企画特別講演

解析的捩率とBCOV予想

吉川　謙一　(京都大学)*

目　次

1. 序 1
2. Calabi-Yau 多様体 1
3. A-モデルにおける種数1の分配関数 2
4. 解析的捩率と B-モデルにおける分配関数 3
5. B-モデルにおける標準座標 4
6. BCOV 予想と Borcherds 積 5
7. 例 — 例外型 Borcea-Voisin 多様体 9

1. 序

この講演では, 種数1のミラー対称性を筆者の理解に基づいて説明する. まず最初に断らなければいけないのは, 筆者がミラー対称性を良く理解しているとは言い難い, という事である. 特に, 講演中で述べるA-モデルの分配関数に用いられるインスタントン数の定式化は筆者の不完全な理解に基づく.

種数1のミラー対称性予想（BCOV 予想）の定式化に必要な諸概念を簡単に復習した後で, 種数1のミラー対称性がどの様な予想であるかを述べ, 特に無限積展開を持つ保型形式との関連でどの様な応用が期待できるかを述べる予定である. 時間が許せば, 例についても触れる予定である.

2. Calabi-Yau 多様体

定義 2.1 連結コンパクト Kähler 多様体 M は以下の条件を充たす時, Calabi-Yau 多様体と呼ばれる.

- $K_M := \det(T^*M) \cong \mathcal{O}_M$
- $h^q(\mathcal{O}_M) = 0 \quad (0 < q < \dim M)$.

ここで, T^*M は M の正則余接束を表す. この定義に従えば, 1次元 Calabi-Yau 多様体は楕円曲線の事であり, 2次元 Calabi-Yau 多様体は $K3$ 曲面の事である.

事実 2.2
- $n \neq 2$ ならば, Calabi-Yau 多様体は射影代数多様体である.
- Calabi-Yau 多様体の任意の Kähler 類は唯一つの Ricci-平坦 Kähler 形式を含む.

以下, この講演では Calabi-Yau 多様体と言えば, 3次元 Calabi-Yau 多様体を意味する.

例 2.3 (5次超曲面) $\psi \in \mathbf{C}$ とする時, 次の式で定義される $\mathbf{P}^4$ の非特異超曲面

$$X_\psi = \{[z] \in \mathbf{P}^4;\ z_0^5 + \cdots + z_4^5 + \psi z_0 \cdots z_4 = 0\}$$

本研究は科研費 (課題番号:19340016) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 58J52, 14J32, 14J28, 11F22, 32N10, 32N15
キーワード：Calabi-Yau 多様体, ミラー対称性, 解析的捩率, 保型形式
* 〒606-8052 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科数学教室
e-mail: yosikawa@math.kyoto-u.ac.jp

はCalabi-Yau多様体である.

例 2.4 (ミラー5次超曲面) X_ψは各座標成分に1の5乗根を掛ける事により有効な$G = (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^{\oplus 3}$の作用を持つ. 特異点解消

$$X_\psi^\vee \to X_\psi/G$$

は, 標準束が自明な時, ミラー5次超曲面と呼ばれる. ミラー5次超曲面はCalabi-Yau多様体である.

3. A-モデルにおける種数1の分配関数

Calabi-Yau多様体XのKähler類全体をKähler錐と呼び, $\mathcal{K}_X$で表す.

$$\mathcal{K}_X = \{\kappa \in H^2(X,\mathbf{R}) = H^{1,1}(X,\mathbf{R});\ \kappa\text{ はKähler類}\}.$$

$\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{h^{1,1}(X)}\}$を$H^2(X,\mathbf{Z})$の基底とし, $t = (t_1,\dots,t_{h^{1,1}})$をこの基底から定まる$H^2(X,\mathbf{C})$の座標とする. 従って, 以下の同一視を仮定する.

$$t = (t_i) = \sum_i t_i \mathbf{e}_i.$$

さらに, 以下の記号を用意する.

$$q = (q_1,\dots,q_{h^{1,1}}) := (e^{2\pi i t_1},\dots,e^{2\pi i t_{h^{1,1}}}).$$

複素化されたKähler錐

$$H^2(X,\mathbf{R}) + i\,\mathcal{K}_X \subset H^2(X,\mathbf{C})$$

上の座標系$t = (t_i)$或は$(H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})) + i\,\mathcal{K}_X$上の座標系$q = (q_i)$を, A-モデルにおける標準座標と呼ぶ. 標準座標と種数0のミラー対称性は, [6], [3]等に詳しい.

定義 3.1 (Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa [1]) Calabi-Yau多様体Xに対して, 複素化されたKähler錐$H^2(X,\mathbf{R}) + i\,\mathcal{K}_X$上の形式的無限積$F_1^{\mathrm{top}}(t)$を以下の式で定める.

$$F_1^{\mathrm{top}}(t) = F_1^{\mathrm{top}}(q) := q^{c_2^\vee/24} \prod_{d \in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} \left(1 - q^d\right)^{n_0(d)/12} \prod_{n \geq 1} \left(1 - q^{nd}\right)^{n_1(d)}$$

ここで, $d \in H_2(X,\mathbf{Z})$に対して, $q^d := \exp(2\pi i\langle d, t\rangle)$であり, $n_g(d)$は種数gインスタントン数（種数g以下のGromov-Witten不変量の適当な線形結合）である. また, $c_2^\vee \in H_2(X,\mathbf{Z})$は$X$の第2 Chern類$c_2(X) \in H^4(X,\mathbf{Z})$のPoincaré双対である.

定義からは$F_1^{\mathrm{top}}(t)$が収束する無限積かどうか明らかではない. 著者によっては, $n_g(d)$をGromov-Witten不変量と書いている場合もある. ここでは, Zingerの論文[9]に従い, 上の式に現れた$n_g(d)$をインスタントン数と呼び, Gromov-Witten不変量を$N_g(d)$で表

す. Zinger の論文 [9] の Appendix B にある関係式を筆者が正しく理解しているとすれば, インスタントン数と Gromov-Witten 不変量の関係は一般に以下の式で与えられる:

$$\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} N_0(d)q^d = \sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} n_0(d)\,\mathrm{Li}_3(q^d),$$

$$\begin{aligned}\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} N_1(d)q^d = &\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} n_1(d)\sum_{k>0}\log\left(1-q^{kd}\right)\\ &+\frac{1}{12}\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} n_0(d)\log\left(1-q^d\right).\end{aligned}$$

但し, $\mathrm{Li}_3(z)=\sum_{k>0}z^k/k^3$ である. 特に,

$$\log F_1^{\mathrm{top}}(t) = (\text{Linear term in } t) + 2\sum_{d\in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} N_1(d)\,q^d.$$

(これらの関係式は Zinger の論文にある公式 [9, (B.2), (B.11)] から一般の場合を類推したものであり, 間違っているかもしれない. 使用する場合には細心の注意を要する.)

4. 解析的捩率と B-モデルにおける分配関数

X を Calabi-Yau 多様体とし, γ を X 上の Ricci-平坦 Kähler 形式とする. $\Box_{p,q}$ を X 上の (p,q)-形式に作用するラプラシアンとし, $\zeta_{p,q}(s)$ をそのスペクトル ζ-関数とする.

$$\zeta_{p,q}(s) := \sum_{\lambda\in\sigma(\Box_{p,q})\setminus\{0\}} \lambda^{-s}\dim E(\Box_{p,q};\lambda).$$

但し, $E(\Box_{p,q};\lambda)$ は $\Box_{p,q}$ の固有値 λ に対する固有空間であり, $\sigma(\Box_{p,q})$ は $\Box_{p,q}$ の固有値全体の集合である. $\zeta_{p,q}(s)$ は, $\Re s$ が充分大きい時に絶対収束し, 複素平面全体解析接続され, $s=0$ において正則である事が知られている.

定義 4.1 (Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa [2], Fang-Lu-Y. [4]) Calabi-Yau 多様体 X の **BCOV** 不変量を以下の実数として定める.

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X) := \frac{\mathrm{Vol}(X,\gamma)^{\frac{\chi(X)}{12}-3}}{\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma])}\,\exp\left[-\sum_{p,q\geq 0}(-1)^{p+q}pq\,\zeta'_{p,q}(0)\right].$$

ここで, 実トーラス $H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z})$ の L^2-計量に関する体積を

$$\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma]) := \mathrm{Vol}(H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z}),\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2,[\gamma]})$$

で表した. L^2-計量とは, コホモロジーの各元を調和形式で代表させ, その長さを計測する事により定まるコホモロジー群上の計量の事である.

事実 4.2 (Fang-Lu-Y.[4]) Calabi-Yau 多様体 X に対して, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$ は Ricci-平坦 Kähler 計量の選び方に依らない. 即ち, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$ は X の不変量である. 特に, τ_{BCOV} は Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間上の関数と見なせる.

以下, Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafaに従い, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$をB-モデルにおける種数1の弦振幅関数F_1と理解する[2]. (正確には, $\log\tau_{\mathrm{BCOV}}$をF_1とすべきかもしれない.)

注意 4.3 Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafaの論文には$\mathrm{Vol}(X,\gamma)$や$\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma])$の項は無かったが, これらの項が無いと$X$の不変量にならない. そこで, これらを付加した$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$を$F_1$と見なす. 偏極Calabi-Yau多様体の範疇で考えれば, $\mathrm{Vol}(X,\gamma)$や$\mathrm{Vol}_{L^2}(H^2(X,\mathbf{Z}),[\gamma])$は偏極を固定する限り定数であるから, 実質的には$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$はRicci-平坦Calabi-Yau多様体の解析的捩率を考えている事に他ならない.

注意 4.4 $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$の定義にはX上のRicci-平坦計量が用いられているが, Ricci-平坦性の条件は本質的なものではない. Ricci-平坦性を仮定しない場合, 適当なBott-Chern二次特性類で補正する事により, $\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$を得る事ができる. 技術的には, Ricci-平坦計量に限定せずに$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X)$が定義可能な事は重要である. 詳しくは, [4]を参照.

大雑把に言えば, 種数1のミラー対称性は, 二つの関数F_1^{top}とτ_{BCOV}が (両者の定義されている空間の標準座標による同一視の下で) 等価である事を主張する. A-モデルにおける標準座標は説明したので, 次節においてB-モデルにおける標準座標を説明する.

5. B-モデルにおける標準座標

5.1. 極大冪単点と標準座標

以下, Δにより複素平面の単位円盤を表し, $\Delta^* := \Delta\setminus\{0\}$とする. $S^o = (\Delta^*)^n$と置き, $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$をCalabi-Yau多様体のズムーズ族とする. 但し, $n := h^{1,2}(Y_s)$を仮定する. (Y_s, $s\in S^o$はこの族の一般ファイバーである.)

以下の条件が充たされる時, 族$\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$は極大冪単族と呼ばれる[7].

- $T_i \in GL(H^3(Y_s,\mathbf{Q}))$を$\Delta^n$の$i$-番目の座標軸に関するモノドロミーとする時, 全てのT_iは冪単である. 即ち, $(T_i - I)^4 = 0$が成り立つ.
- $N_i := \log T_i$とし, $N := \sum_{i=1}^n \nu_i N_i$と置く. 但し, 全ての$1\le i\le n$に対して$\nu_i \in \mathbf{R}_{>0}$である. $H^3(Y_s,\mathbf{Z})$の部分空間W_0, W_1, W_2を以下の様に定める.

  $$W_0 := \mathrm{Im}(N^3) \subset W_1 := \mathrm{Im}(N^2)\cap\ker(N) \subset W_2 := \mathrm{Im}(N)\cap\ker(N^2).$$

  (部分空間列$W_0\subset W_1\subset W_2$は, $\nu_i>0$が全てのiに対して成り立つ限り, $\sum_i \nu_i N_i$の選び方に依らない事が知られている. 加えて, $N_i W_0 = 0$が任意のiに対して成り立つ.) この時,

  $$\dim W_0 = \dim W_1 = 1, \qquad \dim W_2 = n+1.$$

- $W_2\cap H^3(Y_s,\mathbf{Z})$の基底$\{A_0^\vee,\dots,A_n^\vee\}$を, $A_0^\vee$が$W_0\cap H^3(Y_s,\mathbf{Z})$を生成する様に選ぶ. 即ち, $W_0\cap H^3(Y_s,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}A_0^\vee$. さらに, 整数$m_{ij}\in\mathbf{Z}$を$N_i A_j^\vee = m_{ij}A_0^\vee$により定める. この時, 行列$(m_{ij})$は正則である. 即ち, $(m_{ij})\in GL(n+1,\mathbf{Q})$.

5.2. B-モデルにおける標準座標

定義 5.1 (Morrison) $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o = (\Delta^*)^n$ を Calabi-Yau 多様体の極大冪単族とし，$\{\Xi_s\}_{s\in S^o}$ を族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$ の相対正則標準形式（正則3-形式の正則族）とする．以下の正則写像を S^o 上の標準座標と呼ぶ．

$$M\colon S^o \ni s \to (q_1(s),\dots,q_n(s)) \in (\Delta^*)^n,$$

$$q_j(s) := \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n} m^{kj}\frac{(A_k^\vee,\Xi_s)}{(A_0^\vee,\Xi_s)}\right), \qquad (m^{\alpha\beta}) := (m_{ij})^{-1}.$$

ここで，$(\cdot,\cdot)$ は $H^3(Y_s,\mathbf{C})$ 上の交叉形式である．

注意 5.2 $H_3(Y_s,\mathbf{Z})$ の適当なシンプレクティック基底 $\{\alpha_0,\dots,\alpha_n,\beta_0,\dots,\beta_n\}$ を選べば，$q_j(s)$ を以下の様に表示できる事が知られている．

$$q_j(s) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\int_{\beta_j}\Xi_s}{\int_{\beta_0}\Xi_s}\right) \qquad (j=1,\dots,n).$$

ここで，β_0 は任意の i に対して $N_i\beta_0 = 0$ を充たす（符号を除き）唯一定まる整サイクルである．

Schmid の冪零軌道定理から，以下の事実が従う．

事実 5.3 族 $\pi\colon \mathcal{Y}^o \to S^o$ が極大冪単ならば，標準座標 $q = (q_1,\dots,q_n)$ は S^o の原点の近傍における正則な座標系を与える．

6. BCOV 予想と Borcherds 積

6.1. ミラー対称性と BCOV 予想

引き続き，$S^o = (\Delta^*)^n$ を仮定し，前節の記号をそのまま用いる．

定義 6.1 X を Calabi-Yau 多様体とし，$\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ を Calabi-Yau 多様体の極大冪単族とする．以下の性質が充たされる時，$\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ は X のミラー族と呼ばれる．

(i) $h^{1,1}(X) = h^{1,2}(X_s^\vee)$ かつ $h^{1,2}(X) = h^{1,1}(X_s^\vee)$.

(ii) 標準座標の同一視

$$q(t) = (e^{2\pi i t_1},\dots,e^{2\pi i t_{h^{1,1}}}) = (q_1(s),\dots,q_{h^{1,2}_\vee}(s))$$

から誘導される解析空間の芽の同一視

$$(H^2(X,\mathbf{R})/H^2(X,\mathbf{Z}) + i\,\mathcal{K}_X, +i\infty) \cong (S^o, 0)$$

の下で，以下の等式が成り立つ（種数0におけるミラー対称性）

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial}{\partial t_\beta}, \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \right\rangle_A (q) = \left\langle 2\pi i q_\alpha\frac{\partial}{\partial q_\alpha}, 2\pi i q_\beta\frac{\partial}{\partial q_\beta}, 2\pi i q_\gamma\frac{\partial}{\partial q_\gamma} \right\rangle_B (q).$$

ここで, 三次形式 $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_A$ と $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle_B$ の定義は次の様に与えられる.

(A) $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{h^{1,1}(X)}\}$ を固定された $H^2(X,\mathbf{Z})$ の基底とする時, A-モデルにおける三次形式を以下の式で定める.

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t_\alpha}, \frac{\partial}{\partial t_\beta}, \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \right\rangle_A (q) := (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma) + \sum_{d \in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} \frac{n_0(d)\, q^d}{1-q^d} \langle d, \mathbf{e}_\alpha\rangle\langle d, \mathbf{e}_\beta\rangle\langle d, \mathbf{e}_\gamma\rangle.$$

(B) ∇ を Gauss-Manin 接続とする時, B-モデルにおける三次形式を以下の式で定める.

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial q_\alpha}, \frac{\partial}{\partial q_\beta}, \frac{\partial}{\partial q_\gamma} \right\rangle_B (q) := \frac{(\Xi_s, \nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\alpha}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\beta}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\gamma}} \Xi_s)}{(\int_{\beta_0} \Xi_s)^2}.$$

6.2. BCOV 予想

以下, S^o 上の Hodge 束の切断 $\varXi_s / \int_{\beta_0} \varXi_s$ と S^o の標準束の切断 $dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_{h^{1,2}_\vee} / q_1 \cdots q_{h^{1,2}_\vee}$ をそれぞれの直線束の自明なゲージと見なす事にする.

予想 **6.2 (Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa [1], [2])** X を Calabi-Yau 多様体とし, $\pi\colon \mathcal{X}^\vee \to S^o$ をそのミラー族とする. X の種数 1 分配関数が次式で定義されていた事を思い出す.

$$F_1^{\mathrm{top}}(q) = q^{c_2^\vee/24} \prod_{d \in H_2(X,\mathbf{Z})\setminus\{0\}} \left(1-q^d\right)^{n_0(d)/12} \prod_{k \geq 1} \left(1-q^{kd}\right)^{n_1(d)}.$$

ミラー族の一般ファイバーの Hodge 数と Euler 数を

$$h^{1,2}_\vee := h^{1,2}(X_s^\vee), \qquad \chi^\vee := \chi(X_s^\vee)$$

とする. この時, S^o の原点の近傍において, 以下の関数の等式が（定数倍の不定性を除き）成り立つ.

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_s^\vee) = |F_1^{\mathrm{top}}(q)|^4 \cdot \left\| \left(\frac{\varXi_s}{\int_{\beta_0} \varXi_s} \right)^{3+h^{1,2}_\vee+\frac{\chi^\vee}{12}} \otimes \left(q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \cdots \wedge q_{h^{1,2}_\vee} \frac{\partial}{\partial q_{h^{1,2}_\vee}} \right) \right\|^2.$$

ここで, $\varXi_s$ のノルムは L^2-計量により計測され, $\frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial q_{h^{1,2}_\vee}}$ のノルムは Weil-Petersson 計量により計測される.

上の予想で, 左辺が B-モデルにおける種数 1 の弦振幅関数であり, 右辺が A-モデルにおける種数 1 の弦振幅関数である. 筆者の知る限り, BCOV 予想が確認された例は 5 次超曲面とミラー 5 次超曲面の場合のみである [9], [4].

以下, BCOV 予想が **Borcherds** 積, 即ち, 無限積展開を持つ IV 型領域上の保型形式の理論を拡張する可能性を内在する事を説明する.

6.3. BCOV 予想の幾つかの帰結

6.3.1. 無限積の収束

複素化された Kähler 錐 $H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X$ 上の形式的無限積 $F_1^{\mathrm{top}}(t)$ は $+i\infty$ の近傍で収束する．（これはBCOV 予想の主張に含める方が良いかもしれない.）

6.3.2. 解析的捩率の無限積展開

BCOV 不変量 τ_{BCOV} を S^o 上の標準座標を用いて

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_s^\vee)=|F(q)|^4\cdot\left\|\left(\frac{\Xi_s}{\int_{\beta_0}\Xi_s}\right)^{3+h_\vee^{1,2}+\frac{\chi^\vee}{12}}\otimes\left(q_1\frac{\partial}{\partial q_1}\wedge\cdots\wedge q_{h_\vee^{1,2}}\frac{\partial}{\partial q_{h_\vee^{1,2}}}\right)\right\|^2$$

と表示すれば, $F(q)$ は無限積展開を持つ．（これは, 楕円曲線やEnriques曲面の解析的捩率がモジュライ空間の尖点の近傍で無限積展開を持つという事実に類似する.）

6.3.3. $F_1^{\mathrm{top}}(q)$ の解析接続

族 $\pi\colon\mathcal{X}^\vee\to S^o$ が S^o を開集合として含む T 上の Calabi-Yau 多様体の族に拡張されるならば, τ_{BCOV} は T 上の実解析関数に解析接続される．（これは, Weil-Petersson 計量が T 上の実解析的な計量である事から従う.）その結果, S^o 上の表示

$$F_1^{\mathrm{top}}(q)^{24}\cdot\left(\frac{\Xi_s}{\int_{\beta_0}\Xi_s}\right)^{36+12h_\vee^{1,2}+\chi^\vee}\otimes\left(q_1\frac{\partial}{\partial q_1}\wedge\cdots\wedge q_{h_\vee^{1,2}}\frac{\partial}{\partial q_{h_\vee^{1,2}}}\right)^{12}$$

は T 上の正則直線束 $H^{\otimes(36+12h^{1,1}(X)-\chi(X))}\otimes(K_T^{-1})^{\otimes 12}$ （を $\mathrm{Pic}^0(T)$ の或る元で捩った直線束）の至る所消えない正則切断に解析接続される．ここで, H は T 上の Hodge 束であり, K_T は T の標準束である．この意味で, 無限積 $F_1^{\mathrm{top}}(q)$ は T まで解析接続される.

6.3.4. 保型形式と BCOV 予想

$\pi\colon(\mathcal{Y},L)\to B$ を偏極 Calabi-Yau 多様体のスムーズ族とし, 一般の点 $b\in B$ における小平-Spencer 写像は同型であると仮定する．$\Omega\subset\mathbf{C}^{h^{1,2}(Y_s)}$ を有界対称領域と同型な管状領域とし, $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(\Omega)$ を算術群とする.

以下の三つの条件を考える.

(C1) B は $\Gamma\backslash\Omega$ の Zariski 開集合に同型である.

(C2) B 上の Weil-Petersson 計量の Kähler 形式 ω_{WP} は, $\Gamma\backslash\Omega$ 上の Bergman 計量の Kähler 形式 ω_Ω に一致する.

$$\omega_{\mathrm{WP}}=\omega_\Omega.$$

(C3) 次の条件を充たす Calabi-Yau 多様体 X が存在する.

- $\pi\colon\mathcal{Y}\to B$ は X のミラー族である.
- $H^2(X,\mathbf{R})+i\,\mathcal{K}_X$ は Ω の開部分集合である.

– 写像 $M^{-1}\circ\exp(2\pi i(\cdot))$ は $H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X$ からの写像に拡張され, 射影 $\Omega\to\Gamma\backslash\Omega$ と同一視される. 状況を図式で表せば以下の様になる.

$$\begin{array}{ccc} H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X & \xrightarrow{M^{-1}\circ\exp(2\pi i(\cdot))} & B \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\iota} \\ \Omega & \xrightarrow[\Pi]{} & \Gamma\backslash\Omega \end{array}$$

ここで, ι は包含写像を表し, Π は射影を表す. また, M は標準座標による $H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X$ と S の同一視である.

不幸にして条件 (C1), (C2), (C3) の全てが充たされる例を筆者は知らないが, (C1) と (C2) の二つの条件を充たす例ならば幾つか存在する. (次節を参照.)

定理 6.3 (Y.) $\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/B)$ を以下の式で定義された B 上の関数とする.

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/B)(b):=\tau_{\mathrm{BCOV}}(Y_b)\qquad(b\in B).$$

条件 (C1), (C2) が成り立つならば, Ω 上の Γ に関する（有理型）保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/B}$ が存在して,

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(\mathcal{Y}/B)=\|\Psi_{\mathcal{Y}/B}\|,\qquad \mathrm{div}(\Psi_{\mathcal{Y}/B})\subset\Omega\setminus\Pi^{-1}(B)$$

が成り立つ. ここで, $\|\cdot\|$ は保型形式の Petersson ノルムである.

この様に, 条件 (C1) と (C2) は BCOV 不変量 τ_{BCOV} の保型性を特徴付けるための充分条件である.

この定理の証明には以下の技術的な定理が鍵となる.

定理 6.4 (Y.) $f\colon(\mathcal{X},X_0)\to(C,0)$ を Riemann 面 C に助変数付けられた Calabi-Yau 多様体の一変数退化族とする. この時, 有理数 $\alpha\in\mathbf{Q}$ が存在して,

$$\log\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_t)=\alpha\log|t|^2+O\left(\log(-\log|t|)\right)\qquad(t\to0).$$

観察　条件 (C1), (C2), (C3) と BCOV 予想の下に, 保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/B}$ は複素化された Kähler 錐 $H^2(X,\mathbf{R})+i\mathcal{K}_X$ の無限遠点 $+i\infty$ の近傍で無限積展開を持つ保型形式である.

この様に, 条件 (C1), (C2), (C3) を充たす Calabi-Yau 多様体の族は無限積展開を持つ保型形式を生じさせる. この意味で, BCOV 予想を Borcherds 積の理論, 即ち, 無限積展開を持つ保型形式の理論の一般化と見なす事ができるかもしれない. Borcherds 積では, 無限積の指数は適当なレベルの楕円モジュラー形式の Fourier 級数展開の係数なので, 条件 (C1), (C2), (C3) の下ではインスタントン数の保型性が期待される.

問題 6.5 Calabi-Yau 多様体の族 $\pi\colon\mathcal{Y}\to B$ で, 条件 (C1), (C2)（及び (C3)）を充たすものを見つけ, 対応する保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/B}$ を決定せよ.

問題 6.6 条件 (C1), (C2)（及び (C3)）を充たす Calabi-Yau 多様体の全ての族 $\pi\colon \mathcal{Y} \to B$ と対応する保型形式 $\Psi_{\mathcal{Y}/B}$ を決定せよ.

問題 6.7 条件 (C1), (C2)（及び (C3)）を充たす非コンパクト算術商 $\Gamma\backslash\Omega$ で, Ω が複素超球でも IV 型（あるいはそれらの何個かの直積）でもない例が存在するか? そのような例の存在は衝撃的である. 何故なら, もしその様な例が存在したとすれば, 無限積展開を持つ保型形式の理論が新しいクラスの有界対称領域に対しても期待できるからである.（この様な驚愕の主張が導かれるので, 条件 (C1), (C2), (C3) を充たす算術商は複素超球, IV 型, それらの直積型に限られるのかもしれない. 筆者が現在持っている例は全てこれらのタイプの何れかである.)

7. 例 — 例外型 Borcea-Voisin 多様体

7.1. Borcea-Voisin 多様体

定義 7.1 (1) S を $K3$ 曲面とし, $\theta\colon S \to S$ を正則 2-形式 $H^0(S, K_S)$ に非自明に作用する正則対合とする. また, T を楕円曲線とする. この時,

$$X_{(S,\theta,T)} := \mathrm{Bl}_\Sigma\left(\frac{S\times T}{\theta\times(-1_T)}\right), \qquad \Sigma := \mathrm{Sing}\left(\frac{S\times T}{\theta\times(-1_T)}\right)$$

と定める. 但し, $\mathrm{Bl}_\Sigma(\cdot)$ は Σ に沿うブローアップである. この時, $X_{(S,\theta,T)}$ は Calabi-Yau 多様体であり,（構成者に因み）**Borcea-Voisin** 多様体と呼ばれる.

(2) Borcea-Voisin 多様体は, 反不変格子

$$H^2_-(S,\mathbf{Z}) := \{\ell \in H^2(S,\mathbf{Z});\, \theta^*(\ell) = -\ell\}$$

が $(\mathbf{Z}^{n+2}, \Lambda_n)$ に等長な時, 例外型と呼ばれる. ここで,

$$\Lambda_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus L_n, \qquad L_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (1 \le n \le 9)$$

である. 一般に, 格子 $H^2_-(S,\mathbf{Z})$ を Borcea-Voisin 多様体 $X_{(S,\theta,T)}$ の型と呼ぶ.

注意 7.2 型 Λ_n が何故「例外型」なのかは以下の通りである.

(1) $X_{(S,\theta,T)}$ が例外型ならば, Borcea-Voisin によるミラーの構成法

$$X^\vee_{(S,\theta,T)} := X_{(S^\vee,\theta^\vee,T^\vee)}$$

が破綻する. その結果, $X_{(S,\theta,T)}$ が例外型の時, そのミラーの存在は知られていない.（$X_{(S,\theta,T)}$ が例外型でないならば, そのミラーを Borcea-Voisin 構成法により得る事ができる.)

(2) $X_{(S,\theta,T)}$ が例外型ならば, その任意の小変形は例外型 Borcea-Voisin 多様体である. 逆に, $X_{(S,\theta,T)}$ の任意の小変形が Borcea-Voisin 多様体ならば, $X_{(S,\theta,T)}$ は例外型か或は FHSV モデル（S/θ が Enriques 曲面になる場合）に限る.

事実 7.3 例外型Borcea-Voisin多様体に対して, 前節の条件(C1), (C2)を確かめる事ができる.

前節の観察と照らし合わせると, 例外型Borcea-Voisin多様体の場合にτ_{BCOV}に対応する保型形式を決定する事は興味ある問題である. BCOV予想に従えば, 対応する保型形式はモジュライ空間の尖点においてBorcherds型の無限積展開を持つはずである.

7.2. IV型領域

定義 7.4 符号$(2,n)$の格子Λ_nに付随するIV型領域を

$$\Omega_n := \{[\eta] \in \mathbf{P}(\Lambda_n \otimes \mathbf{C});\ \langle \eta, \eta \rangle = 0,\ \langle \eta, \bar{\eta} \rangle > 0\}^+$$

で定め, 対応する直交型モジュラー多様体を

$$\mathcal{M}_n := O^+(\Lambda_n) \backslash \Omega_n$$

で定める. ここで, $\{\}^+$は二つある連結成分から一つを選んだ事を意味し, $O^+(\Lambda_n)$は格子Λ_nの自己同型群の中で連結成分Ω_nを保つものから成る指数2の部分群である.

L_nは双曲型格子なので, その正錐

$$\{x \in L_n \otimes \mathbf{R};\ \langle x, x \rangle > 0\}$$

は二個の連結成分より成る. 以下の写像によりΩ_nと対応する正錐の成分を$\mathcal{C}_n$とする

$$L_n \otimes \mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_n \ni \omega \to \left[1 + \omega - \frac{\omega \wedge \omega}{2}\right] \in \Omega_n.$$

射影$\Omega_n \to \mathcal{M}_n$と合成する事により, この写像は直交型モジュラー多様体$\mathcal{M}_n$の管状領域による一意化を与える.

$$L_n \otimes \mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_n \to \mathcal{M}_n.$$

7.3. $L_n \otimes \mathbf{R} + i\,\mathcal{C}_n$上のBorcherds積

定義 7.5 管状領域$L_n \otimes \mathbf{R} + i\,W$上の形式的無限積$\Phi_n(z)$を以下の式で定める.

$$\Phi_n(z) := e^{\pi i \langle \varrho, z \rangle} \prod_{\alpha \cdot W > 0} \left(1 - e^{2\pi i \langle \alpha, z \rangle}\right)^{c^{(0)}_{10-n}(\alpha^2)} \prod_{\beta \cdot W > 0,\ \beta/2 \equiv \varrho/2 \bmod L_n} \left(1 - e^{\pi i \langle \beta, z \rangle}\right)^{c^{(1)}_{10-n}(\beta^2/4)}.$$

ここで, $W \subset \mathcal{C}_n$は双曲型格子L_nのWeyl部屋であり, $\varrho \in L_n \otimes \mathbf{Q}$はWeylベクトルである. また, 数列$\{c^{(0)}_k(\ell)\}_{\ell \in \mathbf{Z}}$, $\{c^{(1)}_k(\ell)\}_{\ell \in \mathbf{Z}+k/4}$は次の母関数により定義される.

$$\sum_{\ell \in \mathbf{Z}} c^{(0)}_k(\ell)\, q^\ell = \frac{\eta(2\tau)^8 \theta_{\mathbf{A}_1}(\tau)^k}{\eta(\tau)^8 \eta(4\tau)^8}, \qquad \sum_{\ell \in \frac{k}{4}+\mathbf{Z}} c^{(1)}_k(\ell)\, q^\ell = -8\, \frac{\eta(4\tau)^8 \theta_{\mathbf{A}_1+\frac{1}{2}}(\tau)^k}{\eta(2\tau)^{16}}.$$

但し,

$$\theta_{\mathbf{A}_1+\frac{\epsilon}{2}}(\tau) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{(n+\epsilon/2)^2}, \qquad \eta(\tau) := q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n)$$

はそれぞれJacobiのテータ関数とDedekind η-関数である.

Borcherdsの定理から, 以下の主張が従う.

定理 7.6 $\Phi_n(z)$ は $(\Im z)^2 \gg 0$ の時に絶対収束し, さらに $L_n \otimes \mathbf{R} + i\mathcal{C}_n$ 上の $O^+(\Lambda_n)$ に関する重さ $14-n$ の保型形式に解析接続される. $\Phi_n(z)$ の因子はノルム -1 の Heegner 因子

$$\operatorname{div}\Phi_n = \sum_{\delta\in\Lambda_n,\,\delta^2=-1} \delta^\perp \subset \Omega_n$$

で与えられる.

事実 7.7 例外型 Λ_n の Borcea-Voisin 多様体のモジュライ空間は局所対称空間（の Zariski 開集合）

$$(\mathcal{M}_n \backslash \bigcup_{\delta\in\Lambda_n,\,\delta^2=-1} \delta^\perp) \times (SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H})$$

に同型である. ここで, $\mathfrak{H}$ は複素上半平面である.

7.4. 例外型 Borcea-Voisin 多様体の場合の BCOV 不変量の明示公式

定理 7.8 (Y.[8]) $3 \le n \le 9$ ならば, $(\mathcal{M}_n \backslash \bigcup_{\delta\in\Lambda_n,\,\delta^2=-1} \delta^\perp) \times (SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H})$ 上の関数として次の等式が（定数の不定性を除いて）成り立つ.

$$\tau_{\mathrm{BCOV}} = \|\Phi_n \otimes \eta^{24}\|^2.$$

即ち, 任意の Λ_n 型 Borcea-Voisin 多様体 $X_{(S,\theta,T)}$ に対して,

$$\tau_{\mathrm{BCOV}}(X_{(S,\theta,T)}) = \|\Phi_n(\varpi(S,\theta))\|^2 \cdot \|\eta^{24}(\varpi(T))\|^2$$

が成り立つ. ここで, $\|\cdot\|$ は Petersson ノルムを表し, $\varpi(S,\theta)$ と $\varpi(T)$ はそれぞれ (S,θ) と T の周期である.

この定理から, Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa が予想する様に, τ_{BCOV} は無限積として表される事がわかる. 無限積 $\Phi_n(z)$ の指数が或る多様体のインスタントン数（或は Gromov-Witten 不変量等の数え上げ不変量）に一致するかどうか, 筆者は知らない. それが示されれば, 例外型 Borcea-Voisin 多様体に対してミラー対称性が検証された事になり, 素晴しい. しかし, $X_{(S,\theta,T)}$ は例外型なので, そのミラーは Calabi-Yau 多様体ではないかもしれない. 例外型 Borcea-Voisin 多様体 $X_{(S,\theta,T)}$ のミラーは何であろうか？

$\Phi_n(z)$ の Fourier 級数展開が Gritsenko [5] により決定された. $\Phi_n(z)$ は或る一般化された Kac-Moody 超代数の分母関数になる事が示されるが [8], Gritsenko の結果はその超代数の生成元と関係式系が具体的に書き下せる事を意味する. 保型形式の重さが特異でない場合, 無限積展開と Fourier 級数展開の両方が書き下せる事は稀である.

参考文献

[1] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. *Holomorphic anomalies in topological field theories*, Nuclear Phys. B **405** (1993), 279–304.

[2] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 311–427.

[3] Cox, D.A., Katz S. *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Amer. Math. Soc. Providence (1999)

[4] Fang, H., Lu, Z., Yoshikawa, K.-I. *Analytic torsion for Calabi–Yau threefolds*, J. Differential Geom. **80** (2008), 175–259.

[5] Gritsenko, V. *Reflective modular forms in algebraic geometry*, preprint, arXiv:1005.3753v1 (2010)

[6] Gross, M., Huybrechts, D., Joyce, D. *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Universitext, Springer (2003).

[7] Morrison, D. *Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry*, Astérisque **218** (1993), 243–271.

[8] Yoshikawa, K.-I. *Calabi–Yau threefolds of Borcea–Voisin, analytic torsion, and Borcherds products*, Astérisque **328** (2009), 355–393

[9] Zinger, A. *The reduced genus* 1 *Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau hypersurfaces*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 691–737.