ボルツマン方程式の研究：過去と未来

鵜飼　正二　　　東京工業大学名誉教授

ボルツマン方程式に関するこれまでの数学的研究を特に大域解の存在理論を中心に紹介するとともに、最近の発展が著しいいわゆるグラッドのカットオフ近似を仮定しない理論とその未解決問題について概観する。

ボルツマン方程式はL.ボルツマンが1872年に導いた非平衡希薄気体の運動方程式である．彼の目的は当時定式化が完成した熱力学をニュートン力学により基礎付けることにあった.

熱力学は観測や実験事実から演繹された経験則であり、熱現象の定量的、定性的取り扱いには大きな成功を収めたが、しかし熱とは何か、温度とは何かという根源的な問いに答える理論ではない。熱力学は経験科学としては確立されていたが物理的基礎は明らかでなかった。

しかし当時は既に全ての物理現象は単一の基本原理により記述されねばならないという信念(principle of the first principle)が広く受け入れられており、熱力学をニュートン力学に基づいて構築しようという試みはごく自然なものであった.

ボルツマンの出発点は気体分子運動論である．これは気体が互いに衝突を繰り返している多数の粒子からなり，気体の巨視的性質はその相対的な運動で説明が出来るとするものである．このアイデアは18世紀に既に萌芽が見られるが，19世紀に入り原子の存在こそまだ実証されていなかったが原子論が新しいパラダイムとして認知され，熱は粒子の運動に他ならないという熱運動論が広く支持されるようになるに従い説得力を持つようになっていた.

　このアイデアがニュートン力学と相性が良いのは明らかであろう。原理的には全ての粒子の位置と速度をニュートンの運動方程式から求めれば気体の微視的状態が分かる。しかし解くべき方程式の個数は膨大(アボガドロ数)であり、解くことはおろか、それと同数の初期データを準備することは実行不可能である。しかし多数の粒子が衝突を繰り返すと個々の粒子は個性を失い、平均的・統計的な扱いが意味を持つようになる。

　ボルツマンが着目した統計量は１粒子相空間（位置-速度空間) における気体粒子の密度（単位体積あたりの粒子質量の合計）である。

　古典的な密度分布は実空間の統計量であるが、相空間では粒子速度というミクロの情報を含めることができる。相空間の選び方はもちろん一意でなく、２粒子相空間、３粒子相空間…も可能であるが、１粒子相空間は古典的な実空間に次いで簡単な構造を持ち、しかもミクロ情報を扱うことができる。

相空間における密度関数

　時刻 t に位置 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, 速度 $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ を持つ気体粒子の密度分布を $f(t, x, v)$ で表す。これは 1 粒子相空間 $\Lambda = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の任意の部分領域 G について、積分

$$\iint_G f(t, x, v)dxdv$$

が時刻 t において領域 G に存在する粒子の合計質量を与えることを意味する。f は個数密度や確率密度とも解釈できる。

　以下，簡単のため、外力は無く、粒子質量は1とする。

ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \underbrace{-v \cdot \nabla_x f}_{\text{輸送項}} + \underbrace{Q(f)}_{\text{衝突項}}. \tag{1}$$

これは、粒子の自由運動と粒子同士の衝突により単位時間に領域Gに流入、流出する粒子数を数え上げることにより導かれる．

- Q：衝突作用素．２体衝突の場合

$$Q(f) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} B(|v - v_*|, \sigma)\{f(v'_*)f(v') - f(v_*)f(v)\}dv_* d\sigma,$$

$$Q(f) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} B(|v-v_*|,\sigma)\{f(v'_*)f(v') - f(v_*)f(v)\}dv_*d\sigma,$$

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma, \quad v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\sigma.$$

- $f(v) = f(t,x,v)$, etc: t,xは共通なので省略している。
- $B(|v-v_*|,\sigma)$: 衝突断面積, 2体相互作用法則で定まる非負値関数.
- $(v,v_*) \Longleftrightarrow (v',v'_*)$：は衝突前後の粒子速度.

運動量とエネルギーの保存則：

$$v' + v'_* = v + v_*, \qquad |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2.$$

ボルツマンは彼の方程式から

- 熱力学の第一法則（エネルギー保存則）
- 熱力学第二法則（エントロピー増大の法則）

が証明できると主張した.

熱力学第一法則（エネルギー保存則）

$$E=\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|v|^2 f(t,x,v)dxdv：$$

$$=\quad 気体の全エネルギー = 運動エネルギー + 熱エネルギー.$$

エネルギー保存則： $\dfrac{dE}{dt}=0.$

証明：

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=-\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|v|^2 v\cdot\nabla_x f dxdv+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|v|^2 Q(f)dv\\&=\frac{1}{4}\iiint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2}Bf(v'_*)f(v')\\&\qquad\qquad\times\left(|v'_*|^2+|v'|^2-|v_*|^2-|v|^2\right)dvdv_*d\sigma=0.\end{aligned}$$

$|v|^2$を$1, v_i(i=1,2,3)$ と置き換えても同様の計算ができ，
それぞれ全質量、全運動量の保存則を得る．

熱力学第二法則　（エントロピー増大の法則）

$$H = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} f \log f \, dx dv \text{：} H \text{関数},$$
$$-H = \text{エントロピー}$$

H 定理： $\dfrac{dH}{dt} \le 0.$

証明：

(2) $\dfrac{dH}{dt} + D = 0,$

$$D = -\int Q(f) \log f \qquad \text{（消散積分）}$$
$$= \int B\big(f(v_*')f(v') - f(v_*)f(v)\big) \log \frac{f(v_*')f(v')}{f(v_*)f(v)} dx dv dv_* d\sigma \ge 0.$$

$$(a-b)\log\frac{a}{b} \ge 0 \qquad (a, b > 0).$$

平衡状態，マクスウエル分布

$t \to \infty$のとき，fが極限を持つとすると、$dH/dt \to 0$、したがって(2)より$D(\infty) = 0$である。極限関数を$M(v)$とするとこれは

$$M(v_*')M(v') - M(v_*)M(v) = 0$$

を意味する。ボルツマンはこの関数方程式を解き有名なマクスウエル分布

$$M(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\{-\frac{|v-u|^2}{2T}\}$$

を得た。これは密度$\rho > 0$, 流速$u = (u_1, u_2, u_3)$, 温度$T > 0$の平衡気体の粒子の速度分布関数である.

マクスウエル分布は，マクスウエルがボルツマン方程式に先立ち1859年に統計的考察により導いたものである.明らかに$Q(M) = 0$が成り立つので、ρ, u, Tがt, xによらない定数ならばMはボルツマン方程式の定常解である。すなわち

- 平衡状態はマクスウエル分布以外にあり得ない.
- マクスウエル分布はボルツマン方程式に埋め込まれている.

　これよりボルツマンは熱力学のニュートン力学的基礎を築いたと主張した。しかしこれに対して多くの反論が提起され、ボルツマンとの間で激しい論争が繰り広げられたことは科学史上の有名な挿話である.

W. トンプソン，J. ロシュミット，E. ツェルメロ，$\cdots$

- H 定理は時間に関して非可逆.
- 　ニュートン力学は時間に関して可逆.

最終的にボルツマンに軍配が上ったのは1970年代に入ってからである.

- ランフォードによるボルツマン-グラッド極限の存在証明。
  ボルツマン方程式の統計力学的依存性.

- 多くの研究者によるボルツマン方程式の解の存在理論の整備.

ボルツマン方程式の数学解析

先駆的研究:

- ヒルベルト展開(1912).（数学の問題，第６）
- チャップマン－エンスコグ展開(1916-17)

時間大域的解の存在定理

最初の存在証明はカーレマン(1932)に遡る．ただし、f が変数 x に依存しない場合（空間一様）の，剛球気体についての結果.

(参考) ナヴィエ-ストークス方程式のルレイによる弱解の構成: 1934

しかしその後長い間殆ど研究の進展がなかった。その理由の１つのは衝突断面積 B の持つ強い特異性である.

グラッドのカットオフ近似

この困難を回避するため1963年にグラッドは特異点の近傍で B を有界関数で置き換えることを提案した。このとき Q は積分作用素として適切に定義できる.

この近似の導入でその後のボルツマン方程式の解析が大きく進展した。現在この近似はグラッドのカットオフ近似と呼ばれている。この近似は画期的で、ボルツマン方程式の解析に多くの成功をもたらした。

特に大域解の存在理論の研究は大きく進展した。実際、これまでに、全く原理の異なる３つの理論的枠組みが開発された.

初期値問題の大域解 - カットオフ近似

1. L^∞ 理論：平衡解に近い解、スペクトル解析＋ブートストラップ論法
   鵜飼('74, '76), 西田-今井('76), 静田-浅野('78) $\cdots$

2. L^1 理論：振幅に制限のない解、繰り込み理論＋H 定理
   Diperna-Lions('89), Hamdache ('92) $\cdots$

3. L^2 理論：平衡解に近い解、マクロ・ミクロ分解＋エネルギー法
   Liu-Yang-Yu('04), Guo('04)$\cdots$

ほぼ15年ごとに技術革新が生み出されてきた.
次の技術革新が待たれる.

衝突断面積 $B(v-v_*,\sigma)$ Bは衝突する2粒子間の相互作用で定まる。ボルツマンは2つの例を与えた

(i) 剛球気体モデル: $B(|v-v_*|,\sigma)=b_0|v-v_*|,\quad n=3,\quad b_0>0.$

(ii) 相互作用ポテンシャルが逆べき法則

$$U(\rho)\sim\rho^{-(q-1)},\quad q>2,\quad \rho:\ \text{粒子間距離}$$

では、ニュートンの運動方程式を解くことにより、

$$B(v-v_*,\sigma)=\Phi(|v-v_*|)b(\cos\theta),\quad \cos\theta=\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma,$$

$$\Phi(|v-v_*|)=|v-v_*|^{\gamma},\quad \gamma=\frac{q-5}{q-1}\in(-3,1),$$

$$\sin\theta\, b(\cos\theta)\ \approx\ K\theta^{-1-2s}\ \ (\theta\to 0),\quad s=\frac{1}{q-1}\in(0,1),\ K>0.$$

が得られる。

$$\begin{aligned}
&q > 5, && \text{ハードポテンシャル.}\\
&q = 5, && \text{マクスウエル型ポテンシャル.}\\
&2 < q < 5, && \text{ソフトポテンシャル.}\\
&q = 2, && \text{クーロンポテンシャル} \implies \text{ランダウ方程式.}
\end{aligned}$$

$\theta^{-1-2s}(0 < s < 1)$: $\theta = 0$で可積分でない.

$\implies$ Qは擬微分作用素のように振舞う.

$$Q(f) = \int B\{(f(v'_*)f(v') - f(v_*)f(v)\}dv_*d\sigma$$

fが滑らか $\implies$ $\theta = 0$で$\{\cdots\} \sim |v - v_*|\theta$.

カットオフ近似 : $b(\cos\theta)$を有界関数で置き換える

$\implies$ 多くの性質が保存される。微分作用素的振舞は失われる。

Q の基本的評価

$L^2 = L^2(\mathbb{R}^3_v)$,
L^p_α, H^s_α :重み$(1+|v|^2)^{\alpha/2}$付きL^pおよびソボレフ空間,
$r^+ = \max(r, 0)$, $r \in \mathbb{R}$.

定理 1. (上からの評価)

$0 < s < 1$, $\gamma > \max\{-3, -2s - 3/2\}$, $m \in [s-1, s]$, $\alpha \in \mathbb{R}$に対して

$$\left|\Big(Q(f,g), h\Big)_{L^2}\right| \le C\Big(\|f\|_{L^1_{\alpha^+ + (\gamma+2s)^+}} + \|f\|_{L^2}\Big) \times \|g\|_{H^{\max\{s+m, (2s-1+\epsilon)^+\}}_{\alpha^+ + (\gamma+2s)^+}} \|h\|_{H^{s-m}_{-\alpha}} .$$

- $m = s$: $Q(f, g) \sim \langle D_v \rangle^{2s} g$
- [2], [4], [9], [18].

定理 2. (下からの評価)

$$0 < s < 1, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad f \geq 0, \neq 0,\ f \in L^1_2 \bigcap L \log L,$$

とする．$\|f\|_{L^1_2}$ および $\|f\|_{L \log L}$ にのみ依存する正数C_fが存在し、

$$\begin{aligned} &C_f \|\langle D_v \rangle^s \langle v \rangle^{\gamma/2} g\|^2_{L^2} \\ &\qquad \leq -(Q(f,g),g)_{L^2} + C\|f\|_{L^1_{\max(\gamma^+, 2-\gamma^+)}} \|g\|^2_{L^2_{\gamma^+/2}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

- (coercivity 評価) $-Q(f,g)$はgに関して正定値作用素.
- [1], [4], [9], [18], [29].

上の二つの定理は大雑把に言って $g > 0$ ならば

(3) $$Q(f,g) \approx -C_f(-\triangle)^s g + \text{ lower order terms}, \quad C_f > 0$$

が成り立つことを示している。すなわち Q は s 次の分数べきラプラス作用素のように振舞う。

- 解の平滑化作用.
- 時間大域解の存在.

Alexandre - Morimoto -S.U. - Xu - Yang
Huo - Morimoto - S.U. - Yang
Morimoto - S.U. - Xu - Yang

- ボルツマンが導出したカットオフのない場合がようやく解析できるようになってきた。しかし未解決問題も多い。

解の平滑化

分数べき熱方程式：

$$u_t + (-\Delta_x)^s u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x).$$

$$u_0 \in L^2_x \ \Rightarrow \ e^{t(-\Delta_x)^s} u(t) \in L^2_x \quad (t > 0).$$

$t > 0$で次数$\frac{1}{2}$のGevreyクラスの関数.

空間一様ボルツマン方程式

$$f_t - Q(f,f) = 0, \qquad f|_{t=0} = f_0(v).$$

弱解(エントロピー解) (Villani '98, [35])：

$$f \geq 0, \quad \sup_{0\leq t\leq T} \int f\big(1 + |v|^2 + (\log f)^+\big)\, dxdv < \infty.$$

定理 3. (Huo-Morimoto-S.U.-Yang, '08, [18]($\Phi = \langle v\rangle^\gamma$),
Morimoto '10 ($\Phi = |v|^\gamma$))
$0 < s < 1$, $\gamma \geq 0$. f は任意次数のモーメントを持つ弱解。このとき

$$\forall T > 0, \quad f \in L^\infty([t_0, T];\ H^{+\infty}(\mathbb{R}^3)), \quad t_0 \in (0, T).$$

証明：時間依存の軟化子 $M = M_\delta(D_v, t)$：

$$M(\xi,t) = \frac{(1+|\xi|^2)^{kt-(3+\delta)/2}}{(1+\delta|\xi|^2)^{kT}}, \quad k, T > 0, \quad t \in [0,T],\ \delta > 0.$$

$$(f_t - Q(f,f), M^2 f)_{L^2} = 0.$$

定理1,2により

$$\frac{d}{dt}\|Mf\|^2 + \|Mf\|^2_{H^s_{\gamma/2}} \le C\|(\log\langle D_v\rangle^2)^{1/2} Mf\|^2 + R$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t M(\xi,t) = k\log(1+|\xi|^2)M(\xi,t),\\
&R = \|MQ(f,f) - Q(f,Mf)\|\\
&\qquad \le C\|f\|_{L^1_{\gamma+(2s-1)^+}}\left(\|Mf\|^2_{H^{(2s-1)^+}_{\gamma/2+(2s-1)^+/2}} + \|f\|^2_{L^1}\right) \qquad (s \ne 1/2)\\
&\qquad \le C_1\|Mf\|^2_{H^{(2s-1)^+}_{\gamma/2+(2s-1)^+/2}} + C_2.
\end{aligned}
$$

$$
\|f(t)\|_{L^1_\beta} \le C\|f_0\|_{L^1_2}\ (0 \le \beta \le 2) \qquad (\text{保存則})
$$

$0 < s < 1/2, \gamma \ge 0$ のとき

$$
\|M_\delta(D_v,t)f\|^2 \le \|M_\delta(D_v,0)f_0\|^2 + C_2 t.
$$

$\delta \to 0$ とする.

$$M_\delta(\xi, t) \to \langle \xi \rangle^{kt-(3/2+\delta)},$$
$$\|\langle D \rangle^{kt-(3/2+\epsilon)} f\|^2 \le \|f_0\|^2_{H^{-(3/2+\delta)}} + Ct \le C\|f_0\|^2_{L^1} + Ct.$$

$k > 0$は任意に大きく取れるから$f \in H^{+\infty} \quad (t > 0)$.

実は，より強いGevrey平滑化が起こっている．

定理 4. (Morimoto-S.U. '09)
$0 < s < 1/2$ ， $\gamma > \max(-3, -3/2 - 2s), \gamma + 2s < 1.$
$f(t, v)$ は次の性質を持つ解とする。

$$f \geq 0\,,\ \not\equiv 0, \quad \exists \delta_0 > 0, e^{\delta_0 \langle v \rangle^2} f \in L^\infty([0, T];\, H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)).$$

このとき$t > 0$でfは次数$1/(2s)$の*Gevrey*クラスの滑らかさを持つ。より詳しくは

$$\forall t_0 \in (0, T), \quad \exists \rho, \delta, \kappa > 0 \ \ (\delta > \kappa T),$$
$$\sup_{t \in [t_0, T]} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^3} \frac{\rho^{|\alpha|} \| e^{(\delta - \kappa t)\langle v \rangle^2} \partial_v^\alpha f(t) \|_{L^2}}{\{\alpha !\}^{1/(2s)}} < +\infty$$

が成り立つ。

空間非一様ボルツマン方程式　初期値問題

$$f_t + v\cdot\nabla_x f - Q(f,f) = 0, \qquad f|_{t=0} = f_0(x,v),$$

はコルモゴロフ型方程式の初期値問題

$$f_t + v\cdot\nabla_x f + (-\Delta_v)^s f = 0, \qquad f|_{t=0} = f_0(x,v),$$

と同様と考えることが出来る.

ラプラシアン$(-\Delta_v)^s$と，双曲型作用素である輸送項$v\cdot\nabla_x$との相互作用により，vのみならずxに関しても平滑化が起こる.

定理 5.　$f_0 \in L^2_{x,v}$に対するコルモゴロフ型方程式の初期値問題の解fは$t>0$で次数$1/(2s)$の *Gevrey*クラスに属す.

より詳しくは

$$\exists \kappa_0 > 0, \quad \forall t > 0, \quad e^{\kappa_0 \left[t^{s+1}(-\Delta_x)^s + t(-\Delta_v)^s \right]} f(t) \in L^2_{x,v}.$$

証明：フーリエ変換で解が具体的に求まる.

$$\hat{f}(t,\eta,\xi) = e^{-\int_0^t |\xi - \rho\eta|^{2s} d\rho} \hat{f}_0(\eta, \xi - t\eta).$$

不等式

$$\exists \kappa_0 > 0 \ ; \ \kappa_0 \left(t|\xi|^{2s} + t^{2s+1}|\eta|^{2s} \right) \leq \int_0^t |\xi - \rho\eta|^{2s} d\rho,$$

から定理が従う.

それゆえ空間非一様ボルツマン方程式についても x, v に関する平滑化作用が期待できる．しかし非線形性の困難から定理5に相当する結果は未だ知られていない．その前段階として C^∞ 平滑化作用が最近証明できた．

定理 6. (Alexandre-Morimoto-S.U.-Xu-Yang, ARMA'10, [4])
$0 < s < 1$, $\gamma > \max(-3, -3/2 - 2s)$, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3_x$.
f は $L^\infty(0, T;\, H^5_\ell(\Omega \times \mathbb{R}^3_v))$ $(\forall \ell \geq 0)$ に属し、領域 $(0, T) \times \Omega \times \mathbb{R}^3_v$ において ボルツマン方程式を古典的な意味で満たす解とする．もし

$$\|f(t, x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)} > 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega$$

が成り立てば

$$f \in C^\infty((0, T) \times \Omega_x; \mathcal{S}(\mathbb{R}^3_v)).$$

証明は輸送方程式

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = g \tag{4}$$

の解の正則性の結果を用いる。

定理 7. (Alexandre-Morimoto-S.U.-Xu-Yang, JFA '08 [3]) $g \in H^{-s'}(\mathbb{R}^7_{t,x,v})(s' \in [0,1))$ に対する (4) の弱解 f が $\langle D_v \rangle^s f \in L^2(\mathbb{R}^7)$ を満たすとき

$$\langle D_x \rangle^{s(1-s')/(s+1)} f \in L^2_{-ss'/(s+1)}(\mathbb{R}^7),$$
$$\langle D_t \rangle^{s(1-s')/(s+1)} f \in L^2_{-s/(s+1)}(\mathbb{R}^7),$$

が成り立つ。

これは輸送方程式の準楕円性(hypoellipticity)評価である。この定理を$g = \langle v \rangle^{\ell} Q(f,f)$として用いる。$f$が古典解だと$g \in H^{-s'}$がいえて、$t,x$に関する正則性を得る。これと$v$に関する正則性を組合すと$t,x,v$に関する正則性を少し改良できる。再び定理7を用いるとさらに正則性が改良できる。これを繰り返し定理6を得る。

広義の不確定性原理

　定理7の証明は森本('89, '92)により開発された広義の不確定性原理に基づく準楕円型評価使う．輸送項$\partial_t + v\cdot\nabla_x$の$t, x$ によるフーリエ変換を考慮して，$|\tau + v\cdot\eta|^2 = V(v;\tau,\eta)$ とおき，衝突積分項を$(-\Delta_v)^s$と捉えて，時間非依存の Schrödinger 型作用素

$$(-\Delta_v)^s + V(v;\tau,\eta)$$

の正値性を考察する．　これは$s = 1$の場合は Fefferman によって1980年代に不確定性原理として定式化され，一般のs については退化楕円型作用素の準楕円性の解析のために用いられてきた(Morimoto - Mrioka '97, Morimoto - Xu '07).

解の存在定理 - カットオフなし

　空間一様の場合の最初の大域的弱解の存在定理は田中('78)のマクスウエル型ポテンシャルに対するものである。一般のポテンシャルに対する弱解の存在定理はずっと後にVillani ('97)で与えられた。

　しかし空間非一様の場合の解の存在定理は未だ満足のいくものではない。最近やっと古典解の時間局所的存在と平衡解の近傍での大域解の存在が証明できるようになった。

時間局所解

定理 8. (Alexandre-Morimoto-S.U.-Xu-Yang, ARMA ’10 [4])
$0 < s < 1/2,\ \gamma \in (-3/2, 1-2s)$ とする．初期値問題

(5)
$$\begin{cases} \partial_t f + v\cdot\nabla_x f = Q(f,f), & t>0,\ x,v\in\mathbb{R}^3, \\ f|_{t=0} = f_0(x,v), & x,v\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

$$\exists k_0 \ge 4,\ \rho_0 > 0, \quad e^{\rho_0 <v>^2} f_0 \in H^{k_0}, \quad f_0 \ge 0,$$

は、一意的な時間局所解

$$\exists \rho,\ T^* > 0, \quad e^{\rho\langle v\rangle^2} f \in C^0([0,T_*];\ H^{k_0}), \quad f \ge 0.$$

を持つ.

未解決問題： • $s\in(1/2,1)$? • $\gamma\in(-3,1)$? • $k_0 < 4$?

従来の解空間：

- $R_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$でのソボレフ空間，$x = \infty$で0，真空状態に近い解.
- $\mathbb{T}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$でのソボレフ空間，$x$-周期解.
- $x \to \infty$で平衡解に収束する解

一様局所ソボレフ空間 $H_{ul}^k = H_{ul}^k(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$ (Kato, '73)

$$\|g\|_{H_{ul}^k} = \sum_{\alpha+\beta|\leq k} \sup_{a\in\mathbb{R}^3} \iint |\phi(x-a)\partial_\beta^\alpha g(x,v)|^2 dxdv,$$

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \phi(x) = 1(|x| < 1), = 0(|x| > 2),$$

$$\partial_\beta^\alpha = \partial_x^\alpha \partial_v^\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3).$$

定理3'. (AMUXY,'10) 定理8 はH_{ul}^kにおいても成り立つ.

[定理1]　$\|(Q(f,g)\|_{H^m_\ell} \le C(\|f\|_{L^1_{\ell+(\gamma+2s)^+}} + \|f\|_{L^2})\|g\|_{H^{m+2s}_{(\ell+\gamma+2s)^+}}$.

- derivative loss of order $2s$: $\longrightarrow$ 定理2
- moment loss of order $\gamma+2s$: 人工的モーメント生成

$$\mu_\kappa(t) = \mu(t,v) = e^{-(\rho-\kappa t)\langle v\rangle^2}\,,\ \kappa,\rho>0,\quad 0\le t\le T_0 := \rho/(2\kappa)$$

$$f = \mu_\kappa(t)g,\ \ \Gamma^t(g,g) = \mu_\kappa(t)^{-1}Q(\mu_\kappa(t)g,\,\mu_\kappa(t)g)$$

とおくと g に対する初期値問題は

(6)
$$\begin{cases} g_t + v\cdot\nabla_x g\ + \kappa\langle v\rangle^2 g = \Gamma^t(g,g), \\ g|_{t=0} = g_0\,, \end{cases}$$

となる.

大域解の構成

現在のところ平衡解の近傍の古典解の存在のみが知られている.

$$\mu(v) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\frac{|v|^2}{2}} \qquad \text{正規化されたマクスウエル分布}$$

$$f = \mu + \mu^{1/2} g,$$

$$\Gamma(g, h) = \mu^{-1/2} Q(\mu^{1/2} g, \mu^{1/2} h),$$

$$\mathcal{L}(g) = -\Gamma(\mu^{1/2}, g) - \Gamma(g, \mu^{1/2}).$$

摂動 g に対する初期値問題は

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} g_t + v \cdot \nabla_x g + \mathcal{L} g = \Gamma(g,\, g), \;\; t > 0\,, \\ g|_{t=0} = g_0 \end{cases}$$

定理 9. (ハードポテンシャル)

$$0 < s < 1,\ \gamma + 2s \geq 0,\ k \geq 6,\ \ell \geq 3/2 + \gamma + 2s,$$

に対してある正数ε_0が存在し，初期値g_0が

$$g_0 \in H^k_\ell, \quad \|g_0\|_{H^k_\ell} \leq \varepsilon_0$$

を満たすならば, 初期値問題*(7)* は一意的な大域解

$$g \in L^\infty([0, +\infty[\,;\ H^k_\ell(\mathbb{R}^6))$$

を持つ.

減衰評価 さらに$\|g_0\|_{L^2_v(L^1_x)} + \|g_0\|_{H^6_\ell} \ll 1$ならば$f$は減衰評価

$$\|g(t)\|_{L^2_{x,v}} \leq C(1+t)^{3/4}$$

を持つ。

注意 1.　ソフトポテンシャルの場合にも大域解が構成できる。また$O(^{-1/2})$減衰評価が得られている。

局所解の存在で述べた衝突項Qの上からと下からの評価の間隙を埋めるため，次のノルムを導入する.

(8)
$$|||g|||^2 = \iiint b(\cos\theta)\mu_*\left(g' - g\right)^2 dv dv_* d\sigma + \iiint b(\cos\theta) g_*^2 \left(\sqrt{\mu'} - \sqrt{\mu}\right)^2 dv dv_* d\sigma \, .$$

命題 1. $C^{-1}|||(I-\mathbb{P})g|||^2 \le (\mathcal{L}g, g)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C|||g|||^2 \, .$

ただし，$\mathbb{P}$ は線形化Boltzmann 作用素$\mathcal{L}$ の零空間

$$\mathsf{Ker}\,(\mathcal{L}) = \mathsf{Span}\left\{\sqrt{\mu}\, ,\, v_1\sqrt{\mu}\, ,\, v_2\sqrt{\mu}\, ,\, v_3\sqrt{\mu}\, ,\, |v|^2\sqrt{\mu}\,\right\}$$

への射影を表す.

命題 2.

$$C^{-1}(||g||_{H^s}^2 + ||g||_{L^2_s}^2) \leq |||g|||^2 \leq C||g||_{H^s_s}^2,$$
$$\left| \Big(\Gamma(f,\, g),\, h \Big)_{L^2} \right| \leq C \left(||f||_{L^2_s} \, |||g||| + ||g||_{L^2_s} \, |||f||| \right) \; |||h|||\,,$$

命題1を用いて，解g を

$$g = \mathbb{P}g + (I - \mathbb{P})g = g_1 + g_2$$

とマクロ部分とミクロ部分に分解する Guo(04) の方法が，カットオフのない場合場合に拡張できて、エネルギー評価

$$\mathcal{E}(t) + C_1 \int_0^t \mathcal{D}(\tau) d\tau \leq C_2 \mathcal{E}(0) + C_3 \int_0^t \mathcal{E}(\tau)^{1/2} \mathcal{D}(\tau) d\tau$$

を導くことにより示される．ただし，$N \geq 3$ として

$$\mathcal{E} = \|g\|^2_{H^N_\ell(\mathbb{R}^6)}\ ,\ \ \mathcal{D} = \|\nabla_x g_1\|^2_{H^{N-1}_x(\mathbb{R}^3;L^2(\mathbb{R}^3_v))} + |||g_2|||^2_{\mathcal{B}^N_\ell(\mathbb{R}^6)}$$

$$|||g|||^2_{\mathcal{B}^N_\ell(\mathbb{R}^6)} = \sum_{|\alpha|\leq N} \int_{\mathbb{R}^3_x} |||W_\ell\, \partial^\alpha_{x,v} g(x,\cdot)|||^2 dx$$

ただし，$W_\ell = \langle v \rangle^\ell$.

注意 2. 最近、Gressman-Strain [36, 37] が $H^k_\ell(\mathbb{T}^x \times \mathbb{R}^3)$ において大域解を構成した(x-周期解)。ノルム $|||\cdot|||$ と類似のノルムを導入している。

命題2の証明(一部)

$$
\begin{aligned}
|||g|||^2 &= \iiint b(\cos\theta)|v-v_*|^\gamma \mu(v_*)\big(g(v')-g(v)\big)^2 dv dv_* d\sigma \\
&\quad + \iiint b(\cos\theta)|v-v_*|^\gamma g_*^2\big(\sqrt{\mu'}\ -\sqrt{\mu}\ \big)^2 dv dv_* d\sigma\,. \\
&= J_1 + J_2.
\end{aligned}
$$

$\gamma=1$の場合が基本的である．Bobylev公式('74)より

$$
\begin{aligned}
J_1 = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} b(\tilde{\xi}\cdot\sigma)\Big\{&\hat{\mu}(0)|\hat{g}(\xi)|^2+\hat{\mu}(0)|\hat{g}(\xi^+)|^2 \\
&-2Re\,\hat{\mu}(\xi^-)\hat{g}(\xi^+)\bar{\hat{g}}(\xi)\Big\}d\sigma d\xi,
\end{aligned}
$$

$$\geq \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}|\hat{g}(\xi)|^2\left\{\int_{\mathbb{S}^2} b(\tilde{\xi}\cdot\ \sigma)(\hat{\mu}(0)-|\hat{\mu}(\xi^-)|)d\sigma\right\}d\xi$$

$$\xi^{\pm}=\frac{\xi}{2}\pm\frac{|\xi|}{2}\sigma,\quad \tilde{\xi}=\frac{\xi}{|\xi|},\qquad \sin\theta b(\cos\theta)\sim\theta^{-1-2s}.$$

$$\hat{\mu}(0)-|\hat{\mu}(\xi^-)|\geq C|\xi^-|^2,\quad |\xi^-|\leq|\xi|\sin\theta\leq 1.$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^2} b(\tilde{\xi}\cdot\sigma)(\hat{\mu}(0)-|\hat{\mu}(\xi^-)|)d\sigma\\ &\qquad\geq\int_{|\xi|(\theta/\pi)\leq 1}\sin\theta b(\cos\theta)|\xi|^2(\theta/\pi)^2d\theta\\ &\qquad\geq CK|\xi|^2\int_0^{1/|\xi|}\theta^{1-2s}d\theta=C|\xi|^{2s}\qquad(|\xi|\geq 1).\end{aligned}$$

解の非負性

定理 10. 定理9の解は非負性を保つ。

$$f_0 = \mu + \mu^{1/2} g_0 \geq 0 \implies f = \mu + \mu^{1/2} g \geq 0 \ \ \forall t > 0.$$

注意 3. この定理は長い間の懸案であった。

証明の概略：$f = f^{n+1}, h = f^n$とおき、逐次近似

$$f_t + v \cdot \nabla_x f = Q(h, f)$$

で解を構成する。$h \geq 0 \Rightarrow f \geq 0$が示せればよい。

簡単のため$\gamma = 1$とする．次の凸テスト関数を用いる。

$$\beta(s) = \frac{1}{2}(s^-)^2 = \frac{1}{2}s(s^-), \quad \beta_s(s) = s^-.$$

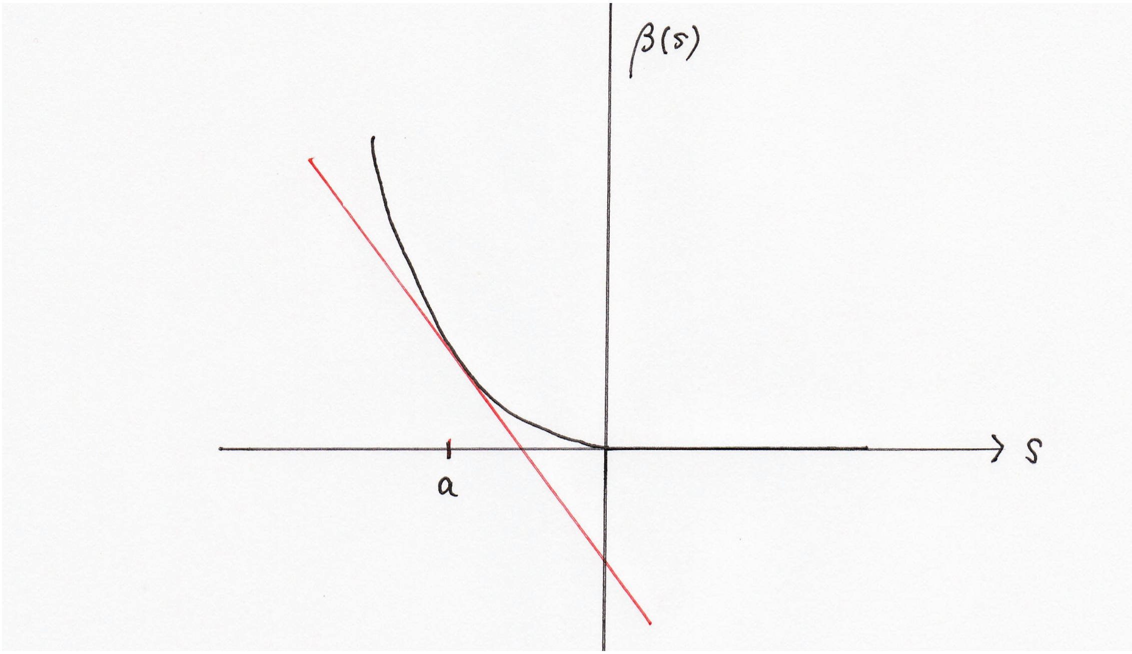

Figure 1: $\beta(s) = s^{-2}/2$

$\phi = (1 + |x^2| + |v|^2)^{-2}$ とおく.

逐次近似方程式 ($f = f^{n+1}, h = f^n$)

$$f_t + v \cdot \nabla_x f = Q(h, f)$$

と$\beta_s(f)\phi$との内積を取る.

$$\frac{d}{dt}\int \beta(f)\phi dxdv = \int Q(h,f)\beta_s(f)\phi dxdv$$
$$- \int v \cdot \nabla_x \{\beta(f)\phi\} dxdv - (\phi^{-1} v \cdot \nabla_x \phi)\beta(f)\phi dxdv.$$

右辺第2項$= 0$ (部分積分),
第3項$\leq C \int \beta(f)\phi dxdv$,

$$
\begin{aligned}
\text{第1項} &= \int Q(h, f^+ + f^-) f^- \phi dx dv \\
&= \int Q(h, f^-) f^- \phi dx dv + \int b h(v'_*) f^+(v') f^-(v) \phi dx dv dv_* d\sigma \\
&= A_1 + A_2
\end{aligned}
$$

$A_2 \leq 0$ if $h = f^n \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
A_1 &\sim \int b f_* f^- \phi \Big((f^- \phi)' - (f^- \phi) \Big) dx dv dv_* d\sigma \\
&= -\frac{1}{2} \int b f_* \Big((f^- \phi)' - (f^- \phi) \Big)^2 dx dv dv_* d\sigma \\
&+ \frac{1}{2} \int b f_* \Big((f^- \phi)'^2 - ((f^- \phi)^2 \Big) dx dv dv_* d\sigma.
\end{aligned}
$$

$$
a(b-a) = -\frac{1}{2}(b-a)^2 - \frac{1}{2}(a^2 - b^2).
$$

右辺第2項：**Cancellation Lemma** (ADVW, '00 [1]) $0 < s < 1$.

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}^2} b(\cos\theta)(g' - g)dvd\sigma = C_b \int_{\mathbb{R}^3} g(v)dv.$$

$$C_b = 2\pi \int_0^{\pi/2} b(\cos\theta)(\frac{1}{\cos^3(\theta/2)} - 1)d\theta.$$

$$A_1 \le C\|f\|_{L^\infty_x(L^1_v)}\|f^-\phi\|_{L^2_{x,v}} \le C_f \int \beta(f)\phi dxdv.$$

これより

$$\frac{d}{dt}\int \beta(f)\phi dxdv \le C\int \beta(f)\phi dxdv$$

$\Rightarrow$ 定理10

References

[1] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani, and B. Wennberg. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 152:327–355, 2000.

[2] R. Alexandre and M. Safadi. Littlewood paley decomposition and regularity issues in Boltzmann equation homogeneous equations. I. non cutoff and Maxwell cases. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15:907–920, 2005.

[3] R. Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu, and T.Yang. Uncertainty principle and kinetic equations. *J. Funct. Anal.*, 255:2013–2066, 2008.

[4] R. Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu, and T.Yang.

Regularizing effect and local existence for non-cutoff Boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 198:39 – 123, 2010.

[5] R.Alexandre, Y.Morimoto, S. Ukai, C.-J.Xu and T.Yang. Global well-posedness theory for the spatially inhomogeneous Boltzmann equation without angular cutoff. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I, doi:10.1016/j.crma*, 2010.07.008

[6] R. Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu, and T.Yang. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: I, an essential coercivity. *Preprint HAL, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal- 00477662/fr/*, 2010.

[7] R.Alexandre, Y.Morimoto, S. Ukai, C.-J.Xu and T.Yang. Boltzmann equation without angular cuto in the whole space: II. global existence

for soft potential. *Preprint HAL, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00496950/fr/*, 2010.

[8] R.Alexandre, Y.Morimoto, S. Ukai, C.-J.Xu and T.Yang. Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space : III, global existence for hard potential. *Preprint HAL, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal- 00510633/fr/*, 2010.

[9] R. Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang. Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: IV, qualitative properties of solutions. preprint, 2010.

[10] R. Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang. Bounnded solutions of the Boltzmann equation in the whole space. preprint, 2010.

[11] L. Boltzmann. *Lectures on Gas Theory (English transl. by S. G. Brush)*. Dover Publ. Inc., New York, 1964.

[12] T. S. Carleman. Sur la théorie de l'équation intégro-differentielle de boltzmann. *Acta Math.*, 60:91–146, 1932.

[13] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, volume 109 of *Appl. Math. Sci.* Springer-Verlag, New-York-Berlin, 1994.

[14] R. Diperna and P. L. Lions. On the Cauchy problem for the Boltzmann equation: Global existence and weak stability. *Ann. Maths.*, 130:321–366, 1989.

[15] H. Grad. Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear

Boltzmann equations. In R.Finn, editor, *Proc. Symp. Appl. Math. vol. 17*, pages 154–183. AMS, Providence, 1965.

[16] Y. Guo. The Boltzmann equation in the whole space. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(4):1081–1094, 2004.

[17] K. Hamdache. Initial boundary value problems for Boltzmann equation. global existence of weak solutions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 119:309–353, 1992.

[18] Z. H. Huo, Y. Morimoto, S. Ukai, and T. Yang. Regularity of solutions for spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff. *Kinetic and Related Models*, 1:453–489, 2008.

[19] O.Lanford III. Time evolution of large classical system. In E.J.Moser,

editor, *Lec. Notes in Phys.*, volume 38, pages 1–111. Springer-Verlag, New York, 1975.

[20] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*, 63:193–248., 1934.

[21] T.-P. Liu, T. Yang, and S.-H. Yu. Energy method for Boltzmann equation. *Physica D*, 188(3-4):178–192, 2004.

[22] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gas. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 157:49–88, 1867.

[23] Y. Morimoto. The uncertainty principle and hypoelliptic operators. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 23:955–964, 1987.

[24] Y. Morimoto and S. Ukai. Gevrey smoothing effect of solutions

for spatially homogeneous nonlinear Boltzmann equation without angular cutoff. J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. (2010) 1:139-159 DOI 10.1007/s11868-010-0008-z

[25] Y. Morimoto, S. Ukai, C.J. Xu, and T. Yang. Regularity of solutions to the spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff. *Discrete Continuous Dynamical Sys. - Ser. A*, 24:187–212, 2009.

[26] Y. Morimoto and C.-J. Xu. Hypoelliticity for a class of kinetic equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 47:129–152, 2007.

[27] T. Nishida and K. Imai. Global solutions to the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equation. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 12:229–239, 1977.

[28] Y. P. Pao. Boltzmann collision operator with inverse power intermolecular potential, i, ii. *Commun. Pure Appl. Math.*, 27:407–428, 559–581, 1974.

[29] P.L.Lions. Regularity and compactness for Boltzmann collision operator without angular cut-off. *C. R. Acad. Sci. Paris Series I*, 326:37?41, 1998.

[30] Y. Shizuta and K. Asano. Global solutions of the boltzmann equation in a bounded convex domain. *Proc. Japan Acad., Ser. A Math.*

[31] H. Tanaka. Probabilistic treatment of the boltzmann equation of maxwellian molecules. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 46*, 1:67–105, 1978/79.

[32] S. Ukai. On the existence of global solutions of a mixed problem for the boltzmann equation. *Proc. Japan Acad.*, 50:179–184, 1974.

[33] S. Ukai. Les solutions globales de l'équation de boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 282A:317–320, 1976.

[34] S. Ukai. Local solutions in gevrey classes to the nonlinear boltzmann equation without cutoff. *Japan J. Appl. Math.*, 1:141–156, 1984.

[35] C. Villani. On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous boltzmann and landau equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 143:273–307, 1998.

[36] P.-T. Gressman and R.-M. Strain, Global classical solutions of the

Boltzmann equation with long range interations and soft potentials. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 107(13)(2010), 5744-5749).

[37] P.-T. Gressman and R.-M. Strain, Sharp anisotropic estimates for the Boltzmann collision operator and its entropy production, Preprint 2010