直交関数展開における移植定理
—その意味と応用—

勘甚　裕一　（金沢大自然）

本講演では，直交関数展開における，いわゆる移植定理について述べます．特に，移植定理の意味，つまり直交関数展開の議論において移植定理のはたす役割について詳しく説明します．また移植定理の持つ有用性は，それを応用することによって初めて理解することができます．この点から，移植定理の応用のいくつかについて触れます．

1. 移植定理

直交関数展開における移植定理（transplantation theorem）の考え方を説明するために M. Riesz の定理から話を始めたいと思います．この定理はその後，特異積分論などを触発した，調和解析学における，たいへん重要な定理です．

周期 2π を持ち，区間 $(-\pi, \pi)$ で可積分な関数 $f(\theta)$ のフーリエ級数展開

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$$

を考えます．関数 $f(\theta)$ の共役関数 $\tilde{f}(\theta)$ というのは，フーリエ級数展開

$$\tilde{f}(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$$

を持つ関数のことです．積分で表現すれば

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon<|\theta|<\pi} f(t)\cot\frac{\theta - t}{2}\, dt$$

のようになり，2π 周期関数に対するヒルベルト変換そのもののことです．M. Riesz が示したのは次のような定理です．

定理 1 (M. Riesz [18]). $1 < p < \infty$ とする．次の不等式が成り立つ：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(\theta)|^p \, d\theta \le C_p \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta.$$

M. Riesz の定理の持つ重要性のひとつは，よく知られていると思いますが，この共役関数の L^p 評価から，フーリエ級数の $L^p, 1 < p < \infty$ 収束が得られることです．

ここでは，M. Riesz の定理を移植定理の視点から書き直すことによって，移植定理の考え方・使いみちを説明しましょう．作用素 T を 2π 周期偶関数

$$f(\theta) \sim \ (a_0/2) + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos 3\theta + \cdots$$

に対し，関数 Tf が次のフーリエ級数を持つものとして定義しましょう：

$$Tf(\theta) \sim \ (a_0/\sqrt{2}) \sin\theta + a_1 \sin 2\theta + a_2 \sin 3\theta + a_3 \sin 4\theta + \cdots . \tag{1}$$

もうひとつの作用素 T' を，こんどは奇関数

$$g(\theta) \sim \ b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + b_3 \sin 3\theta + \cdots$$

に対して，

$$T'g(\theta) \sim \ (b_1/\sqrt{2}) + b_2 \cos\theta + b_3 \cos 2\theta + b_4 \cos 3\theta + \cdots \tag{2}$$

と定義します．このとき，

$$\tilde{f}(\theta) \sim a_1 \sin\theta + a_2 \sin 2\theta + \cdots , \qquad \tilde{g}(\theta) \sim -b_1 \cos\theta - b_2 \cos 2\theta - \cdots$$

に注意すると，作用素 T, T' は共役関数を使って

$$\begin{aligned} Tf(\theta) &= f(\theta)\sin\theta + \tilde{f}(\theta)\cos\theta + \{(\sqrt{2}-1)/2\} a_0 \sin\theta, \\ T'g(\theta) &= g(\theta)\sin\theta - \tilde{g}(\theta)\cos\theta + \{(\sqrt{2}-1)/2\} b_1 \end{aligned}$$

のように表現できることが分かります．定数項に対しては，$|a_n|^p, |b_n|^p \le C \int_0^\pi |f(\theta)|^p \, d\theta$ なので M. Riesz の定理から，$1 < p < \infty$ に対して，不等式

$$\int_0^\pi |Tf(\theta)|^p \, d\theta \le C \int_0^\pi |f(\theta)|^p \, d\theta, \quad \int_0^\pi |T'g(\theta)|^p \, d\theta \le C \int_0^\pi |g(\theta)|^p \, d\theta \tag{3}$$

を得ることになります．この不等式の使い方を，Hardy と Littlewood による次の結果を例にとって述べてみましょう：

Hardy-Littlewood (1931)．$1 < p < \infty$ とする．係数 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は，条件 $a_n \downarrow 0$ を満たすものとする．このとき，関数 $f(\theta) = \sum_{n=1}^\infty a_n \cos n\theta$ が p 乗可積分 $\int_0^\pi |f(\theta)|^p \, d\theta < \infty$ である必要十分条件は，$\sum_{n=1}^\infty a_n^p n^{p-2} < \infty$ である．

この結果を見ればだれでも，「sine 級数に対して同様の結果が成り立つのでは？」と考えると思います．これを，考えてみましょう．１つの考えは，cosine 級数の証明を忠実にたどってみることでしょう．もう１つの考えは，分かっている cosine 級数の場合から，何もしないで sine 級数の場合が手に入らないかと考え

ることです．(3) を使わせてもらえば，こちらの考え方を進めることができます．次のようです．

係数 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に同じ条件 $b_n \downarrow 0$ を仮定しましょう．関数 $g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$ は p 乗可積分であるとします．このとき $T'g(\theta)$ は (2) の形の cosine 級数であり，(3) の後半から p 乗可積分となります．これらのことから，関数 $T'g(\theta) - (b_1/\sqrt{2})$ を考えれば，Hardy-Littlewood の結果から $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}^p n^{p-2} < \infty$ が従い，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{p-2} < \infty$ を得ます．逆に，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{p-2} < \infty$ を仮定しましょう．明らかに，$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}^p n^{p-2} < \infty$ なので Hardy-Littlewood の結果から cosine 級数 $f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} \cos n\theta$ は p 乗可積分となります．すると，(3) の前半より sine 級数 $Tf(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$ が p 乗可積分であることが分かります．これで，Hardy-Littlewood の結果が sine 級数についても同じ形で成り立つことが分かりました．

ここで利用した作用素 T は，cosine 級数の係数を sine 級数に「植付け」，作用素 T' は sine 級数の係数を cosine 級数に「植付け」るものでした．このような作用素を移植作用素（transplantation operator）と言います．移植作用素の L^p 有界性，今の場合 (3)，をいうのが移植定理です．移植定理があれば上で見たように，cosine 級数に対して得られている結果が，そっくり sine 級数に移ることになります．逆に，sine 級数に対して得られている結果が，cosine 級数に移ることにもなります．これが，移植定理の考え方です．

2. ヤコビ級数展開と移植定理

関数系 $\{\cos n\theta\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\sin n\theta\}_{n=1}^{\infty}$ は，ヤコビ多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \alpha, \beta > -1$ から作られる直交系の特殊な場合と捕らえることができます．作用素 T, T' を，ヤコビ多項式に関連して，次のように拡張すれば移植定理の考え方と有効性がより鮮明に見て取ることができます．ヤコビ多項式から作られる，次の関数 $R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ を考えましょう：

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = t_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) \sin^{\alpha+1/2}\theta/2 \ \cos^{\beta+1/2}\theta/2.$$

ここで，$t_n^{(\alpha,\beta)}$ は正規化のための定数です．このとき，関数系 $\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n=0}^{\infty}$ は $L^2(0,\pi)$ において正規直交基底をなします．この基底に関して，区間 $(0,\pi)$ 上の関数 $f(\theta)$ は，次のように展開できます：

$$f(\theta) \ \sim \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\alpha,\beta)} R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta), \qquad c_n^{(\alpha,\beta)}(f) = \int_0^{\pi} f(\theta) R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)\, d\theta. \tag{4}$$

$R_0^{(-1/2,-1/2)}(\theta) = \sqrt{1/\pi}$, $R_n^{(-1/2,-1/2)}(\theta) = \sqrt{2/\pi}\cos n\theta, n \geq 1$ であり $R_n^{(1/2,1/2)}(\theta) = \sqrt{2/\pi}\sin(n+1)\theta, n \geq 0$ なので，展開 (4) は，$\alpha = \beta = -1/2$ のときには余弦展開，$\alpha = \beta = 1/2$ のときには正弦展開のことです．

作用素 $T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > -1$ を定義しましょう．関数 $f(\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\alpha,\beta)}(f) R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ に対して，$T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)} f(\theta)$ を次の展開を持つ関数として定めます：

$$T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)} f(\theta) \ \sim \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\alpha,\beta)}(f) R_n^{(\gamma,\delta)}(\theta).$$

$T = T^{(-1/2,-1/2)}_{(1/2,1/2)}$, $T' = T^{(1/2,1/2)}_{(-1/2,-1/2)}$ なので，作用素 $T^{(\alpha,\beta)}_{(\gamma,\delta)}$ は，cosine 級数と sine 級数との間の移植作用素 T, T' を一般化したものと考えられます．そして，(3) はこれらの作用素の L^p 有界性を述べていることになります．私たちは，移植作用素 $T^{(\alpha,\beta)}_{(\gamma,\delta)}$ について，その L^p 有界性，つまり移植定理を期待することになります：

$$\int_0^\pi |T^{(\alpha,\beta)}_{(\gamma,\delta)} f(\theta)|^p \, d\theta \leq C \int_0^\pi |f(\theta)|^p \, d\theta. \tag{5}$$

実際，この形の不等式は初め R. Askey [1] によって得られ，B. Muckenhoupt [17] の精密化を経て，最終結果といえる宮地晶彦氏の成果 [15, 16] に至っています．

これまでの説明から，この不等式 (5) によって，先の Hardy-Littlewood の結果を含め，フーリエ級数に対して得られているいろいろな結果が一般のヤコビ級数に対してもそのまま成り立つことがわかると思います．

このように移植定理とは，豊富な成果をもつ直交関数系の，その成果をそっくり未だ良く分っていない他の直交関数系へ移してしまおうと言う考えの定理です．移したい成果の最も重要なものはフーリエ・マルチプライヤ作用素の有界性です．マルチプライヤ作用素は，特異積分作用素などを含み，調和解析における重要な研究対象です．その研究は，フーリエ級数に関する Marcinkiewicz のマルチプライヤ定理に始まると言ってよいと思います．後で参照したいので，その定理を述べておきましょう．

定理 2 (Marcinkiewicz [14]). 数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ が次を満たすとする．

$$|\lambda_n| \leq C, \qquad \sum_{2^n \leq j < 2^{n+1}} |\lambda_j - \lambda_{j+1}| \leq C, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

このとき，$\int_{-\pi}^\pi |\sum_{n=0}^\infty \lambda_n A_n(x)|^p \, dx \leq C \int_{-\pi}^\pi |f(x)|^p \, dx$, $1 < p < \infty$. ここで，$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^\infty A_n(x)$ と置いた．

この定理は，実解析における最も深い理論のひとつであるリトルウッド・ペーリー理論から導かれたものです．

3. マルチプライヤ作用素の有界性と移植定理

重ねての説明になりますが，直交関数系の移植定理を一般的に設定してみましょう．その一般的な枠組みで，マルチプライヤ作用素の有界性と移植定理の関係を説明します．

$\{\phi_n(x)\}_n$, $\{\psi_n(y)\}_n$ をそれぞれルベーグ測度 dx, dy に関する 2 つの完備な正規直交系としましょう．定義されている区間は，どこであってもかまいません．直交関数系 $\{\phi_n(x)\}_n$ による展開 $f(x) \sim \sum_n (f, \phi_n)\phi_n(x)$, $\quad (f, \phi_n) = \int f(t)\overline{\phi_n(t)}dt$ と，もうひとつの直交関数系 $\{\psi_n(y)\}_n$ による展開を考えます．作用素 T^ϕ_ψ を

$$T^\phi_\psi f(y) \sim \sum_n (f, \phi_n)\psi_n(y)$$

と定義し，ϕ 系から ψ 系への移植作用素と呼びます．逆方向への作用素，ψ 系から ϕ 系へのそれ T_ϕ^ψ は，$T_\phi^\psi g(x) \sim \sum_n (g, \psi_n)\phi_n(x)$ で定義されることになります．完備な正規直交系を考えていますから，$\|T_\psi^\phi f\|_2 = \|f\|_2, \|T_\phi^\psi g\|_2 = \|g\|_2$ は成り立っています．ここで，$\|\cdot\|_2$ は，考えている空間の L^2 ノルムです．明らかに；$T_\phi^\psi T_\psi^\phi f = f, \quad T_\psi^\phi T_\phi^\psi g = g$ が成り立ちます．前節では，2 つの直交系として，$\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}_n$, $\{R_n^{(\gamma,\delta)}\}_n$ を取り上げたわけです．

有界数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_n$ に対し，ϕ 系におけるマルチプライヤ作用素 M_λ^ϕ は，$M_\lambda^\phi f(x) \sim \sum_n \lambda_n (f, \phi_n)\phi_n(x)$ で定義されます．ψ 系のそれ M_λ^ψ は，$M_\lambda^\psi g(y) \sim \sum_n \lambda_n (g, \psi_n)\psi_n(y)$ と定義されることになります．次の関係が基本的です：

$$M_\lambda^\phi f = T_\phi^\psi M_\lambda^\psi T_\psi^\phi f, \qquad M_\lambda^\psi g = T_\psi^\phi M_\lambda^\phi T_\phi^\psi g. \tag{6}$$

移植作用素 T_ψ^ϕ, T_ϕ^ψ の L^p 有界性の主張を移植定理と呼んでいます．つまり，

移植定理：($\phi \to \psi$移植) $\|T_\psi^\phi f\|_p \le C\|f\|_p$; $\quad$ ($\psi \to \phi$移植) $\|T_\phi^\psi g\|_p \le C\|g\|_p$.
ここで，$\|\cdot\|_p$ は，考えている空間の L^p ノルムです．

簡単な注意ですが，$T_\phi^\psi T_\psi^\phi f = f, T_\psi^\phi T_\phi^\psi g = g$ なので，移植定理は $\|T_\psi^\phi f\|_p \sim \|f\|_p, \|T_\phi^\psi g\|_p \sim \|g\|_p$ を主張していることと同じです．形式的には，$T_\psi^\phi f(y) = \int f(t) \sum_n \overline{\phi_n(t)}\psi_n(y)\, dt$ なので，移植作用素は，積分核 $K(t,y) = \sum_n \overline{\phi_n(t)}\psi_n(y)$ を持つ，積分作用素です．移植定理を証明するには；（1）$K(t,y)$ の形を評価が可能な形まで具体的に求める,（2）求めた $K(t,y)$ を核に持つ積分作用素の L^p 評価をおこなう，という手順になります．

移植定理は，ϕ 系と ψ 系の2つのマルチプライヤ作用素の有界性に関係をつけます．関係 (6) の前半より，

$$\begin{aligned}\|M_\lambda^\phi f\|_p &= \|T_\phi^\psi M_\lambda^\psi T_\psi^\phi f\|_p \le |T_\phi^\psi|_p \|M_\lambda^\psi T_\psi^\phi f\|_p \\ &\le |T_\phi^\psi|_p |M_\lambda^\psi|_p \|T_\psi^\phi f\|_p \le |T_\phi^\psi|_p |M_\lambda^\psi|_p |T_\psi^\phi|_p \|f\|_p\end{aligned}$$

となります．ここで，$|\cdot|_p$ は作用素の L^p 空間上での作用素ノルムです．

つまり，ψ 系でマルチプライヤ作用素 M_λ^ψ の L^p 有界性 $|M_\lambda^\psi|_p < \infty$ が成り立っているならば ϕ 系でも L^p 有界性 $|M_\lambda^\phi|_p < \infty$ が成り立つということです．関係 (6) の後半もあるので，逆も言えています．もし，ψ 系において，マルチプライヤ作用素の L^p 有界性に関し豊富な結果の蓄積があれば，移植定理を証明することによって，それらがそっくり ϕ 系に持ち込めるということです．課題は，よく研究されている直交関数系とあまり研究が進んでいない直交関数系の間に移植定理を証明することであるといえます．

ここで，ヤコビ級数展開に関する Marcinkiewicz 型のマルチプライヤ定理が，フーリエ級数に関するもともとの Marcinkiewicz のマルチプライヤ定理（定理２）から得られることを簡単に説明しておきましょう．ヤコビ級数展開におけるマルチプライヤ作用素 $M_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ は，

$$M_\lambda^{(\alpha,\beta)} f(\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n^{(\alpha,\beta)}(f) R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)$$

で定義されることになります．Marcinkiewicz のマルチプライヤ定理（定理２）から $|M_\lambda^{(-1/2,-1/2)}|_p < \infty, 1 < p < \infty$ であることが，簡単に分かります．数列 λ は，もちろんその定理のものです．基本的な関係 $M_\lambda^{(\alpha,\beta)} = T_{(\alpha,\beta)}^{(-1/2,-1/2)} M_\lambda^{(-1/2,-1/2)} T_{(-1/2,-1/2)}^{(\alpha,\beta)}$ と，ヤコビ級数展開に関する移植定理 (5) があるので，すぐ上と同じ議論で，$|M_\lambda^{(\alpha,\beta)}|_p < \infty, 1 < p < \infty$ が分かります．これがヤコビ級数展開に関する Marcinkiewicz 型のマルチプライヤ定理です．パラメータ α, β には条件が必要です．例えば，$\alpha, \beta \geq -1/2$ なら十分です．

4. ハンケル変換と移植定理

第 3 節の一般的な説明では，２つの直交関数系 $\{\phi_n(x)\}_n$，$\{\psi_n(y)\}_n$ におけるパラメータ n は離散的 $n = 0, 1, 2, \ldots$ なものだと思っていましたが，連続的であってもかまいません．連続的な場合で豊富な議論がなされているのは，ハンケル変換におけるものです．これを説明しましょう．

区間 $(0, \infty)$ 上の関数 $f(t)$ の指数 μ のハンケル変換 $\mathcal{H}_\mu f(y)$ とは次で与えられる積分変換です：

$$\mathcal{H}_\mu f(y) = \int_0^\infty f(t)\sqrt{yt} J_\mu(yt)\, dt, \quad y > 0.$$

ここで，J_μ は，指数 μ の第 1 種ベッセル関数です．指数 μ が $-1/2, 1/2$ のとき，ベッセル関数は $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \cos z$, $J_{1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \sin z$ なので，ハンケル変換は，それらのとき cosine, sine 変換のことです：

$$\mathcal{H}_{-1/2} f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos yt\, dt, \quad \mathcal{H}_{1/2} f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin yt\, dt.$$

ハンケル変換はフーリエ変換を一般化した積分変換の１つといえます．以下において，扱うハンケル変換の指数 μ は，いつでも $\mu \geq -1/2$ を満たすものとします．

フーリエ変換の場合と同様に，ハンケル変換においても，次の基本的な事柄が成り立ちます：

プランシュレルの定理：$\|\mathcal{H}_\mu f\|_2 = \|f\|_2$．ただし，$\|f\|_2 = \{\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt\}^{1/2}$.

逆変換公式：$L^2(0, \infty)$ 上で，$\mathcal{H}_\mu \mathcal{H}_\mu = I$．ただし，$I$ は恒等変換.

第 3 節の一般的な説明において，２つの直交関数系 $\{\phi_n(x)\}_n$，$\{\psi_n(y)\}_n$ として $\{J_\nu(xt)\sqrt{xt}\}_t$，$\{J_\mu(yt)\sqrt{yt}\}_t$ を取ることにしましょう．このとき，ハンケル変換における，指数 ν から μ への移植作用素 T_μ^ν は合成 $T_\mu^\nu = \mathcal{H}_\mu \mathcal{H}_\nu$ で与えられることになります．関数 $f(x)$ が良い場合には，次のように具体的に積分で表現できます：

$$T_\mu^\nu f(y) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x) J_\nu(xt) \sqrt{xt}\, dx \right\} J_\mu(yt) \sqrt{yt}\, dt.$$

プランシュレルの定理があるので，移植作用素 T_μ^ν は，$L^2(0, \infty)$ 上においては，$\|T_\mu^\nu f\|_2 = \|f\|_2$ を満たしています．関数 $\phi \in L^\infty(0, \infty)$ をマルチプライヤにもつ，

指数 μ のハンケル変換におけるマルチプライヤ作用素 M_ϕ^μ は

$$M_\phi^\mu f = \mathcal{H}_\mu(\phi \mathcal{H}_\mu(f)), \quad f \in L^2(0,\infty)$$

で与えられます．これも，ハンケル変換のプランシュレルの定理から，始めは，$L^2(0,\infty)$ 上の有界作用素です．そして，基本的な関係：$M_\phi^\nu = T_\nu^\mu M_\phi^\mu T_\mu^\nu$ も成り立っています．これで，ハンケル変換における枠組みができました．移植定理を待つばかりとなりました．

実際，L^p 空間に関する移植定理は D. L. Guy によって 1960 年に示されました．彼は重みつき L^p 空間で結果を得ているのですが，ここでは重みなしの場合を述べておきます．

定理 3 (Guy [6]). $1 < p < \infty$ とする．移植作用素 T_μ^ν, $\mu, \nu \geq -1/2$ は $L^p(0,\infty)$ 上の有界作用素である：$\|T_\mu^\nu f\|_p \leq C\|f\|_p$.

Guy はハンケル変換において，Macinkiewicz 型のマルチプライヤ定理を得るために，彼の移植定理を証明しました．この移植定理がこの種の定理の初めてのものであると言われています．S. Schindler [19] は，移植作用素の積分核の具体的表示を得ることによって，Guy の移植定理を精密化しました．

この節の残りの部分を，$p=1$ の場合の移植作用素 T_μ^ν の振る舞いを調べることに当てましょう．作用素 T_μ^ν が $L^1(0,\infty)$ 上では，有界にならないことは分かっています．そうなると，今の調和解析では実ハーディ空間上での有界性を調べてみるのが常識です．ハンケル変換の議論は半直線 $(0,\infty)$ 上でおこなわれますから，自然に次のような実ハーディ空間を考えることになります．

記号 $H^1(\mathbb{R})$ で，いつもの実ハーディ空間を表しましょう．私たちは，次の実ハーディ空間を扱います：

$$H^1(0,\infty) = \{h|_{(0,\infty)} \,;\, h \in H^1(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} h \subset [0,\infty)\}.$$

ただし，ノルムは $\|f\|_{H^1(0,\infty)} = \|h\|_{H^1(\mathbb{R})}$ で導入します．ここで，$h \in H^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} h \subset [0,\infty)$ かつ $f = h|_{(0,\infty)}$ です．この空間に対して，$H^1(0,\infty) = \{h|_{(0,\infty)} \,;\, h \in H^1(\mathbb{R})$, 偶関数$\}$ が成り立っていることが知られています．移植作用素 T_μ^ν の実ハーディ空間 $H^1(0,\infty)$ における有界性は次のようになります．

定理 4 ([12]). (i) $\mu \geq -1/2$ かつ $\nu > -1/2$ であるとする．このとき，T_μ^ν は，$H^1(0,\infty)$ 上の有界作用素である：$\|T_\mu^\nu f\|_{H^1(0,\infty)} \leq C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$.

(ii) $\mu \geq -1/2$ とする．このとき，$T_\mu^{-1/2}$ は $H^1(0,\infty)$ から $L^1(0,\infty)$ への有界作用素である：$\|T_\mu^{-1/2} f\|_{L^1(0,\infty)} \leq C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$.

定理の証明はやや複雑なので述べませんが，この定理からハンケル変換に関する Hörmander 型のマルチプライヤ定理が得られることを説明してみます．関数 $\phi \in L^\infty(0,\infty)$ に条件

$$\|\phi\|_{L^\infty(0,\infty)} \leq A, \quad \left(\frac{1}{R}\int_{R<y\leq 2R} \left|\frac{d\phi(y)}{dy}\right|^2 dy\right)^{1/2} \leq AR^{-1}, \quad R>0 \qquad (7)$$

を仮定します．ただし，A は R には依存しない定数とします．調べたいのは，ハンケル変換におけるマルチプライヤ作用素 M_ϕ^μ の有界性です．フーリエ変換におけるマルチプライヤ作用素の有界性の結果から，ハンケル変換におけるマルチプライヤ作用素 $M_\phi^{-1/2}$ が $H^1(0,\infty)$ 上の有界作用素であることが分かります．よって，以下 $\mu > -1/2$ の場合を考えればよいことになります．まず，等式 $M_\phi^\mu = T_\mu^{-1/2} M_\phi^{-1/2} T_{-1/2}^\mu$ が成り立っていることに注意します．作用素 $T_{-1/2}^\mu$ は，定理 4 の (i) から，(H^1, H^1)-有界です．作用素 $M_\phi^{-1/2}$ は，いま注意したように (H^1, H^1)-有界です．そして，作用素 $T_\mu^{-1/2}$ が定理 4 の (ii) より，(H^1, L^1)-有界です．合わせて，次の結果を得ます：

系 1. $\mu \geq -1/2$ とする．仮定 (7) の下で，マルチプライヤー作用素 M_ϕ^μ は空間 $H^1(0,\infty)$ から $L^1(0,\infty)$ への有界作用素である：$\|M_\phi^\mu f\|_{L^1(0,\infty)} \leq CA\|f\|_{H^1(0,\infty)}$. ここで，$C$ は f と ϕ には無関係な定数である．

定理 4 の別の応用について見てみましょう．フーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ に対して，いわゆるハーディの不等式 $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)/\xi|\, d\xi \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$ が成り立っています．これから，不等式 $\int_0^\infty |\mathcal{H}_{-1/2} f(y)|/y\, dy \leq C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$ が成り立つことはすぐに分かります．この不等式が，指数 $\nu \geq -1/2$ の一般のハンケル変換に対しても成り立つことを，上の移植定理を使って示すことができます．次のように議論します．

$\nu > -1/2$ とします．ハンケル変換 $\mathcal{H}_\nu f$ は，移植作用素を使って $\mathcal{H}_\nu f = \mathcal{H}_{-1/2} T_{-1/2}^\nu f$ と書けます．$f \in H^1(0,\infty)$ のとき，上の定理 4 の (i) から，$T_{-1/2}^\nu f \in H^1(0,\infty)$ が分かります．すると，$\nu = -1/2$ の場合から $\int_0^\infty |\mathcal{H}_\nu f(y)|/y\, dy \leq C\|T_{-1/2}^\nu f\|_{H^1(0,\infty)}$ となり，求めるハンケル変換におけるハーディの不等式

$$\int_0^\infty \frac{|\mathcal{H}_\nu f(y)|}{y}\, dy \leq C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$$

が $\nu \geq -1/2$ の場合に得られます．これは，移植定理なしで [11] において得られたものの，移植定理を使った別証明です．

5. ラゲール級数展開と移植定理

この最後の節では，ラゲール級数展開に関する移植定理と，それを適用して得られるマルチプライヤ定理を述べます．また，移植定理の応用として，ラゲール級数展開における fractional integration の定理とハーディの不等式についても触れてみます．

指数 $\alpha > -1$ を持つ次数 n のラゲール多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ は

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

で与えられます．関数 $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$ を

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}} L_n^{(\alpha)}(x) e^{-x/2} x^{\alpha/2}$$

で定義すると，関数系 $\{\mathcal{L}_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^\infty$ は $L^2((0,\infty),dx)$ で正規直交基底となっています．この基底に関して，区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ の展開

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n^{(\alpha)}(f)\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x), \qquad a_n^{(\alpha)}(f) = \int_0^\infty f(x)\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)\,dx \tag{8}$$

を考えます．

上のラゲール級数展開に対して，移植定理を得ることが目的です．移植定理の直接の応用は，ハイゼンベルグ群の解析から J. Długosz [2] によって得られた，次に述べる，Marcinkiewicz 型のマルチプライヤ定理の補完です．

有界な数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ と α 次のラゲール級数展開 (8) に対して，マルチプライヤ λ を持つマルチプライヤ作用素 M_λ^α は，$M_\lambda^\alpha f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty \lambda_n a_n^{(\alpha)}(f)\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$ で定義されることになります．ここでは，マルチプライヤ作用素 M_λ^α が $L^p(0,\infty)$ 有界 $\|M_\lambda^\alpha f\|_p \le C\|f\|_p$ であるとき，マルチプライヤ λ を指数 α のラゲール級数展開に対する L^p マルチプライヤであると呼ぶことにしましょう．Długosz が証明したのは次の定理です：

定理 5 (Długosz [2]). 区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $\lambda(x)$ が $\lambda(x) \in C^4(0,\infty)$, $\sup_{x>0}|\lambda^{(j)}(x)x^j| < \infty$, $j = 0,1,2,3,4$ を満たすとする．このとき，$\lambda = \{\lambda(n+1)\}_{n=0}^\infty$ は，指数 $\alpha = 0,1,2,\dots$ に対してラゲール級数展開の $L^p, 1 < p < \infty$ マルチプライヤである．

私たちが考えたいのは，ラゲール級数展開に関する移植定理を証明し，それを適用することによって，$\alpha = 0,1,2,\dots$ で成り立っている定理 5 を，任意の α とすることです．ラゲール級数展開の移植作用素 $T_\alpha^\beta, \alpha, \beta > -1$ は，$T_\alpha^\beta f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n^{(\beta)}(f)\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$ で定義されることになります．この移植作用素 T_α^β の L^p 有界性がマルチプライヤ作用素 M_λ^α の L^p 有界性に関して，$\alpha = 0,1,2,\dots$ の間を埋めることは，これまでに説明した通りです．

実際，移植作用素 T_α^β の L^p 有界性を示すことができました：

定理 6 ([8]). 指数 $\alpha,\beta > -1$ に対して，$\gamma = \min\{\alpha,\beta\}$ とする．このとき，$\gamma \ge 0$ ならば $1 < p < \infty$ において，$-1 < \gamma < 0$ ならば $(1+\gamma/2)^{-1} < p < -2/\gamma$ で $\|T_\alpha^\beta f\|_p \le C\|f\|_p$ が成り立つ．

移植定理によってラゲール級数展開のマルチプライヤ定理はつぎのようになります：

系 2. 指数 α は $\alpha > -1$，関数 $\lambda(x)$ は $\lambda(x) \in C^4(0,\infty)$, $\sup_{x>0}|\lambda^{(j)}(x)x^j| < \infty$, $j = 0,1,2,3,4$ を満たすとする．このとき，$\lambda = \{\lambda(n+1)\}_{n=0}^\infty$ は指数 α のラゲール級数に対する L^p マルチプライヤである．ただし，$\alpha \ge 0, 1 < p < \infty$ または $-1 < \alpha < 0, (1+\alpha/2)^{-1} < p < -2/\alpha$ である．

上の移植定理は，S. Thangavelu [21] によって重み $x^{p/4-1/2}$ に対しても示されました．さらに， K. Stempak and W. Trebels [20] によって重み $x^{\delta p}$ に拡張されました．そして，この重み $x^{\delta p}$ の場合に，ごく最近 G. Garrigós, E. Harboure, T. Signes, J. L. Torrea and B. Viviani [3] によって最終的な結果が得られました．それは，$-1 < \alpha < \beta, 1 < p < \infty$ のとき，重み $x^{\delta p}$ に関して，移植作用素 T_α^β が L^p 有界である必要十分条件は $-\alpha/2 - 1/p < \delta < 1 - 1/p + \alpha/2$ であることを主張しています．このような移植定理の進展に従い，系 2 に述べたマルチプライヤ定理も改善されてきています．また，最近 E. Harboure, J. L. Torrea and B. Viviani [7] は移植定理を利用して，ラゲール級数展開に関するリース変換や g-関数の L^p 評価をおこなっています．

移植定理のひとつの応用として，ラゲール級数展開に関する fractional integration の定理に触れてみましょう．フーリエ級数やフーリエ変換で良く知られた，fractional integration に関する Hardy-Littlewood-Sobolev の定理をラゲール級数展開で考えてみることです．

フーリエ級数の形で述べると次のようになります：$I_\sigma f(x) \sim \sum_{n\neq 0} |n|^{-\sigma} \hat{f}(n) e^{inx}$ に対して，$\|I_\sigma f\|_{L^q(0,2\pi)} \le C\|f\|_{L^p(0,2\pi)}$ が成り立つ．ただし，パラメータ σ, p, q の範囲は $0 < \sigma < 1$, $1/q = 1/p - \sigma$, $1 < p < q < \infty$ です．評価 $\sum_{n\neq 0} |n|^{-\sigma} e^{inx} \sim |x|^{\sigma-1} (x \to 0)$ があるので，$1/q > 1/p - \sigma$ ならば Young の畳み込みについての不等式から，上の不等式はすぐに得られます．実際には，$1/q = 1/p - \sigma$ まで不等式が成立します．この主張が fractional integration の定理です．

ラゲール展開に関して，移植定理を用いて，fractional integration の定理を示すことができました；

定理 7 ([9]). 指数 α は $\alpha > -1$，そして $0 < \sigma < 1$ とする．区間 $(0, \infty)$ 上の関数 $f(x)$ に対して，$I_\sigma^{(\alpha)} f(x) \sim \sum_{n=1}^\infty n^{-\sigma} a_n^{(\alpha)}(f) \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$ とする．このとき，パラメータ α, σ, p, q が範囲 $\alpha \ge 0$, $1 < p < q < \infty$, $1/q = 1/p - \sigma$ にあるか，または範囲 $-1 < \alpha < 0$, $(1 + \alpha/2)^{-1} < p < q < -2/\alpha$, $1/q = 1/p - \sigma$ にあるならば，$\|I_\sigma^{(\alpha)} f\|_q \le C\|f\|_p$ が成り立つ．

この結果は，[9] とは独立に，G. Gasper, K. Stempak and W. Trebels [4] によっても得られました．さらに，G. Gasper and W. Trebels [5] は Riemann-Liouville fractional integral と Weyl fractional integral の評価を使った別証明を与えています．

[9] では，次のような移植作用素を考えました：

$$Vf(t) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n^{(0)}(f) e^{int}.$$

ここで，$a_n^{(0)}(f)$ は指数 $\alpha = 0$ の関数 f のラゲール係数です．この移植作用素 V が具体的表示：

$$Vf(t) = \frac{ie^{-it/2}}{2\sin(t/2)} \int_0^\infty f(x) e^{-i(x/2)\cot(t/2)}\, dx. \tag{9}$$

を持つことを示して，この作用素の有界性を導き，移植定理を適用することによって定理 7 を導きました.

この作用素 V に少しおもしろい応用がありますので，触れてみましょう．不等式

$$\int_0^{2\pi} |Vf(t)|\,dt \le C \int_0^\infty \frac{|\hat{f}(u)|}{u}\,du$$

は表示 (9) からすぐ分かります．関数 $f \in H^1(0,\infty)$ に対しては，フーリエ変換のハーディの不等式から $\int_0^{2\pi} |Vf(t)|\,dt \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}$ が成り立つことになります. Vf はべき型のフーリエ級数ですから，古典的なフーリエ級数におけるハーディの不等式から

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n^{(0)}(f)|}{n+1} \le C\|f\|_{H^1(0,\infty)}. \tag{10}$$

が得られることになります．これが，指数 $\alpha = 0$ の場合のラゲール級数展開に関するハーディの不等式です．指数が $\alpha > 0$ の場合には，少し驚きですが，不等式 (10) において $H^1(0,\infty)$ を $L^1(0,\infty)$ で置き換えたものが成り立ちます．[10, 13] 参照.

参考文献

[1] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi series, Illinois J. Math. **13** (1969), 583–590.

[2] J. Długosz, L^p multipliers for Laguerre expansions, Colloq. Math. **54** (1987), 287–293.

[3] G. Garrigós, E. Harboure, T. Signes, J. L. Torrea and B. Viviani, A sharp weighted transplantation theorem for Laguerre function expansions, J. Funct. Anal. **244**(2007), 247–276.

[4] G. Gasper, K. Stempak and W. Trebels, Fractional integration for Laguerre expansions, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 67–75.

[5] G. Gasper and W. Trebels, Norm inequalities for fractional integrals of Laguerre and Hermite expamsins, Tôhoku Math. J.**52**(2000), 251-260.

[6] D. L. Guy, Hankel multiplier transforms and weighted p-norms, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 137–189.

[7] E. Harboure, J. L. Torrea and B. Viviani, Riesz transforms for Laguerre expansions, Indiana Univ. Math. J. **55**(2006), 999–1014.

[8] Y. Kanjin, A transplantation theorem for Laguerre series, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 537–555.

[9] Y. Kanjin and E. Sato, The Hardy-Littlewood theorem on fractional integration for Laguerre series, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 2165–2171.

[10] Y. Kanjin, Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions, Bull. London Math. Soc. **29**(1997), 331-337.

[11] Y. Kanjin, On Hardy-type inequalities and Hankel transforms, Monatsh. Math. **127**(1999), 311-319.

[12] Y. Kanjin, A transplantation theorem for the Hankel transform on the Hardy space, Tohoku Math. J. **57**(2005), 231–246.

[13] Y. Kanjin, Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions revisited, 投稿中.

[14] J. Marcinkiewicz, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Math. **8** (1939), 78–91.

[15] A. Miyachi, A transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces, Adv. Math. **184** (2004), 177-206.

[16] A. Miyachi, A transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces, II, Math. Ann. **336** (2006), 111–153.

[17] B. Muckenhoupt, Transplantation theorems and multipliers for Jacobi series, Memoirs Amer. Math. Soc. No.356, 1986.

[18] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguée, Math. Z. **27** (1928), 218–244.

[19] S. Schindler, Explicit integral transform proofs of some transplantation theorems for the Hankel transform, SIAM J. Math. Anal. **4** (1973), 367–384.

[20] K. Stempak and W. Trebels, On weighted transplantation and multipliers for Laguerre expansions, Math. Ann. **300** (1994), 203–219.

[21] S. Thangavelu, Transplantation, summability and multipliers for multiple Laguerre expansions, Tôhoku Math. J. **44** (1992), 279-298.