整環の表現論
高次元Auslander-Reiten理論

名古屋大学多元数理科学研究科
伊山　修

- Auslander-Reiten 理論（AR 理論）
- 傾理論（森田同値, 導来圏同値）
- 表現型理論（有限表現型, 順表現型, 野生的表現型）

- 大域次元がほぼ１の多元環（e.g. 遺伝多元環＝箙の道多元環, 傾斜多元環, 標準多元環＝重みつき射影曲線,...）
- 自己入射多元環（e.g. 有限群の群環, 反復多元環,...）
- 離散付値環上の整環（e.g. 極大整環, 遺伝整環, Bass 整環,...）
- Cohen-Macaulay 環（e.g. 単純特異点, 最小楕円特異点,...）
- 準遺伝多元環（Lie 環の BGG 圏, 代数群の傾加群）
- Ringel-Hall 代数（量子群の結晶基底, 箙多様体）
- . . .
- 団傾理論（団圏, 前射影多元環）

団代数の圏論化, 傾理論の 2-Calabi-Yau 類似, 3 次元 AR 理論

例 $\Lambda = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$（$p$:素数）

- 任意の有限生成 Λ 加群は, 一意的に

$$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\ell_1} \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})^{\ell_2} \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^{\ell_n}$$

と表される.

- 特に直既約Λ加群（2つの加群の直和にならない）は

$$\mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

- 直既約加群の間の射に着目

$$\left.\begin{array}{l} g_i : \mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/p^{i-1}\mathbf{Z} \\ f_i : \mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{Z}/p^{i+1}\mathbf{Z} \end{array}\right\}$$

既約射(非自明な方法で2つの射の合成として表す事の出来ない射)

$$\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z} \underset{g_2}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z}/p^2\,\mathbf{Z} \underset{g_3}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots \underset{g_{n-1}}{\overset{f_{n-2}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z}/p^{n-1}\,\mathbf{Z} \underset{g_n}{\overset{f_{n-1}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z}/p^n\,\mathbf{Z}$$

- この箙はΛ 加群の圏構造を表示する

  (1) 任意の射は, f_i と g_i から生成される

  (2) 基本関係式は $g_2 f_1 = 0, \quad g_{i+1} f_i = f_{i-1} g_i \ (i = 2, \ldots, n-1)$

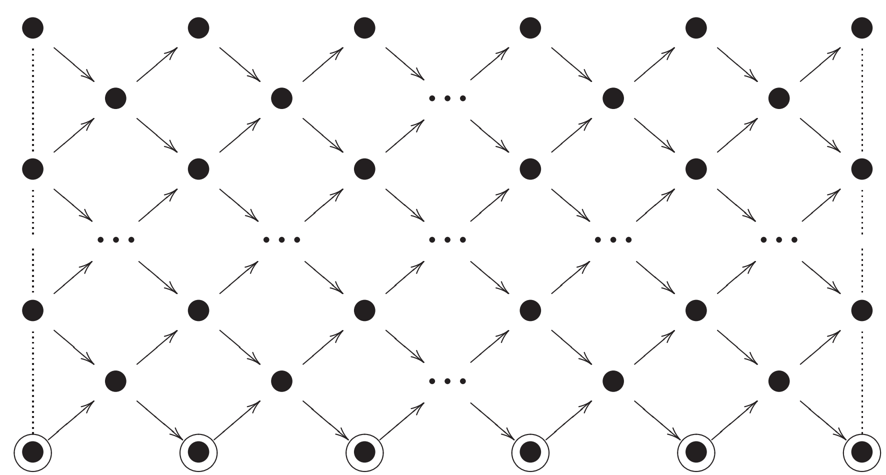
AR箙 一般の環に対し

- 直既約加群の同型類を点とし
- 既約射 $f : X \to Y$ が存在するときに, 矢 $X \to Y$ を描く

- Λ加群の大まかな圏構造は, AR箙に特別な関係式（メッシュ関係式）を入れることで与えられる

中山多元環 体 k 上の有限次元多元環

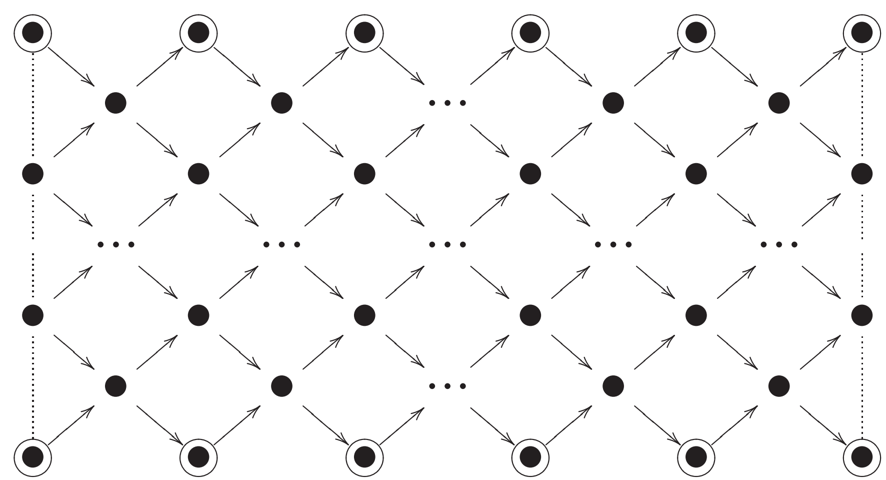
$$\begin{bmatrix} k[x]/(x^n) & k[x]/(x^n) & \cdots & k[x]/(x^n) & k[x]/(x^n) \\ (x)/(x^{n+1}) & k[x]/(x^n) & \cdots & k[x]/(x^n) & k[x]/(x^n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x)/(x^{n+1}) & (x)/(x^{n+1}) & \cdots & k[x]/(x^n) & k[x]/(x^n) \\ (x)/(x^{n+1}) & (x)/(x^{n+1}) & \cdots & (x)/(x^{n+1}) & k[x]/(x^n) \end{bmatrix}$$ のAR箙：



（左右は同一視, ⊙ は射影加群）

概Bass整環 冪級数環 $R = k[[x]]$ 上の整環

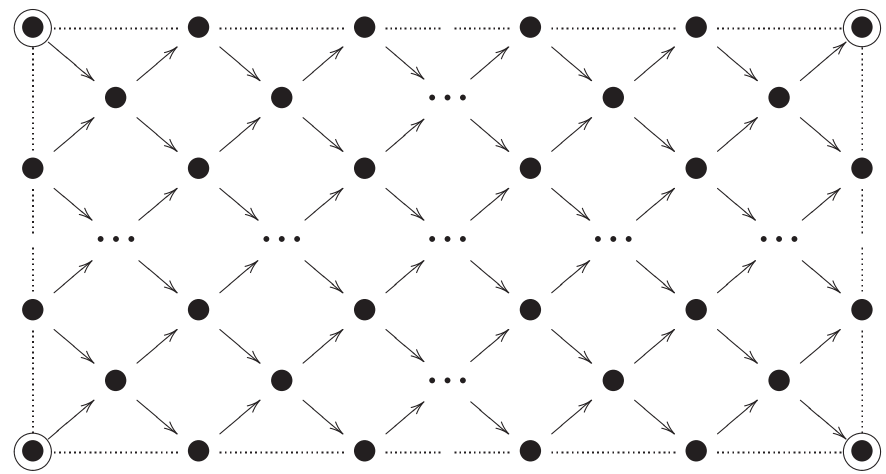
$$\Delta := \begin{bmatrix} R & R \\ (x) & R \end{bmatrix} \text{ に対し } \begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \cdots & \Delta & \Delta \\ (x^n) & \Delta & \cdots & \Delta & \Delta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x^n) & (x^n) & \cdots & \Delta & \Delta \\ (x^n) & (x^n) & \cdots & (x^n) & \Delta \end{bmatrix} \text{ のAR箙：}$$



（左右は同一視, ⦿ は射影加群）

商特異点 G : $\mathrm{GL}_2(k)$ の小型の巡回部分群

$k[[x,y]]^G$ の AR 箙：

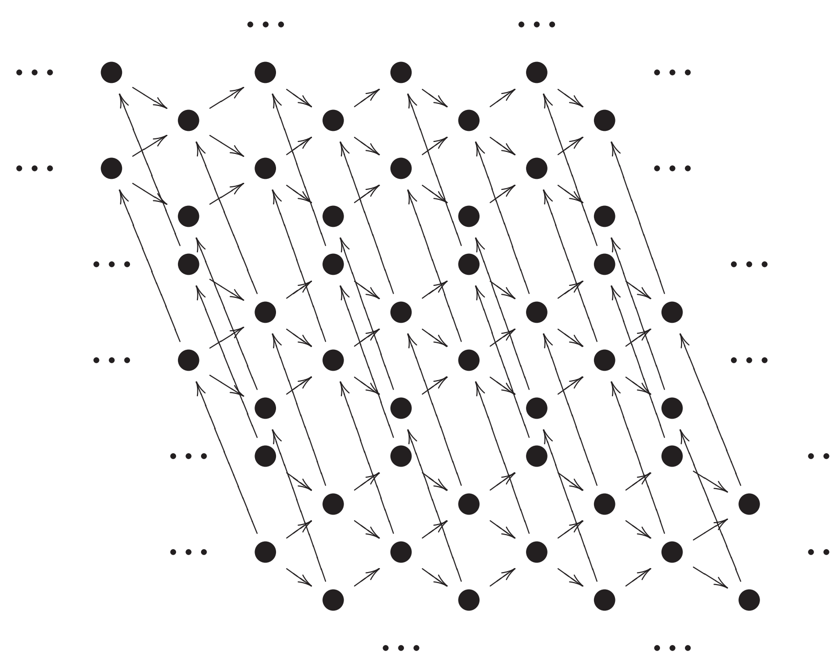


（左右は同一視, 上下も同一視）

問 AR箙が2次元的であるのはなぜか

⟶AR理論で説明される

問 高次元の箙を構造に持つ表現論は存在するか



⟶高次元AR理論によるアプローチ

整環のAR理論

- *Representation theory of Artin algebras, I–VI* (1974–1978)
- *Functors and morphisms determined by objects* (1978)

> R : d次元の完備正則局所環
> - R整環 $=$ R多元環で，ランク有限の自由R加群であるもの
> - 整環Λ上のCohen-Macaulay加群（CM加群）
>
> $=$ Λ加群で，ランク有限の自由R加群であるもの

$\mathrm{CM}(\Lambda)$: Cohen-Macaulay Λ加群の圏

例
- 体上の有限次元多元環（Krull次元0の場合）
- 完備離散付値環上の整環（Krull次元1の場合）
- 可換Cohen-Macaulay環（可換な場合）

命題（Krull-Schmidt-東屋）任意のCM Λ加群は直既約CM Λ加群の有限直和として一意的に表される

整環 Λ が 有限表現型 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 直既約CM Λ加群の同型類が有限個

例
- 半単純多元環, 中山多元環, Dynkin箙の道多元環
- 極大整環, 遺伝整環, 概Bass整環
- 単純特異点, 2次元商特異点
- 非特異整環（$\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = \dim R$を満たす$R$整環）

  例 半単純多元環, 遺伝整環, 正則局所環

  整環が非特異 $\Longleftrightarrow$ 任意のCM加群が射影的

$\mathrm{gl.dim}\,\Lambda$（大域次元）: $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(\ ,\ ) = 0$となる最小の$n$

有限表現型整環の表現論

- M. Auslander, *Representation dimension of Artin algebras* (1971)

Λ：有限表現型整環

M：直既約CM Λ加群すべての直和

$\mathrm{End}_\Lambda(M)$：ΛのAuslander多元環

$$\boxed{\Lambda\text{の表現論}=\mathrm{End}_\Lambda(M)\text{の構造論}}$$

圏同値 $\mathrm{CM}(\Lambda)\to \mathrm{proj}\,\mathrm{End}_\Lambda(M)$ が存在

定理（0次元Auslander対応）R：体, Γ：有限次元R多元環
Γ：Auslander多元環$\Longleftrightarrow \mathrm{gl.dim}\,\Gamma\le 2\le \mathrm{dom.dim}\,\Gamma$

$\mathrm{dom.dim}\,\Gamma$（支配次元）：極小入射分解$0\to\Gamma\to I^0\to I^1\to\cdots$
においてI^nが射影的でなくなる最小のn

一般の整環の表現論

- M. Auslander, *Coherent functors* (1966)
  関手圏, 連接関手
- M. Auslander, M. Bridger, *Stable module theory* (1969)
  安定圏, Auslander-Bridger転置

整環Λが孤立特異点$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
Rの全ての極大でない素イデアル$\mathfrak{p}$に対して
$\mathrm{gl.dim}(\Lambda \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) = \dim R_{\mathfrak{p}}$

$\omega_\Lambda := \mathrm{Hom}_R(\Lambda, R)$: Λの正準加群

安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}(\Lambda)$ (resp. 余安定圏 $\overline{\mathrm{CM}}(\Lambda)$)

- 対象は $\mathrm{CM}(\Lambda)$ と同じ
- 射は $\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y) := \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)/\{\Lambda \oplus \cdots \oplus \Lambda$ を通過する射$\}$

(resp. $\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y) := \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)/\{\omega_\Lambda \oplus \cdots \oplus \omega_\Lambda$ を通過する射$\}$)

f.l. R : 長さ有限の R-加群の圏

命題 • Λ : 非特異 $\Longleftrightarrow \underline{\mathrm{CM}}(\Lambda) = 0$

• Λ : 孤立特異点 $\Longleftrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y) \in \text{f.l.}\, R \quad (\forall X, Y \in \mathrm{CM}(\Lambda))$

Matlis 双対性 $D := \mathrm{Ext}^d_R(\ , R) : \text{f.l.}\, R \xrightarrow{\sim} \text{f.l.}\, R$

定理 • (AR移動) 圏同値 $\tau : \underline{\mathrm{CM}}(\Lambda) \to \overline{\mathrm{CM}}(\Lambda)$ が存在

• (AR双対性) 以下の関手的同型が存在

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y) \simeq D\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y, \tau X) \qquad (\forall X, Y \in \mathrm{CM}(\Lambda))$$

J : 圏 $\mathrm{CM}(\Lambda)$ の Jaconson 根基

X, Y が直既約ならば $J(X,Y) = \{$非同型射$\} \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$

定理 （概分裂完全列）

$\forall$ 直既約非射影的 $X \in \mathrm{CM}(\Lambda)$ に対して, 完全列

$$0 \to \tau X \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} X \to 0 \qquad (f, g \in J)$$

で, 以下が $\mathrm{CM}(\Lambda)$ 上完全となるものが存在

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,\tau X) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,C) \xrightarrow{f} J(\ ,X) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X,\ ) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_\Lambda(C,\ ) \xrightarrow{g} J(\tau X,\ ) \to 0$$

- AR 箙とメッシュ関係式による, 圏 $\mathrm{CM}(\Lambda)$ の構造論

[Riedtmann, Bongartz-Gabriel, Igusa-Todorov,... 1980〜]

$\boxed{\dim R = 2\text{の構造論が最も簡明}}$

中山関手 $\nu : \operatorname{proj}\Lambda \to \operatorname{inj}\Lambda$

定理（基本列）$\dim R = 2$
$\forall$ 射影的 $P \in \mathrm{CM}(\Lambda)$ に対して, 完全列

$$0 \to \nu P \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} P \to P/\operatorname{rad} P \to 0 \qquad (f, g \in J)$$

で, 以下がCM(Λ)上完全となるものが存在

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,\nu P) \xrightarrow{g} \operatorname{Hom}_\Lambda(\ ,C) \xrightarrow{f} J(\ ,P) \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(P,\ ) \xrightarrow{f} \operatorname{Hom}_\Lambda(C,\ ) \xrightarrow{g} J(\nu P,\ ) \to 0$$

- 有限表現型2次元整環の分類 [Reiten-Van den Bergh, 1989]

命題（2次元Auslander対応）$\dim R = 2$, Γ : R多元環
Γ : Auslander多元環 $\Longleftrightarrow$ Γ : 大域次元2の非特異整環

Auslander-Reiten 理論
$=$ 条件 $\mathrm{gl.dim}\,\Gamma \le 2 \le \mathrm{dom.dim}\,\Gamma$ に対応する表現論

- 別の条件には, 別の表現論の世界が対応している筈である

n-Auslander-Reiten 理論
$:=$ 条件 $\mathrm{gl.dim}\,\Gamma \le n+1 \le \mathrm{dom.dim}\,\Gamma$ に対応する表現論

- $\mathcal{C} \subset \mathrm{CM}(\Lambda)$: n 団傾部分圏（極大 $(n-1)$ 直交部分圏）

$$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{C} = \{X \in \mathrm{CM}(\Lambda) \mid \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\mathcal{C}, X) = 0\ (0 < i < n)\}$$
$$= \{X \in \mathrm{CM}(\Lambda) \mid \mathrm{Ext}^i_\Lambda(X, \mathcal{C}) = 0\ (0 < i < n)\}$$

- $M \in \mathrm{CM}(\Lambda)$: n 団傾加群 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{add}\,M$ が n 団傾部分圏

このとき $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ を n-Auslander 多元環

$\mathrm{CM}(\Lambda)$ はただ一つの 1 団傾部分圏 $\mathrm{CM}(\Lambda)$ を持つ
Λ が 1 団傾加群を持つ $\Longleftrightarrow$ 有限表現型

定理（0次元n-Auslander対応）R : 体, Γ : 有限次元R多元環
Γ : n-Auslander多元環 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{gl.dim}\,\Gamma \le n+1 \le \mathrm{dom.dim}\,\Gamma$

定理 $\mathcal{C} \subset \mathrm{CM}(\Lambda)$: n団傾部分圏

- （n-AR移動）圏同値 $\tau_n : \underline{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{C}}$ が存在
- （n-AR双対性）以下の関手的同型が存在

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y) \simeq D\,\mathrm{Ext}^n_\Lambda(Y,\tau_n X) \qquad (\forall X,Y \in \mathcal{C})$$

- （n概分裂完全列）

$\forall$ 直既約非射影的 $X \in \mathcal{C}$ に対して, 完全列

$$0 \to \tau_n X \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} X \to 0 \quad (C_i \in \mathcal{C},\ f_i \in J)$$

で, 以下がCM(Λ)上完全となるものが存在

$$0 \to (\ ,\tau_n X) \xrightarrow{f_n} (\ ,C_{n-1}) \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} (\ ,C_0) \xrightarrow{f_0} J(\ ,X) \to 0$$

$$0 \to (X,\ ) \xrightarrow{f_0} (C_0,\ ) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} (C_{n-1},\ ) \xrightarrow{f_n} J(\tau_n X,\ ) \to 0$$

n団傾部分圏は$\dim R = n+1$のときに性質が最も良い

定理（n基本列） $\dim R = n+1$

$\forall$ 射影的 $P \in \mathcal{C}$ に対して, 完全列

$$0 \to \nu P \xrightarrow{f_n} C_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} P \to P/\operatorname{rad} P \to 0$$

$(C_i \in \mathcal{C},\ f_i \in J)$ で, 以下がCM(Λ)上完全となるものが存在

$$0 \to (\ ,\nu P) \xrightarrow{f_n} (\ ,C_{n-1}) \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} (\ ,C_0) \xrightarrow{f_0} J(\ ,P) \to 0$$

$$0 \to (P,\ ) \xrightarrow{f_0} (C_0,\ ) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} (C_{n-1},\ ) \xrightarrow{f_n} J(\nu P,\ ) \to 0$$

命題（d次元$(d-1)$-Auslander対応） $\dim R = d$, $\Gamma :\ R$多元環

$\Gamma :\ (d-1)$-Auslander多元環$\Longleftrightarrow \Gamma :\ $大域次元$d$の非特異整環

特に$\operatorname{End}_\Lambda(M)$は$\Lambda$の非可換特異点解消

商特異点

k : 標数0の体

G : $\mathrm{GL}_d(k)$ の有限部分群

$S := k[[x_1, \cdots, x_d]] \supset S^G$: 不変式環

定理 S^G が孤立特異点と仮定

- S は $(d-1)$ 団傾 S^G 加群
- $(d-1)$ 概分裂完全列と $(d-1)$ 基本列は, S の Koszul 複体から得られる
- （圏 add S の箙）＝（G の McKay 箙）

系 [Herzog, Auslander] $d = 2$

S^G は有限表現型で,（S^G の AR 箙）＝（G の McKay 箙）

$d=0$, Λ : 有限次元k多元環

$$\boxed{n\text{有限表現型多元環} \overset{\text{def}}{\iff} \Lambda\text{は}n\text{団傾加群をもち}, \ \mathrm{gl.dim}\,\Lambda \leq n}$$

1有限表現型＝Dynkin箙の道多元環

- $(n+1)$前射影多元環$\Pi := \mathrm{T}_\Lambda \operatorname{Ext}^n_\Lambda(D\Lambda, \Lambda)$（テンソル多元環）

例 $n=1$のときΠは古典的前射影多元環

定理 [I-Oppermann] Λ : n有限表現型, Π : $(n+1)$前射影多元環

- Λ加群とみてΠはただ一つのn団傾加群
- Πは有限次元自己入射多元環
- Πは$(n+1)$団傾加群を持つ
- $\underline{\mathrm{mod}}\,\Pi$は$(n+1)$-Calabi-Yau三角圏
- $\underline{\mathrm{mod}}\,\Pi$は, $\underline{\mathrm{End}}_\Lambda(\Pi)$の$(n+1)$団圏に三角同値

Γのm団圏 $=\Gamma$の導来圏に付随するm-Calabi-Yau三角圏 [Amiot, Keller]

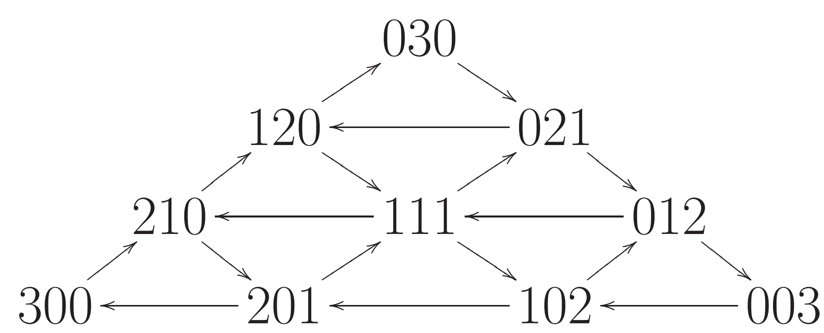
- T-system, Y-systemの周期性 [Keller, 井上-伊-国場-中西-鈴木]

箙 $Q = Q^{n,s}$ $(n, s \geq 1)$

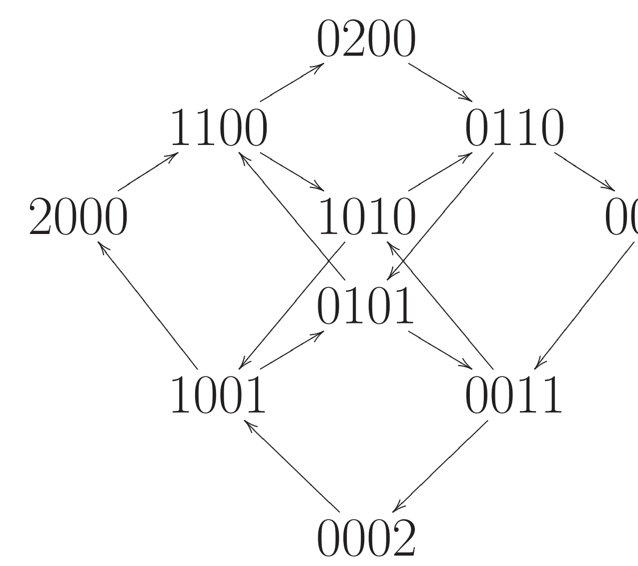
- 点集合 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = s-1\}$
- 矢集合 $\{x \xrightarrow{i} x + f_i \mid 1 \leq i \leq n+1\}$

  $(f_i := (0, \cdots, 0, \overset{i}{-1}, \overset{i+1}{1}, 0, \cdots, 0))$

$Q^{1,5}$



$Q^{2,4}$



$Q^{3,3}$

- Π：道多元環kQの以下の関係式による剰余多元環

$$(x \xrightarrow{i} x+f_i \xrightarrow{j} x+f_i+f_j) = \begin{cases} (x \xrightarrow{j} x+f_j \xrightarrow{i} x+f_i+f_j) & x+f_j \in Q \\ 0 & x+f_j \notin Q \end{cases}$$

- Qの矢の集合Cが切断$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Qの任意の長さ$n+1$の有向サイクルに対し, $n+1$個の中の丁度1つの矢がCに含まれる

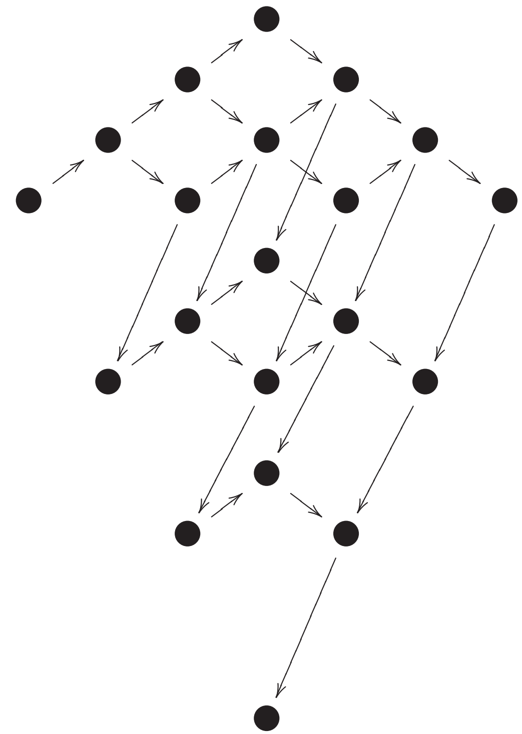
定理 [I-Oppermann]
- Qの任意の切断Cに対し, $\Pi/\langle C\rangle$はn有限表現型多元環
- $\Pi/\langle C\rangle$はCによらず導来圏同値
- $\Pi/\langle C\rangle$の$(n+1)$前射影多元環はΠ

例 矢印$\xrightarrow{n+1}$の全体は切断

$$
\begin{tikzcd}
40 \arrow[r] & 31 \arrow[r] & 22 \arrow[r] & 13 \arrow[r] & 04
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 030 \arrow[dr] & & & \\
 & & 120 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 021 \arrow[dr] & & \\
 & 210 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 111 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 012 \arrow[dr] & \\
300 \arrow[ur] & & 201 \arrow[ur] & & 102 \arrow[ur] & & 003
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0200 \arrow[dr] & & \\
 & 1100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0110 \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
2000 \arrow[ur] & & 1010 \arrow[ur] \arrow[ddl] & & 0020 \arrow[ddl] \\
 & & 0101 \arrow[dr] & & \\
 & 1001 \arrow[ur] & & 0011 \arrow[dl] & \\
 & & 0002 & &
\end{tikzcd}
$$



(Q,W) : ポテンシャル付き箙 (Q : 箙, W : kQの有向サイクルの線形和)

- $\mathcal{P}(Q,W) := kQ/\langle \partial_a W \mid a : 矢\rangle$: ヤコビ多元環
- 自己入射的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{P}(Q,W)$が有限次元自己入射的
- Qの矢の集合Cが切断 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Wに現れる任意の有向サイクルに対し, その中の丁度1つの矢がCに含まれる

定理 [I-Herschend]

- 自己入射的なポテンシャル付き箙(Q,W)とその切断Cに対し$\mathcal{P}(Q,W)/\langle C\rangle$は2有限表現型
- 任意の2有限表現型多元環は, このようにして得られる

- ポテンシャル付き箙の自己入射性は, 中山軌道毎の変異で不変