

遷移ダイナミクスにおける不安定性の思想

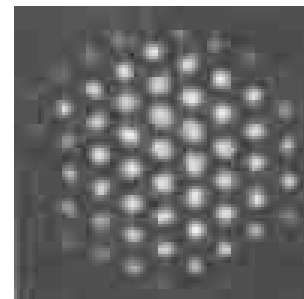
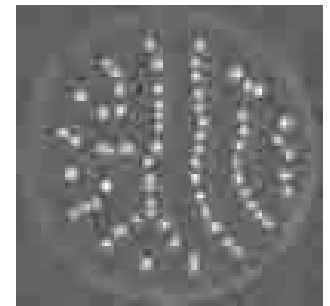
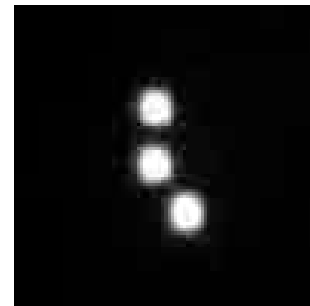
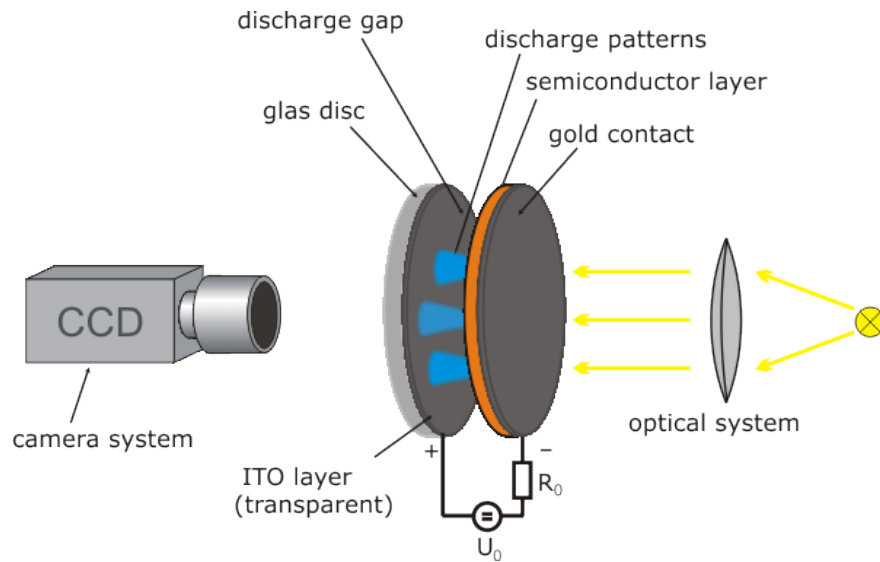
西浦 廉政

北海道大学電子科学研究所

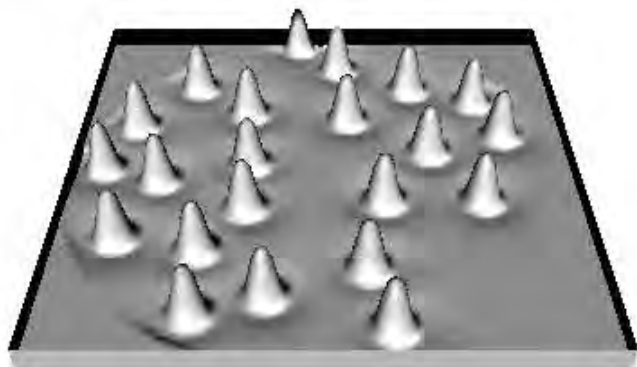
共同研究者： 寺本 敬(千葉科学技術大)
飯間 信(北大電子研)
上田肇一(京大数理研)
渡辺 毅(北大電子研)

ガス放電系でのスポット解

-Astrov and Purwins, Phys.Lett.A283(2001)-

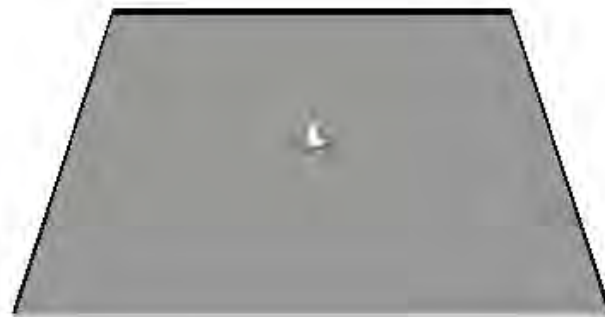


ランダムから一方向回転



$$u_t = D_u \Delta u - \frac{uv^2}{1 + f_2 w} + f_0(1 - u)$$
$$v_t = D_v \Delta v + \frac{uv^2}{1 + f_2 w} - (f_0 + f_1)v$$
$$\tau w_t = D_w \Delta w + f_3(v - w)$$

分裂・衝突を経て行進

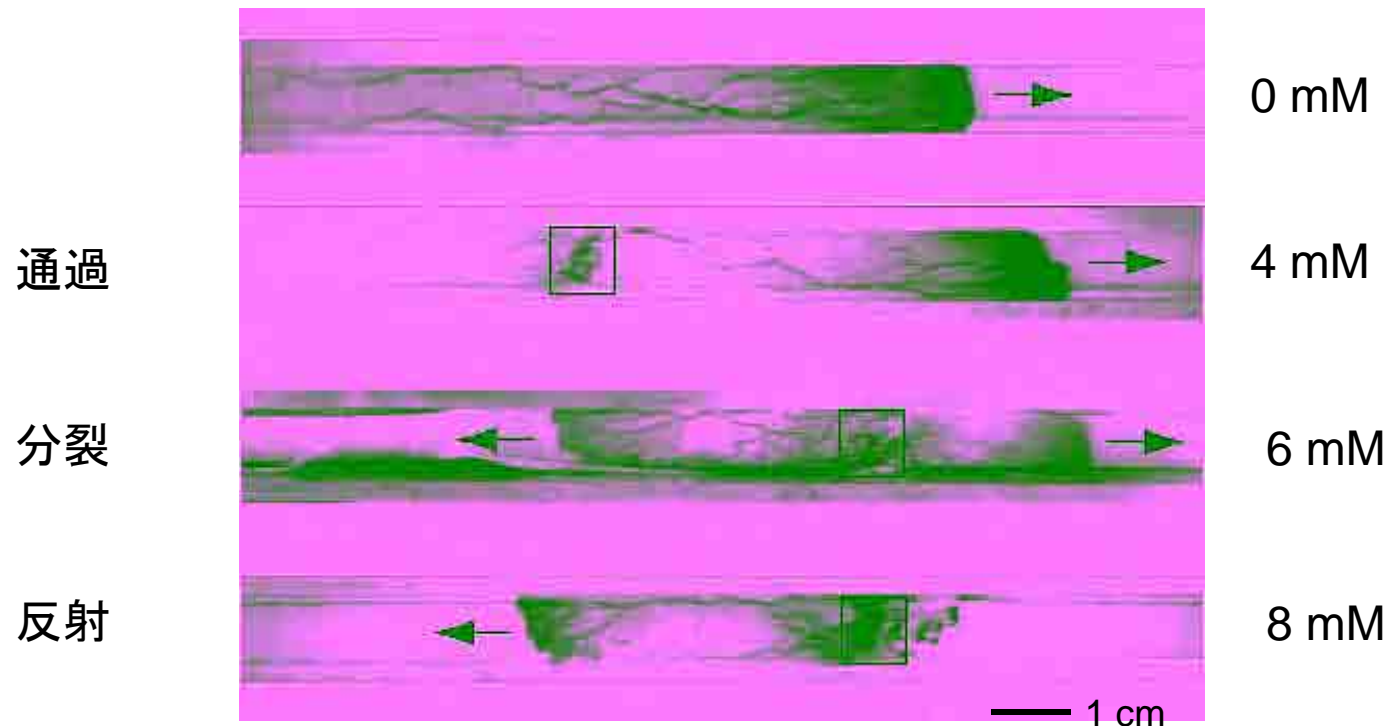


$$u_t = D_u \Delta u + k_2 u - u^3 - k_3 v - k_4 w + k_1$$
$$\tau v_t = D_v \Delta v + u - v$$
$$w_t = D_w \Delta w + u - w$$

忌避物質に遭遇した際の粘菌運動の変化

忌避物質の濃度に応じて3種類のレスポンスがみられる

□ : 忌避物質 (quinine)



(Takagi et al. Proc TACSN)

なぜ衝突？

- **自走する個体**は衝突する。
 - 粒子的なもの：液滴，ゾウリムシ，車，人，...
- **強い相互作用**による変化
 - 自分のアイデンティティを失う（大変形）ことが重要　これをどう扱う？
- **環境変化との衝突**
 - 環境適応の過程：**ミクロ**変化と**マクロ**判断のつながり．どう行動を変えて行くのか？
 - **不安定状態**（迷い，逡巡）を経て，変わって行く．

メッセージ

不安定な状態のつながり(ネットワーク)を軸に
変化・適応を理解し, それを基に制御する.

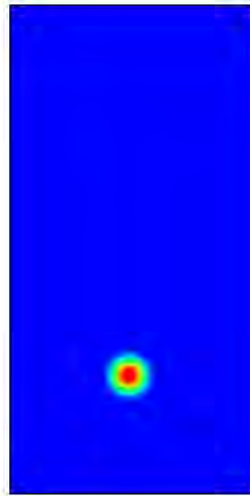
2つのケーススタディ

余次元2の特異点

- **Drift + Peanut**: 2つのピッチフォーク分岐
- **Drift + Splitting**: ピッチフォークとサドルノード分岐

ケーススタディ 1

回転運動の起源は？



T.Teramoto, K.Suzuki, and Y.N., Rotational motion of traveling spots in dissipative systems, PRE 80, 046208 (2009)

T. Ohta and T. Ohkuma , Deformable self-propelled particles, PRE (2009)

Motivation

- 斜め衝突
- 生物運動
- 液滴運動

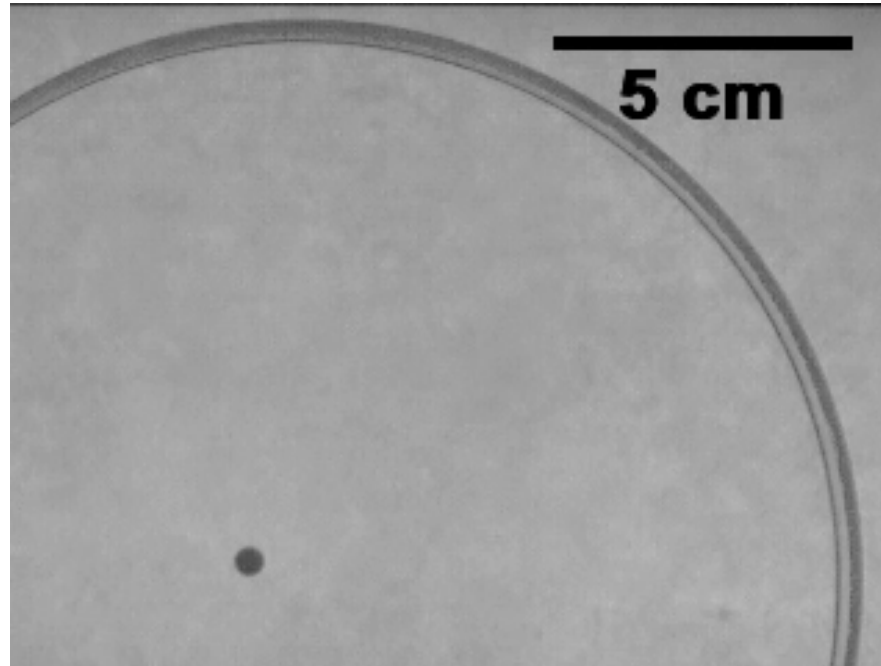
ゾウリムシの運動



paramecia

Thanks to Dr. Saigusa

動き出すと「頭-尾」対称性破壊が起きる



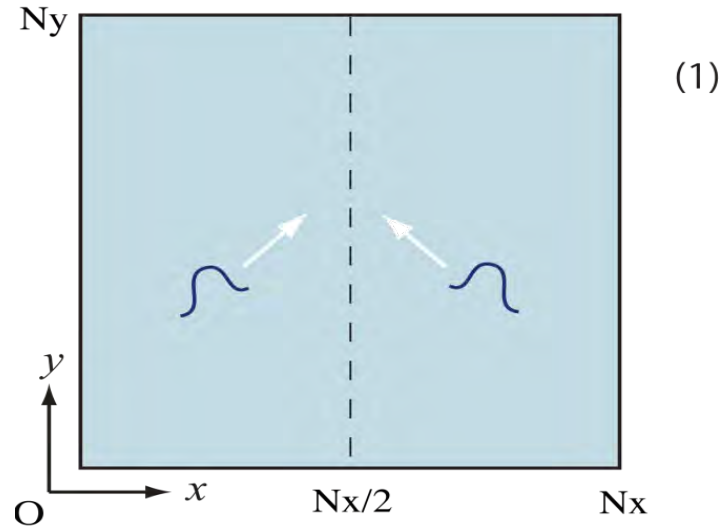
ペンタノール液滴

Thanks to Dr. K.Nagai

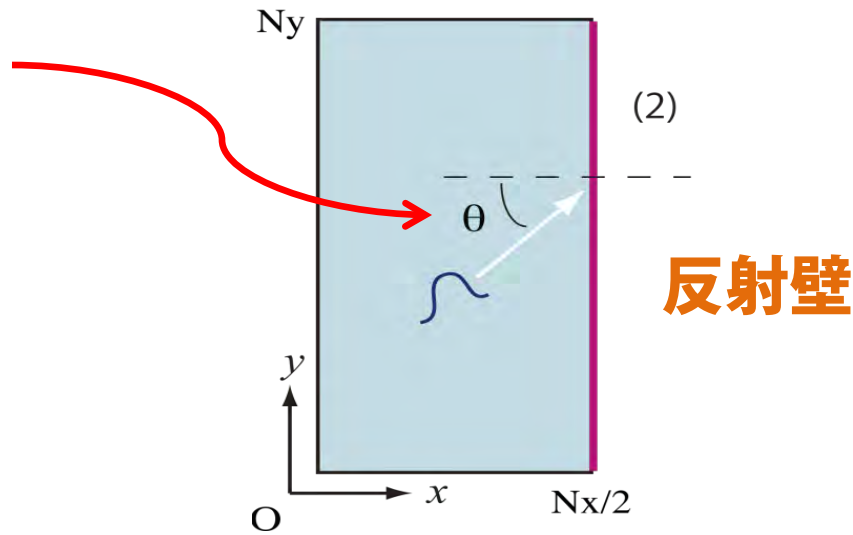


Head-Tail Asymmetry
D1-symmetry-breaking

Ken Nagai, Yutaka Sumino, Hiroyuki Kitahata, and Kenichi Yoshikawa, Mode selection in the spontaneous motion of an alcohol droplet, Phys. Rev. E, 71, 065301 (2005)



入射角



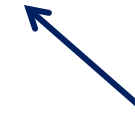
Oblique collision



$$u_t = D_u \Delta u - \frac{uv^2}{1 + f_2 w} + f_0(1 - u)$$

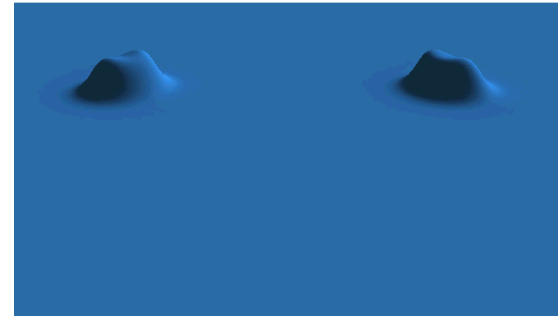
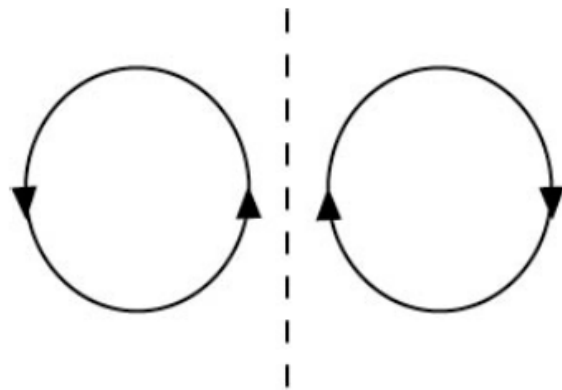
$$v_t = D_v \Delta v + \frac{uv^2}{1 + f_2 w} - (f_0 + f_1)v$$

$$\tau w_t = D_w \Delta w + f_3(v - w)$$

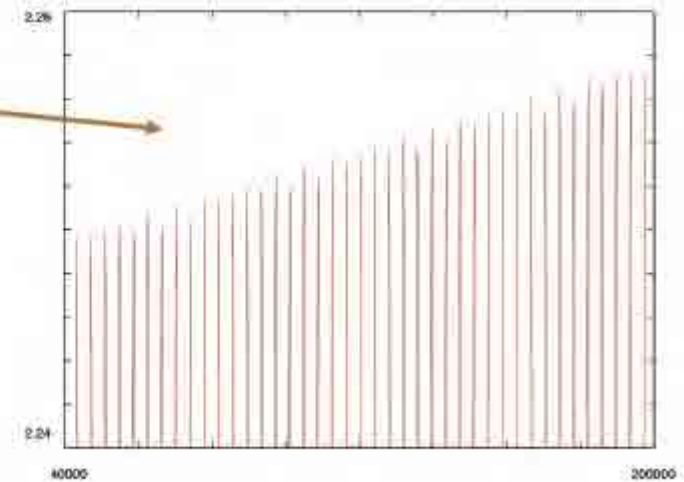
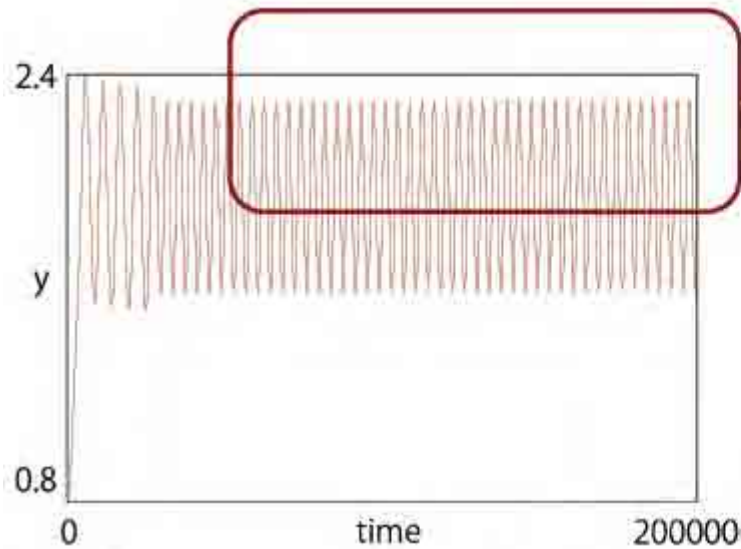


Transient dynamics

対回転解？



少しずつ離れていく！



予想

安定な単独回転解が存在する！

回転



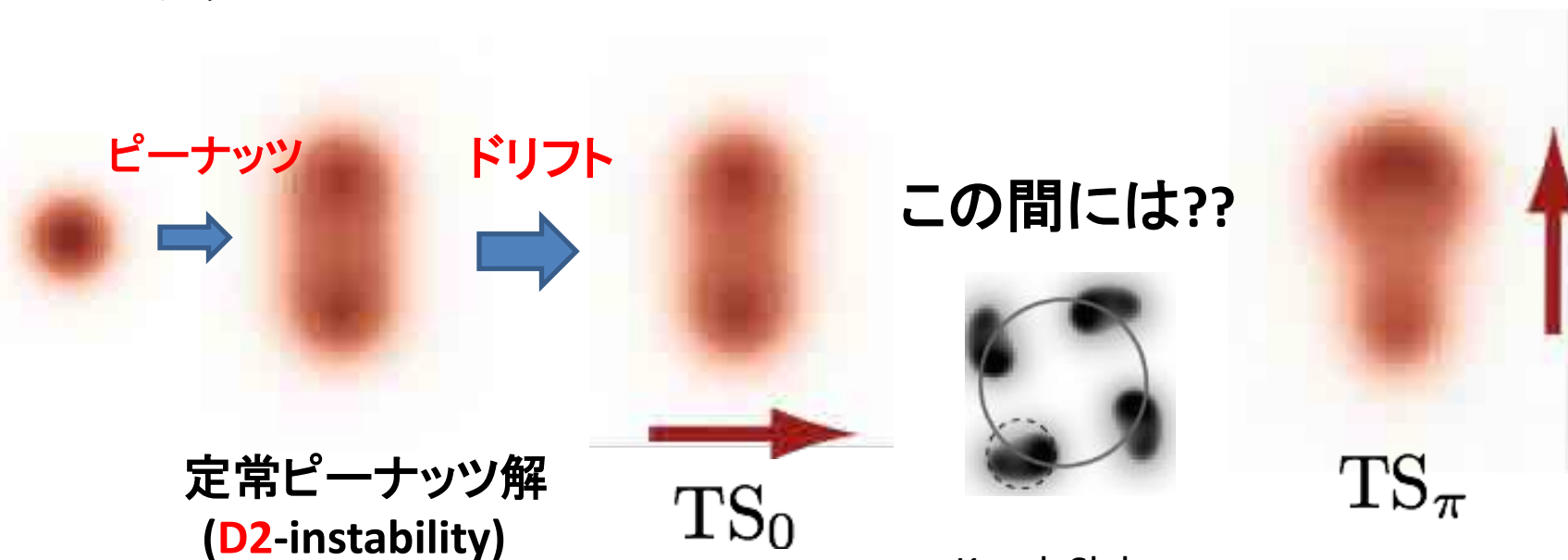
スポット内部に2つのピークが現れる



What type of symmetry breaking??

「風と舵」分岐

- もしドリフト分岐 (D1-breaking) がピーナッツ分岐 (D2-breaking) と複合すれば, それは回転運動を作りうる.



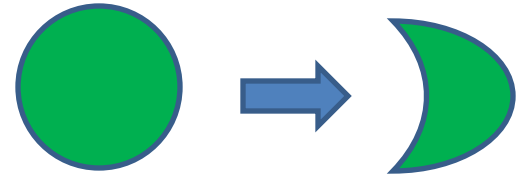
2つのピーク!

ドリフト方向は軸に直交でもなく. 平行でもない

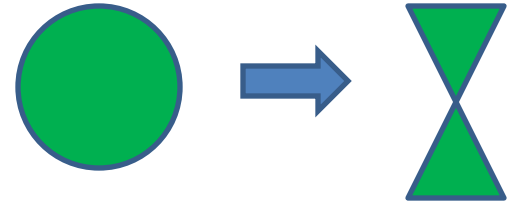
Show the existence of rotational spots near the codim 2 point of drift and pitchfork bifurcation points?

(1-2)-mode interaction

- Drift deformation: 1-mode



- Peanut deformation: 2-mode



- Proctor, M. R. E., Jones, C. A.: *The interaction of two spatially resonant patterns in thermal convection. Part 1. Exact 1:2 resonance*, J. Fluid Mech. 188 (1988) 301–335.
- Armbruster, D., Guckenheimer, J., Holmes, P.: *Heteroclinic cycles and modulated travelling waves in systems with $O(2)$ symmetry*, Physica D 29 (1988) 257–282.

Codim 2 = Drift + Peanut

栄伸一郎(九大)他

$$L\phi_i = 0, \quad L\psi_i = -\phi_i, \quad L\xi_i = 0,$$

$$U = \underbrace{S(r-p)}_{\text{Standing spot}} + \sum_{i=1}^2 \underbrace{q_i \psi_i(r-p)}_{\text{drift deformation}} + \sum_{i=1}^2 \underbrace{s_i \xi_i(r-p)}_{\text{Peanut deformation}}$$

$$+ q_1^2 \zeta_1 + q_2^2 \zeta_2 + q_1 q_2 \zeta_3 + s_1^2 \zeta_4 + s_2^2 \zeta_5 + s_1 s_2 \zeta_6,$$

$$+ q_1 s_1 \zeta_7 + q_2 s_2 \zeta_8 + q_1 s_2 \zeta_9 + q_2 s_1 \zeta_{10} + \eta_1 \zeta_{11} + \eta_2 \zeta_{12},$$

ODEs for **homogeneous** case

T.Teramoto, K.Suzuki, YN, 2009

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = q_1 - \beta'(q_1 s_1 + q_2 s_2), \\ \dot{p}_2 = q_2 - \beta'(q_1 s_2 - q_2 s_1), \\ \dot{q}_1 = M_1(q_1^2 + q_2^2)q_1 + M_2(s_1^2 + s_2^2)q_1 + M_3 q_1 + \beta(q_1 s_1 + q_2 s_2), \\ \dot{q}_2 = M_1(q_1^2 + q_2^2)q_2 + M_2(s_1^2 + s_2^2)q_2 + M_3 q_2 + \beta(q_1 s_2 - q_2 s_1), \\ \dot{s}_1 = N_1(s_1^2 + s_2^2)s_1 + N_2(q_1^2 + q_2^2)s_1 + N_3 s_1 + \alpha(q_1^2 - q_2^2), \\ \dot{s}_2 = N_1(s_1^2 + s_2^2)s_2 + N_2(q_1^2 + q_2^2)s_2 + N_3 s_2 + 2\alpha q_1 q_2. \end{cases}$$


(1,2)-mode interaction

Complex form

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = z_1 - \beta' \bar{z}_1 z_2, \\ \dot{z}_1 = M_1 |z_1|^2 z_1 + M_2 |z_2|^2 z_1 + M_3 z_1 + \beta \bar{z}_1 z_2, \\ \dot{z}_2 = N_1 |z_2|^2 z_2 + N_2 |z_1|^2 z_2 + N_3 z_2 + \alpha z_1^2. \end{cases}$$

$$z_0 = p_1 + ip_2, z_1 = q_1 + iq_2, z_2 = s_1 + is_2.$$

This is exactly the same ODEs as derived before just by using **symmetry** arguments.

Codim 2 singularity  Rotational motion
generic

Dynamics and bifurcation properties of the reduced ODE system

Using **polar coordinate** $z_1 = Qe^{i\phi}, z_2 = Se^{i\psi},$


$$\begin{cases} \dot{Q} = (M_1 Q^2 + M_2 S^2 + M_3)Q + \beta QS \cos \theta, \\ \dot{S} = (N_1 S^2 + N_2 Q^2 + N_3)S + \alpha Q^2 \cos \theta, \\ \dot{\theta} = - \left(2\beta S + \frac{\alpha Q^2}{S} \right) \sin \theta, \end{cases}$$

where we set $\theta \leftarrow \psi - 2\phi.$

Angle between drifting and axis of peanut

 trivial fixed points $\rightarrow Q = S = 0$

Standing disk (SD) spot solution:

 fixed points with $|\cos \theta| = 1$
 $\rightarrow Q = 0, \quad S^2 = -N_3/N_1$

Standing peanut (SP) spot solution:

Traveling spot (TS) solution bifurcates from SD spot at $M_3 = 0$ and from SP spot at $M_3 - M_2 N_3 / N_1 \pm \beta (-N_3 / N_1)^{1/2} = 0$.

$$\begin{cases} M_1 Q^2 + M_2 S^2 + M_3 \pm \beta S = 0, \\ (N_1 S^2 + N_2 Q^2 + N_3) S \pm \alpha Q^2 = 0, \end{cases}$$



Traveling spot TS_0 with $\cos \theta = +1$ corresponds to a propagation direction parallel to the long axis of the deformed shape.



Traveling spot TS_π with $\cos \theta = -1$ corresponds to a propagation direction perpendicular to the long axis of the deformed shape.

Stable RS branch connects smoothly between the two types of straight motions of TS_0 and TS_π .

Clockwise and counter-clockwise rotating spot solutions with $|\cos \theta| \neq 1$ emanate via pitchfork bifurcation as,

$$\begin{cases} Q^2 = \left(-\frac{2\beta}{\alpha}\right) S^2 = \left(-\frac{2\beta}{\alpha}\right) \frac{N_3 + 2M_3}{K}, \\ \cos^2 \theta = \frac{(N_3(M_2 - 2\beta M_1/\alpha) - M_3(N_1 - 2\beta N_2/\alpha))^2}{\beta^2(N_3 + 2M_3)K}, \end{cases}$$

where $K = 4\beta M_1/\alpha - 2M_2 - N_1 + 2\beta N_2/\alpha$.

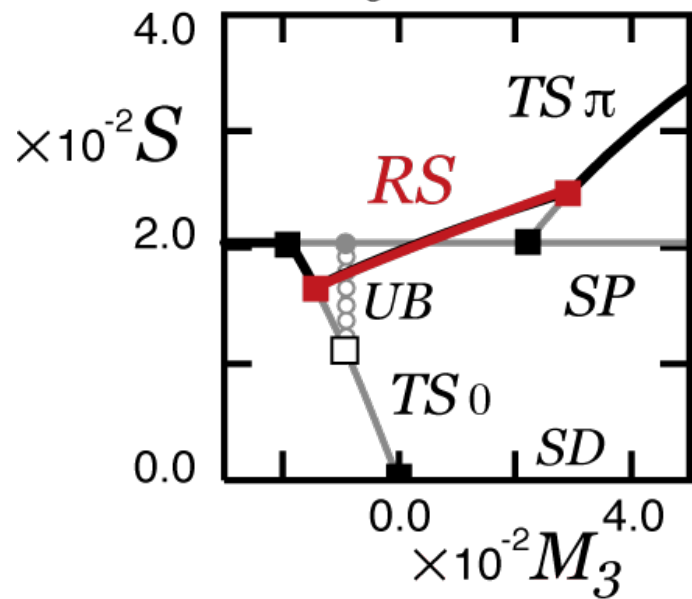
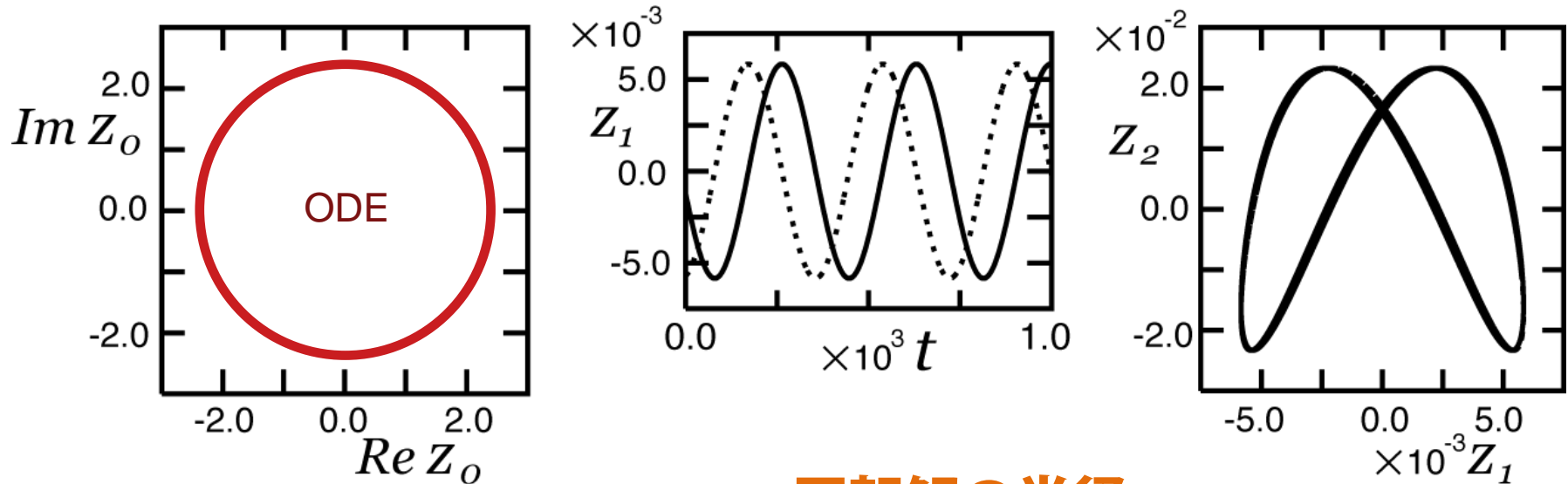
The location of spot (the slave part) becomes

$$z_0 = (2/\alpha\beta)^{1/2} (\beta' S e^{i\theta_0} - 1) e^{i\beta S \sin \theta t} / \sin \theta.$$

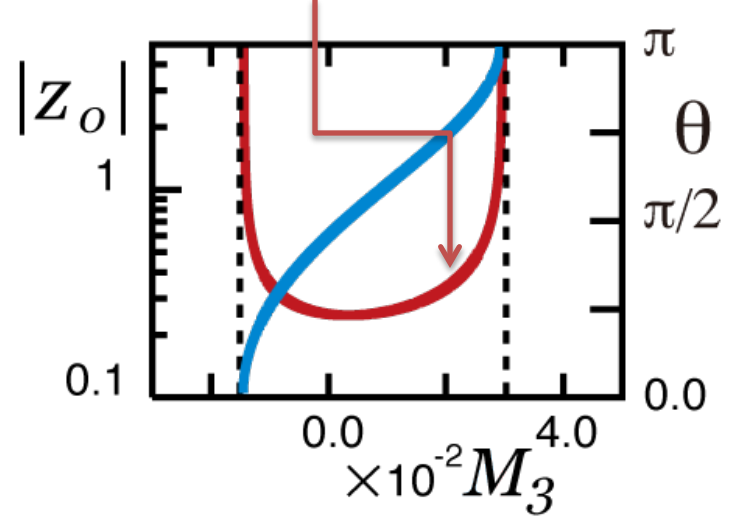
The radius is given by

$$|z_0|^2 = 2((\beta' S)^2 - 1) / (\alpha\beta \sin^2 \theta)$$

and the phase speed $\dot{\psi} = 2\dot{\phi} = 2\beta S \sin \theta$.



回転解の半径

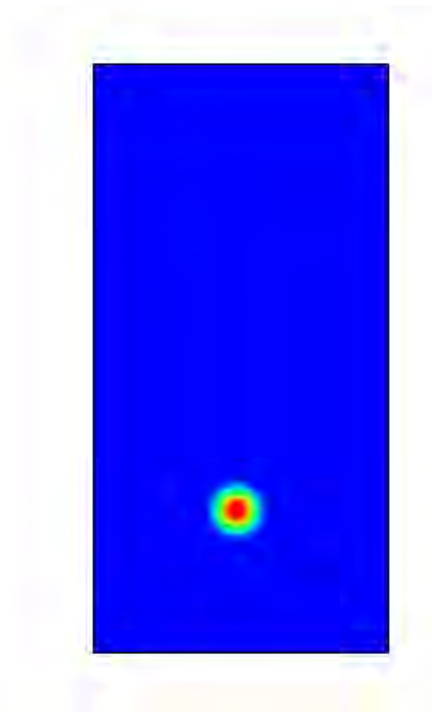
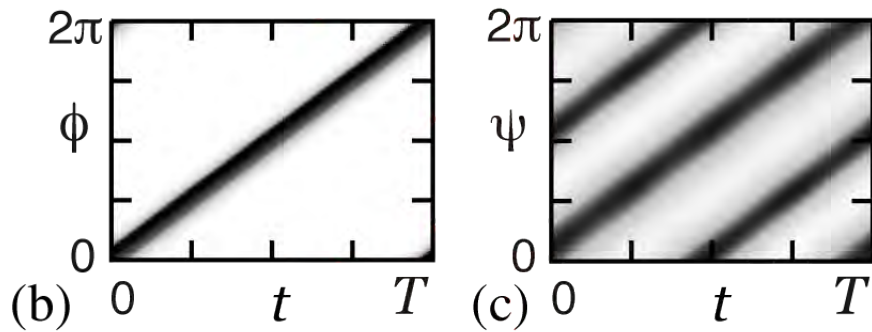
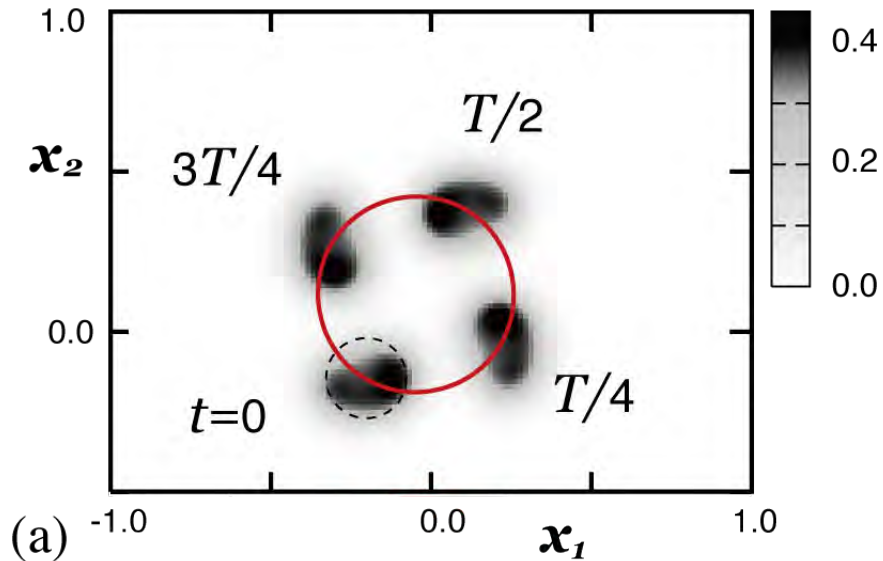


有限次元ダイナミクスの運動と大域分岐図

$(\alpha, \beta, \beta', M_1, M_2, N_1, N_2) \approx (-31.8, 1.0, -326.7, -61.3, -3.9, -240.0, -35.6)$.

PDEモデルの回転解

Teramoto, Suzuki, and YN, PRE 80 (2009) 046208



ケーススタディ 2

余次元 2 分岐

真正粘菌“Physarum” がキニーネに遭遇したときの
の挙動

(意志決定プロセス ?)

◆ Drift + Splitting: ピッチフォークとサドルノード

● S.Takagi, YN, T.Nakagaki, T.Ueda, K.-I.Ueda, 2007

● K.-I.Ueda, S.Takagi, T.Nakagaki, YN:

Mathematical model for contemplative amoeboid locomotion, submitted.

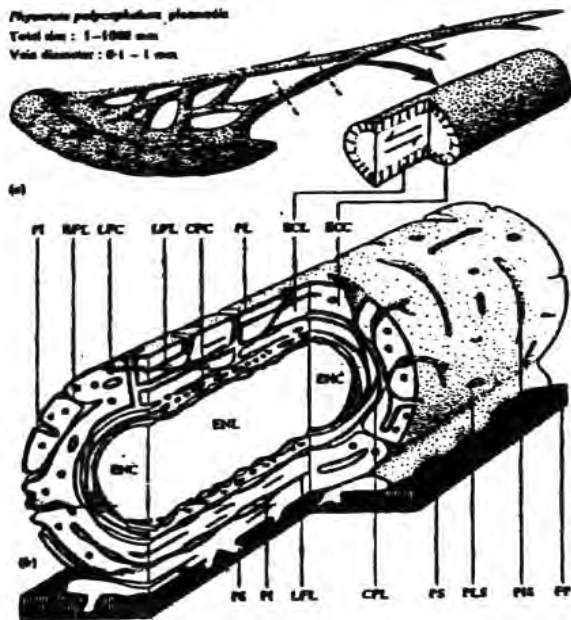
生物の環境への適応 (あるいは意志決定プロセス)

人間の本質的な意思決定は、かなりの部分が無意識下に任されている。意識の役割は、無意識下で準備されている可能性の候補の中から、いくつか拒否することぐらいである。

共同研究：上田（京大数理研）、中垣（函館未来大）、高木（北大）

真正粘菌変形体

真正粘菌変形体の構造



- ・ゲルの収縮弛緩運動(時間周期的)
- ・ゾルの往復流動
- ・ゲルの固さは前方と後方では異なる



--- 先端部: 柔らかい



--- 後方部: 固い



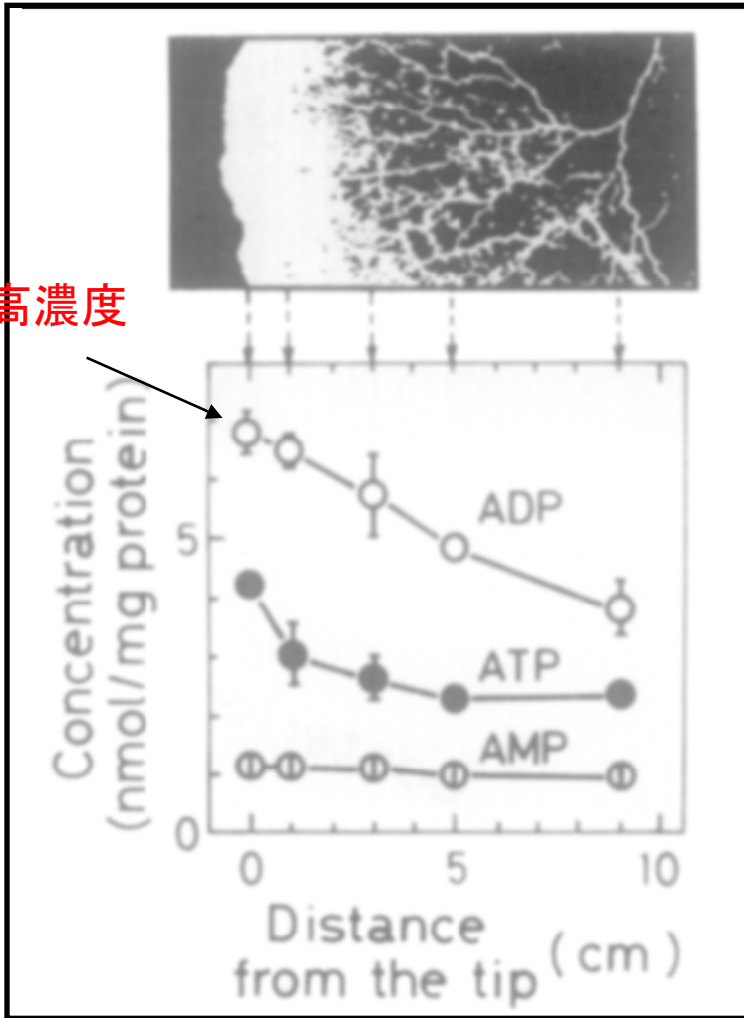


小林-手老-中垣モデル:振動パターンの解明

R.Kobayashi, A.Tero, T.Nakagaki, J. Math. Biol.53 (2006)

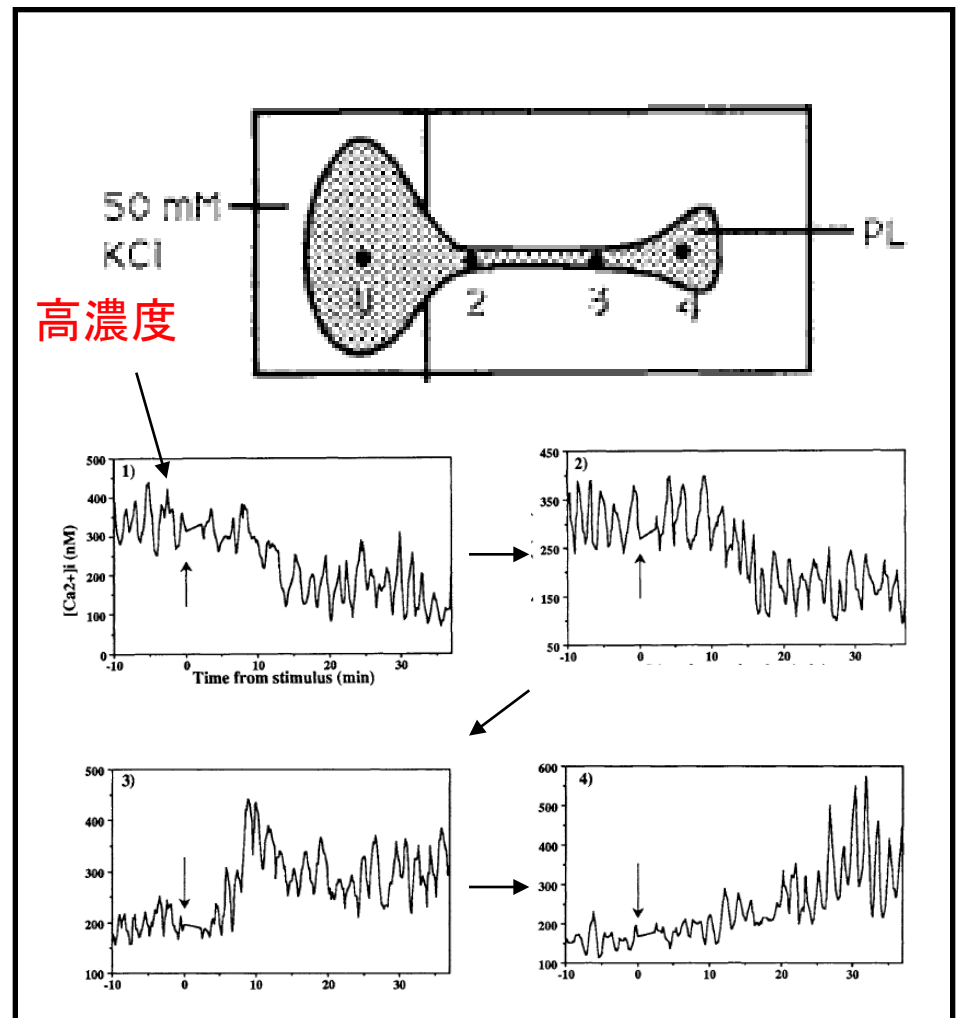
ゾル化因子

T.Ueda et al. Exp. Cell Res. (1986)



ATP

K. Natsume et al. Cell Structure and Function (1993)

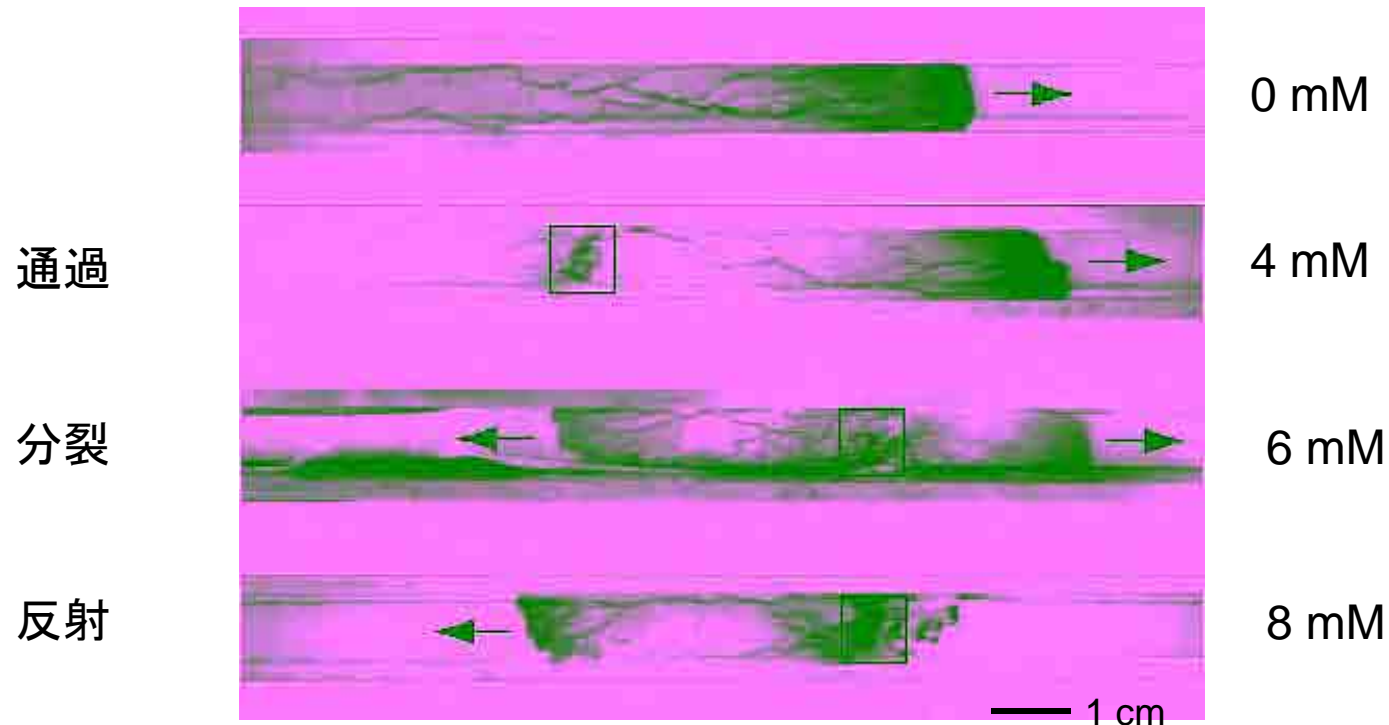


Caイオン

忌避物質に遭遇した際の粘菌運動の変化

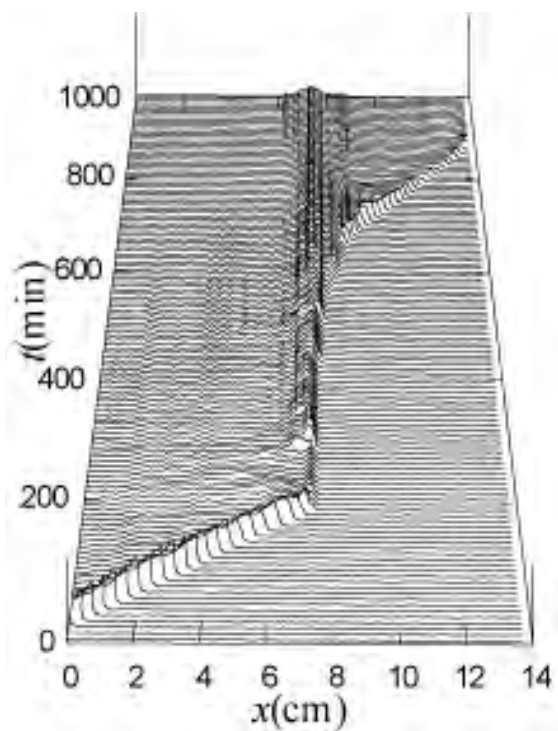
忌避物質の濃度に応じて3種類のレスポンスがみられる

□ : 忌避物質 (quinine)

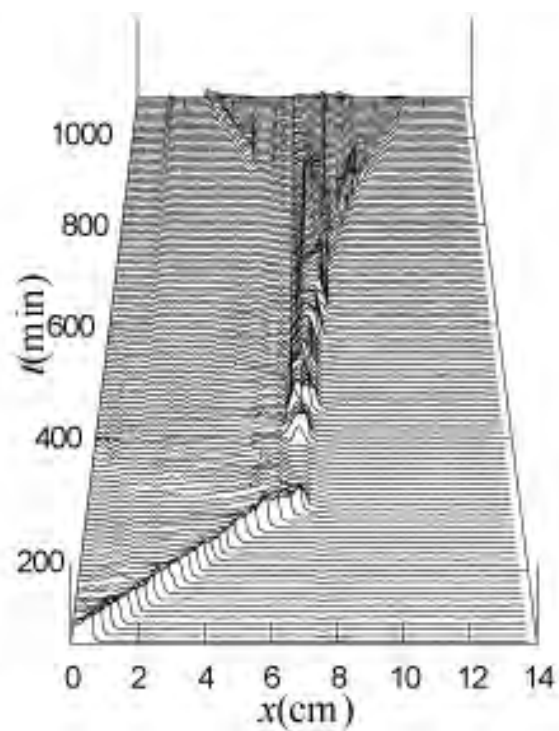


(Takagi et al. Proc TACSN)

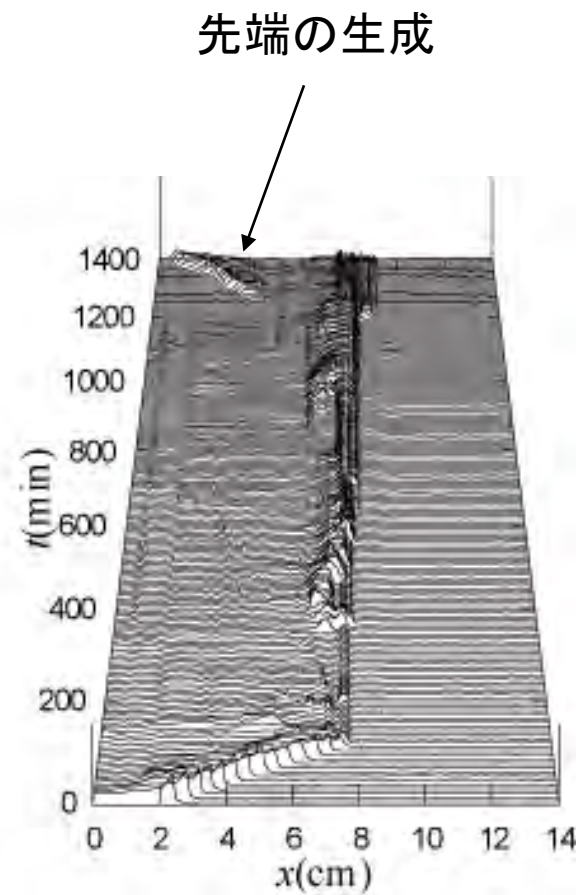
鳥瞰図



通過

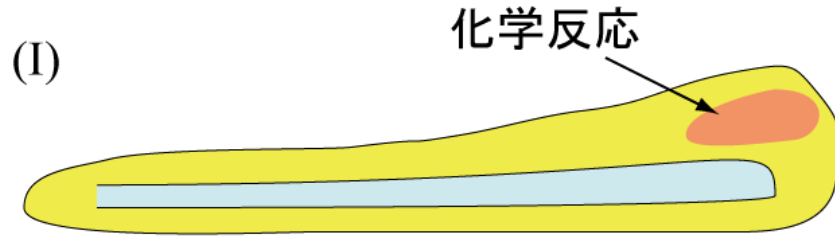


分裂

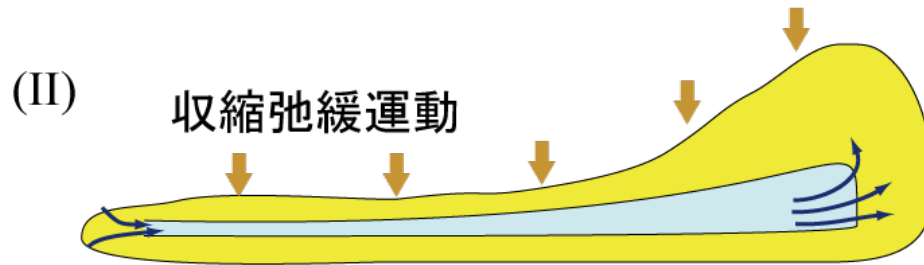


反射

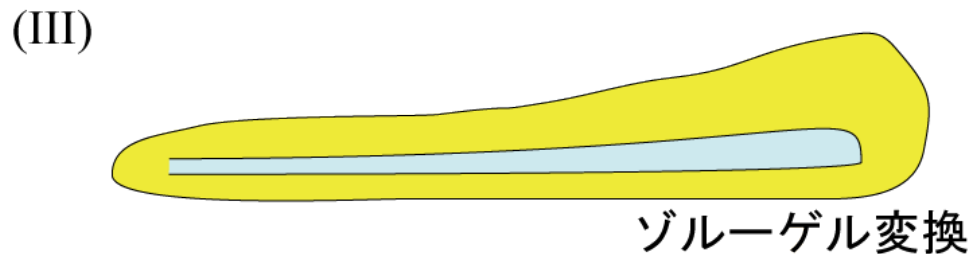
細胞運動の概略



化学反応によってゲルが
柔らかくなる



収縮弛緩運動によって発生する
圧力勾配によってゾルが前方に
移動する



ゾルーゲル変換によって細胞は
前進する

化学反応がどのように維持されているかが問題
(どのような相互作用が必要か?)

ゾルーゲル変換

ゲル層とゾル層の厚みは場所によって異なる
 →厚みの時間平均を計算

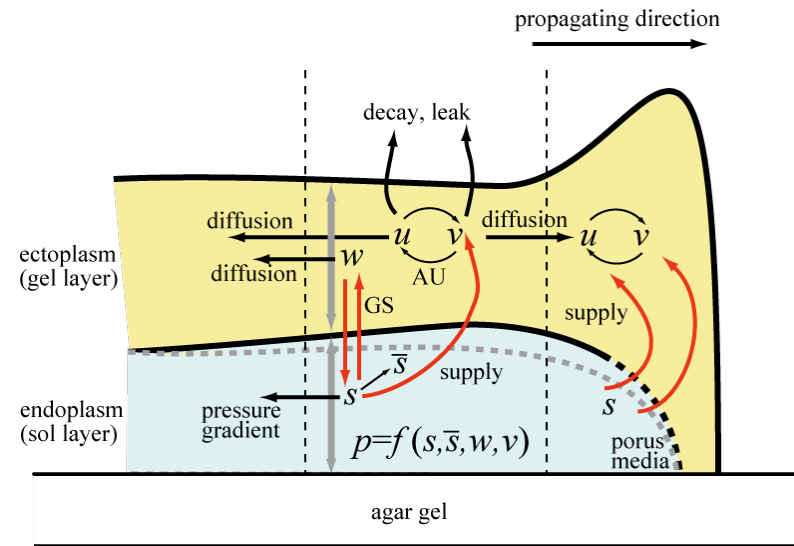
$$w_t = D_w w_{xx} + s - w$$

$$s_t = (sMp_x)_x + w - s \quad (\text{Darcy's law})$$

w, s : ゲルとゾルの量

$$\int (w + s) dx = \text{constant}$$

空間全体で積分すると保存する



圧力

ゾル層の厚みは場所によって異なる
 →厚みの時間平均を計算

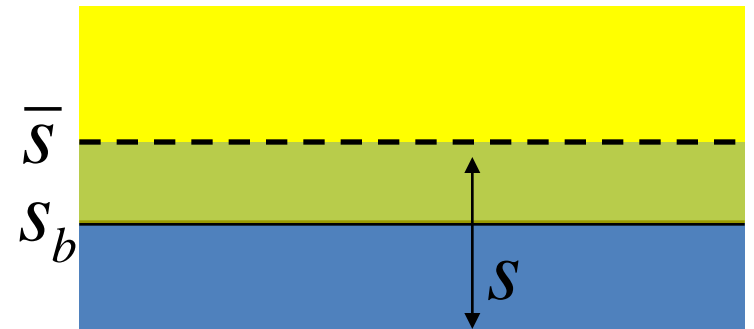
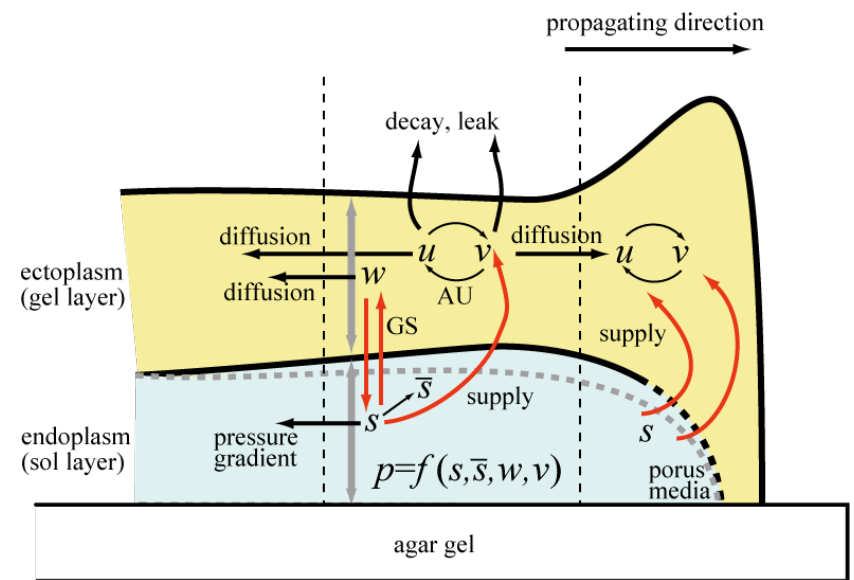
$$\bar{\tau} \bar{s}_t = \bar{s}_{xx} + (s - \bar{s})$$

$$p = \beta(v) f\left(\frac{s - s_b}{\bar{s}}\right),$$

$$s_b = \bar{s} + w \cos(\omega t)$$

\bar{s} : ゾル層の厚み

$$f(x) = \begin{cases} x \\ x(1 - x/c)^{-1} \end{cases}$$



s_b は \bar{s} を中心に振動

ゾル化因子による影響

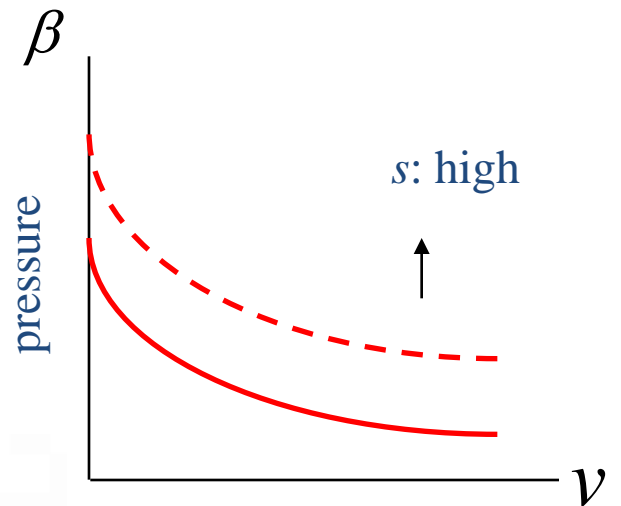
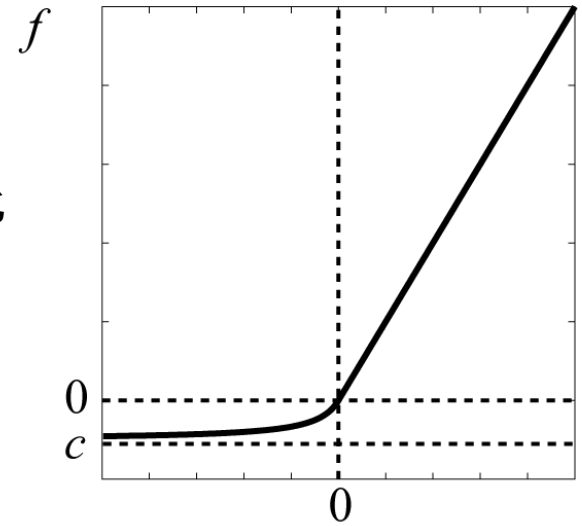
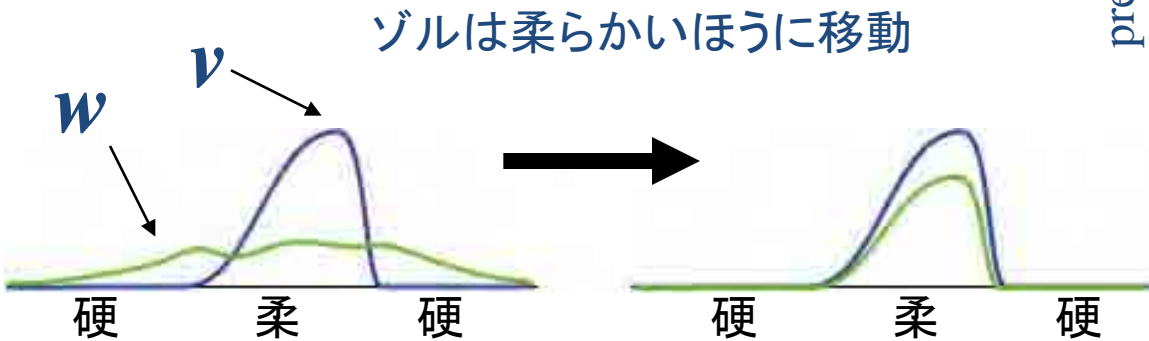
ゲル層とゾル層の相互作用(1)

ゾル化因子の濃度 v によってゲルの厚みが変化
(バネ定数が小さくなる)

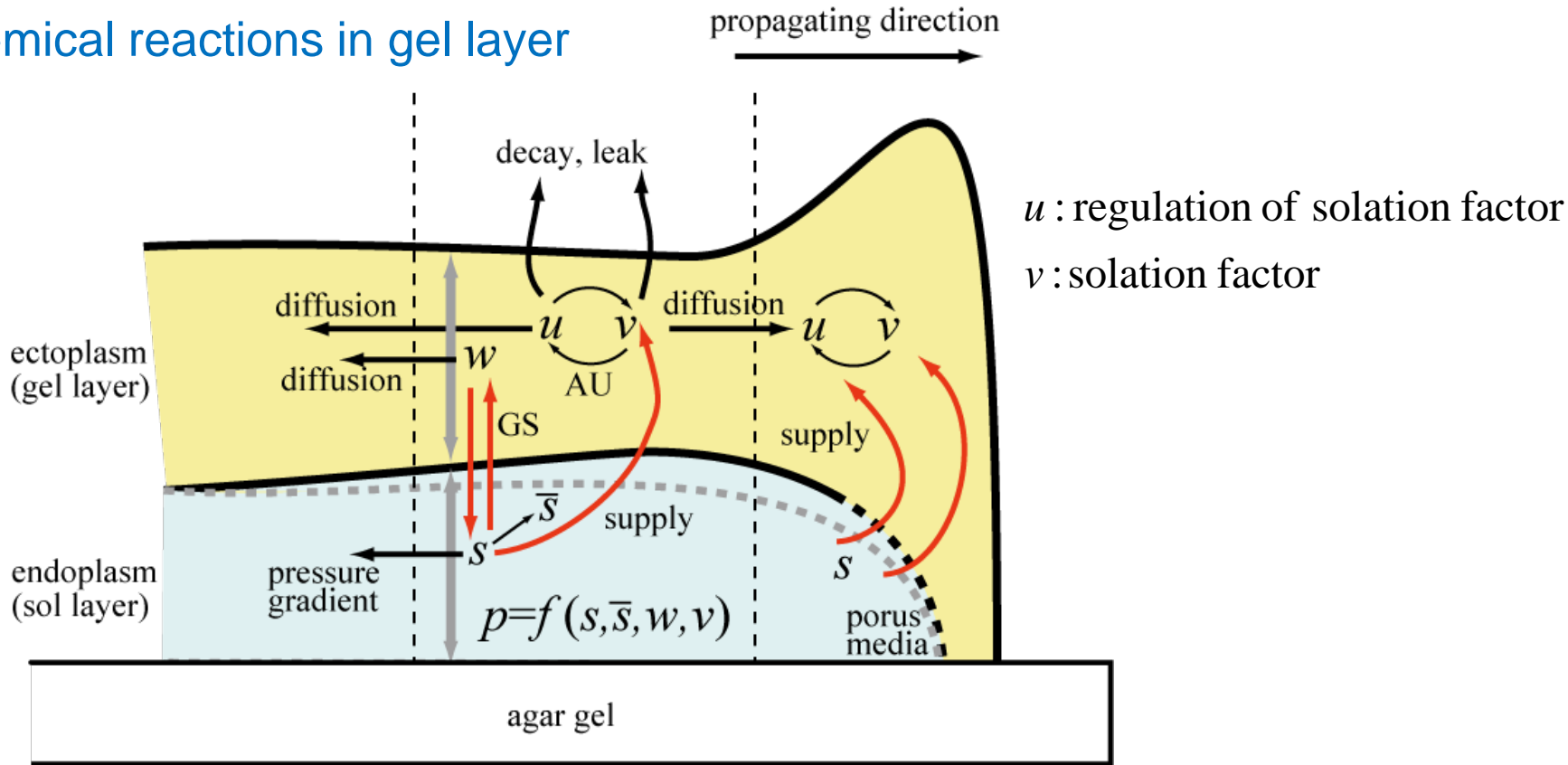
$$p = \beta(v) f\left(\frac{s - s_b}{\bar{s}}\right)$$

ゲル層とゾル層の相互作用(1)

チューブの厚み



Chemical reactions in gel layer



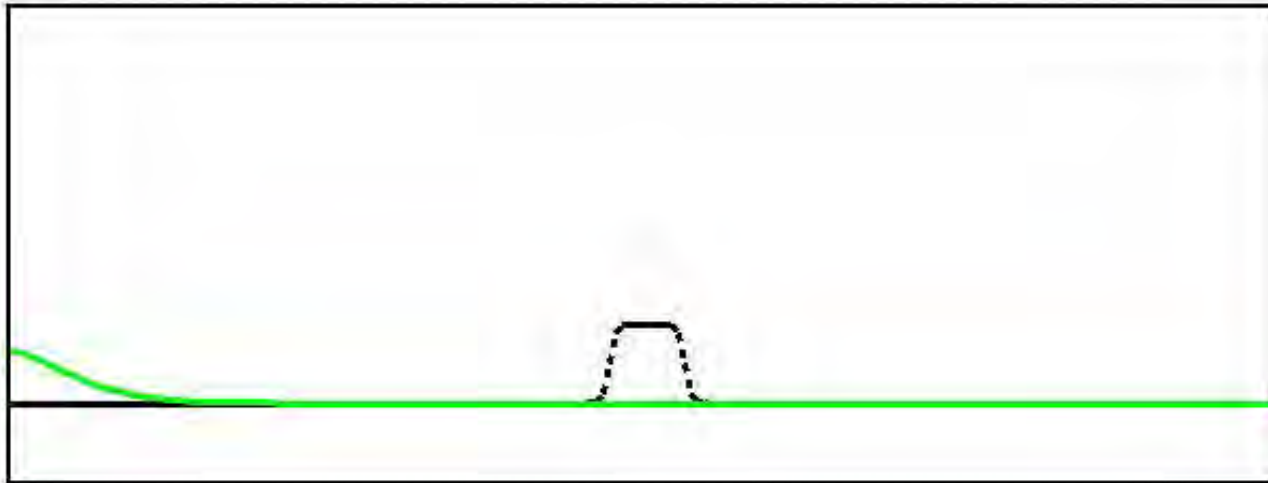
$$\tau u_t = D_u u_{xx} - F(u, v) + \sigma_u (u_0 - u) - r_{in}^u u$$

$$\tau v_t = D_v v_{xx} + F(u, v) + \sigma_v (v_0 - v) - r_{in}^v v$$

diffusion
reaction
supply
decay

$$F(u, v) = \frac{uv^2}{k_3 + k_4 v^2} \quad \text{Hill's law}$$

Low concentration of quinine



$$\tau u_t = (D_u(w)u_x)_x - H(w)F(u, v)$$

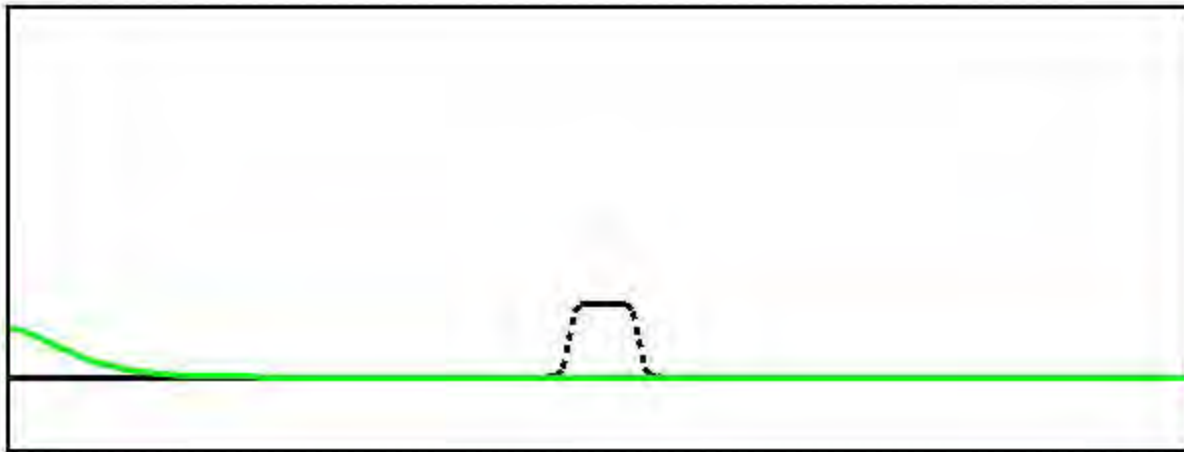
$$+ \tilde{\sigma}_u(s)(u_0 - u) - r_{in}^u u$$

$$\tau v_t = (D_v(w)v_x)_x + H(w)F(u, v)$$

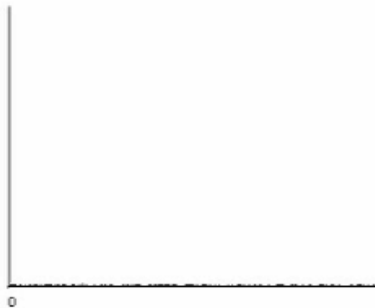
$$+ \tilde{\sigma}_v(s)(v_0 - v) - r_{in}^u v$$

Quinine effect

中位のキニーネ濃度



粘菌の厚み



実験データ

数理モデル(隠喩)

$u(x,t), v(x,t)$

filament
network

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -uv^2 + f_1(1-u) + D_u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

character
of front

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} = uv^2 - (f_1 + k)v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

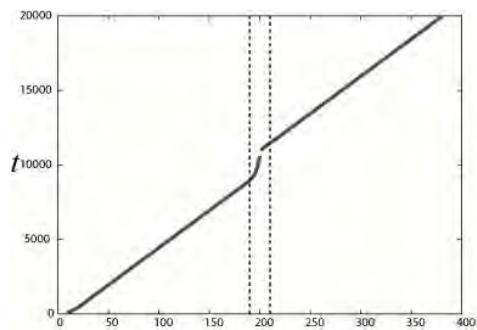
$f_1 > 0, k > 0, D_u > 0, D_v > 0$

キニーネの分布

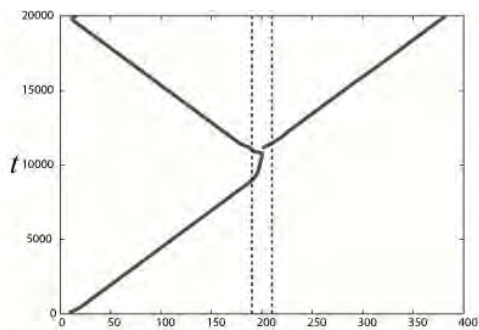
$$k(x) = \begin{cases} k_0, & x \in [0, x_0) \cup (x_1, L], \\ k_0 + \varepsilon, & x \in [x_0, x_1], \end{cases}$$

$k_0 > 0, \varepsilon > 0$

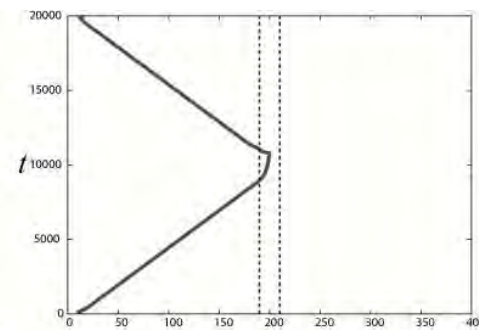




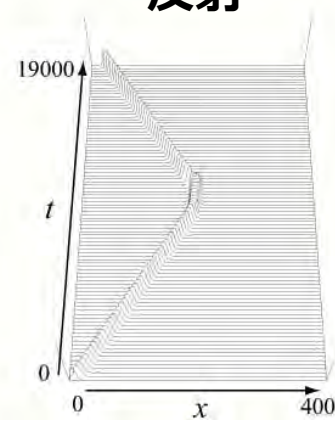
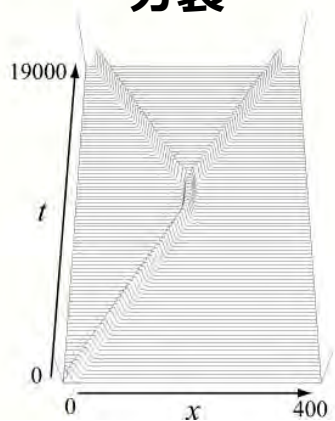
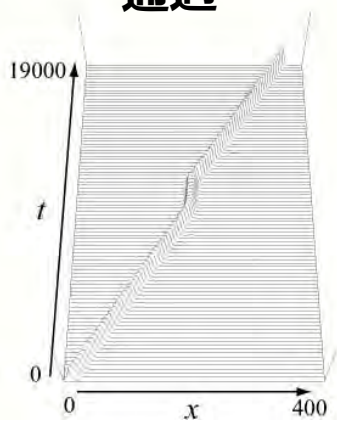
通過



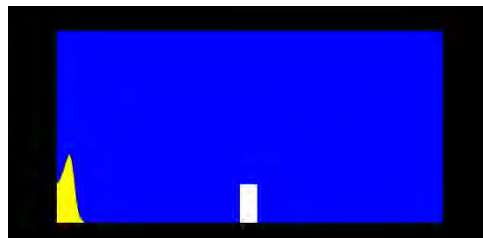
分裂



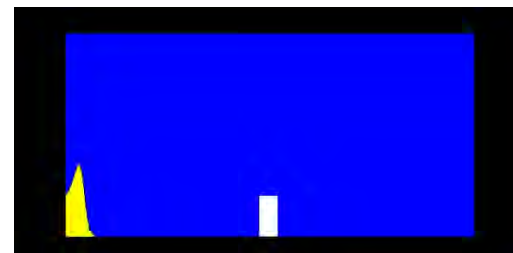
反射



キニ一ネ濃度低い



中くらい



高い

ドリフト+サドルノード余次元2での有限次元方程式

$$\dot{p} = q,$$

$$\dot{q} = q(\mu_1 + \theta_1 r) + \varepsilon \Gamma_1(p),$$

$$\dot{r} = \mu_2 + r^2 - \theta_2 q^2 + \varepsilon \Gamma_2(p).$$

キニーネ効果

p : 位置

q : 速度

r : 分裂の深さ

不均一性が無いときの分岐ダイアグラム

μ_1 : fix, $\varepsilon = 0$

$q=0, r>0$



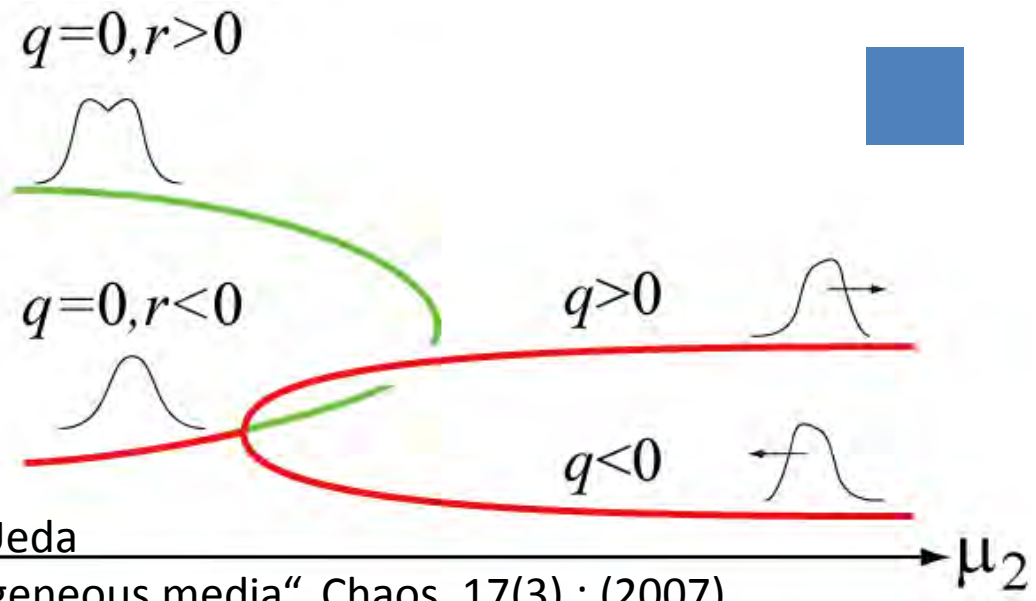
$q=0, r<0$



$q>0$

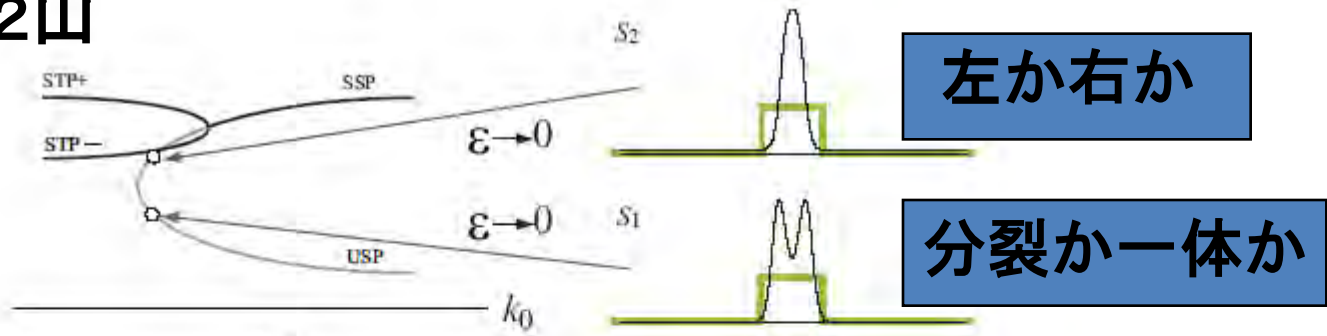


$q<0$



2つの分水嶺がキニーネ障壁で関わる

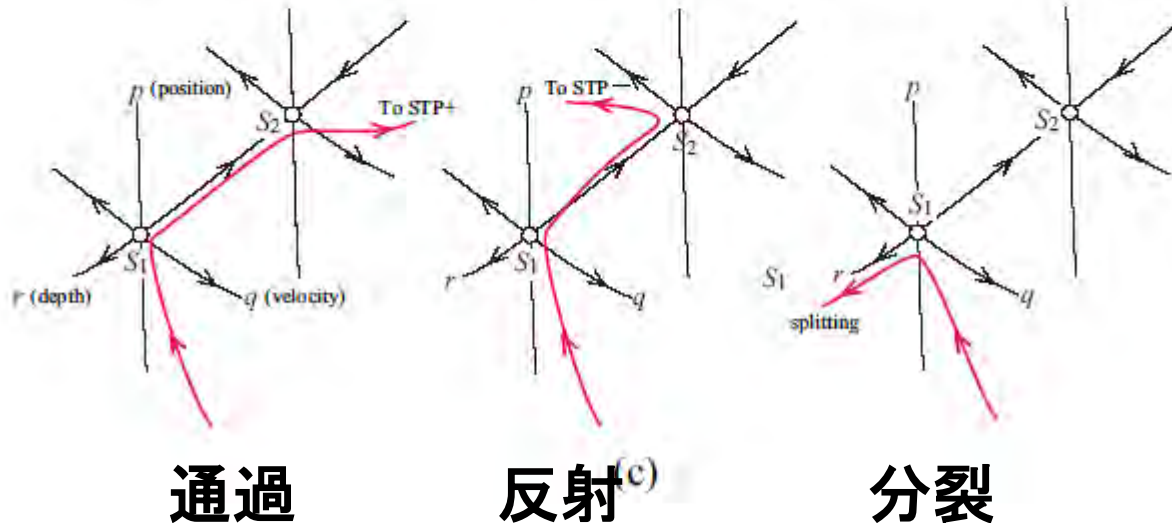
1山と2山



左か右か

分裂か一体か

2つの分水嶺のネットワークが行き先を決定.



**元の粘菌モデルでこのCodim2構造が
埋め込まれているかどうかは今後の課題**

結論 1

- 回転解

- ドリフト + ピーナッツ分岐 (余次元 2) が回転解を生み出す

- 「風と舵」分岐
- (1,2)-モード相互作用

- 有限次元問題への帰着 **codim 2 解析**.

- T. Teramoto, K. Suzuki and YN, Rotational motion of traveling spots in dissipative systems, PRE 80, 046208 (2009)

- 遷移的な**有限回転後離脱**の振舞いは今後の課題

結論2

• 逡巡行動

- ゼル・ゲル転移と頭部**生体化学反応系**を組み合わせた真正粘菌モデルの提案
- 長い**逡巡行動**は余次元2の開折から得られる**ヘテロクリニック軌道**の存在から説明される可能性がある。
- **意志決定のプロセス**
 - **分裂するか、しないか。乗り越えていくか、戻るのか。**