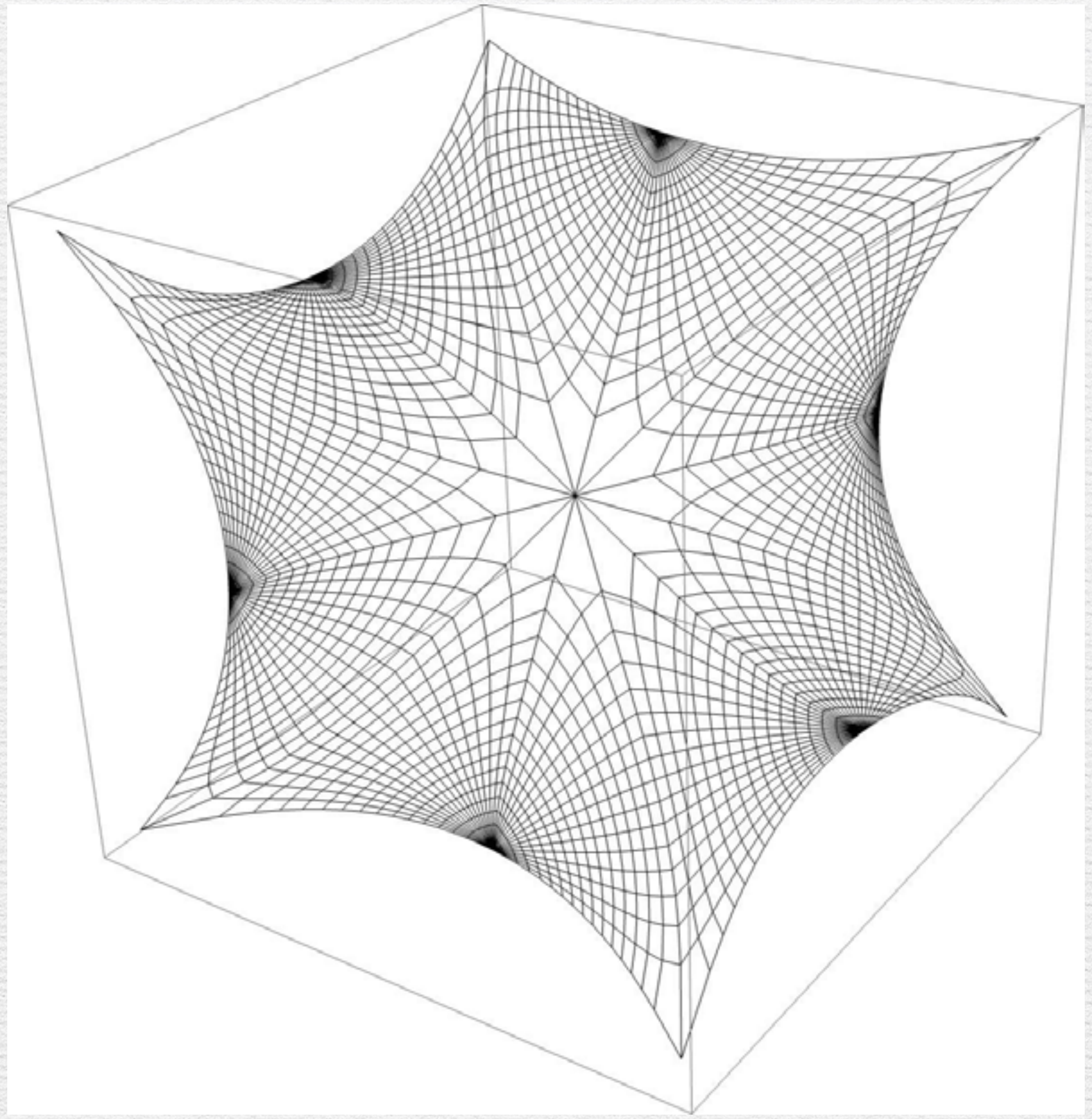


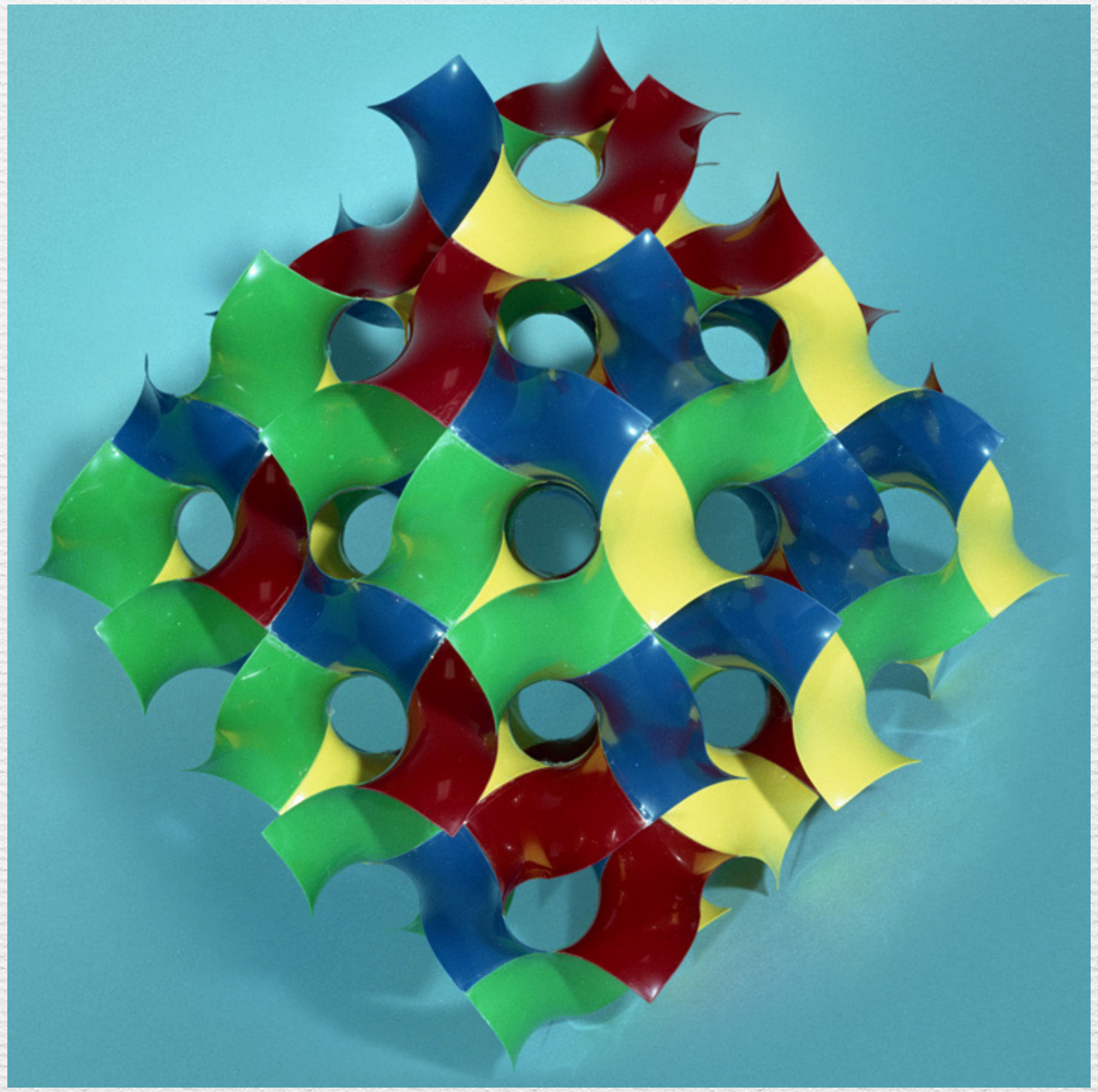


ジャイロイド曲面＝G曲面

どのように作るか？

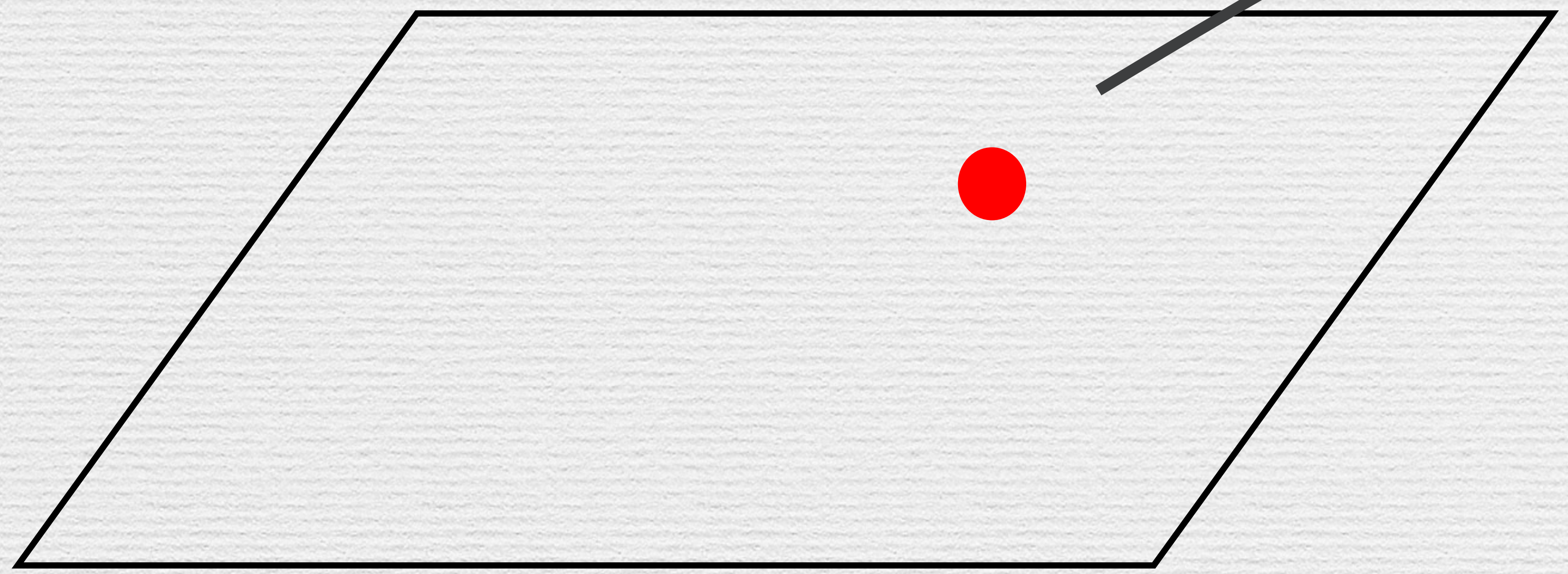
G曲面の「6角形」



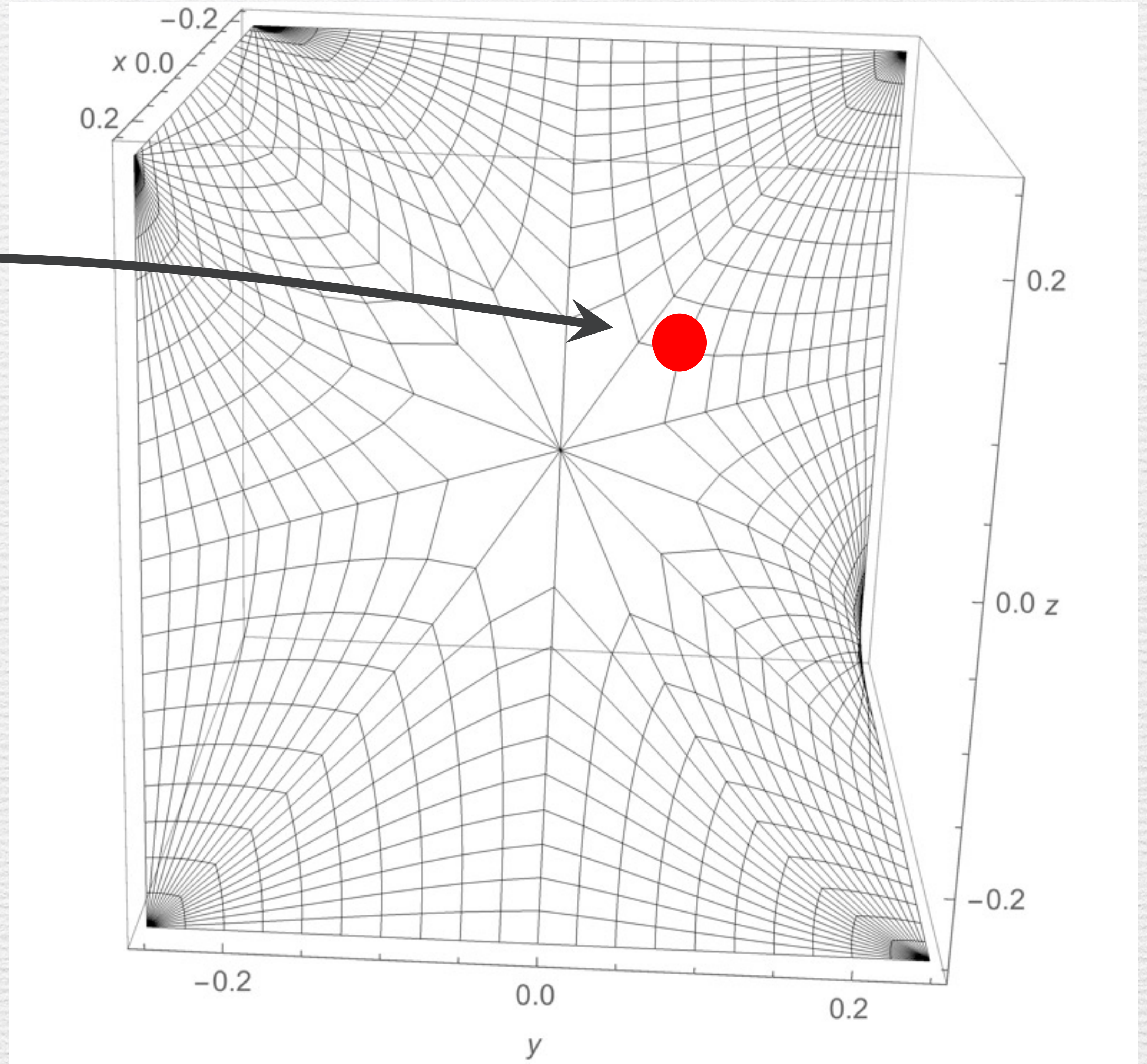


これはどのようにして作られるか.

曲面の与え方



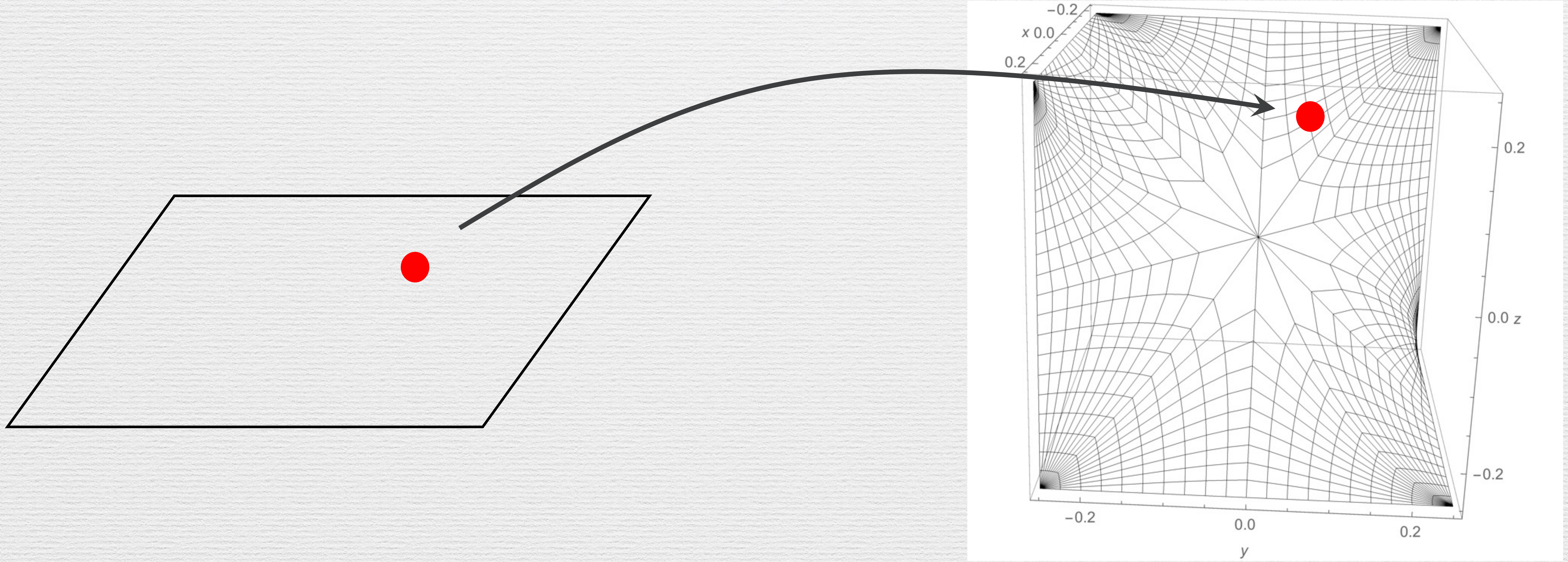
平面



空間

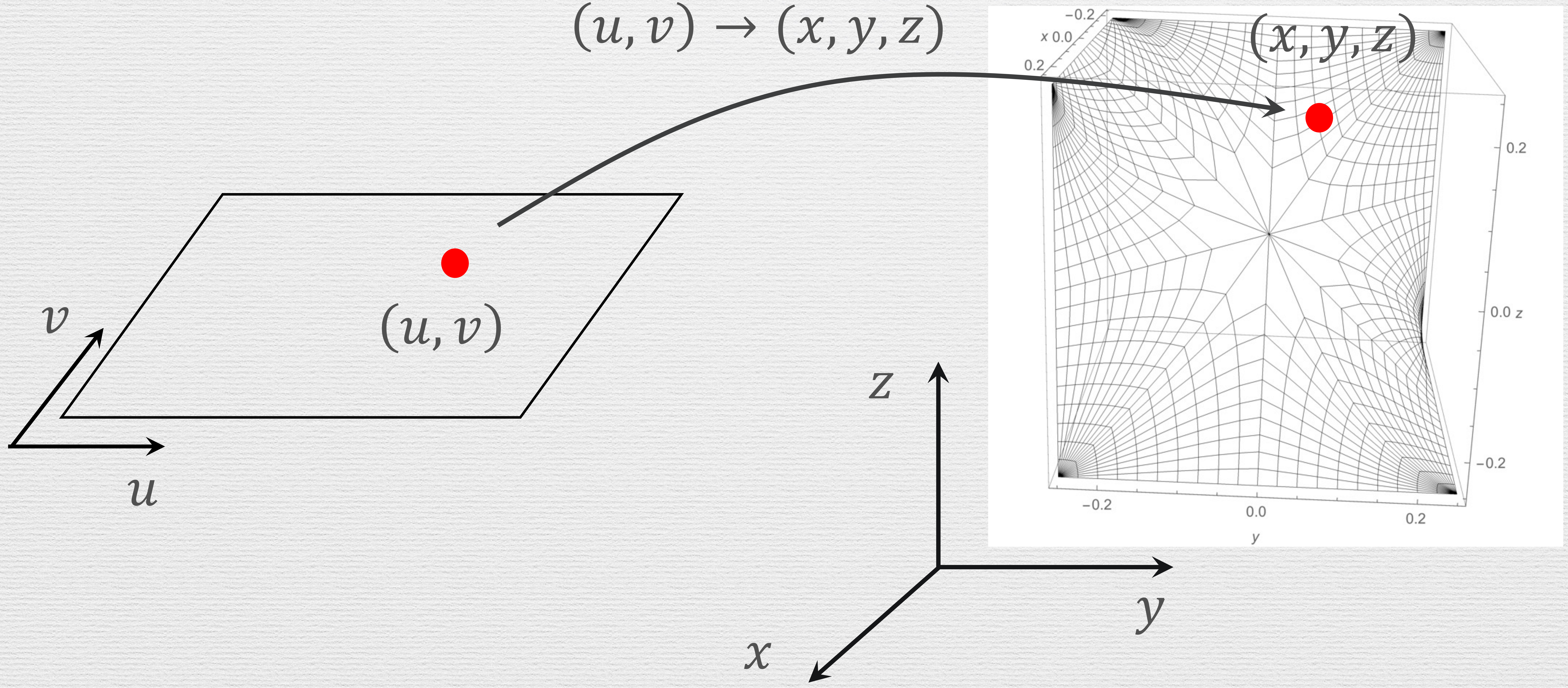
平面の点に曲面の点を対応させる＝写像

座標で与える

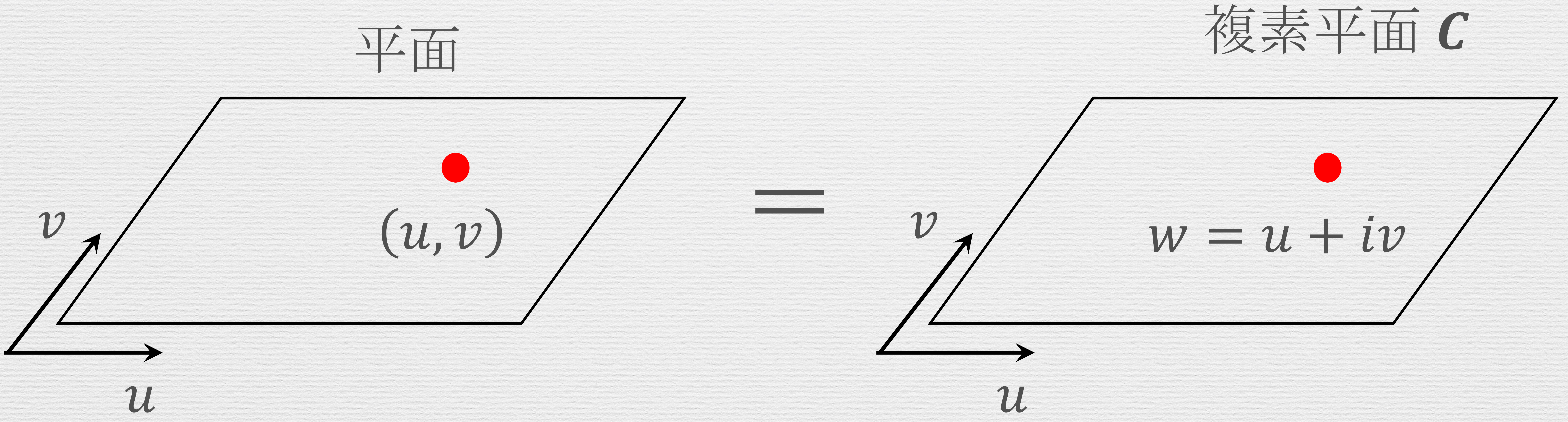


平面の点に曲面の点を対応させる＝写像

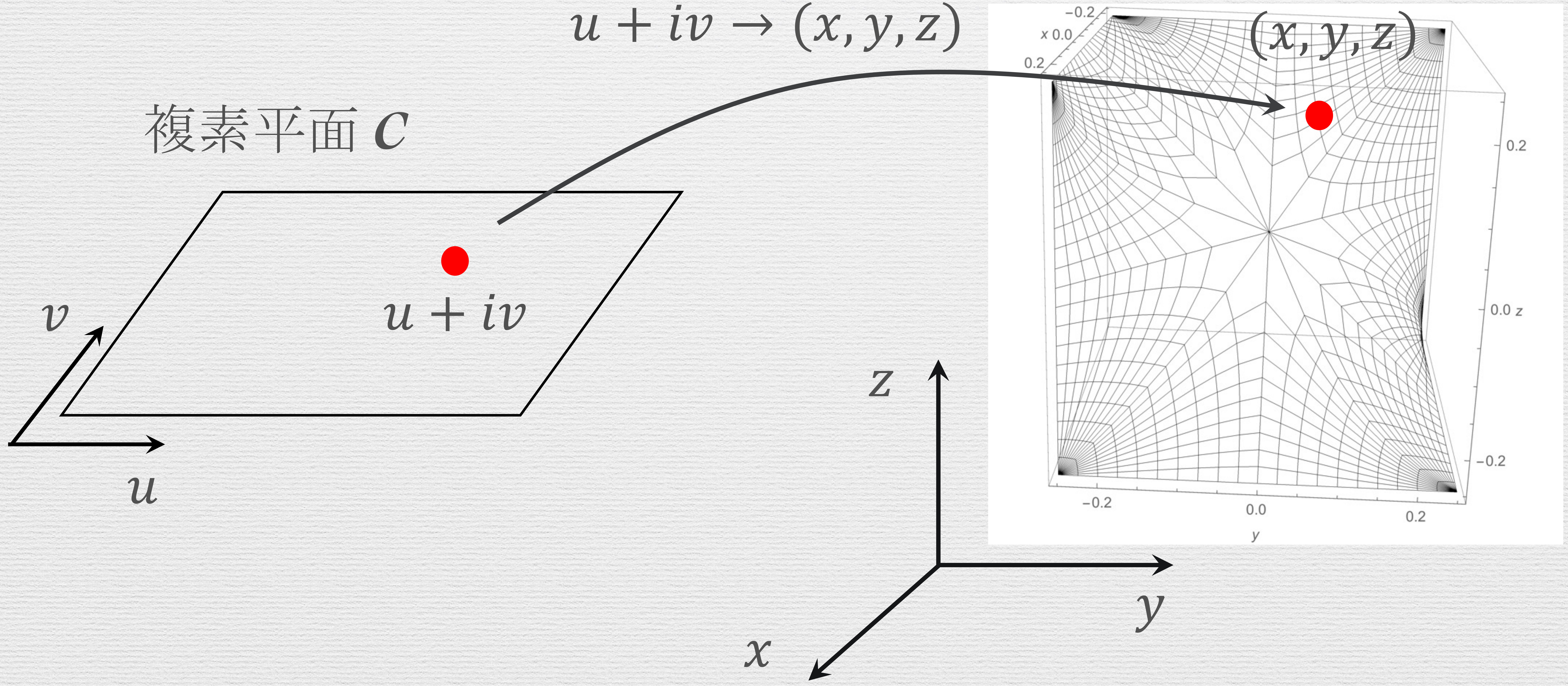
座標を使う



複素数を使う＝複素平面



複素平面から3次元空間への写像



複素数の関数を使う

3つの複素数

$$\boldsymbol{C} \ni w = u + iv \to \big(X(w), Y(w), Z(w)\big) \in \boldsymbol{C}^3$$

平面の点

$$\Big\downarrow \quad \text{実部をとる}$$

空間の点 $(x, y, z) \in R^3$

3つの実数

楕円積分で空間の点を与える

$$(x, y, z) = \mathrm{Re}(X(w), Y(w), Z(w))$$

wは複素数

実部をとる記号

$$= \mathrm{Re}\left(\int^w \frac{(1-z^2)dz}{\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}}, \int^w \frac{i(1+z^2)dz}{\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}}, \int^w \frac{2z\,dz}{\sqrt{z^8 - 14z^4 + 1}}\right)$$

これらは楕円積分で書くことができる

（レムニスケート曲線の弧長を与える関数）

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$\theta = \pi$のとき

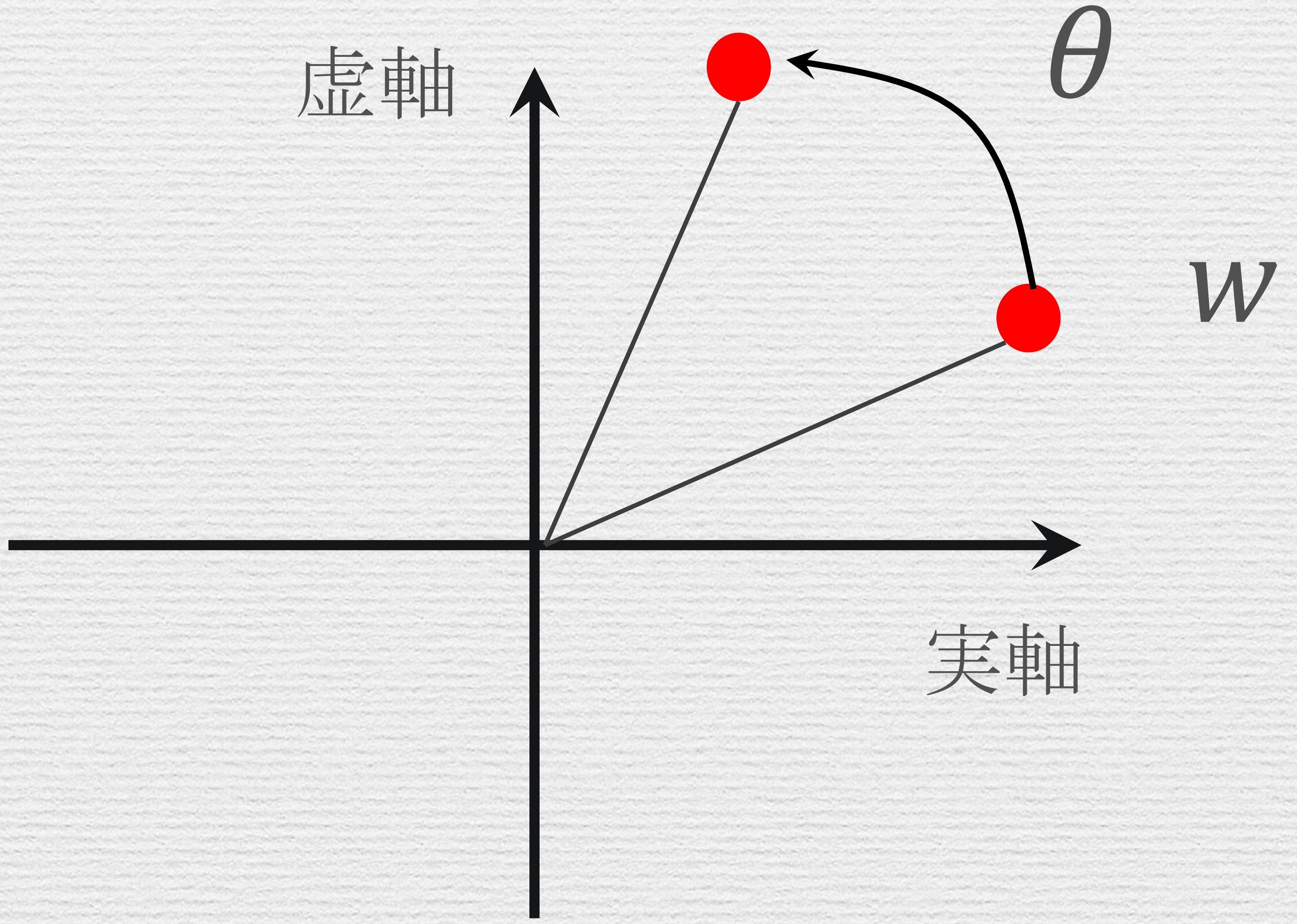
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$0, 1, \pi, e, i$$

オイラーの公式

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ をかけると複素平面の点、すなわち複素数がθだけ回転する

複素平面 C



6次元空間の中で ‘回転’ させる

$$\left(X(w), Y(w), Z(w)\right) \in C^3$$

3つの複素数→複素数3次元空間

‖

6個の実数→6次元空間

θだけ‘回転’させて

から実部をとる

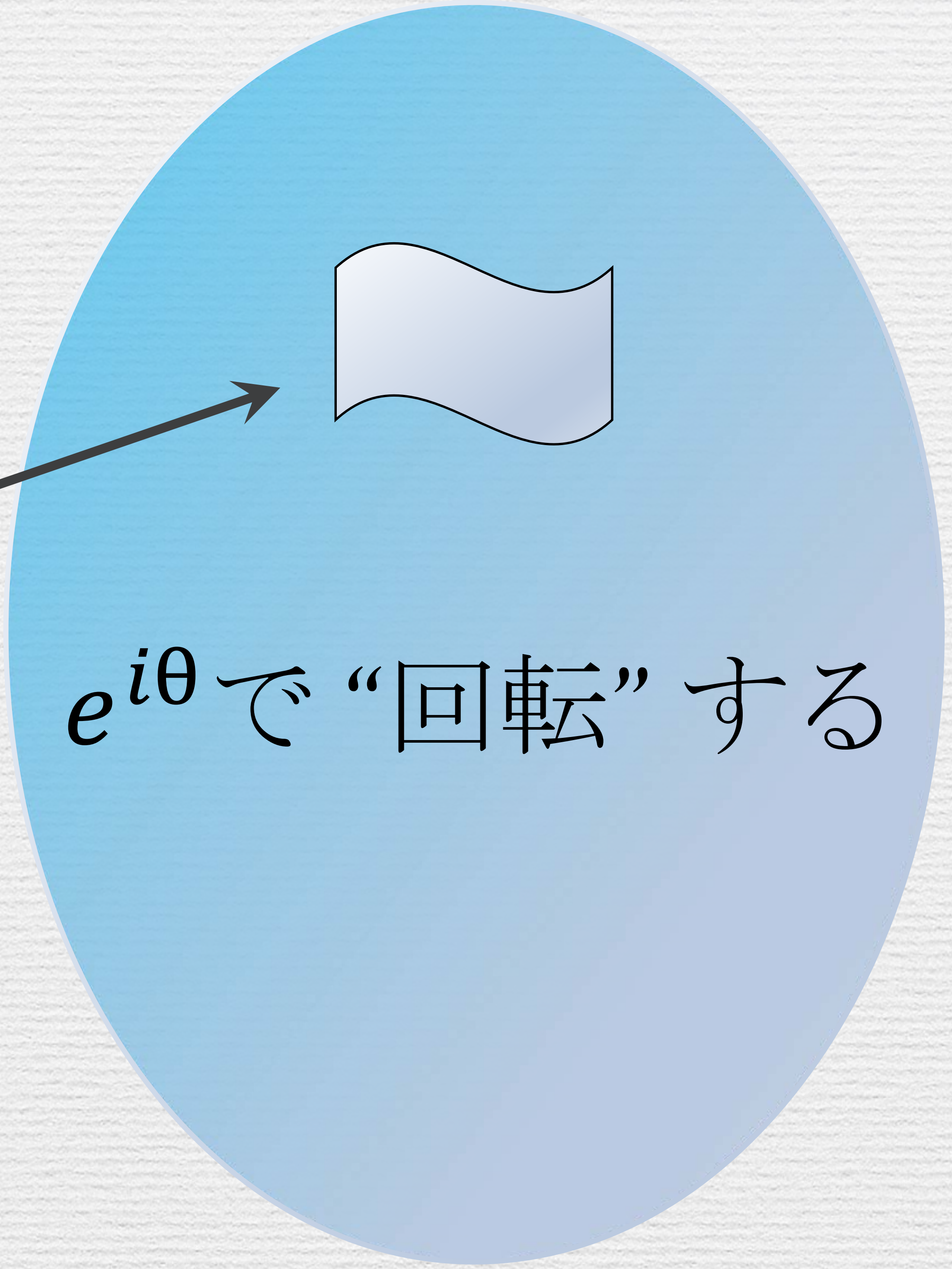
↓

$$(x, y, z) = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}X(w), e^{i\theta}Y(w), e^{i\theta}Z(w)\right)$$

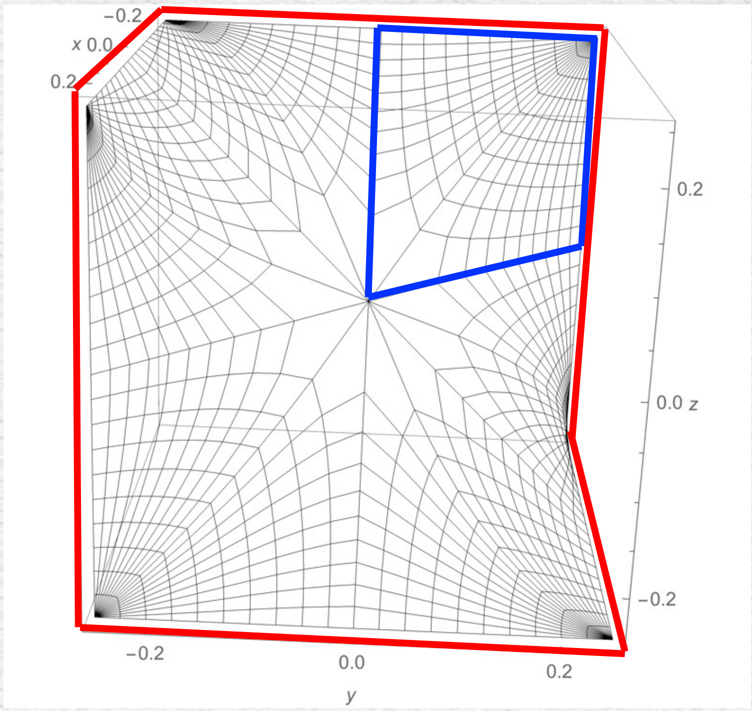
実3次元空間

実6次元空間$=C^3$

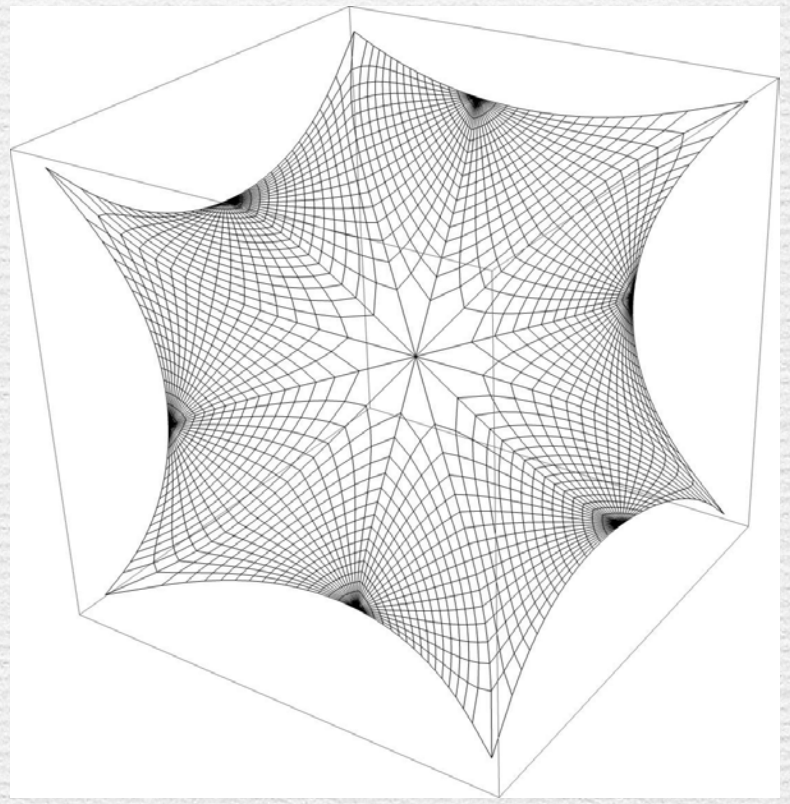
複素平面



$\theta = 0$

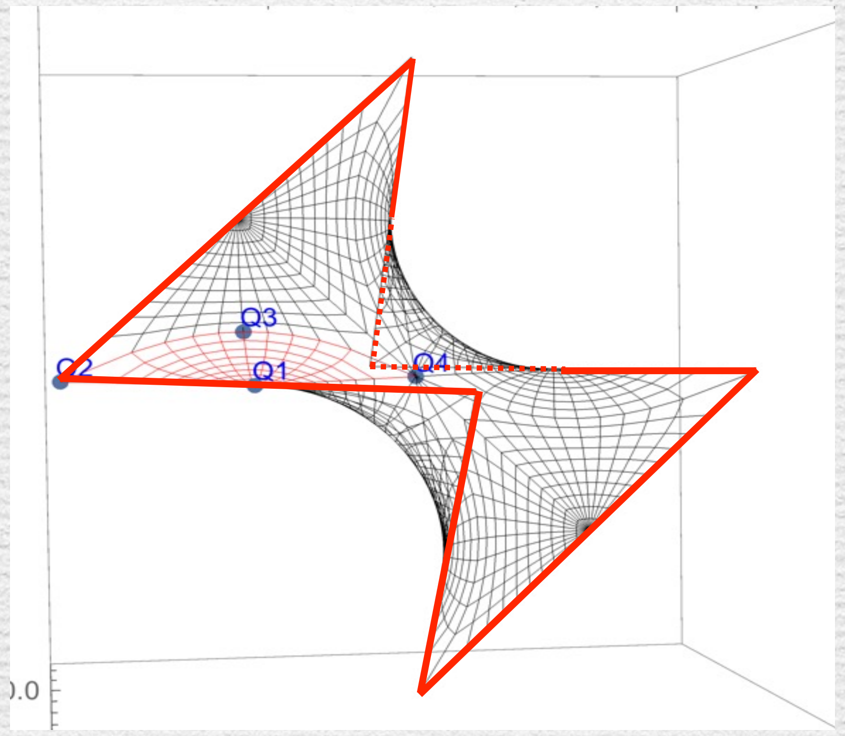


$\theta \fallingdotseq 38°$



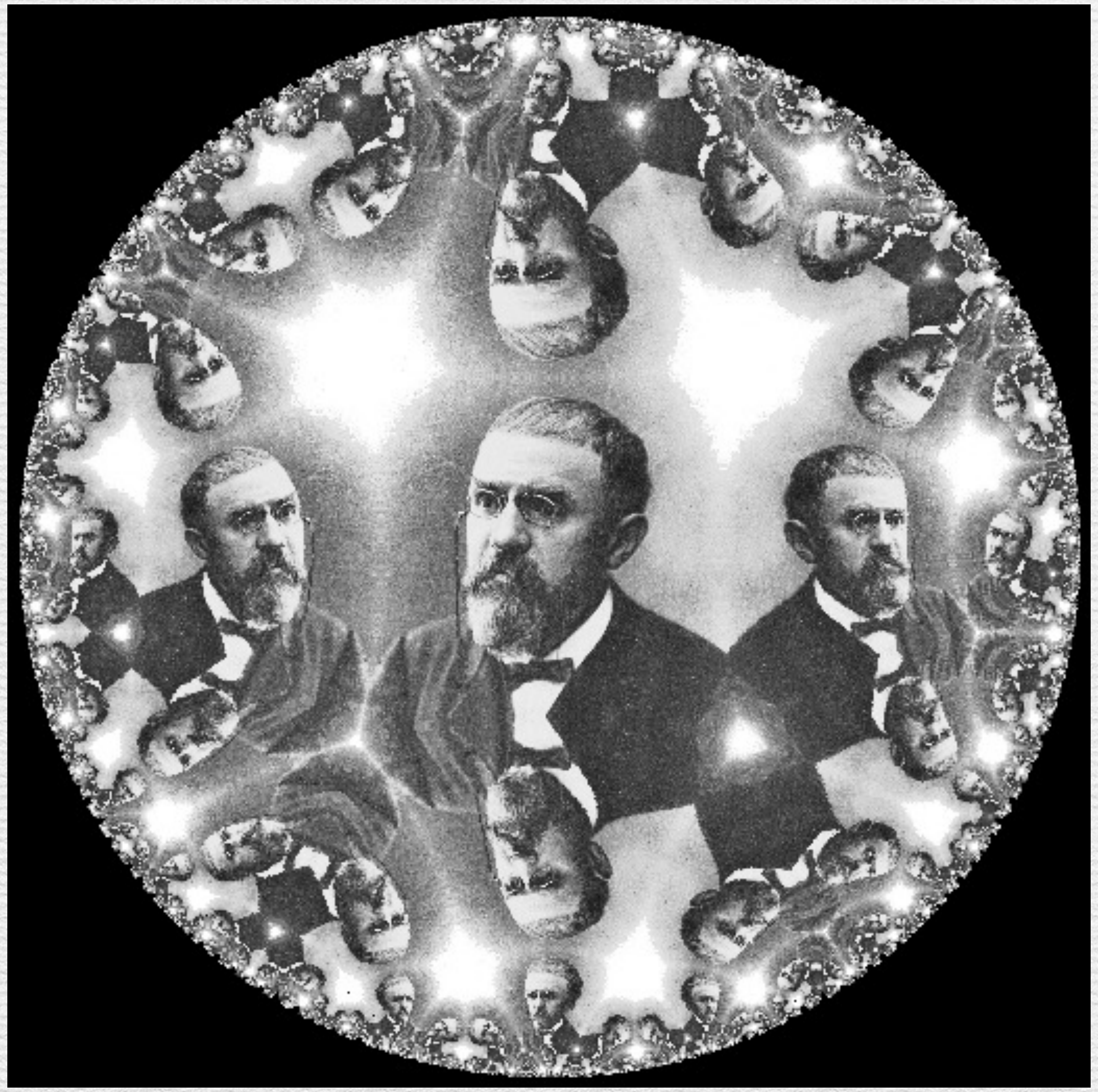
$\theta = \frac{\pi}{2}$

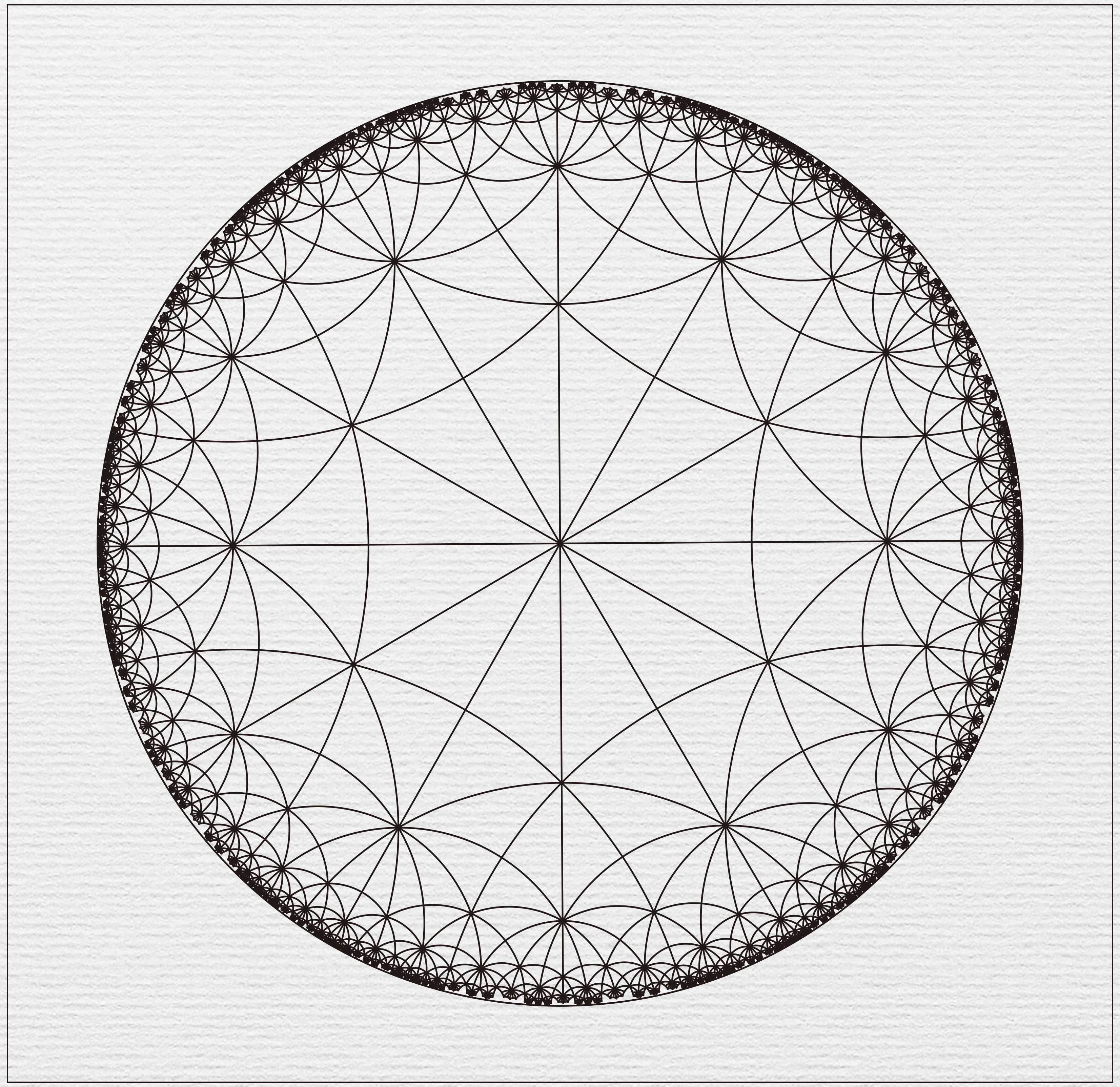
共役曲面という



途中のθでの曲面は自交差が生じる

ポアンカレ円盤



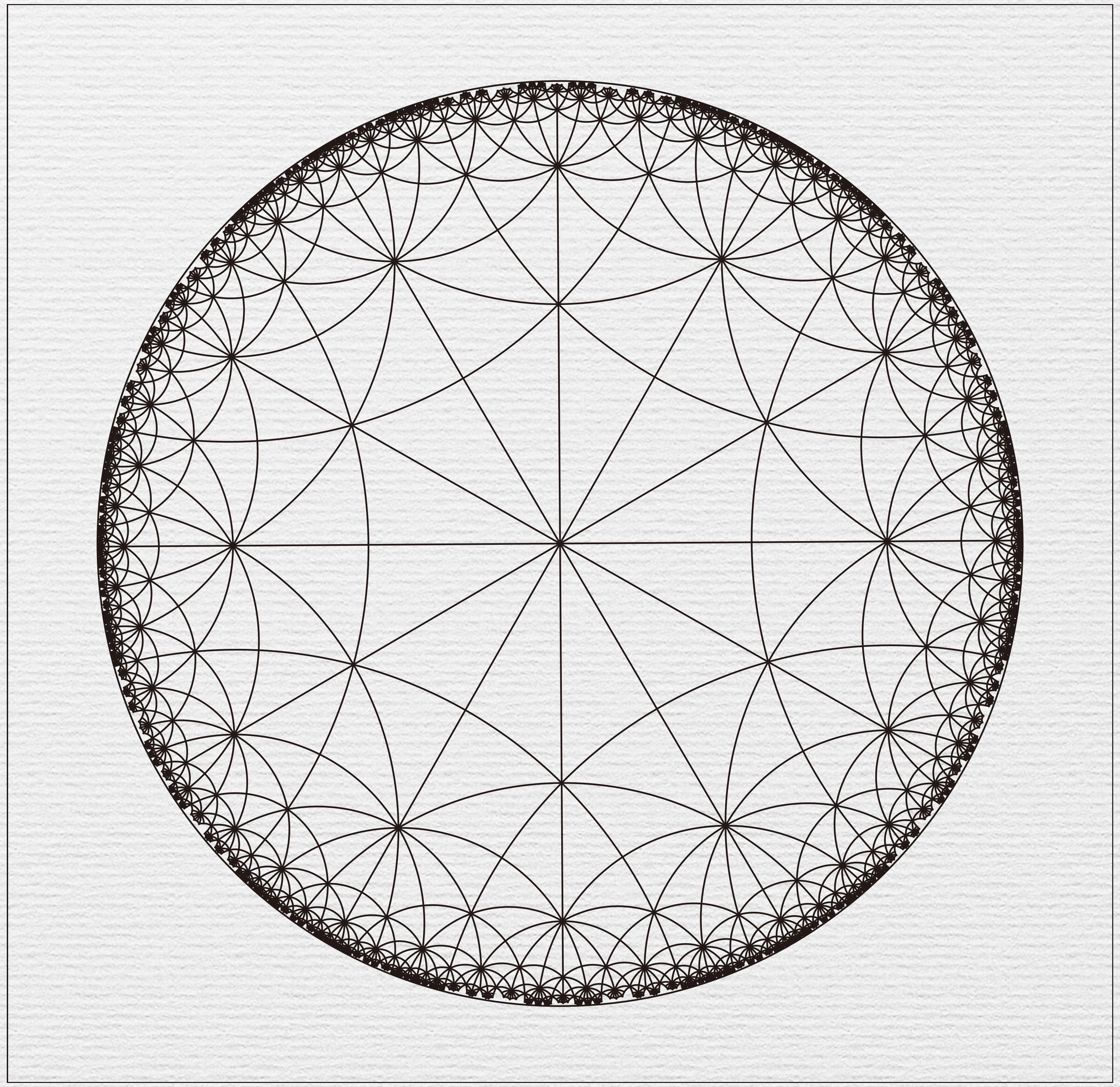


Popular Science Monthly Volume 82, Public domain, via Wikimedia Commons

http://www.malinc.se/m/ImageTiling.php

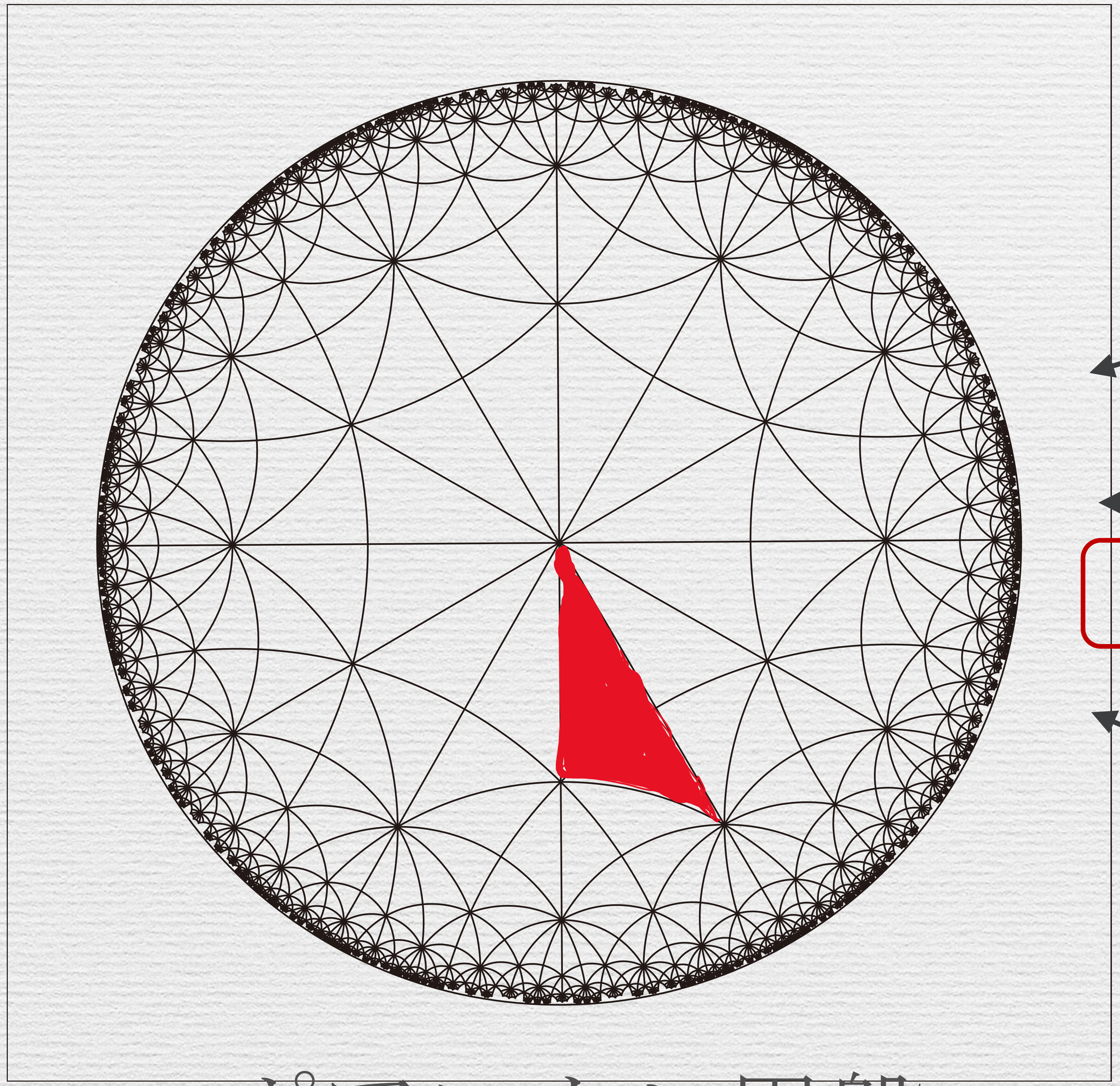
ポアンカレ円盤（双曲平面）

- 特殊相対性理論における4次元時空の中の双曲面
- “直線”: 直径か単位円に直交する円弧
- “3角形”の内角の和は180度より小さい
- 平行線の公理が成り立たない（非ユークリッド幾何）



単位円盤

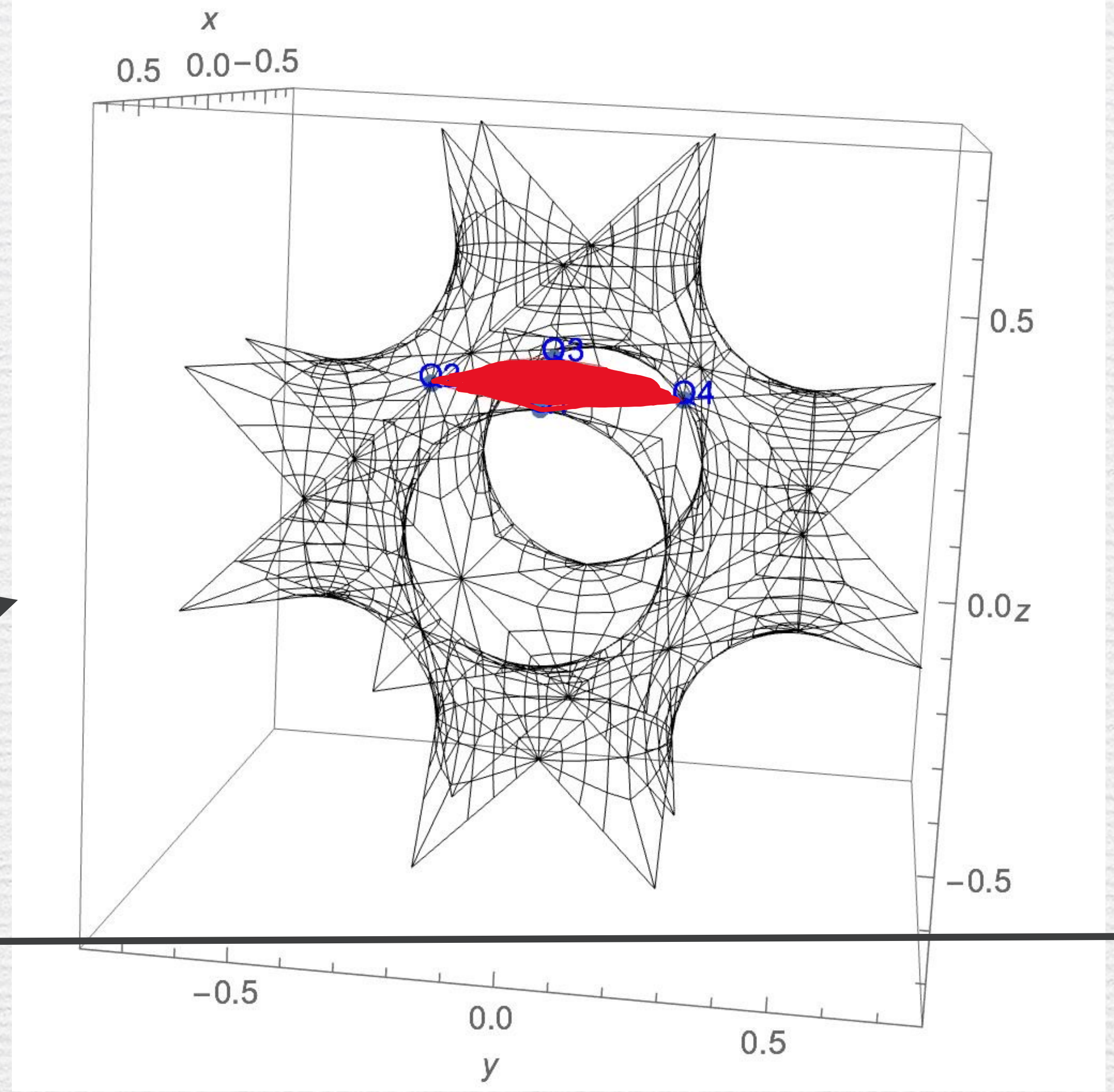
ポアンカレ円盤との対応



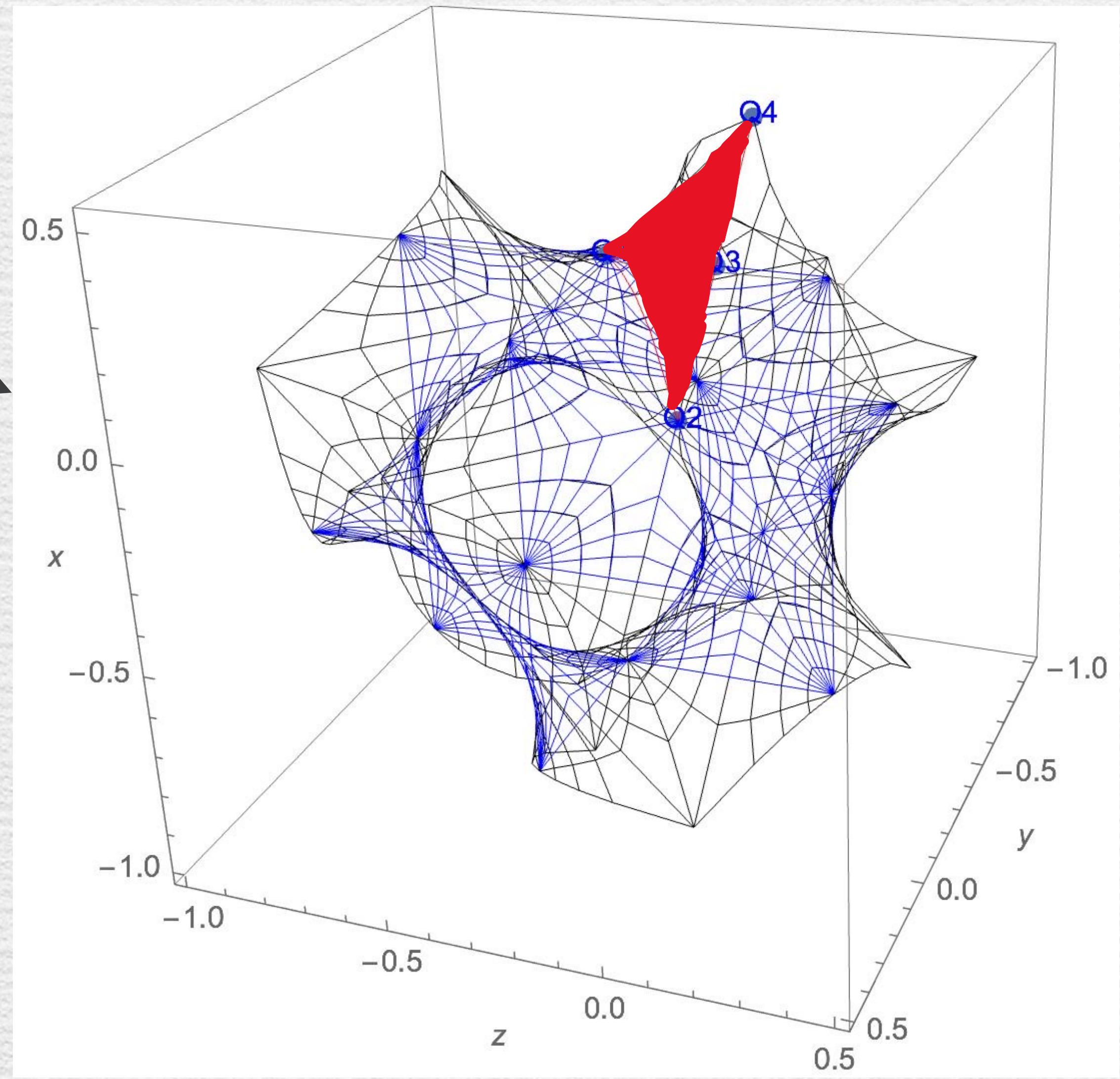
ポアンカレ円盤

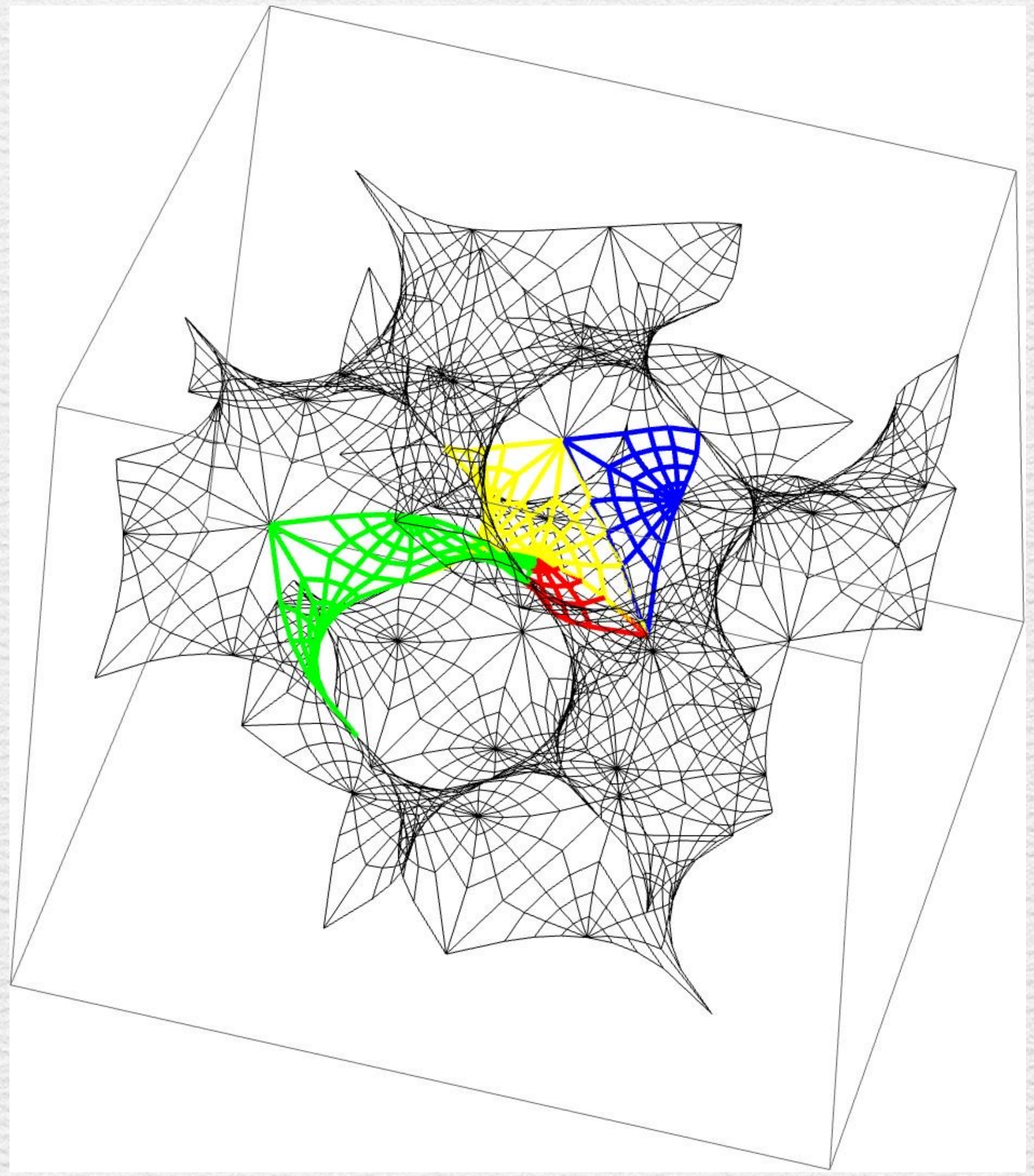
等角対応

D曲面



P曲面





G曲面

ポアンカレ円盤と曲面の対応

- ポアンカレ円盤から曲面への対応はテータ関数で記述できる。
- テータ関数は、惑星の運動や振り子の運動を記述する関数。

幅広い範囲の数学

- 対称性（群論）
- 極小曲面（微分幾何学）
- 楕円円積分と楕円関数（解析学）
- 双曲幾何(非ユークリッド幾何）

これらの曲面の面白さ

- 極小性　負曲率の曲面は多様性がある
- 対称性が高い

　ある一定の空間に規則正しく組織を詰め込む際に取られる構造？