

# 複雑な系の上の異常拡散現象の解析

熊谷 隆

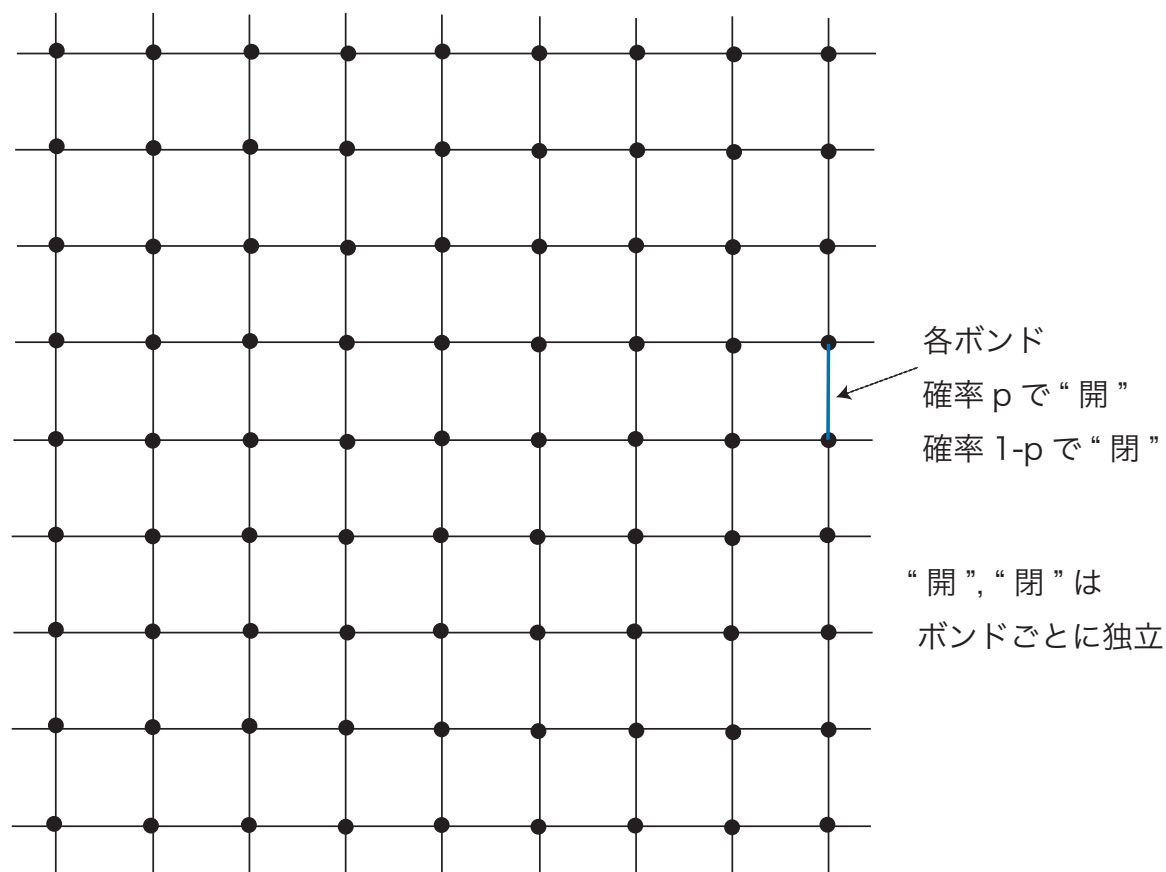
(京都大学数理解析研究所)

9月15日

日本数学会秋季総合分科会 (関西大学)

# 1 序

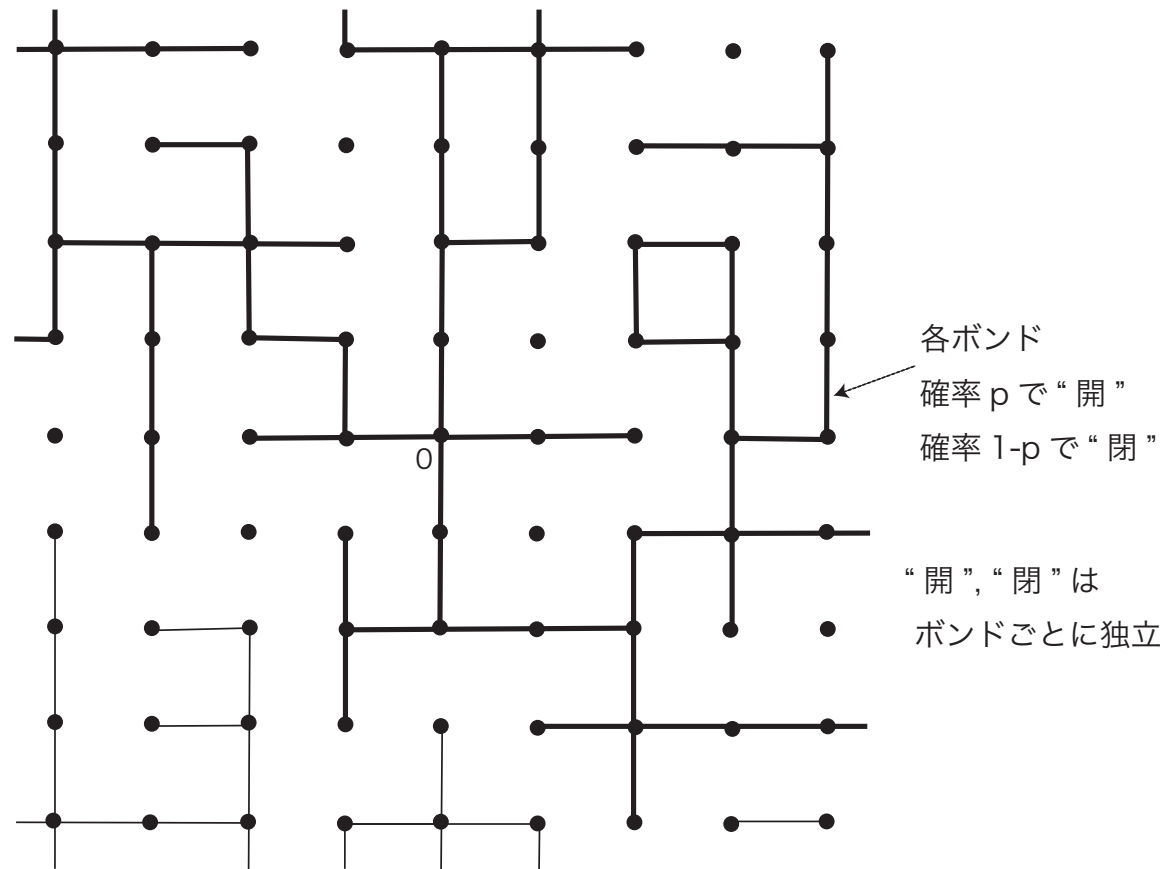
$\mathbb{Z}^d$  上のボンドパーコレーション ( $d \geq 2$ )



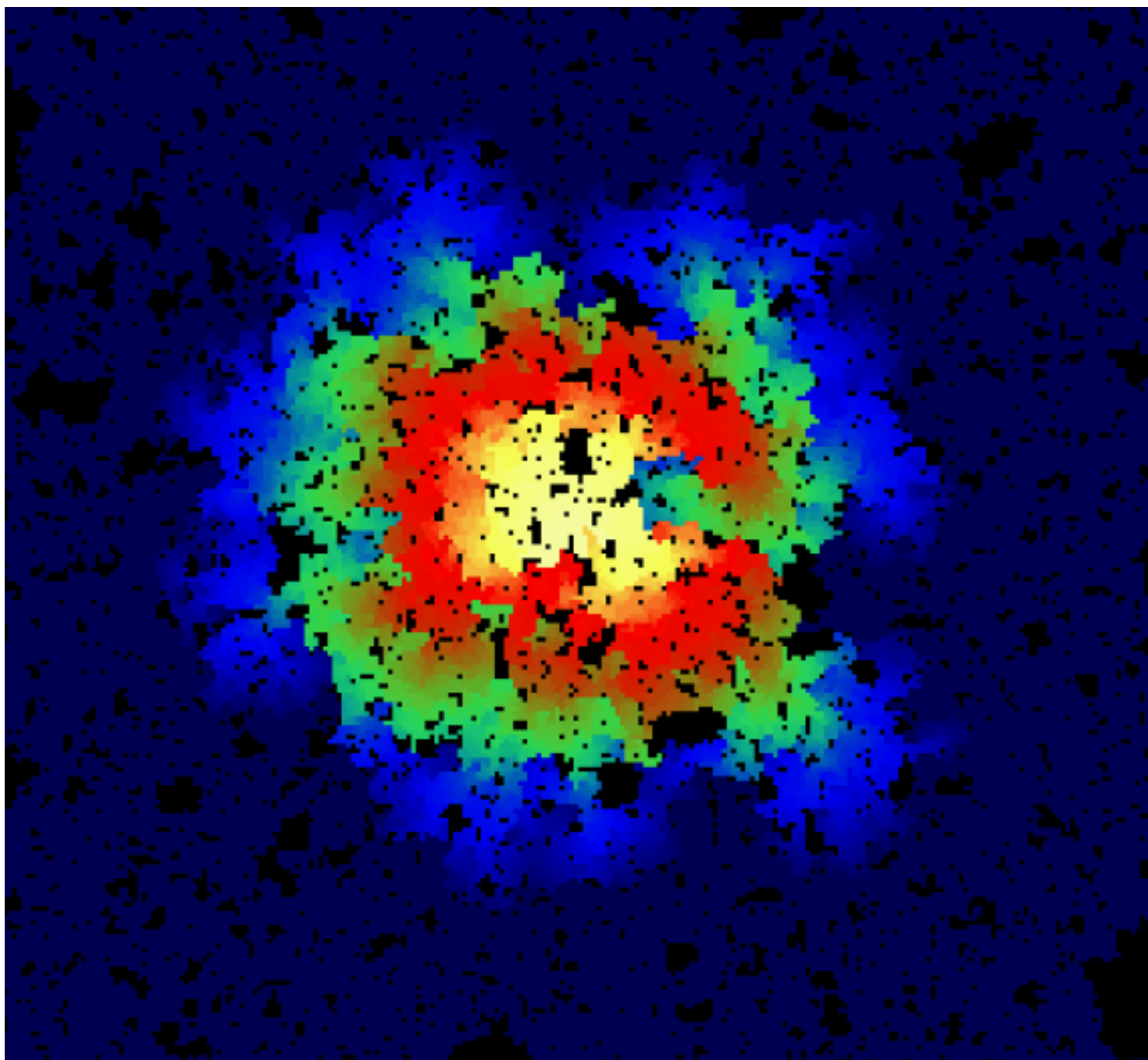
$\exists p_c \in (0, 1) : p > p_c$  で無限クラスター 1 つ、 $p < p_c$  では無限クラスターなし

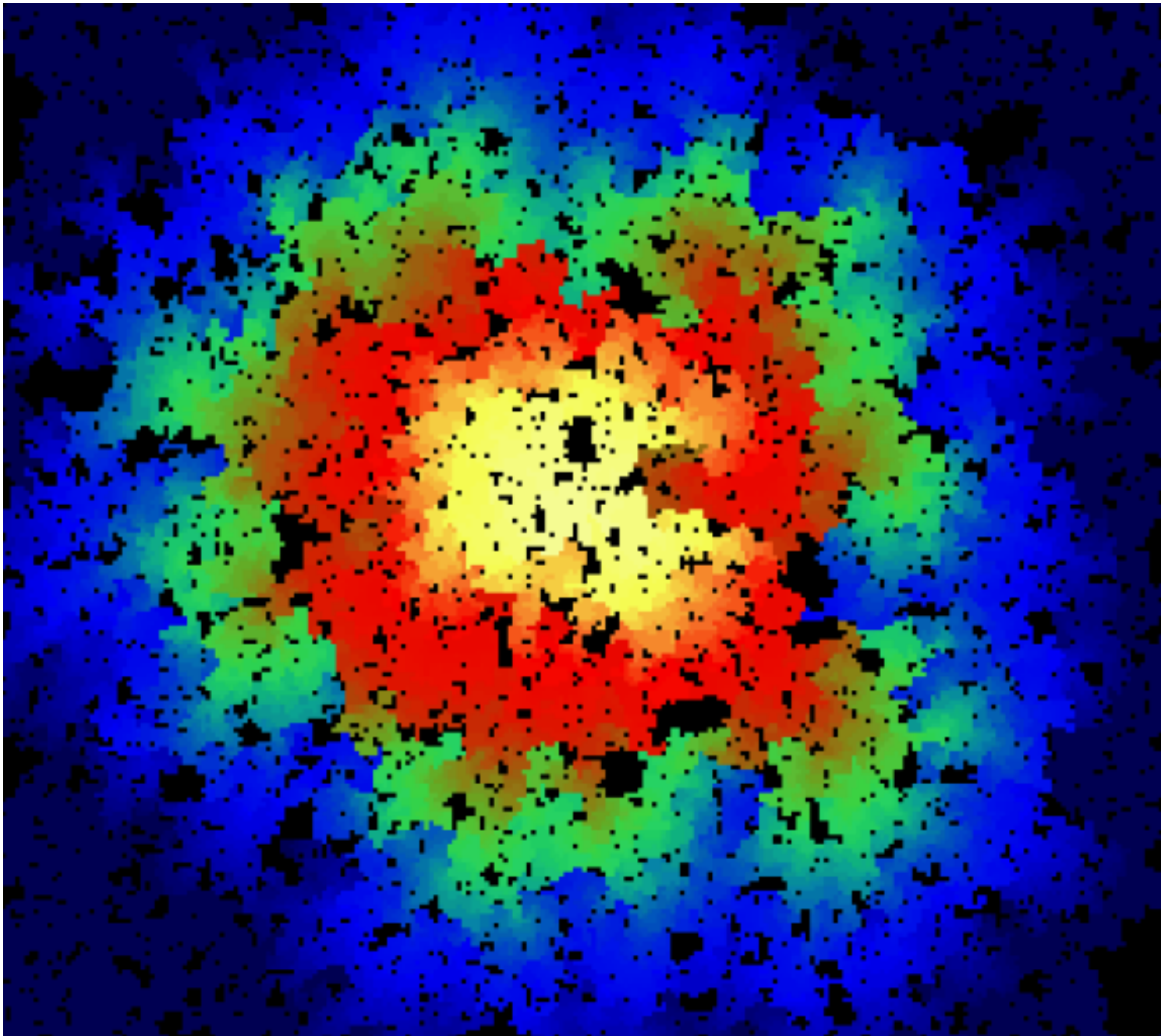
# 1 序

## $\mathbb{Z}^d$ 上のボンドパーコレーション ( $d \geq 2$ )



$\exists p_c \in (0, 1) : p > p_c$  で無限クラスター 1 つ、 $p < p_c$  では無限クラスターなし





臨界確率におけるランダムウォークの異常拡散

$$p_n^\omega(x, y) := P_\omega^x(Y_n = y) / \mu_y \text{ とおく}$$

$$d_s = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \log p_{2n}^\omega(x, x) / \log n : \text{スペクトル次元}$$

Alexander-Orbach 予想 ('82 [2])

$$d \geq 2 \Rightarrow d_s = 4/3$$

Cf.  $\mathbb{Z}^d$  上のランダムウォーク :  $p_{2n}(x, x) \asymp n^{-d/2}$  故  $d_s = d$

## 動機と簡単な歴史

### 複雑な系におけるランダムウォーク (RW) や拡散過程の異常拡散の解析

1960年代後半からの数理物理学者の仕事

本：Ben-Avraham and S. Havlin [19]

熱伝導や波動伝播の詳細な解析

- 複雑なネットワーク ⇒ フラクタル上のランダムウォーク Rammal-Toulouse ('83)
- 臨界確率における ランダム媒質 (パーコレーションクラスターなど)

De Gennes [29] 「迷路の中のアリ」

## 動機と簡単な歴史

### 複雑な系におけるランダムウォーク (RW) や拡散過程の異常拡散の解析

1960年代後半からの数理物理学者の仕事

本：Ben-Avraham and S. Havlin [19]

熱伝導や波動伝播の詳細な解析

- 複雑なネットワーク ⇒ フラクタル上のランダムウォーク Rammal-Toulouse ('83)
- 臨界確率における ランダム媒質 (パーコレーションクラスターなど)

De Gennes [29] 「迷路の中のアリ」

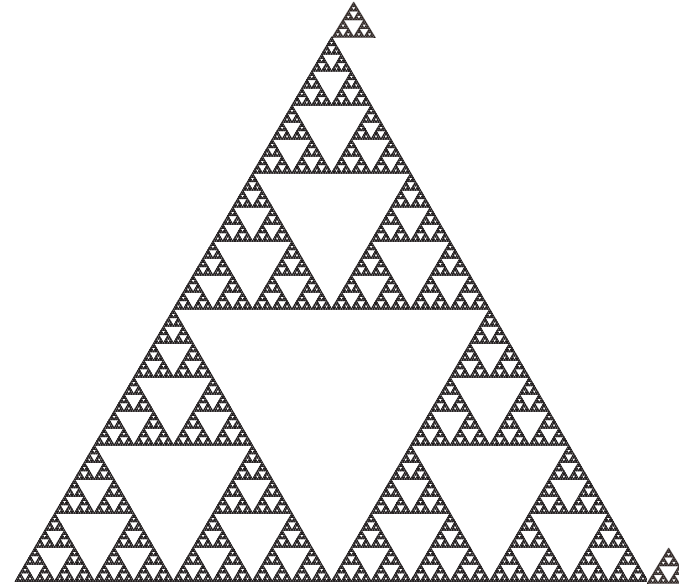
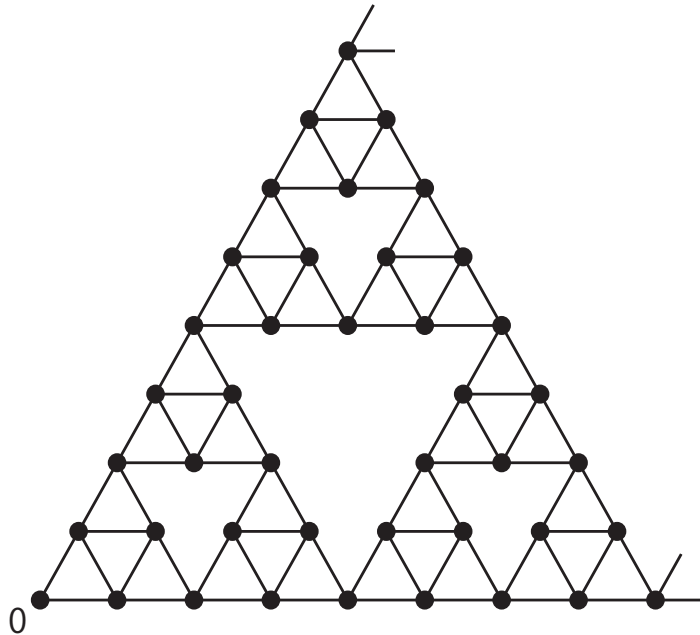
⇒ 80年代後半：Kesten [43,44] 臨界確率パーコレーション上のRWの異常拡散

⇒ フラクタル上の確率過程 / 解析学 (フラクタルは“理想的な”複雑系)

⇒ 安定性理論、大域解析 ⇒ ランダム媒質への応用

パーコレーションクラスター, エルデシュ・レーニイランダムグラフ, 一様全域木



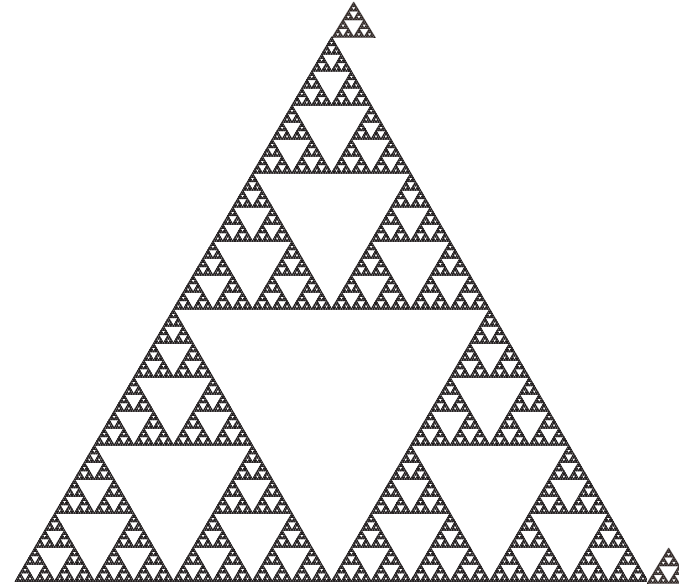
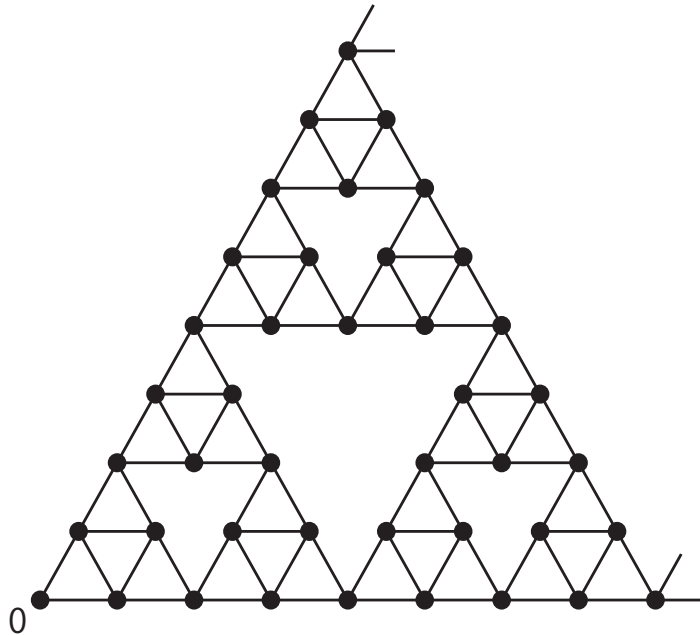


## 2 フラクタル上の異常拡散

$G$  : ガスケットグラフ (左図)、  $M$  : シェルピンスキーガスケット (右図)

$\{Y(n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  :  $G$  上の単純ランダムウォーク (SRW)

$$2^{-n}Y([\bullet t]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ??$$



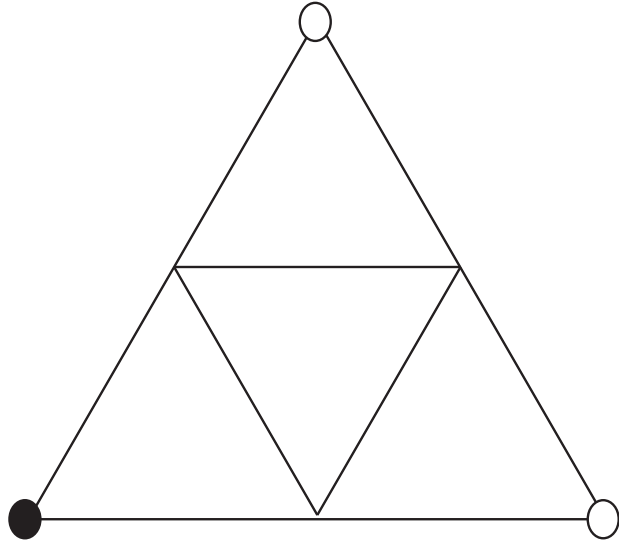
## 2 フラクタル上の異常拡散

$G$  : ガスケットグラフ (左図)、  $M$  : シェルピンスキーガスケット (右図)

$\{Y(n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  :  $G$  上の単純ランダムウォーク (SRW)

$2^{-n}Y([5^n t]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B_t$  :  $M$  上の **ブラウン運動** [Goldstein '87, 楠岡 '87]

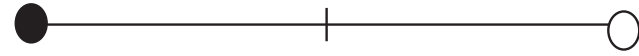
$\Delta f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left( \frac{1}{4} \sum_{x_i \stackrel{n}{\sim} x} f(x_i) - f(x) \right)$  :  $M$  上の **ラプラス作用素** [木上 '89]



$$E^\bullet[\sigma_\circ] = 5$$

$$2^{-n}Y([5^n t])$$

Cf.



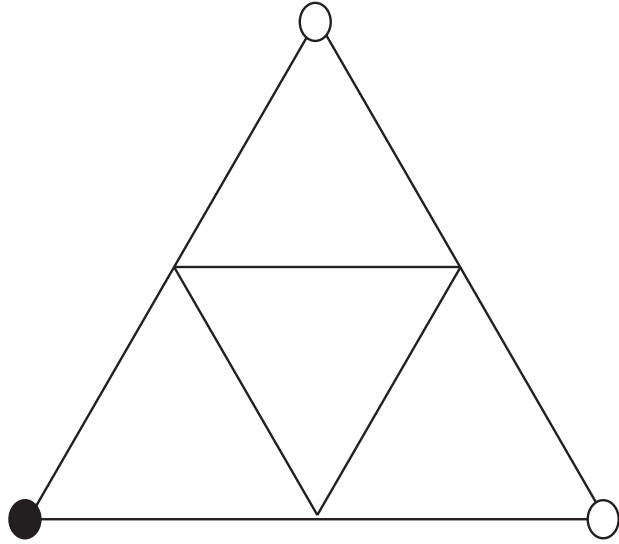
$$E^\bullet[\sigma_\circ] = 4$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} B_t : M \text{ 上のブラウン運動}$$

Cf.  $\mathbb{R}_+$  上の不変原理  $\{\tilde{Y}(i)\}$ : SRW on  $\mathbb{Z}_+$

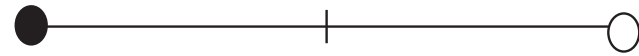
$$2^{-n}\tilde{Y}([4^n t])$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} B_t : \mathbb{R}_+ \text{ 上のブラウン運動}$$



$$E^\bullet[\sigma_\circ] = 5$$

Cf.



$$E^\bullet[\sigma_\circ] = 4$$

$$2^{-n}Y([5^n t]) = 2^{-n}Y([2^{d_w n} t]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B_t : M \text{ 上のブラウン運動}$$

$$d_w = \log 5 / \log 2 > 2 : \text{ウォーク次元}$$

Cf.  $\mathbb{R}_+$  上の不変原理  $\{\tilde{Y}(i)\}$ : SRW on  $\mathbb{Z}_+$

$$2^{-n}\tilde{Y}([4^n t]) = 2^{-n}\tilde{Y}([2^{2n} t]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B_t : \mathbb{R}_+ \text{ 上のブラウン運動}$$

定理 2.1 [Barlow-Perkins [18]] 劣ガウス型熱核評価 (HK( $d_w$ ))

$\exists p_t(x, y)$ : 連続な熱核 (HK) w.r.t.  $\mu$  (ハウスドルフ測度)

$(P_t f(x) := E^x[f(B(t))] = \int_M p_t(x, y) f(y) \mu(dy) \forall x \in M, \frac{\partial}{\partial t} p_t(x_0, x) = \Delta p_t(x_0, x) )$  s.t.

$$c_1 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_2 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right) \leq p_t(x, y) \leq c_3 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_4 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right).$$

$d_f := \log 3 / \log 2$  : ハウスドルフ次元、 $d_s = 2 \log 3 / \log 5 < 2$  : スペクトル次元

$d_s/2 = d_f/d_w$ : アインシュタイン関係 (Cf. BM on  $\mathbb{R}^d$ :  $d_s = d_f = d, d_w = 2$ .)

定理 2.1 [Barlow-Perkins [18]] 劣ガウス型熱核評価 (HK( $d_w$ ))

$\exists p_t(x, y)$ : 連続な熱核 (HK) w.r.t.  $\mu$  (ハウスドルフ測度)

( $P_t f(x) := E^x[f(B(t))] = \int_M p_t(x, y) f(y) \mu(dy) \forall x \in M, \frac{\partial}{\partial t} p_t(x_0, x) = \Delta p_t(x_0, x)$ ) s.t.

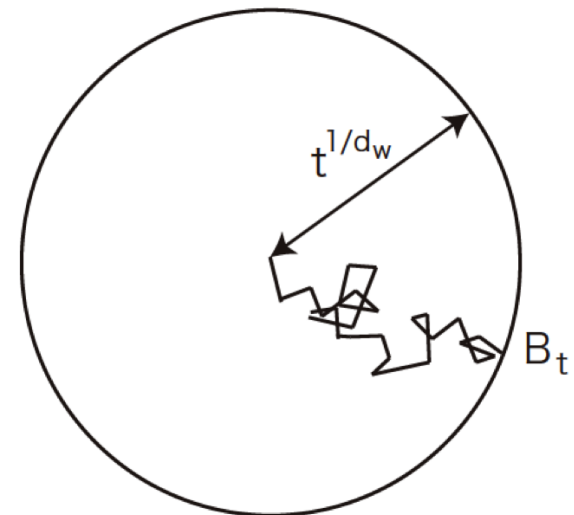
$$c_1 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_2 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right) \leq p_t(x, y) \leq c_3 t^{-d_s/2} \exp\left(-c_4 \left(\frac{d(x, y)^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right).$$

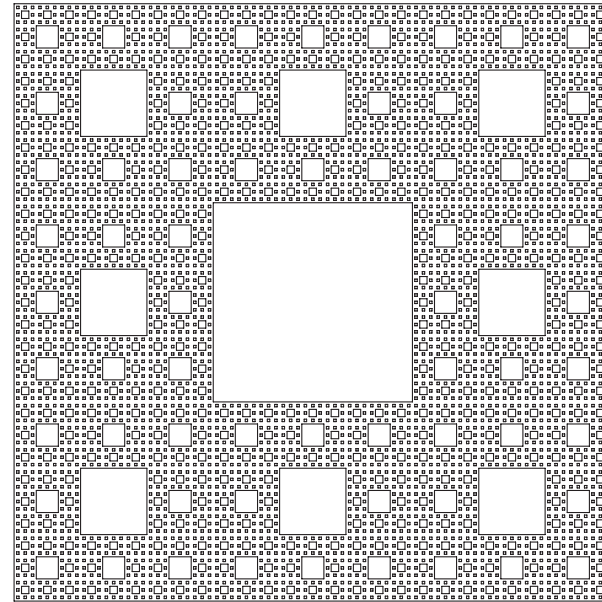
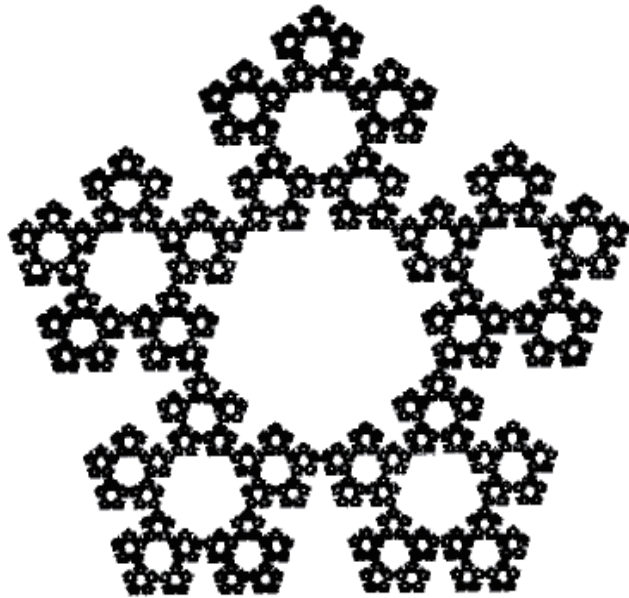
$d_f := \log 3 / \log 2$  : ハウスドルフ次元、 $d_s = 2 \log 3 / \log 5 < 2$  : スペクトル次元

$d_s/2 = d_f/d_w$ : アインシュタイン関係 (Cf. BM on  $\mathbb{R}^d$ :  $d_s = d_f = d, d_w = 2$ .)

(HK( $d_w$ )) から様々な性質が導き出せる！

- $c_1 t^{1/d_w} \leq E^0[d(0, B_t)] \leq c_2 t^{1/d_w}$  ( $d_w > 2$ , 劣拡散的)
- 調和関数や熱方程式の解のヘルダー連続性
- グリーン関数の評価    • 重複対数の法則 など





ブラウン運動の構成や熱核評価 (HK ( $d_w$ )) : 様々なフラクタルでなされてきた

( $d_f, d_w, d_s$  はフラクタルに依存する)

[福島-島 '92] 固有値増大度の解析 (ラプラス作用素のスペクトルの挙動)

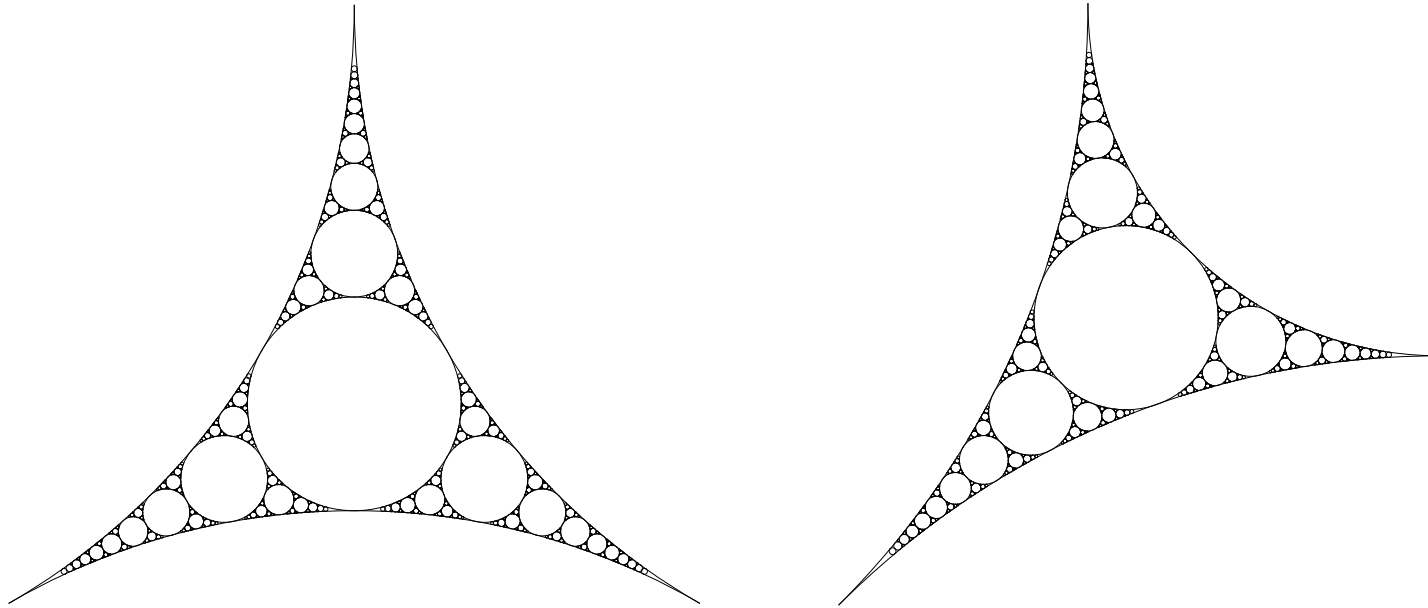
⇒ ディリクレ形式の理論の有用性

## フラクタル上の確率過程・解析学

様々な切り口から重要な研究が進んでいる。

- フラクタル上の測度論的リーマン構造 (木上、梶野、日野ら [41,46] 等)
- 指数、マルチンゲール次元の解析 (楠岡、日野ら [37,38,53] 等)
- アポロニウスのガスケット上の拡散過程とその性質 (梶野：次のスライド)
- フラクタル上の自己回避ウォーク、ループ除去ランダムウォーク  
(服部 (哲)、服部 (久)、楠岡ら [34,35] 等)





Pictures by N. Kajino.

## アポロニウスのガスケット上の拡散過程とその性質

$K_{\alpha,\beta,\gamma}$  : アポロニウスのガスケット ( $\alpha, \beta, \gamma$  は円の半径)

ガスケットと同相、 $d = \dim_H K_{\alpha,\beta,\gamma} \approx 1.305688$  (McMullen '98)

- [梶野 [42]]  $K_{\alpha,\beta,\gamma}$  上に自然な **ディリクレ形式** が構成でき、以下が成立。

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x^{-d/2} \#\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n^{\alpha,\beta,\gamma} \leq x\} = c\mathcal{H}_d(K_{\alpha,\beta,\gamma}) \quad (\{\lambda_n^{\alpha,\beta,\gamma}\}_n : \text{固有値})$$

### 3 放物型ハルナック不等式と劣ガウス型評価の摂動安定性

シェルピンスキーガスケットは“理想的すぎる”

(Q) 熱核評価は摂動安定性をもつか？

古典に帰ろう。

[Aronson '67]  $\mathcal{L} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j})$  on  $\mathbb{R}^d$ : 対称かつ一様楕円

(つまり  $c_1 I \leq A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j} \leq c_2 I$ )  $\Rightarrow$  (HK(2)) 成立。

$$c_1 t^{-d/2} \exp(-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}) \leq p_t(x, y) \leq c_3 t^{-d/2} \exp(-c_4 \frac{|x-y|^2}{t}). \quad (HK(2))$$

[Li-Yau '86]  $M$ : 非コンパクトリーマン多様体 Ricci  $\geq 0$ ,

$\Delta$ : ラプラス・ベルトラミ作用素  $\Rightarrow$  (HK(2)) 成立。

古典に帰ろう。

[Aronson '67]  $\mathcal{L} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j})$  on  $\mathbb{R}^d$ : 対称かつ一様楕円

(つまり  $c_1 I \leq A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j} \leq c_2 I$ )  $\Rightarrow$  (HK(2)) 成立。

$$c_1 t^{-d/2} \exp\left(-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}\right) \leq p_t(x, y) \leq c_3 t^{-d/2} \exp\left(-c_4 \frac{|x-y|^2}{t}\right). \quad (HK(2))$$

[Li-Yau '86]  $M$ : 非コンパクトリーマン多様体 Ricci  $\geq 0$ ,

$\Delta$ : ラプラス・ベルトラミ作用素  $\Rightarrow$  (HK(2)) 成立。

### (Q): (HK(2)) の安定性

ディリクレ形式  $\mathcal{E}(f, f) = - \int_M f(x) \mathcal{L} f(x) dx$  の熱核が (HK(2)) を満たし

$\mathcal{E}'(f, f) \asymp \mathcal{E}(f, f) \quad \forall f$  とする。この時  $\mathcal{E}'$  の熱核は (HK(2)) を満たすか?

$\Rightarrow$  YES! 次ページの、(HK(2)) の特徴づけによる。

$(M, d, \mu)$ : 測度付き距離空間  $\mathcal{E}$ :  $L^2(M, \mu)$  上の‘よい’ディリクレ形式

[Grigor'yan '92, Saloff-Coste '92, Sturm '96, Delmotte '99]

$$(VD) + (PI(2)) \Leftrightarrow (PHI(2)) \Leftrightarrow (HK(2)).$$

- (VD): 体積増大条件

$$\mu(B(x, 2R)) \leq c_1 \mu(B(x, R)) \quad \forall x \in M, R > 0.$$

- (PI(2)): スケールポアンカレ不等式  $\forall B_R = B(x_0, R), R > 0$

$$\int_{B_R} (f(x) - \bar{f}_{B_R})^2 \mu(dx) \leq c_1 R^2 \mathcal{E}_{B_R}(f, f), \quad \forall f$$

ただし  $\bar{f}_B = \mu(B)^{-1} \int_B f(x) \mu(dx)$ .

- (PHI(2)): 指数2の放物型ハルナック不等式 (熱方程式の解の‘よい’性質)

定理 3.1 [Barlow-Bass [10], Barlow-Bass-K [11], Andres-Barlow [3]]

$$(VD) + (PI(\beta)) + (CS(\beta)) \Leftrightarrow (PHI(\beta)) \Leftrightarrow (HK(\beta)).$$

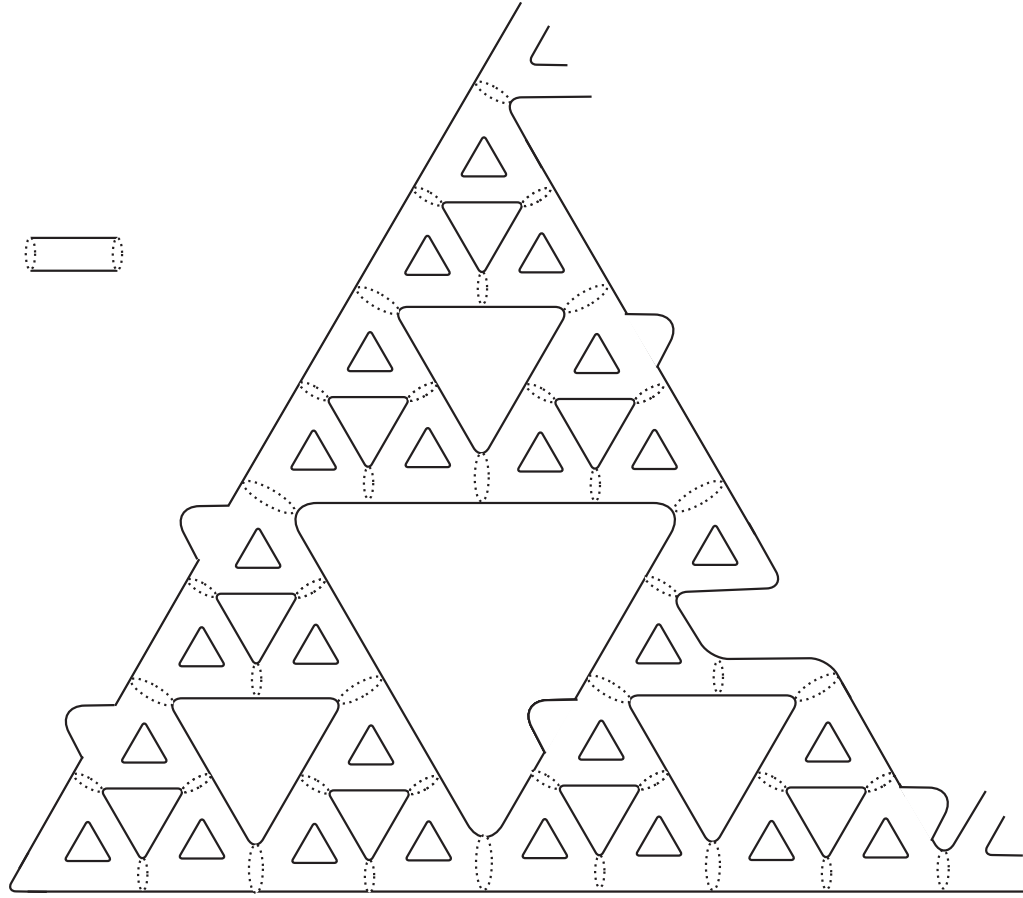
(CS ( $\beta$ )): 指数  $\beta$  のカットオフ-ソボレフ不等式 注意: (CS(2)) は常に成立

$$\frac{c_1}{\mu(B(x, t^{1/\beta}))} \exp\left(-c_2\left(\frac{d(x, y)^\beta}{t}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right) \leq p_t(x, y) \leq \frac{c_3}{\mu(B(x, t^{1/\beta}))} \exp\left(-c_4\left(\frac{d(x, y)^\beta}{t}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right). \quad (HK(\beta))$$

注意: ガスケットの場合:  $\beta = d_w = \log 5 / \log 2$ ,  $\mu(B(x, t^{1/\beta})) = t^{d_f/d_w} = t^{d_s/2}$ .

[ $s^\beta$  を  $1_{\{s \leq 1\}}s^{\beta_1} + 1_{\{s > 1\}}s^{\beta_2}$  としても成立する]

$\Rightarrow$  (HK( $\beta$ )) の摂動安定性が示された。



フラクタル的多样体

定理 3.1 [Barlow-Bass [10], Barlow-Bass-K [11], Andres-Barlow [3]]

$$(VD) + (PI(\beta)) + (CS(\beta)) \Leftrightarrow (PHI(\beta)) \Leftrightarrow (HK(\beta)).$$

(CS ( $\beta$ )): 指数  $\beta$  のカットオフ-ソボレフ不等式 注意: (CS(2)) は常に成立

$$\frac{c_1}{\mu(B(x, t^{1/\beta}))} \exp\left(-c_2\left(\frac{d(x, y)^\beta}{t}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right) \leq p_t(x, y) \leq \frac{c_3}{\mu(B(x, t^{1/\beta}))} \exp\left(-c_4\left(\frac{d(x, y)^\beta}{t}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right). \quad (HK(\beta))$$

注意: ガスケットの場合:  $\beta = d_w = \log 5 / \log 2$ ,  $\mu(B(x, t^{1/\beta})) = t^{d_f/d_w} = t^{d_s/2}$ .

$\Rightarrow$  (HK( $\beta$ )) の摂動安定性が示された。

しかし (CS ( $\beta$ )) は検証が難しい! **Open Prob.** 簡単な同値条件を与えよ。

強再帰的な場合: より簡単な同値条件あり [Barlow-Coullhon-K '05]

$\Rightarrow$  ランダム媒質への応用

注意: 飛躍型確率過程 (非局所作用素) の安定性理論が進展中 ([24] 等)

$\Rightarrow$  長距離相関を持つランダム媒質上の確率過程の研究への応用を目指す

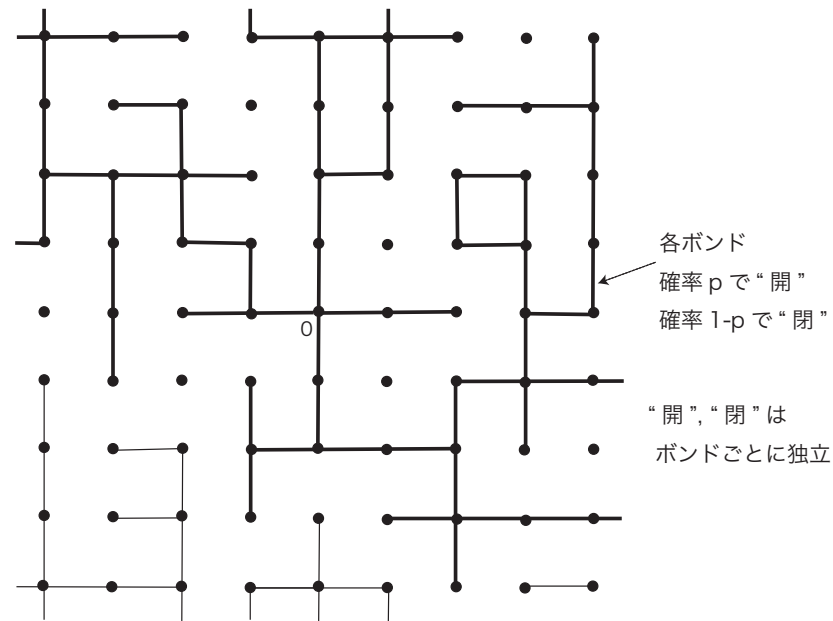


## 4 パーコレーションクラスター上のランダムウォーク

### 4.1 優臨界確率の場合

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : ランダム媒質の確率空間,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\omega)$ : 無限クラスター

$\{Y_n^\omega\}_{n \geq 0}$ : SRW on  $\mathcal{G}(\omega)$   $p_n^\omega(x, y) := P_\omega^x(Y_n = y) / \mu_y$ . ( $\mu_y$ :  $y$ を含むボンドの数)



## 4 パーコレーションクラスター上のランダムウォーク

### 4.1 優臨界確率の場合

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : ランダム媒質の確率空間,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\omega)$ : 無限クラスター

$\{Y_n^\omega\}_{n \geq 0}$ : SRW on  $\mathcal{G}(\omega)$   $p_n^\omega(x, y) := P_\omega^x(Y_n = y) / \mu_y$ . ( $\mu_y$ :  $y$  を含むボンドの数)

媒質は ‘一様楕円’ ではないが、長時間挙動は異常拡散ではない！

定理 4.1 [Barlow [8]] (ガウス型熱核評価)

(HK(2)) が  $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$  for  $n \geq cd(x, y) \vee \exists U_x, x, y \in \mathcal{G}(\omega)$  で成立。

$$c_1 n^{-d/2} \exp\left(-c_2 \frac{|x-y|^2}{n}\right) \leq p_{2n}(x, y) \leq c_3 n^{-d/2} \exp\left(-c_4 \frac{|x-y|^2}{n}\right). \quad (HK(2))$$

## 4 パーコレーションクラスター上のランダムウォーク

### 4.1 優臨界確率の場合

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : ランダム媒質の確率空間,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\omega)$ : 無限クラスター

$\{Y_n^\omega\}_{n \geq 0}$ : SRW on  $\mathcal{G}(\omega)$   $p_n^\omega(x, y) := P_\omega^x(Y_n = y) / \mu_y$ . ( $\mu_y$ :  $y$  を含むボンドの数)

定理 4.1 [Barlow [8]] (HK(2)) が  $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$  for  $n \geq cd(x, y) \vee \exists U_x, x, y \in \mathcal{G}(\omega)$  で成立。

定理 4.2 [Sidoravicius-Sznitman [60], Berger-Biskup [21], Mathieu-Piatnitski. [57]]

(個別不変定理)  $n^{-1}Y_{[n^2t]}^\omega \rightarrow B_{\sigma t}$   $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$  for  $\exists \sigma > 0$

– Cf. 平均不変定理は80年代から知られている。

[Kipnis-Varadhan '86, De Masi-Ferrari-Goldstein-Wick '89 ( $\sigma > 0$ )]

$\Rightarrow$  より一般のランダムコンダクタンスモデルへの拡張: Andres-Deuschel-Slowik 等

## 4 パーコレーションクラスター上のランダムウォーク

### 4.1 優臨界確率の場合

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : ランダム媒質の確率空間,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\omega)$ : 無限クラスター

$\{Y_n^\omega\}_{n \geq 0}$ : SRW on  $\mathcal{G}(\omega)$   $p_n^\omega(x, y) := P_\omega^x(Y_n = y) / \mu_y$ . ( $\mu_y$ :  $y$  を含むボンドの数)

定理 4.1 [Barlow [8]] (HK(2)) が  $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$  for  $n \geq c d(x, y) \vee \exists U_x, x, y \in \mathcal{G}(\omega)$  で成立。

定理 4.2 [Sidoravicius-Sznitman [60], Berger-Biskup [21], Mathieu-Piatnitski. [57]]

(個別不変定理)  $n^{-1} Y_{[n^2 t]}^\omega \rightarrow B_{\sigma t}$   $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$  for  $\exists \sigma > 0$

– Cf. 平均不変定理は80年代から知られている。

[Kipnis-Varadhan '86, De Masi-Ferrari-Goldstein-Wick '89 ( $\sigma > 0$ )]

- 通常のRWとの違い:  $\mathcal{C}^n$  のRWの被覆時間  $\asymp n^d (\log n)^2$ ,  $\mathbb{P}$ -a.e. [阿部[1]]

cf. トーラス  $(-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$  上のRWでは  $d \geq 3$  で  $\asymp n^d \log n$

## 4.2 臨界確率の場合

$\mathbb{Z}^d$  上のパーコレーションで  $d > 6$  の時 (厳密に示されているのは  $d \geq 11$  の時)

$\mathcal{C}(0)$  を、0 を含む開いたボンドによる連結成分 (ランダム媒質)

$p = p_c$  では、確率1で  $\mathcal{C}(0)$  は有限集合！

(他方、サイズ  $N$  のボックス内に高い確率でオーダー  $N$  の開クラスターがある)

## 4.2 臨界確率の場合

$\mathbb{Z}^d$  上のパーコレーションで  $d > 6$  の時 (厳密に示されているのは  $d \geq 11$  の時)

$\mathcal{C}(0)$  を、0 を含む開いたボンドによる連結成分 (ランダム媒質)

$p = p_c$  では、**確率1で  $\mathcal{C}(0)$  は有限集合!**

(他方、サイズ  $N$  のボックス内に高い確率でオーダー  $N$  の開クラスターがある)

⇒ Incipient infinite cluster (IIC) を考える。  $\mathbb{P}_{\text{IIC}}(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{p_c}(\cdot | 0 \leftrightarrow \partial B(0, n))$

(つまり、臨界確率で  $|\mathcal{C}(0)| = \infty$  と条件付ける。)

大きな有限開クラスターの局所的な性質は、

クラスターを IIC の部分集合とみなすことで捉えられるだろう!

([van der Hofstad-Járai '04] IIC の存在を示した。)

$(\mathcal{G}(\omega), \omega \in \Omega)$ : IIC,  $\{Y_n^\omega\}_{n \geq 0}$ : SRW on  $\mathcal{G}(\omega)$

定理 4.3 (パーコレーション  $d \geq 15$  [Kozma-Nachmias [48]] )

$\exists a_1, a_2 \geq 0$  以下が成立。

$$(i) \quad (\log n)^{-a_1} n^{-2/3} \leq p_{2n}^\omega(x, x) \leq (\log n)^{a_1} n^{-2/3}, \quad \text{for large } n, \quad \mathbb{P} - a.s.$$

特に  $d_s(G(\omega)) = \frac{4}{3}$ ,  $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$  (Alexander-Orbach 予想の解決).

$$(ii) \quad (\log R)^{-\alpha_2} R^3 \leq E_\omega^x \tau_{B(0,R)} \leq (\log R)^{\alpha_2} R^3, \quad \text{for large } R, \quad \mathbb{P} - a.s.,$$

ただし  $\tau_A := \inf\{n \geq 0 : Y_n^\omega \notin A\}$

なぜ  $2/3$  なのか?

ランダム媒質上の熱核評価: 体積増大度 + 抵抗の評価  $\Rightarrow$  熱核評価

$(\mathcal{G}(\omega), \omega \in \Omega)$ : ランダムグラフ on  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\exists 0 \in \Omega$ ,  $D \geq 1$ .

$R, \lambda \geq 1$  に対し、 $B(0, R)$  が  $\lambda$ -good とは以下が成り立つこと。

$$\frac{R^D}{\lambda} \leq |B(0, R)| \leq \lambda R^D, \quad \frac{R}{\lambda} \leq R_{\text{eff}}(0, B(0, R)^c) \leq R.$$



ランダム媒質上の熱核評価: 体積増大度 + 抵抗の評価  $\Rightarrow$  熱核評価

$(\mathcal{G}(\omega), \omega \in \Omega)$ : ランダムグラフ on  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\exists 0 \in \Omega$ ,  $D \geq 1$ .

$R, \lambda \geq 1$  に対し、 $B(0, R)$  が  $\lambda$ -good とは以下が成り立つこと。

$$\frac{R^D}{\lambda} \leq |B(0, R)| \leq \lambda R^D, \quad \frac{R}{\lambda} \leq R_{\text{eff}}(0, B(0, R)^c) \leq R.$$

定理 4.4 [Barlow-Járai-K-Slade [15], K-三角 [51]]

$\exists q_0$  s.t.  $\mathbb{P}(\{\omega : B(0, R) \text{ is } \lambda\text{-good}\}) \geq 1 - \lambda^{-q_0}$ , for large  $R, \lambda$  — (\*).

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$  s.t. for  $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$ ,  $x \in \mathcal{G}(\omega)$ ,  $\exists N_x(\omega), R_x(\omega) \in \mathbb{N}$  以下が成立。

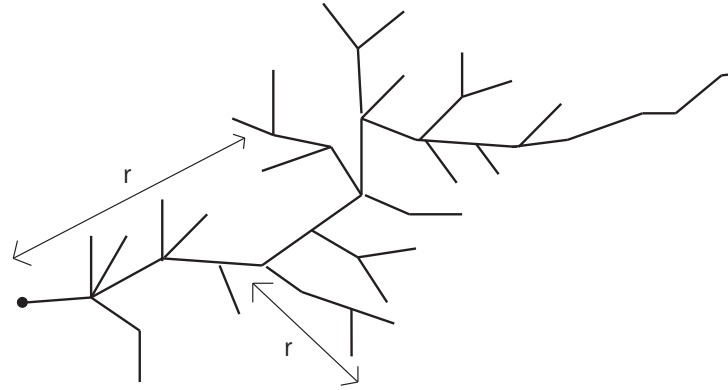
$$(i) \quad (\log n)^{-\alpha_1} n^{-\frac{D}{D+1}} \leq p_{2n}^\omega(x, x) \leq (\log n)^{\alpha_1} n^{-\frac{D}{D+1}} \quad \text{for } n \geq N_x(\omega),$$

$$(ii) \quad (\log R)^{-\alpha_2} R^{D+1} \leq E_\omega^x \tau_{B(0, R)} \leq (\log R)^{\alpha_2} R^{D+1} \quad \text{for } n \geq R_x(\omega).$$

特に  $d_s(\mathcal{G}(\omega)) = \frac{2D}{D+1} < 2$ ,  $\mathbb{P}$ -a.s.  $\omega$  で、ランダムウォークは再帰的。

高次元パーコレーションのIICは、(\*)を  $D = 2$  で満たす。

**Open Prob.**  $d_s \geq 2$  の場合に同様の結果を導き出せ。



分枝過程の木の IIC:  $D = 2$

その他の例： (I)  $D = 2$  and  $d_s = 4/3$

- 分枝過程の木の IIC Kesten [44], [Barlow-K [16]] ( $\mathbb{P}$ -a.s.)
- 散開有向パーコレーション  $d \geq 6$  [Barlow-Jarai-K-Slade [15]]
- 正則木インベーションパーコレーション [Angel-Goodman-den Hollander-Slade [6]]

(II)  $\alpha$ -安定分枝過程の木の IIC [Croydon-K '08]  $D = \alpha/(\alpha - 1)$ ,  $d_s = 2\alpha/(2\alpha - 1)$

(III) 二次元一様全域木 [Barlow-Masson [17]]  $D = 8/5 = 2/(5/4)$ ,  $d_s = 13/5$

## 低次元のモデル

- 二次元の臨界確率パーコレーションのIIC上のRW [Kesten [43,44]]

$\exists \epsilon > 0$  s.t.  $n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}d(0, Y_n)$  の  $\mathbb{P}$ -分布が緊密 (劣拡散的な挙動)

[Damron-Hanson-Sosoe '13]  $\tau_{B(0,n)} \geq n^{2+\epsilon}$  for large  $n$ ,  $\mathbb{P}$ -a.s. and a.e. RWパス

注意: A-O予想は  $d \leq 5$  では成立しない と考えられている。

数値シミュレーション:  $d = 5 \Rightarrow d_s = 1.34 \pm 0.02, \dots, d = 2 \Rightarrow d_s = 1.318 \pm 0.001$

**Open Prob.** 低次元で Alexander-Orbach 予想を否定的に解決せよ。

## 低次元のモデル

- 二次元の臨界確率パーコレーションのIIC上のRW [Kesten [43,44]]

$\exists \epsilon > 0$  s.t.  $n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}d(0, Y_n)$  の  $\mathbb{P}$ -分布が緊密 (劣拡散的な挙動)

[Damron-Hanson-Sosoe '13]  $\tau_{B(0,n)} \geq n^{2+\epsilon}$  for large  $n$ ,  $\mathbb{P}$ -a.s. and a.e. RWパス

注意: A-O予想は  $d \leq 5$  では成立しない と考えられている。

数値シミュレーション:  $d = 5 \Rightarrow d_s = 1.34 \pm 0.02, \dots, d = 2 \Rightarrow d_s = 1.318 \pm 0.001$

**Open Prob.** 低次元で Alexander-Orbach 予想を否定的に解決せよ。

## 低次元ランダム媒質のその他の例

- 有向分枝ランダムウォークのIIC ( $d < 6$ ) J\'arai-Nachmias [40]

$d = 5$ ですすでに有効抵抗のオーダーが非線型 (異常拡散): 臨界次元は4

- ダイヤモンド格子上の臨界確率パーコレーションクラスター (Hambly-熊谷(2010))
- $\mathbb{Z}^2$  及び  $\mathbb{Z}^3$  上の交わらない 二方向ランダムウォークの軌跡 (白石 (2016+))

## 低次元ランダム媒質のその他の例

- 二次元一様無限三角形分割 (UIPT) : ランダム平面写像の典型例

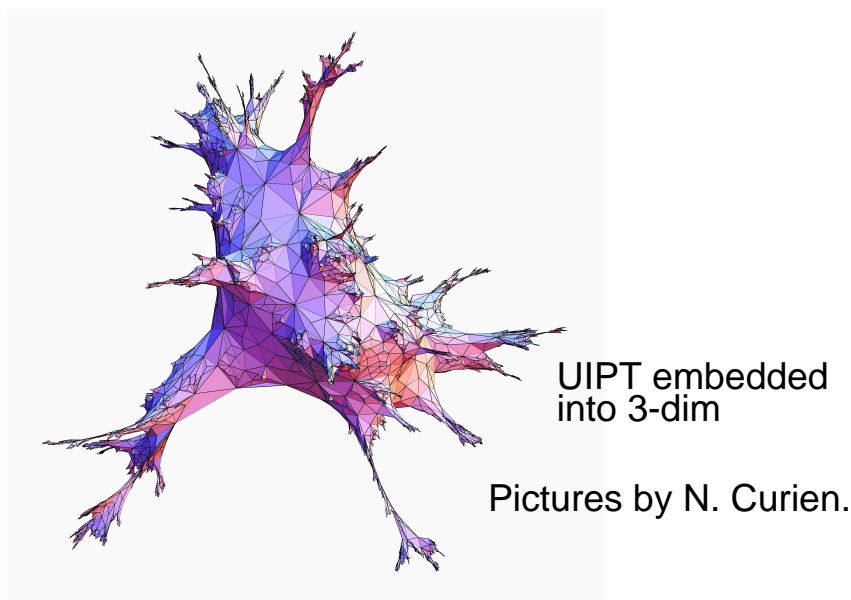
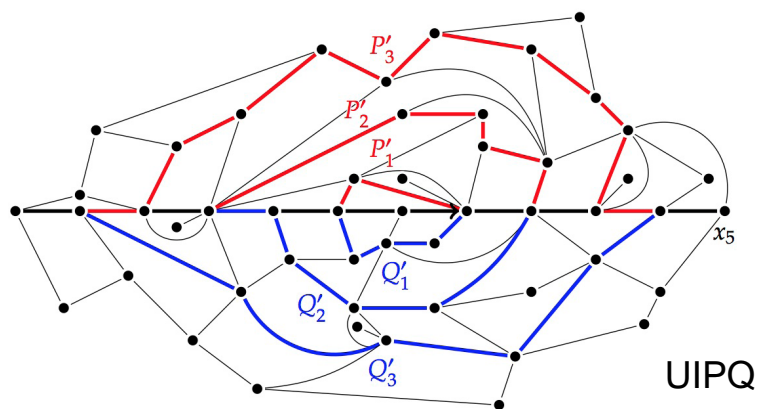
共形構造の解析やガウス自由場とのつながりが極めて精力的に研究

スケール極限 : ブラウン写像 収束先の一意性、普遍性

(Le Gall (2007,2013), Miermont (2013))

UIPT 上の RW ( $D = 4$ ) : 再帰性 Gurel-Gurevich and Nachmias [33]

異常拡散 ( $d_w \geq 3$  (予想は  $d_w = 4$ )) Benjamini-Curien [20]



## 低次元ランダム媒質のその他の例

- 二次元一様無限三角形分割 (UIPT) : ランダム平面写像の典型例

共形構造の解析やガウス自由場とのつながりが極めて精力的に研究

スケール極限 : ブラウン写像 収束先の一意性、普遍性

(Le Gall (2007,2013), Miermont (2013))

UIPT 上の RW ( $D = 4$ ) : 再帰性 Gurel-Gurevich and Nachmias [33]

異常拡散 ( $d_w \geq 3$ (予想は  $d_w = 4$ )) Benjamini-Curien [20]

- リウヴィルブラウン運動 (LBM) Garban-Rhodes-Vargas [28], Berestycki '13

二次元ブラウン運動の (二次元ガウス自由場から決まる測度による) 時間変更

熱核評価 : Andres-Kajino [5], Maillard-Rhodes-Vargas-Zeitouni [56] (まだ不十分)

**Open Prob.** 然るべき埋め込みのもと、UIPT 上の RW の LBM への収束を示す

## 5 ランダム媒質中のランダムウォークのスケール極限

例 0  $T^N$ : ルート付き分枝過程の木 (分散有限),  $N$  個の頂点を持つと条件付ける

- $T^N$  のスケール極限は連続なランダム木  $\mathcal{T}$  (Aldous '91).  $Y^N$ : SRW on  $T^N$ .

定理 5.1. [Croydon '08]  $\{N^{-1/2}Y_{[N^{3/2}t]}^N\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^{\mathcal{T}}\}_{t \geq 0}$ .

## 5 ランダム媒質中のランダムウォークのスケール極限

例 0  $T^N$ : ルート付き分枝過程の木 (分散有限),  $N$  個の頂点を持つと条件付ける

- $T^N$  のスケール極限は連続なランダム木  $\mathcal{T}$  (Aldous '91).  $Y^N$ : SRW on  $T^N$ .

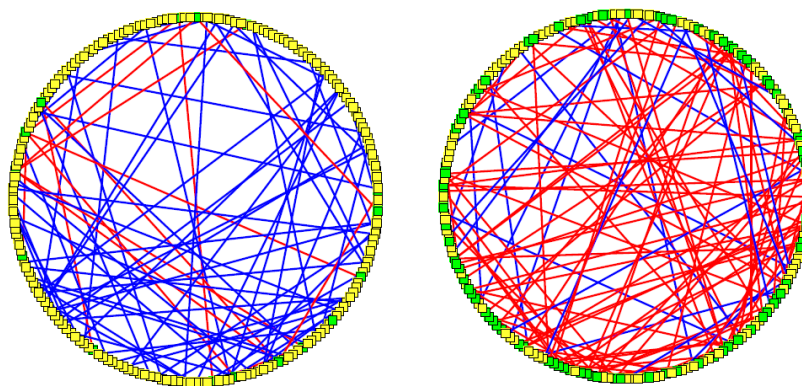
定理 5.1. [Croydon '08]  $\{N^{-1/2}Y_{[N^{3/2}t]}^N\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^{\mathcal{T}}\}_{t \geq 0}$ .

例 1 臨界確率周辺のエルデシュ・レーニイのランダムグラフ

$G(N, p)$ : エルデシュ・レーニイランダムグラフ,  $V_N := \{1, 2, \dots, N\}$  頂点集合

完全グラフのパーコレーション: 各々のボンドは確率  $p \sim c/N$  で open

$\mathcal{C}^N$ : 最大連結成分 例  $N = 200, c = 0.8$   $N = 200, c = 1.2$  Pictures by C. Goldschmidt.





臨界領域：  $p = 1/N + \lambda N^{-4/3}$  for fixed  $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |\mathcal{C}^N| \asymp N^{2/3}$ . (Aldous '97)

- [Addario-Berry, Broutin, Goldschmidt '12]:  $\exists \mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$  (ランダムコンパクト) s.t.

$$N^{-1/3} \mathcal{C}^N \xrightarrow{d} \exists \mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda \quad (\text{Gromov-Hausdorff 収束}).$$

定理 5.2 [Croydon [26]]  $\{N^{-1/3} Y_{[Nt]}^{\mathcal{C}^N}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^{\mathcal{M}}\}_{t \geq 0}$ :  $\mathcal{M}$  上のブラウン運動

臨界領域：  $p = 1/N + \lambda N^{-4/3}$  for fixed  $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |\mathcal{C}^N| \asymp N^{2/3}$ . (Aldous '97)

- [Addario-Berry, Broutin, Goldschmidt '12]:  $\exists \mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda$  (ランダムコンパクト) s.t.

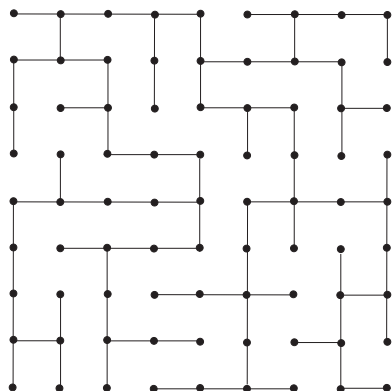
$$N^{-1/3} \mathcal{C}^N \xrightarrow{d} \exists \mathcal{M} = \mathcal{M}_\lambda \quad (\text{Gromov-Hausdorff 収束}).$$

定理 5.2 [Croydon [26]]  $\{N^{-1/3} Y_{[Nt]}^{\mathcal{C}^N}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^{\mathcal{M}}\}_{t \geq 0}$ :  $\mathcal{M}$  上のブラウン運動

## 例 2 二次元一様全域木 (UST)

$\Lambda_n := [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathcal{U}^{(n)}$  を  $\Lambda_n$  上の全域木 (全ての頂点を通り、サイクルがない)

— すべての全域木から一様ランダムに選ぶ



$\mathcal{U}$ : UST on  $\mathbb{Z}^2$  は  $\mathcal{U}^{(n)}$  の局所極限 (確率1で  $\mathbb{Z}^2$  上の全域木)

• UST スケール極限: [Schramm [59]] 部分列スケール極限の位相的性質

[Lawler-Schramm-Werner [54]] スケール極限の一意性

定理 5.3 [Barlow-Croydon-K [13]]  $\exists \{\delta_i\}_{i \geq 1} \searrow 0$  s.t.  $\{\delta_i Y_{\delta_i^{-13/4} t}^{\mathcal{U}}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^{\mathcal{T}}\}_{t \geq 0}$ .

$\mathcal{U}$ : UST on  $\mathbb{Z}^2$  は  $\mathcal{U}^{(n)}$  の局所極限 (確率1で  $\mathbb{Z}^2$  上の全域木)

• UST スケール極限: [Schramm [59]] 部分列スケール極限の位相的性質

[Lawler-Schramm-Werner [54]] スケール極限の一意性

定理 5.3 [Barlow-Croydon-K [13]]  $\exists \{\delta_i\}_{i \geq 1} \searrow 0$  s.t.  $\{\delta_i Y_{\delta_i^{-13/4} t}^{\mathcal{U}}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{d} \{B_t^{\mathcal{T}}\}_{t \geq 0}$ .

定理. 上記3例全てで  $\exists p_t^{\mathcal{U}}(\cdot, \cdot)$ :  $B^{\mathcal{U}}$  の連続な熱核,  $\exists T_0 > 0$  s.t. for  $\mathbb{P}$ -a.e.  $\omega \in \Omega$ ,

$$p_t^{\mathcal{U}}(x, y) \leq c_1 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1}) \exp \left\{ -c_2 \left( \frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left( \frac{d(x, y)}{t} \right)^{-1} \right\}$$

$$p_t^{\mathcal{U}}(x, y) \geq c_3 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \ell(t^{-1})^{-1} \exp \left\{ -c_4 \left( \frac{d(x, y)^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}} \ell \left( \frac{d(x, y)}{t} \right) \right\}$$

for all  $x, y \in \mathcal{U}, t \leq T_0$ , ただし  $\ell(x) := (1 \vee \log x)^\theta$ , ( $\exists \theta > 0$ ).

例 0, 1 では  $d_f = 2, d_w = d_f + 1 = 3$ 、例 2 では  $d_f = 8/5, d_w = d_f + 1 = 13/5$ 。

## 6 結び

(厳密に自己相似な) フラクタル上の拡散過程 / 解析学

⇒ 安定性理論、大域解析 (古典的な摂動論の一般化)

測度付き距離空間の解析 にも新展開

⇒ ランダム媒質中のランダムウォーク / 拡散過程への応用

## 6 結び

(厳密に自己相似な) フラクタル上の拡散過程 / 解析学

⇒ 安定性理論、大域解析 (古典的な摂動論の一般化)

測度付き距離空間の解析 にも新展開

⇒ ランダム媒質中のランダムウォーク / 拡散過程への応用

将来の課題 • 共形不変な媒質 のダイナミックスの研究

• 長距離相関のあるランダム媒質 のダイナミックス (飛躍型過程) の研究

ご静聴ありがとうございました。