企画特別

ホモロジー平面と関連する話題
アフィン代数幾何学の発展を垣間見る

宮西　正宜　(関西学院大学・数理科学研究センター)*

概　要

ホモロジー平面とは，非特異な複素代数曲面 X で整数係数ホモロジーについて $H_i(X,\mathbb{Z})=0$ $(i>0)$ となるものである．この条件だけで X はアフィン代数多様体になるが [2]，アフィン平面 $\mathbb{A}^2$ のホモロジー論的性質を抜き出したものである．アフィン平面と異なるホモロジー平面の最初の例は，C.P. Ramanujam が 1971 年の Ann. of Math. 論文 [27] で，消去問題と関連して見出したものである．すなわち，$X\times\mathbb{A}^1$ は $\mathbb{A}^3$ と微分同相であるが，代数的同型ではない例である．整数係数のホモロジーを有理数係数のホモロジーに置き換えたり，X に商特異点を許すようなものを考えて，ホモロジー平面の枠を広げることができる．このような代数曲面は有理曲面になるが，位相的に可縮な代数多様体の簡約可能な代数群の作用による商多様体などとして，代数的変換群論などにもよく現れる．本講演においては，ホモロジー平面の構造と分類，その無限遠境界の基本群の性質だけでなく，消去問題，ジャコビアン予想やその他のアフィン代数幾何学の諸問題との関連において，見通しの良い解説をすることを目的とする．[19] にホモロジー平面に関する論説があるので，一部の内容はそれと重複せざるを得ないが，その後の発展を中心として解説する．

1. ホモロジー平面と消去問題

以下，基礎体は常に複素数体 $\mathbb{C}$ を取ることとする．また，r 次元アフィン空間を $\mathbb{A}^r$ と表す．$r=1$ のときはアフィン直線，$r=2$ のときはアフィン平面という．また，環 R 上の r 変数多項式環は $R[x_1,\ldots,x_r]$ などと記す．ここで言う消去問題とは次の問題である．

問題 1.1 X,Y を n 次元代数多様体とする．$X\times\mathbb{A}^r\cong Y\times\mathbb{A}^r$ となれば，X は Y に代数多様体として同型か？ とくに，$Y=\mathbb{A}^n$ のときは，$X\cong\mathbb{A}^n$ か？

$Y=\mathbb{A}^n$ の場合には，X に関して次のような性質が比較的容易に導かれる．

(1) X は非特異なアフィン代数多様体である．

(2) X の座標環 $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ を R と表すと，問題における仮定は $R[x_1,\ldots,x_n]\cong\mathbb{C}[y_1,\ldots,y_{n+r}]$ と言い換えられる．よって，R は素元分解環 (UFD) で，R の可逆元がなす乗法群 R^* は $\mathbb{C}^*$ に等しい．

(3) アフィン空間 A^{n+r} から X への全射（射影）がある．

本研究は科研費基礎研究 (C)(課題番号:21540055) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 14R052
キーワード：ホモロジー平面, アフィン代数幾何学
* 〒669-1337 兵庫県三田市学園 2-1
e-mail: miyanisi@kwansei.ac.jp; miyanisi@amber.plala.or.jp

(4) X は複素数体として，位相的に可縮である．したがって，$H_i(X;\mathbb{Z})=0\ (\forall i>0)$ で，$\pi_1(X)=1$ である．

$n=1$ ならば(3)の性質から，リューローの定理によって，X は有理曲線である．すなわち，X は射影直線 $\mathbb{P}^1$ の Zariski 開集合である．したがって，$\Gamma(X,\mathcal{O}_X)^*=\mathbb{C}^*$ という条件から，$\mathbb{P}^1\setminus X$ は1点から成る．すなわち，$X\cong\mathbb{A}^1$ となる．$n=2$ の場合も，X の有理性と，X を非特異代数曲面に開集合として埋め込んだときの無限遠集合の様子を調べることによって消去問題を肯定的に解くことができる．

$n=2$ の場合に消去問題に最初に貢献したのは，C.P. Ramanujam [27] である．上の (4) の性質より, X は可縮なホモロジー平面となることが分る．ここで，少し一般化して，次のような代数曲面を考える．

定義 1.2 (1)　X を非特異代数曲面とする．その $\mathbb{Z}$-係数ホモロジー群について，$H_i(X;\mathbb{Z})=0\ (i>0)$ となるとき X はホモロジー平面という．$H_i(X;\mathbb{Q})=0\ (i>0)$ となるときは，X は $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面という．

(2)　X を商特異点[1] 正規代数曲面とする．$H_i(X;\mathbb{Z})=0\ (i>0)$ となるとき X は対数的ホモロジー平面といい，$H_i(X;\mathbb{Q})=0\ (i>0)$ のとき X は対数的 $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面という．

上記の4種類のホモロジー平面はアフィン代数多様体であることが分っている [2]．

定義 1.3 X を正規アフィン代数曲面とする．X が正規代数曲面 V の Zariski 開集合に同型で，$D=V-X$ が次の条件を満たすとき，V は X の**正規コンパクト化**という．また，D を**境界因子**という．

(i) V は D の近傍で非特異で，D は非特異既約代数曲線の（連結）和 $D=C_1\cup\cdots\cup C_n$ である.

(ii) $i\neq j$ ならば，$C_i\cap C_j$ は高々1点からなり，$C_i\cap C_j\neq\emptyset$ ならば，C_i と C_j は正規交叉する．

(iii) i,j,k が相異なれば，$C_i\cap C_j\cap C_k=\emptyset$.

さらに，次の条件が成立するとき，コンパクト化は**極小**という．

(iv) C_i が (-1)-曲線ならば，C_i は（C_i 自身を除く）少なくとも3本の D の既約成分に交わる．

どのような正規アフィン代数曲面 X に対しても，このような（極小）正規コンパクト V が存在する．K を $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{C}$ などの係数環として，この対 (V,D) の K-係数のコホモロジー完全系列は，$H^i(D)=0\ (i>2)$ だから，次のようになる．

[1] Γ を $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群として，$\mathbb{C}^2/\Gamma$ がもつ孤立特異点に解析的に同型な特異点を商特異点という．

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(V,D) & \longrightarrow & H^0(V) & \longrightarrow & H^0(D) \\
 & \longrightarrow & H^1(V,D) & \longrightarrow & H^1(V) & \longrightarrow & H^1(D) \\
 & \longrightarrow & H^2(V,D) & \longrightarrow & H^2(V) & \longrightarrow & H^2(D) \\
 & \longrightarrow & H^3(V,D) & \longrightarrow & H^3(V) & \longrightarrow & 0 \\
 & \longrightarrow & H^4(V,D) & \xrightarrow{\sim} & H^4(V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

議論を簡単にするために X が（非特異な）$\mathbb{Q}$-ホモロジー曲面であると仮定して，$K=\mathbb{Q}$ と取る．すると，

$$H^i(V,D)\cong H_{4-i}(X)=0 \quad (0\le i\le 3)$$

だから，$H^i(V)\cong H^i(D) \quad (0\le i\le 3)$ となる．とくに，$H^3(V)=0$ となり，Poincaré 双対定理より，$H_1(V)=0$ となる．普遍係数定理を使うと，$H_1(V;\mathbb{C})=H^1(V;\mathbb{C})=0$ となる．Hodge 分解を使うと，$q_V=\dim H^1(V,\mathcal{O}_V)=0$ が従う．また，$H^1(V)=0$ より，$H^1(D)=0$ となる．$D=C_1\cup\cdots\cup C_n$ に対して Mayer-Vietoris 完全系列を繰り返し使って，次のことが分る．

(v) 各 C_i は有理曲線で，D の双対グラフは樹木である（閉じたサイクルを含まない）．すなわち，D は単連結である．

同様の考察を行って，次の結果が得られる．

補題 1.4 X を $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面，(V,D) をその正規コンパクト化とすると，次のことがらが成立する．

(1) $q_V=0,\ p_g=\dim H^2(X,\mathcal{O}_V)=0$ かつ D は単連結である．

(2) $|\mathrm{Pic}\,(X)|<\infty,\ \Gamma(X,\mathcal{O}_X)^*=\mathbb{C}^*$.

(3) さらに，X が有理曲面であると仮定すると，

$$\begin{gathered} H_0(X;\mathbb{Z})=\mathbb{Z},\ H_i(X;\mathbb{Z})=0 \quad (\forall i\ge 2), \\ H_1(X;\mathbb{Z})\cong \mathrm{Coker}\,(H_2(D;\mathbb{Z})\to H^2(V;\mathbb{Z}))\ . \end{gathered}$$

(4) X が有理曲面であるという仮定の下で，

$$\mathrm{Pic}\,(X)\cong H_1(X;\mathbb{Z})\cong H^2(X;\mathbb{Z})\ .$$

したがって，もし X がホモロジー平面ならば，$\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ は素元分解環である．

次の結果はホモロジー平面の理論の中で基本的なものである．

定理 1.5 対数的 $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面は有理曲面である．

ホモロジー平面の場合は[13, 14]により，$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面のときには[11, 26]により，一般の対数的$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面のときは[10]において証明されている．

Ramanujam[27]の消去問題に対するアプローチは，アフィン代数曲面の**無限遠基本群**という概念を入れて，アフィン平面になるための必要十分条件を見出すという点にある．すなわち，Xを正規アフィン代数曲面，(V, D)をその極小正規コンパクト化として，VにおけるDの管状近傍Tを

(vi) $\overline{T}$はDの強変位レトラクトで，$T \setminus D$はバウンダリ∂Tにホモトピー同値である

ように取れる．実際，Dの近傍でVの適当なリーマン計量を導入し，$1 \gg \delta > 0$に対して，T はVのDからの距離がδ以内である点の集合として取れる．このとき，Xの無限遠基本群$\pi_1^\infty(X)$を$\pi_1(\partial T)$として定義する．定義から，$\pi_1^\infty(X)$はXの正規コンパクト化の取り方によらない．しかし，$\pi_1^\infty(X)$は次のように境界因子Dの双対グラフによって与えることができる（[24]を参照）．

(vii) $D = C_1 \cup \cdots \cup C_n$の既約成分$C_i$に対して$\pi_1^\infty(X)$の生成元$\alpha_i$が対応する．その基本関係式は，$C_i \cap C_j \neq \emptyset$ならば$\alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i$，かつ，$C_i$が交わる既約成分を交わる順番に$C_{j_1}, \ldots, C_{j_m}$とするとき，$\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_m}\alpha_i^{k_i} = 1$で与えられる．ただし，$k_i = (C_i^2)$は$C_i$の自己交叉数である．

位相空間の対(T, D)の$\mathbb{Z}$-係数コホモロジーの完全列を使って，次の結果が得られる．

(viii) Xがホモロジー平面ならば，∂Tはホモロジー3-球面である．

Hurewiczの同型定理を使うと，ホモロジー3-球面∂Tがホモトピー3-球面になることと，$\pi_1^\infty(X) = 1$となることが同値であることが分る．次の結果がRamanujam[27]の主定理である．

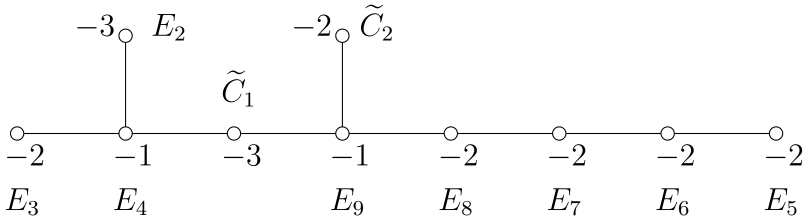
定理 1.6 Xを非特異アフィン代数曲面とすると，Xが$\mathbb{A}^2$に同型であることと，Xが位相的に可縮で$\pi_1^\infty(X) = 1$となることは同値である．

2. $\mathbb{A}^3$上の異種構造

$\mathbb{A}^n$上の異種構造とは，n次元の非特異代数多様体Xで，$X \not\cong \mathbb{A}^n$, $X \approx \mathbb{R}^{2n}$（微分同型）となるものを指す．定理1.6により，非特異代数曲面が$\mathbb{A}^2$に位相同型ならばA^2に代数多様体として同型である[2]．したがって，$\mathbb{A}^n$上に異種構造が存在すれば，$n \geq 3$である．このときは, 位相的に可縮な$n-1$次元の非特異アフィン代数多様体Xが存在すれば，$X \times \mathbb{A}^1$は$\mathbb{R}^{2n}$に微分同相になる（[19]を参照）．Ramanujam [27]は$X \times \mathbb{A}^1 \not\cong \mathbb{A}^3$は証明できなかったが，$n = 3$のときに最初の異種構造の例を与えた．

[2] 代数同型と呼ぶことにする．

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上のカスプ R をもつ 3 次曲線 C_1 と 2 次曲線 C_2 で，C_1 と C_2 は R 以外の 2 点 P, Q で重複度 $5, 1$ で交わるようなものが存在する．，3 点 P, Q, R を中心とするブローアップの列 $f : V \to \mathbb{P}^2$ を，$f^{-1}(C_1 \cup C_2)$ が正規交叉因子で，C_1, C_2 の固有像 $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ が交わらないような最短のものと取る．このとき，$E = f^{-1}(Q)$ として，$X = V - (f^{-1}(C_1 \cup C_2) \setminus E)$ と置いたものが Ramanujam 曲面とよばれるものである．E を除く $D := f^{-1}(C_1 \cup C_2)$ の既約成分の双対グラフは次のとおりである．



この代数曲面 X は可縮なアフィン代数曲面である．第 1 節の (vii) によって X の無限遠基本群を計算すると，

$$\pi_1^\infty(X) = \left\langle e_2, e_3, e_5 \;\middle|\; e_2^3 = e_3^2,\ (e_3 e_2^{-1})^3 = e_2^3 e_5^5,\ e_5^5 = (e_5 e_2 e_3^{-1})^2 \right\rangle$$

で与えられる無限群である．また，X の（対数的）小平次元 $\overline{\kappa}\,(X)$ は 2 である [3]．よって，定理 1.6 により $X \not\cong \mathbb{A}^2$ で，2 次元の消去問題の解が肯定的であることから $X \times \mathbb{A}^1 \not\cong \mathbb{A}^3$ が分る．

Ramanujam 曲面の後，$\mathbb{A}^2$ に同型でない可縮な非特異代数曲面は多数のものが構成された．小平次元が 1 のものは [6] にある [4]．また，小平次元が 2 のものは [6, 28] にある．$\mathbb{A}^n$ の異種構造についての議論は，まとまったものが [1, 32] にある．

3. $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面の分類

補題 1.4 により，すべての $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面 X は次のようにして構成される．

(1) V を非特異射影的有理代数曲面とする．V 上の既約代数曲線 $C_1, \ldots, C_n$ を，$D = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ が正規交叉因子で $\{[C_1], \ldots, [C_n]\}$ が $H_2(V; \mathbb{Q})$ の基底となるように選ぶと，$X = V \setminus D$ は $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面である．また，$\{[C_1], \ldots, [C_r]\}$ が有限生成自由アーベル群 $H_2(V; \mathbb{Z})$ の自由基になれば，X はホモロジー平面である．さらに，$\pi_1(X) = 1$ ならば，J.H.C. Whitehead の定理により X は位相的に可縮である．

また，対数的 $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面の例は次のようにして構成される．

(2) X を $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面とし，G を $\mathrm{Aut}\,(X)$ の有限部分群とする．このとき，X/G は対数的 $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面である．

[3] この計算は容易ではない．しかし，$|D + K_V| = \emptyset,\ \dim |6(D + K_V)| \geq 1$ となることは比較的容易に分る

[4] これらの代数曲面を $\mathbb{A}^3$ の超曲面から構成することについては [30] を参照されたい．

例えば，C が次数2以下の既約射影平面曲線であれば，$X = \mathbb{P}^2 \setminus C$ は $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面である．C の次数が高くても，C が有理曲線でその特異点がカスプだけであれば，$\mathbb{P}^2 \setminus C$ は $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面である．Γ が擬鏡映をもたない $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群であるとき，$\mathbb{A}^2/\Gamma$ は対数的 $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面である．

Y を正規代数曲面，C を非特異代数曲線として，代数的な全射 $f : Y \to X$ の一般ファイバーが $\mathbb{P}^1$（$\mathbb{A}^1$ または $\mathbb{C}^*$）に同型であるとき，f は $\mathbb{P}^1$ ($\mathbb{A}^1$ または $\mathbb{C}^*$)-ファイブレーションであるという．

定理 3.1 X を $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ となる $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面とすると，X は $\mathbb{A}^1$-ファイブレーション $f : X \to C \cong \mathbb{A}^1$ をもち，どのファイバーも既約である．このとき，どのファイバー F についても，F_{red} は $\mathbb{A}^1$ に同型である．X が $\overline{\kappa}(X) = 1$ ならば，X は $\mathbb{C}^*$-ファイブレーションをもつ．

上の定理で $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ の場合，被約でないファイバーは多重ファイバーという．このとき，$F = m\mathbb{A}^1$ のように表す．ただし，m は重複度である．このような代数曲面が $\overline{\kappa}(X) = -\infty$ となるホモロジー平面を尽くしている．多重ファイバーのすべてを $F_1 = m_1\mathbb{A}^1, \ldots, F_r = m_r\mathbb{A}^1$ とするとき，$\mathrm{Pic}(X) \cong \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ になる．この代数曲面を簡単に $X(r; m_1, \ldots, m_r)$ と記す．多重ファイバーが1つもない場合は，$X \cong \mathbb{A}^2$ となる．多重ファイバーが1つだけある場合に，X は**アフィン擬平面**という．X が $\mathbb{C}^*$-ファイブレーションをもつ場合にも詳細な構造定理が得られる（[21], [20, Chap. 3, §4] を参照）．

ここでは，ホモロジー平面 X に含まれる $\mathbb{A}^1$ に同型な曲線の存在による分類を考える．$\overline{\kappa}(X) = 2$ の場合は Zaidenberg の定理である（[31, 23, 7] を参照）．

定理 3.2 X をホモロジー平面とし，$N(\mathbb{A}^1) = \#\{C \mid C \cong \mathbb{A}^1\}$ すると，次のような分類がある．

$\overline{\kappa}(X)$	存在	$N(\mathbb{A}^1)$	構造
$-\infty$	yes	∞	$X \cong \mathbb{A}^2$
0	no		
1	yes	1	$\mathbb{C}^*$-fibered space
2	yes	0	十分に分っていない

$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面にも同様に $\mathbb{A}^1$ の存在による分類があり，その場合には $\overline{\kappa}(X) = 0$ の場合にも $\mathbb{A}^1$ が存在する（[21, 9] を参照）．とくに，3本以上の $\mathbb{A}^1$ を含めば，$\overline{\kappa}(X) = -\infty$ である．

4. 一般ジャコビアン予想と $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面

ホモロジー平面や $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面はアフィン平面 $\mathbb{A}^2$ に代数的に近い性質をもつので，$\mathbb{A}^2$ に対して成立したり，成立が予想される結果に対する試験材料と見ることができる．なかでも（$\mathbb{A}^2$ に対する）ジャコビアン予想はその成立が期待されながら未解決になっている予想の一つである．次のような**一般ジャコビアン予想** (GJC) を考える．

予想 4.1 Xを非特異代数多様体ととすると，Xの不分岐自己準同型写像$\varphi : X \to X$は有限射である．したがって，もしXが単連結ならば，φは自己同型射である．

$X = \mathbb{A}^2$のときは，GJCは2次元のジャコビアン予想である．次の結果は知られている結果の一部をまとめたものである．

定理 4.2 Xを$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面とすると，一般ジャコビアン予想の成立と自己同型群$\mathrm{Aut}\,(X)$の構造に関する結果は次表のようになる．$\bar{\kappa}\,(X) = -\infty$のときは，$X = X(r; m_1, \ldots, m_r)$とする．また，$\mathbb{C}^*$-ファイブレーションが2本の切断を無限遠にもつときuntwistedといい，(I)-型の特異ファイバーとは2本の$\mathbb{A}^1$が1点で正規交叉しているものである．

$\bar{\kappa}\,(X)$	GJC	$\mathrm{Aut}\,(X)$
2	成立	有限群
1	成立	Xの$\mathbb{C}^*$-fibrationがuntwistedで(I)-型の特異ファイバーをもてば$\lvert\mathrm{Aut}\,(X)\rvert = \infty$．その他の場合，特に$X$がホモロジー平面の場合は，$\lvert\mathrm{Aut}\,(X)\rvert < \infty$.
0	反例が存在 [8]	未解決
$-\infty$	$r \geq 2$のとき$X(2;2,2)$以外で成立．$X(2;2,2)$で反例．$r = 1, 0$で未解決	$G_a \subseteq \mathrm{Aut}\,(X)$．$r \geq 2$ならば，$G_a \lhd \mathrm{Aut}\,(X)$，$\mathrm{Aut}\,(X)/G_a \subseteq S_r$（$r$次の対称群）

この結果を踏まえると，GJCが成立するかどうかはアフィン擬平面の場合に限定されてくる．アフィン擬平面$X(1;m)$ $(m > 1)$の普遍被覆空間はm枚の$\mathbb{A}^2$の貼り合わせとして得られるので，どちらかといえば，GJCが成立していると期待される．

$\bar{\kappa}\,(X) = 2$のときは一般型と呼ぶが，そのときの$\mathrm{Aut}\,(X)$は$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{A}^2)$の有限部分群と似通った性質をもつ [5].

定理 4.3 Xを非特異一般型の可縮代数曲面とし，$G \neq (1)$を$\mathrm{Aut}\,(X)$の部分群とすると，次のことがらが成立する．

(1) GはX上にただ一つの固定点Pをもち，Gの$X \setminus \{P\}$上の作用は自由である．

(2) Gは$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$の擬鏡映をもたない部分群である．

(3) 商空間$Y = X/G$はただ一つの特異点Qをもち，$Y^\circ = Y \setminus \{Q\}$とすると，$\pi_1(Y^\circ) = G$である．

Petrie[25]は次の予想を立てた．

予想 4.4 ホモロジー平面Xが有限位数の自己同型をもてば，Xは$\mathbb{A}^2$に同型である．

この予想は正しくなく，[22] には対合 (involution) をもつ一般型ホモロジー曲面の無限個の例がある．しかし，自己同型群については知られていないことが多く，Petrieの予想はまだ健在であるといえる．

ホモロジー平面，とくにアフィン擬平面がアフィン平面に近い性質をもつことを説明したが，消去問題との関連で次の注意をしておく．

注意 4.5 (1) tom Dieck [29] は $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*(= G_a \times G_m)$ の作用をもつホモロジー平面 Y_1, Y_2 で $Y_1 \not\cong Y_2$ であるが，$Y_1 \times \mathbb{A}^1 \cong Y_2 \times \mathbb{A}^1$ となる例を与えた．

(2) 増田と著者 [17] はアフィン擬平面 Z_1, Z_2 で $Z_1 \not\cong Z_2$ であるが，$Z_1 \times \mathbb{A}^1 \cong Z_2 \times \mathbb{A}^1$ となる例を見つけた．

5. 対数的$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面の特異点

代数的変換群論において，次の結果は基本的なものである [15].

補題 5.1 G を簡約可能代数群とし，G が可縮なアフィン代数多様体 Y に代数的に作用するとき，代数的商空間[5] $X = Y//G$ は可縮である．

例えば，$Y = \mathbb{A}^n$ として，$\dim \mathbb{A}^n//G = 2$ ならば，X は対数的$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面である．この場合には，次の Gurjar の結果 [3] は決定的である．

定理 5.2 上の記号で，$Y = \mathbb{A}^n, \dim X = 2$ ならば，$X \cong \mathbb{A}^2/\Gamma$ である．ただし，Γ は擬鏡映を含まない $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群である．

ここでは詳述しないが，$\mathbb{A}^2/\Gamma$ は興味く，その幾何学的な性質が十分に解明されているとは言えない対象である．次の3つの異なる特徴付けを与えておく．最初の特徴づけはGurjar-Shastri[12] の結果で，2番目のものは著者 [18] の結果であり，3番目のものはKoras-Russell[16] による．

定理 5.3 X を正規代数曲面とすると，X が $\mathbb{A}^2/\Gamma$ に同型になる必要十分条件は次の条件の一つが成り立つことである．

(1) X が位相的に可縮で，$|\pi_1^\infty(X)| < \infty$ となることである．

(2) 有限射 $f : \mathbb{A}^2 \to X$ が存在する．

(3) X は位相的に可縮で，高々1つの商特異点しか特異点をもたず，$\overline{\kappa}(\widetilde{X}) = -\infty$ である．ただし，$\widetilde{X}$ は X の特異点の極小解消である．

X が対数的$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面とするとき，$\overline{\kappa}\,(X) = \overline{\kappa}\,(X^\circ)$ と定義する．ただし，$X^\circ = X \setminus \mathrm{Sing}X$ である．X の特異点としては複雑なものは現れない．

定理 5.4 X の特異点の型は次のとおりである．

[5] $P, Q \in Y$ に対して，$P \sim Q \iff \overline{G \cdot P} \cap \overline{G \cdot Q} \neq \emptyset$ によって同値関係を導入したときの商集合 $Y/(\sim)$ に代数多様体の構造を入れたものである．

$\overline{\kappa}(X)$	特異点の個数	特異点の型
$-\infty$	$\leq \#\{$多重ファイバー$\}$	A_n （巡回型）
0	?	?
1	1または2	A_n または D_n
2	?	$H_i(X;\mathbb{Z}) = 0$ $(i > 0)$ ならば，巡回型特異点が高々1つ存在する [5]．

Mumford [24] には，正規代数曲面 X の点 P に関して，X が P で非特異であるための必要十分条件は点 P における局所基本群 $\pi_1(X, P)$ が自明になることであるという，有名な結果がある．次の結果 [4] は，この結果を大局化したものと考えられる．

定理 5.5 X を正規代数曲面とする．X が位相的に可縮で，X° が単連結ならば，X は非特異である．ただし，$X^\circ = X - \mathrm{Sing}X$ である．

参考文献

[1] A. Choudary and A. Dimca, Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces, Kodai Math. J. **17** (1994), 171–178.

[2] T. Fujita, On the topology of noncomplete algebraic surfaces. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), no. 3, 503–566.

[3] R.V. Gurjar, Two-dimensional quotients of $\mathbb{C}^n$ are isomorphic to $\mathbb{C}^2/\Gamma$, Transf. Groups, **12** (2007), 117–125.

[4] R.V. Gurjar, M. Koras, M. Miyanishi and P. Russell, Affine normal surfaces with simply-connected smooth locus, to appear in Math. Ann.

[5] R.V. Gurjar, M. Koras, M. Miyanishi and P. Russell, A homology plane of general type can have at most a cyclic quotient singularity, preprint.

[6] R.V. Gurjar and M. Miyanishi, Affine surfaces with $\overline{\kappa} \leq 1$, Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I, 99–124, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[7] R.V. Gurjar and M. Miyanishi, Affine lines on logarithmic $\mathbb{Q}$-homology planes, Math. Ann. **294** (1992), no. 3, 463–482.

[8] R.V. Gurjar and M. Miyanishi, On the Jacobian conjecture for $\mathbb{Q}$-homology planes, J. Reine Angew. Math. **516** (1999), 115–132.

[9] R.V. Gurjar and A.J. Parameswaran, Affine lines on $\mathbb{Q}$-homology planes, J. Math. Kyoto Univ. **35** (1995), no. 1, 63–77.

[10] R.V. Gurjar and C.R. Pradeep, $\mathbb{Q}$-homology planes are rational. III, Osaka J. Math. **36** (1999), no. 2, 259–335.

[11] R.V. Gurjar, C.R. Pradeep and A.R. Shastri, On rationality of logarithmic $\mathbb{Q}$-homology planes, II. Osaka J. Math. **34** (1997), no. 3, 725–743.

[12] R.V. Gurjar and A.R. Shastri, A topological characterization of $\mathbb{C}^2/G$, J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985), 767–773.

[13] R.V. Gurjar and A.R. Shastri, On the rationality of complex homology 2-cells. I, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), no. 1, 37–56.

[14] R.V. Gurjar and A.R. Shastri, On the rationality of complex homology 2-cells. II, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), no. 2, 175–212.

[15] H.P. Kraft, T. Petrie, Ted and J.D. Randall, Quotient varieties, Adv. Math. **74** (1989), no. 2, 145–162.

[16] M. Koras and P. Russell, Contractible affine surfaces with a quotient singularity, Transf. Groups **12** (2007), no. 2, 293–340.

[17] K. Masuda and M. Miyanishi, Affine pseudo-planes and cancellation problem, Trans. Amer. Math. Soc. **357**, No. 12 (2005), 4867–4883.

[18] M. Miyanishi, Normal affine subalgebras of a polynomial ring, Algebraic and Topological Theoreies. To the Memory of Dr. Takehiko Miyata, Kinokuniya, Tokyo (1985), 37–51.

[19] 宮西正宜, 開代数曲面の最近の話題，数学 **46**, No. 3 (1994), 243–257; (English translation) Recent topics on open algebraic surfaces, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **172** (1996), 61–76.

[20] M. Miyanishi, Open algebraic surfaces, CRM Monograph Series **12**, Amer. Math. Soc. 2001.

[21] M. Miyanishi and T. Sugie, Homology planes with quotient singularities, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 755–788.

[22] M. Miyanishi and T. Sugie, $\mathbb{Q}$-homology planes with $\mathbb{C}^{**}$-fibrations, Osaka J. Math. **28** (1991), no. 1, 1–26.

[23] M. Miyanishi and S. Tsunoda, Absence of the affine lines on the homology planes of general type, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), no. 3, 443–450.

[24] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. I.H.E.S. **9** (1961), 5–22.

[25] T. Petrie, Algebraic automorphisms of smooth affine surfaces, Invent. Math. **138** (1989), 355–378.

[26] C.R. Pradeep and A.R. Shastri, On rationality of logarithmic $\mathbb{Q}$-homology planes. I, Osaka J. Math. **34** (1997), no. 2, 429–456.

[27] C.P. Ramanujam, A topological characterization of the affine plane as an algebraic variety, Ann. of Math. **94** (1971), 69–88.

[28] T. Sugie, On T. Petrie's problem concerning homology planes, J. Math. Kyoto Univ. **30** (1990), no.2, 317–342.

[29] T. tom Dieck, Homology planes without cancellation property, Arch. Math. **59** (1992), 105–114.

[30] T. tom Dieck and T. Petrie, Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one, Japan. J. Math. (N.S.) **16** (1990), no. 1, 147–169.

[31] M. Zaidenberg, Isotrivial families of curves on affine surfaces and characterization of the affine plane, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), no. 3, 534–567, 688; translation in Math. USSR-Izv. **30** (1988), no. 3, 503–532.

[32] M. Zaidenberg, Exotic algebraic structures on affine spaces, Algebra i Analiz **11** (1999), no. 5, 3–73; translation in St. Petersburg Math. J. **11** (2000), no. 5, 703–760.