おかしな分数の足し算と連分数

宍倉光広

（京都大学 大学院理学研究科 数学教室）

第 15 回おもしろ数学教室　2010 年 10 月 13 日　藤岡市立北中学校

概 要

分数の足し算で $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ としてしまったことはありませんか？ この計算は何か意味はないのでしょうか？ 実は，このおかしな計算は，無理数を近似する分数を見つけたりするときに意味を持ってきます。近似する分数を表すために，分数の分母の中にまた分数が入って... というのを繰り返した連分数というものも自然に現れてきます.

1　おかしな分数の足し算

皆さんは小学校の算数で，$\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{3}$ を足すときには，まず通分して $\dfrac{3}{6}$ と $\dfrac{2}{6}$ にしてから足して答えが $\dfrac{3+2}{6}=\dfrac{5}{6}$ とすると習ったと思います．でも間違って分子どうし，分母どうしを足してしまって

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$$

としてしまったことはないでしょうか？ ここでは，この計算に何か意味がないかを考えてみます.

> **有理数.**　整数分の整数という分数の形で表される数を**有理数**と呼びます．これからは，$\dfrac{a}{b}$ と書いたときには，a と b は整数で b は正で，しかもこれ以上通分できない形になっている（**既約**である）と約束します.
> 有理数でない数（実数）を**無理数**といいます.

おかしな足し算は普通の足し算とは別の記号を使って

$$\frac{a}{b}\boxplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

と書くことにしましょう．ただし，$\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ は上で約束したように，分母は正で，既約だとします．例えば,

$$\frac{1}{2}\boxplus\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}, \qquad \frac{2}{3}\boxplus\frac{3}{5}=\frac{2+3}{3+5}=\frac{5}{8}$$

です．普通の足し算との大きな違いは，この足し算では，2 つの数を足しても大きくなりません．

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \boxplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{5} < \frac{2}{3} \boxplus \frac{3}{5} = \frac{5}{8} < \frac{2}{3}.$$

不等式． x が y より小さいとき（言い換えれば y が x より大きいとき），

$$x < y \qquad (\text{または } y > x)$$

と書きます．両辺に同じ数 z を足しても大小関係は変わりません．

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x + z < y + z$$

両辺に同じ**正の数** z をかけても大小関係は変わりません．

$$x < y, \quad z > 0 \quad \Longrightarrow \quad xz < yz$$

しかし，両辺に同じ**負の数** z をかけると大小関係は**反対**になります．

$$x < y, \quad z < 0 \quad \Longrightarrow \quad xz > yz$$

x が y 以下のとき（つまり，x が y より小さいか，または等しいとき）には，

$$x \leqq y \qquad (\text{または } y \geqq x)$$

と書きます．

実は足し算 $\boxplus$ には次のような性質があります．

定理 1． $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ は前記の約束に従うとすると，$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ならば，

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \boxplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

やってみよう． 上の定理を証明して下さい．

ヒント． 例えば，$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ということは，差 $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ が正になるということですし，$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ を示すには，差 $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}$ を考えてそれが正になることを示せばよいわけです．

答． $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ より，$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc}{bd} - \frac{ad}{bd} = \frac{bc - ad}{bd} > 0$. ゆえに，$bc - ad > 0$. 一方，

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} - \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ba + bc - ab - ad}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0.$$

反対側の不等式も同様に示せます．

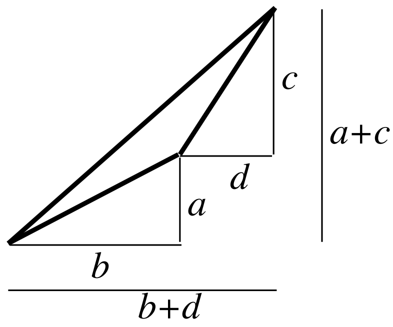


図 1: 一次関数の傾きを用いた証明

2　フィボナッチ数列

$x_1 = 1 = \dfrac{1}{1}$ と $x_2 = \dfrac{1}{2}$ から出発して，次々と分数を作っていってみましょう．

$$x_3 = \frac{1}{1} \boxplus \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \quad x_4 = \frac{1}{2} \boxplus \frac{2}{3} = \frac{3}{5}, \quad x_5 = \frac{2}{3} \boxplus \frac{3}{5} = \frac{5}{8}, \quad x_6 = \frac{3}{5} \boxplus \frac{5}{8} = \frac{8}{13}, \ \ldots$$

数列． いくつかの数を並べたものを数列といいます．記号で表すときは，何番目の数かを表す番号を右下に付けて，

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ \ldots$$

などとします．（ n 番目が x_n になります．）

やってみよう． 上で作った数列は，$x_{n+1} = x_n \boxplus x_{n-1}$ と定義しています．この x_n の分子と分母を a_n と b_n とすると，

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \quad \text{そして} \quad a_{n+1} = b_n$$

となることを確かめて下さい.（例えば， $a_{100} = a_{99} + a_{98}$ ということです.）

答． $\boxplus$ の定義より，$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \dfrac{a_n}{b_n} \boxplus \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{b_n + b_{n-1}}$ なので，これが既約であれば $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ であることがわかります．ところで，もし，$a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2}$ なら（最初の２つについては $a_2 = b_1 = 1$, $a_3 = b_2 = 2$ で成立しています），分子は $a_n + a_{n-1} = b_{n-1} + b_{n-2} = b_n$ であり，x_n の分子分母である $b_{n-1} = a_n$ と b_n が互いに素なので，b_n と $b_n + b_{n-1}$ も互いに素になります．従って $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ かつ $a_{n+1} = b_n$ がわかります.（高校で習う数学的帰納法というのを使う必要があります.）

このように定義した a_n を書き出してみると，

$$1, \ 1, \ 2, \ 3, \ 5, \ 8, \ 13, \ 21, \ 34, \ 55, \ 89, \ 144, \ 233, \ 377, \ 610, \ \ldots$$

となります．これを**フィボナッチ数列**と呼びます．一方， $x_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ の方は，

$$1,\ 0.5,\ 0.6666\ldots,\ 0.6,\ 0.625,\ 0.61538\ldots,\ 0.61904\ldots,\ 0.617647\ldots,\ 0.618181\ldots,$$
$$0.617977\ldots,\ 0.618055\ldots,\ 0.61802575\ldots,\ 0.61803713\ldots,\ 0.618032786\ldots,\ \ldots$$

となり，一定値 $0.6180339888\ldots$ に近づいていきます．この値は実は**黄金数**と呼ばれる数

$$g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\ldots$$

の逆数になっています．黄金数は美術などに現れる最も美しい比率として知られています．

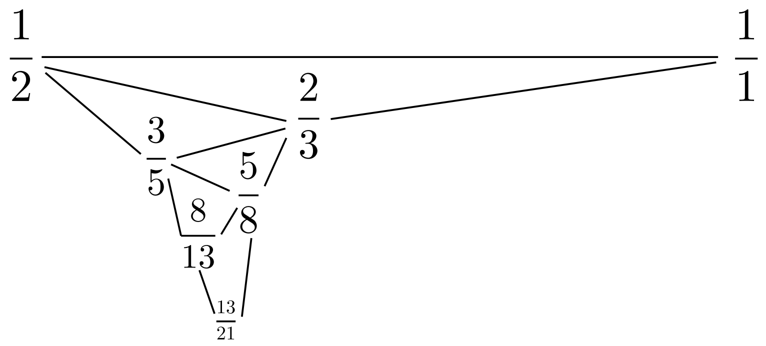


図 2: 黄金比の逆数に近づく分数たち

やってみよう． 黄金比 g は $g^2 = g + 1$ をみたすことを確認して下さい．また，g が無理数であることを証明して下さい．

答． 直接計算で $g^2 = g + 1$ は確かめられます．g が有理数とすると，$1 + \sqrt{5}$ も $\sqrt{5}$ も有理数となってしまいますが，$\sqrt{2}$ の無理数性と同様にここから矛盾がでます．(背理法)

一方，x_n の近づく数値（極限値）が g と結びつくことは次のようにしてわかります．$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ より，

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + x_{n-1}.$$

もし， x_n も x_{n-1} も同じ値 x に近づくならば，$\dfrac{1}{x} = 1 + x$, したがって，

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x} + 1$$

をみたす．よって，$g = \dfrac{1}{x}$ は 方程式 $g^2 - g - 1 = 0$ の正の解であり，ここから $g = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が導かれる．

3　仲良しな分数たち

$\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ のときには，

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} > 0$$

ですから，$bc-ad$ は整数なので 1 以上になります．つまり， $bc-ad \geqq 1$ となります．特に，$bc-ad=1$ となるとき， $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ は**仲良し**であるということにしましょう．例えば，$\dfrac{3}{5}$ と $\dfrac{2}{3}$ は仲良しですが， $\dfrac{2}{5}$ と $\dfrac{3}{5}$ は仲良しではありません．

仲良しな分数たちとおかしな足し算 $\boxplus$ の間には次のような関係があります．

定理２． $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が仲良しだとすると，

$$\frac{a}{b} \boxplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

は既約（これ以上通分できない）であり，$\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a}{b} \boxplus \dfrac{c}{d}$，そして $\dfrac{a}{b} \boxplus \dfrac{c}{d}$ と $\dfrac{c}{d}$ も仲良しである．

さらに次のようなこともわかります．

定理３． $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が仲良しだとすると，この 2 つの間にある分数 $\dfrac{p}{q}$ については，$q \geqq b+d$ となる．したがって，$\dfrac{a}{b} \boxplus \dfrac{c}{d}$ は $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ の間にある分数のうち，分母が最も小さくなるものである．

やってみよう． 上の 2 つの定理について証明をしてみて下さい．(ちょっと難しい？)

答． $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ で仲良しなら $bc-ad=1$. ゆえに，$\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{a+c}{b+d}$ については，$b(a+c)-a(b+d)=bc-dc=1$ で仲良し．もう一組も同様．既約性は後で確認する．

$\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$ となる $\dfrac{p}{q}$ をとる．$\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q}$ から $bp-aq>0$，ゆえに $bp-aq \geqq 1$, $\dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$ から $cq-dp>0$，ゆえに $cq-aq \geqq 1$. $bp-aq \geqq 1$ を d 倍，$cq-aq \geqq 1$ を b 倍したものを加えると，

$$q = (bc-ad)q = (bp-aq)d + (cq-aq)b \geqq d+b.$$

となる．特に，$\dfrac{p}{q} = \dfrac{a+c}{b+d}$ に適用すると，分母はこれ以上小さくできないので，既約であることがわかる．

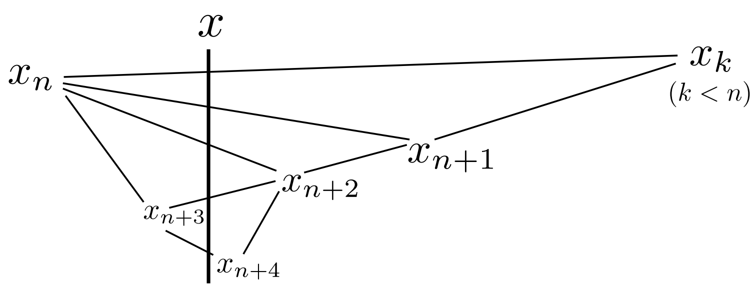
4　無理数を近似する

無理数 x が与えられたとき，それがどんな有理数に近いかが重要になることがあります．x に近い有理数 $\dfrac{p}{q}$ は x を**近似**しているといいます．もちろん，x を（無限）小数と

して表して，それを途中で打ち切ったものは x に近い有理数になりますが，それよりも効率的に近似することを考えます．ここで効率的とは，近似する有理数を分数 $\dfrac{p}{q}$ で表したときに，あまり大きな p や q を使わずに，x と $\dfrac{p}{q}$ の差をできるだけ小さくしたいということです．

例えば，円周率 $\pi = 3.14159265358979\ldots$ を近似するのに，$\dfrac{314}{100} = 3.14$ より $\dfrac{22}{7} = 3.142857143\ldots$ の方が，そして $\dfrac{3141592}{1000000} = 3.141592$ より $\dfrac{355}{113} = 3.141592920\ldots$ の方が効率的で，$\dfrac{22}{7}$ と $\dfrac{355}{113}$ は昔からよく知られた π の近似分数です．

よい近似分数を見つけるためにおかしな足し算 $\boxplus$ を使うことができます．無理数 x に対し，それを間にはさむ2つの整数 x_0, x_1 をとります．($x_1 = x_0 + 1$．) 次に，$x_2 = x_0 \boxplus x_1$ とすると，定理２より，x_0 と x_1, x_0 と x_2, x_2 と x_1 はすべて仲良しな組となります．このとき，x_0 と x_2 か，または x_2 と x_1 のどちらかの組が x をはさむようになります．例えば，x_0 と x_2 が x をはさんでいるとき（$x_0 < x < x_2$ のとき）には，$x_3 = x_0 \boxplus x_2$ と定義します．x_2 と x_1 が x をはさんでいるときは $x_3 = x_2 \boxplus x_1$ とします．以下同様に，x_n といくつか前の x_k $(k < n)$ が仲良しであって，x をはさんでいるときには，次の x_{n+1} は $x_{n+1} = x_n \boxplus x_k$ と定義します．



このように定義すると，次の意味で x_n が x のよい近似を与えていることがわかります．

定理４． 自然数 N を一つ決め，分母が N 以下の分数全体を考える．この中で x に最も近いもの（x との差が最も小さいもの）は，x_n のうちのどれかである．

例． フィボナッチ数列のところで定義した黄金数 g を用いて $x = \dfrac{1}{g}$ とすると，上のようにして構成した x_n はフィボナッチ数列のところで構成した x_n と一致することがわかります．実際，この場合にはいつでも x_n と x_{n-1} が仲良しで $x = \dfrac{1}{g}$ を間にはさみ，$x_{n+1} = x_n \boxplus x_{n-1}$ となります．

やってみよう． 大きな紙に 0 と 1 を書いてそれを線分で結びます．線分の中点の少し下

に $0 \boxplus 1$ である $\dfrac{1}{2}$ を書きます．0 と $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$ と 1 は仲良しなので線分で結びます．それぞれの線分の中点の下に端点のところにある 2 つの分数の $\boxplus$ による和を書き，それらは仲良しなのでまた線分で結びます．これを何段階か繰り返して書いてみましょう．これはファレイグラフと呼ばれます．

5 連分数

前の節で構成した近似分数のうち特によく x を近似するものを素早く構成する方法が，**連分数**と呼ばれます．

x に対してその整数部分を $[x]$ で表します．$[x]$ は $[x] \leqq x < [x]+1$ をみたす整数です．例えば，$[2.3456]=2,\ [-7.89]=-8.$

無理数 x に対し，整数 a_m と 無理数 y_m $(m=0,1,2,\dots)$ を次のように決めます．

$$a_0 = [x] \text{ および } y_0 = x - a_0,$$

$m \geqq 1$ に対しては，順々に

$$a_{m+1} = \left[\frac{1}{y_m}\right] \text{ および } y_{m+1} = \frac{1}{y_m} - a_m$$

とする．したがって，$a_m \geqq 1,\ 0 < y_m < 1\ (m \geqq 1)$. また，

$$\frac{1}{y_m} = a_{m+1} + y_{m+1} \quad \text{つまり} \quad y_n = \frac{1}{a_{m+1} + y_{m+1}}$$

であるので，

$$x = a_0 + y_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + y_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + y_2}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m + y_m}}}}$$

と書けます．これを無限に続けたときのことを考えて，

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

と表します．前の有限の式で $y_n=0$ と置き換えたものは有理数になるので，それを $\dfrac{p_m}{q_m}$ と表します．つまり，

$$\frac{p_m}{q_m}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_m}}}}$$

定理 5． このようにして得られた $\dfrac{p_m}{q_m}$ は，前に構成した数列 x_n の一部になる．（実際には x_n のうち x との大小関係が変わるときの n に相当するものになる．）これらの $\dfrac{p_m}{q_m}$ は，次の意味で x のよい近似を与えている．自然数 N を一つ決めたとき，分母が N 以下の分数 $\dfrac{a}{b}$ のうち，$|bx-a|=b\left|x-\dfrac{a}{b}\right|$ を最も小さくするのは $\dfrac{p_m}{q_m}$ のうちのどれかである．

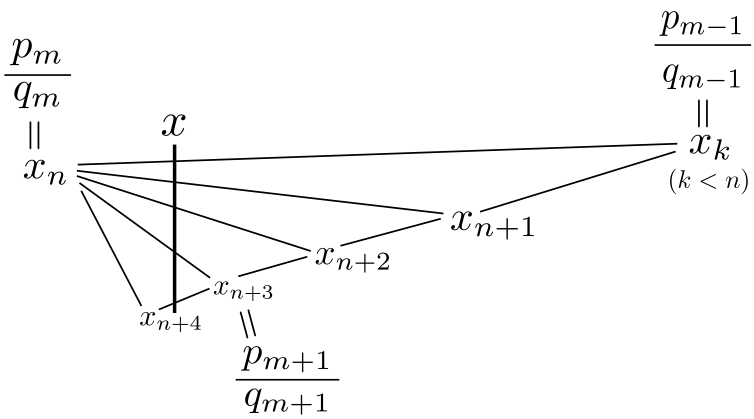


図 3: x_n たちの中に $\dfrac{p_m}{q_m}$ が現れる

例． 黄金数 g については，$g^2=g+1$ から

$$g=1+\frac{1}{g}$$

が得られ，ここから次々に，$y_m=g-1=\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{1}{y_m}=g$, $a_m=1$ となることがわかります．したがって

$$g=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

と表せます．逆に，g の連分数展開がこのように与えられたときに，その最初の分母が g 自身に等しいことから，$g = 1 + \dfrac{1}{g}$ という関係式を導くこともできます．

やってみよう． $\sqrt{2}$ はどのような連分数で表されるでしょうか？ $\sqrt{2}$ の代わりに，$h = 1+\sqrt{2}$ について a_m や y_m を求めてみましょう．$1+\sqrt{2}$ は**白銀数**と呼ばれることがあります．

ヒント： $\dfrac{c+\sqrt{2}d}{a+\sqrt{2}b}$ という形の数が出てきたら，分子と分母に $a-\sqrt{2}b$ をかけると，$(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b) = a^2 - 2b^2$ となるので，分母を簡単にすることができます．

答． $x = h = 1+\sqrt{2}$ とすると，$a_0 = 2$, $y_0 = \sqrt{2}-1$, $\dfrac{1}{y_0} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 = h$. ゆえに，$y_m = \sqrt{2}-1$, $\dfrac{1}{y_m} = 1+\sqrt{2} = h$, $a_m = 2$. したがって，

$$h = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

前節で円周率 $\pi = 3.141592653589793238\ldots$ の近似分数として $\dfrac{22}{7}$ と $\dfrac{355}{113}$ を挙げましたが，これらは連分数から出てきます．$a_0 = 3$, $y_0 = \pi - 3 = 0.141592\ldots$, $\dfrac{1}{y_0} = 7.06251\ldots$, $a_1 = 7$, $y_1 = 0.06251\ldots$, $\dfrac{1}{y_1} = 15.99659\ldots$, $a_2 = 15$, $y_2 = 0.99659\ldots$, $\dfrac{1}{y_2} = 1.00341\ldots$, $a_3 = 1$, $y_3 = 0.00341\ldots$, $\dfrac{1}{y_3} = 293.09689\ldots$, $a_4 = 293$, $\ldots$ などと計算できます．従って近似分数として，

$$3+\frac{1}{7} = \frac{22}{7}, \quad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}, \quad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113}, \quad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{293}}}} = \frac{104348}{33215}$$

などが得られます．

連分数から得られる近似分数 $\dfrac{p_m}{q_m}$ は**主近似分数**，前節の構成で得られた近似分数 x_n のうち，主近似分数でないものは**中間近似分数**と呼ばれます．

やってみよう． 次の連分数はどのような数になるでしょう？ ルートなどを使って表して

下さい.

$$x = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \quad y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

(y では 1 と 2 が繰り返し現れる.)

6　アポロンの円

ここでは関係を説明する時間はありませんが，おかしな足し算や仲良しの分数，連分数は次のような円の問題とも関係しています.

平面上に数直線を引き，各有理数の点 $\dfrac{p}{q}$ で数直線に接し，半径が $\dfrac{1}{2q^2}$ の円を描いて下さい. $\dfrac{a}{b}$ で接する円と $\dfrac{c}{d}$ で接する円は，２つの分数が仲良しのときには接し，そうでないときには交わらないことがわかります.

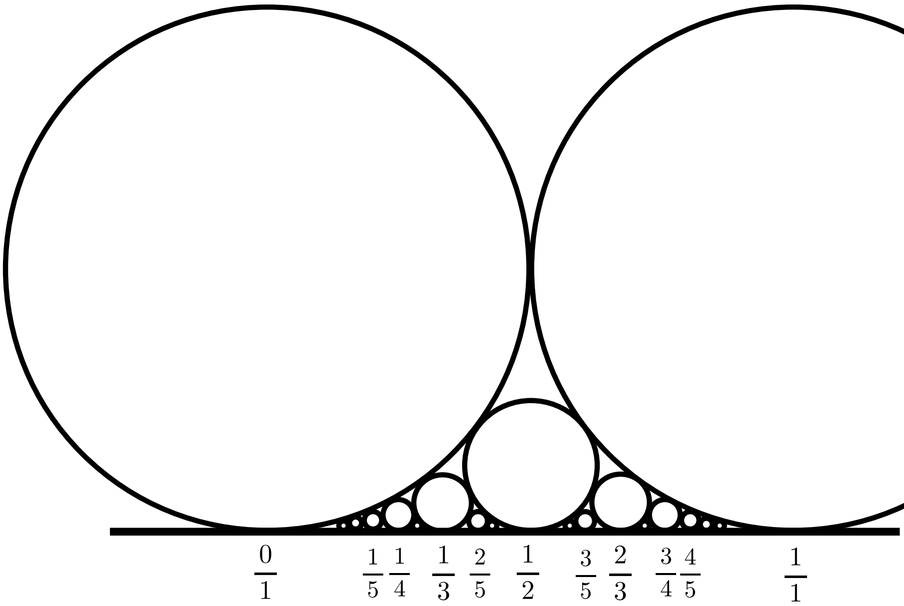


図 4: アポロンの円（アポロニアン・パッキングと呼ばれるものの一部です）

やってみよう.　これを証明してみよう.

答.　円の中心の水平距離（数直線方向の差）は $\left|\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|bc - ad|}{bd}$, 中心の高さの差は

$\left|\dfrac{1}{2b^2} - \dfrac{1}{2d^2}\right|$．三平方の定理より，中心の間の距離の２乗は，

$$\frac{|bc-ad|^2}{b^2d^2} + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2$$

になります．これが半径の和の２乗

$$\left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2 + \frac{1}{b^2d^2}$$

に等しいとすると，$|bc-ad| = 1$ となります．また，この計算からわかるように，$|bc-ad| > 1$ ならば２つの円は交わりません．

参考文献.

　高木貞治　初等整数論講義　共立出版