コンパクト twistor 空間

— 複素多様体として —

藤木 明

(大阪大学理学研究科)

* ツイスター空間の概念は, Penrose が
  1960 年代後半に導入.
  1978 に Atiyah-Hitchin-Singerが
  数学者に理解しやすい形で定式化.

* ツイスター空間 Z は 3 次元複素多様体.
  (4次元) 自己双対多様体 $(M, [g])$ と1-1 対応.

* どちらも具体的な構成は大変難.
  知られている構成方法はどれも興味深い.
* 構成のいくつかを概観. 特に
  Donaldson-Friedmanの方法について解説
* 双曲型,放物型井上曲面上に反自己双対
  双エルミート構造を構成(with Pontecorvo)
  これは Joyce の自己双対計量に対し
  DF の方法の一般化を適用して得られたもの.

1　定義と簡単な例

M oriented (compact) C^∞ 4-manifold

定義

M 上の ツイスター空間とは

3次元複素多様体 Z で次の性質を持つもの．

1. Z は M 上のC^∞ P^1束 $t : Z \to M$.
2. $L_x = t^{-1}(x) \cong P^1$ は複素部分多様体

   normal bundle $N_x \cong O(1) \oplus O(1)$.

3. $\exists\ \sigma : Z \longrightarrow Z$ anti-holomorphic involution;

固定点を持たず, $\sigma(L_x) = L_x$

ツイスター空間 $=$ 対 $(t : Z \longrightarrow M, \sigma)$

g リーマン計量, $[g]$ 共形構造

R リーマン曲率テンソル

$$R = W + \rho, \quad W \text{ Weyl テンソル}$$

$$W = W_+ + W_-.$$

$W_\pm$ (反) 自己双対部分 [(anti)-self-dual = (A)SD]

<u>定義</u>

$(M, [g])$ <u>(反) 自己双対多様体</u> $\Leftrightarrow W_\mp \equiv 0$.

<u>注意</u>. M の向きを変えると $W_\pm$ が入れ替わる.

定理 1.1. (Penrose 対応)

$(M, [g])$ 反自己双対多様体

$\Leftrightarrow$ ツイスター空間 $(t : Z \longrightarrow M, \sigma)$. (1-1 対応)

———————————

$Z \to (M, [g])$ の概略:

- $W := \{Z$ の複素部分多様体$\}$ は複素解析空間.

- t により $M \subseteq W$, かつ

  W 上の普遍正則族の M への制限 $= t : Z \to M$

- W は M の近傍で 4 次元複素多様体 (小平)

- $\sigma \Rightarrow \bar{\sigma} : W \to W$ anti-hol. involution

  $M = W^{\bar{\sigma}}$

- W 上に正則共形構造が導かれ,

これが M の 共形構造 $[g]$ を与える $\cdots$

簡単な例

例 1.　共形的に平坦な多様体　$\Leftrightarrow W \equiv 0$

$\Leftrightarrow$ 局所的に $g = \phi \sum dx_i^2, \phi > 0$ の形.

例: 単連結なら (S^4, g_{std}). ツイスター空間は P^3 で

$t : P^3 \to S^4$ の各 fiber は通常の line P^1.

アーベル基本群なら本質的に

$S^1 \times S^3$ (ホップ曲面) or $(S^1)^4$ (トーラス).

例 2. <u>複素空間形など</u>

複素射影平面 P^2, 複素トーラス T^2

複素 ball quotient, $P^1 \times \Sigma_g$

自然なKähler 計量が自己双対.

(自己双対 Kähler曲面は本質的にこれらで尽きる.)

P^2 のツイスター空間は

$F_{2,1} := \{(x, l); x \in l \subseteq P^2, l$ line$\}$.

特に Kähler多様体.

定理 (Hitchin '81)

$M = (M, [g])$ コンパクト自己双対多様体.

Z そのツイスター空間.

Z がKählerならば

$$(M, Z) \cong (S^4, P^3) \text{ or } \cong (P^2, F_{2,1}).$$

2　さまざまな例と構成法

2.1　(反)自己双対計量の構成

2.1.1. Calabi-Yau Kähler 計量

命題 S 複素曲面

g Kähler 計量, s その scalar 曲率.

g が反自己双対 $\Leftrightarrow$ $s \equiv 0$.

<u>定理</u>. S コンパクトKähler 曲面, $c_1(S) = 0$.

$\Rightarrow$ $\forall$ Kähler類に対し, $\exists$! Ricci-flat Kähler計量

<u>注意</u>. $\exists$正則写像 $f : Z \to P^1$

K3 のとき

$t \times f : Z \cong S \times P^1$ smoothly trivial

$\Longrightarrow$ K3 曲面の global Torelli の証明に応用がある.

2.1.2 群作用で不変な共形構造

M oriented compact 4-manifold

K 連結Lie群でMへsmoothに作用するもの.

dim $K \geq 3$ ならば $(M, [g])$ は

共形的に平坦であるか $M = P^2$.

⇒ 問題は $K = S^1$ or $= S^1 \times S^1$ の場合.

記号：

$M[m] := (S^1 \times S^3)\#mP^2$,

$N[m] := (P^1 \times \Sigma_g)\#mP^2$.

A. LeBrun's Hyperbolic Ansatz (semifree S^1 作用)

$$m\boldsymbol{P}^2,\ M[m],\ N[m]$$

のいずれの場合にも，不変自己双対構造を明示的に構成．

mP^2 のときは，ツイスター空間は明示的な

Moishezon 多様体となる．

(i.e. 射影代数多様体から blow-ups, -downs で得られる.)

注意. a) $M[m]$の計量は, (複素)Hopf 曲面の
m 点blow-up上の反自己双対Hermite計量,
b) $N[m]$の計量は, Σ_g 上の正則 P^1-束の
m点blow-up上のscalar-flatなKähler 計量,
として実現される.

B. <u>Joyce の Hyperbolic Ansatz</u> ($K := S^1 \times S^1$)

mP^2 への K 作用に関し, $(m-1)$ 次元パラメータを持つ不変自己双対構造の明示族.

共形的平坦な場合を除き K-不変自己双対構造は Joyce のものに限る (Fujiki).

ツイスター空間 Z の詳細な構造もわかる.

この場合も Moishezon.

2.1.3. <u>存在定理</u>

<u>定理</u>. (Taubes ’92)

oriented compact 4-manifold M に対し

∃正整数 m_0: $\forall m \geq m_0$ に対し

$M\#mP^2$ 上に自己双対計量が存在.

<u>注意</u> (Floer ’91) $\forall m \geq 0$ に対し

mP^2 上に∃自己双対計量.

命題. 1) Z Moishezon ⇒

a) M はmP^2 と同相. (Campana)

b) $[g]$ は $+$-型 (Poon)

2) $a(Z) > 0$ なら M はC-Y 曲面であるか,

mP^2, or $M[m]$の有限商空間と同相(Fujiki)

後者は $+$-型.

注意. 代数次元 $a(Z), 0 \leq a(Z) \leq 3$,

:=有理型関数体C(Z)の超越次数.

$a(Z) = 3$ ⇔ Moishezon, $a(Z) = 0$ ⇔ $C(Z) = C$.

2.2 ツイスター空間の(直接)構成

a) $2P^2$ 上のツイスター空間の構成(Poon '86)

Z がMoishezon になるものをすべて明示的に決定.

$3/2 < \lambda < 2$ に対し P^5 内の完全交差多様体

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$$

$$2z_0^2 + 2z_1^2 + \lambda z_2^2 + \frac{3}{2}z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0$$

の 4 個の通常二重点をうまく解消したもの.

b) $3P^2$ の場合への拡張:

S^1-作用を許す場合の完全な記述 (Honda'07).

(作用が semifree でない場合の初めての結果.)

c) LeBrun の例の一般化

mP^2 上の semifree でない S^1-作用の族に対し

不変自己双対構造の族を,

ツイスター空間の直接構成により構成

(Honda '08)

Donaldson-Friedman の構成法

問題: 自己双対多様体 M_1, M_2 に対し

$M_1 \# M_2$ 上に自己双対構造を構成する.

DF ⇒ このための十分条件を

対応するツイスター空間の言葉で述べる.

(本質的には存在定理だが, 幾何学の追跡の余地がある.)

3 D-F の方法とその応用

3.1 方法

$(M_i, [g_i]), i = 1, 2,$ (コンパクト) 自己双対多様体

上記の問題は, $[g_i]$ が共形的平坦の場合 ⇒ 容易

連結和の操作:

<u>Step 1</u>. $\nu_i : \tilde{M}_i \to M_i$, $x_i \in M_i$ での

oriented real blow-up, $\tilde{M}_i$ は境界付多様体

<u>Step 2</u>. $\psi : b\tilde{M}_1 \xrightarrow{\sim} b\tilde{M}_2$ ori-reversing 微分同相.

<u>Step 3</u>. 角 (corner) を smoothing して $M_1 \# M_2$ を得る

DFでは対応するツイスター空間 Z_i に次の操作:

Step 1. $\mu_i : \tilde{Z}_i \to Z_i$ $L_i := L_{x_i}$ の blow-up.

$Q_i := \mu_i^{-1}(L_i) \cong P^1 \times P^1$ 例外因子.

Step 2. $\phi : Q_1 \xrightarrow{\sim} Q_2$ (第一, 第二因子を入替)

$z \in Q_1$ と $\phi(z) \in Q_2$ を同一視. $\Rightarrow$

複素空間 $\hat{Z} := \tilde{Z}/\phi$.

Step 3. 複素解析的変形で $\hat{Z}$ の smoothing を行い,

複素多様体 Z_t を得る.

命題. Step 3 で t が "実点" ならば Z_t は $M_1 \# M_2$ 上のツイスター空間となる.

Step 3 の十分条件:

定理. (DF) $H^2(Z_i, \Theta_i) = 0$ ならば Step 3 が可能. (

応用: $\forall m \geq 2$ に対し mP^2 上に自己双対構造が存在.

3.2 バリエーションと応用

[FP] Fujiki, A., and Pontecorvo, M.,

Anti-self-dual bihermitian structures on Inoue surfac

J. Differential Geom. (to appear):

arXive:math.DG/0903.1320v1.

における DF の方法の枠組みと適用方法.

<u>主結果</u>: 双曲型井上曲面 (代表的な非 Kähler 曲面) 上に

反自己双対双エルミート構造の族が存在.

二つの変更点:

A. $M_1 \# M_2 \Rightarrow M$ **の自己連結和** $\# M$.

(M **上の 2 点** x_1, x_2 **をとり同じ操作)**

例: $M = mP^2$ **なら**

$M[m] := (S^1 \times S^3) \# mP^2$ **が生じる.**

(双曲型曲面 $\overset{diffeo.}{\cong}$ $M[m]$**)**

B. Penrose 対応の一般化.

命題. 次の a. b. の間に自然な一対一対応が存在.

a. M 上の反自己双対エルミート構造

b. ツイスター空間 Z と, 複素曲面 $S^{\pm} \subseteq Z$ で

$t|S^{\pm} : S^{\pm} \to M$ が微分同相

かつ $\sigma(S^{\pm}) = S^{\mp}$ となるもの.

B. Penrose 対応の一般化.

<u>命題</u>. 次の a. b. の間に自然な一対一対応が存在.

a. $\#M$ 上の反自己双対エルミート構造

b. ツイスター空間 Z_t と, 複素曲面 $S_t^{\pm} \subseteq Z_t$ で

$t|S_t^{\pm} : S_t^{\pm} \to M$ が微分同相

かつ $\sigma(S_t^{\pm}) = S_t^{\mp}$ となるもの.

FPにおける初期値:

$Z \quad mP^2$ 上のJoyce自己双対構造のツイスター空間

$S_i^{\pm}$ pairs of surfaces with $S_i^{+} \cap S_i^{-} = L_i$

(L_i twistor lines, $i = 1, 2$)

$S_i^{\pm}$ は射影トーリック曲面

Step 1, 2 ⇒ $(\hat{Z}, \hat{S}_i^{\pm})$ $\hat{S}_i^{\pm}$ は $\hat{Z}$ への proper transform

Step 3 $(\hat{Z}, \hat{S}_i^{\pm})$ の同時 smoothing の問題． ⇒

Step 3' $(\hat{Z}, \hat{S}_1^{\pm}, \hat{S}_2^{\pm})$ の同時 smoothing の問題．

障害の消滅定理:

<u>定理</u>. (F-P)

Both

$H^2(\hat{Z}, \Theta_{\hat{Z}}(-\log \hat{S}))$ & $Ext^2_{O_{\hat{Z}}}(\Omega_{\hat{Z}}(\log \hat{S}), O_{\hat{Z}})$ vanish. ($\hat{S}$ union of $\hat{S}_i^{\pm}$, $i = 1, 2$).

最終結果に至るには, smoothing でえられる

$(Z_t, S^{\pm}_{1,t}, S^{\pm}_{2,t})$ の同定が必要.

$*$ toric 曲面 $S^{\pm}_i$ の同型類は, mP^2 への

K 作用の Orlik-Raymond 不変量で完全に定まる.

$(K = S^1 \times S^1)$

$*$ 退化 $\hat{S}^{\pm}_{i,t} \to \hat{S}^{\pm}_i$ は, 中村による双曲型井上曲面の

toric 退化に一致する.

$*$ K の mP^2 への作用と, L_i の choice を動かすと

双曲型井上曲面がすべて現れる. $\square$