モジュライ空間の特性類
∼ リーマン面，グラフ，ホモロジー同境 ∼

森田　茂之

日本数学会秋季総合分科会

September 16, 2016

Contents

本講演で扱ういくつかの群

最も重要な二つ

$\mathcal{M}_g$: 種数 g の閉曲面 Σ_g の**写像類群**

$\mathrm{Out}\, F_n$: 階数 n の**自由群の外部自己同型群**

$\mathcal{M}_g$: 多くの分野に関わる，$\mathrm{Out}\, F_n$: 幾何学的群論，発展中

本講演で扱ういくつかの群

最も重要な二つ

$\mathcal{M}_g$: 種数 g の閉曲面 Σ_g の**写像類群**

$\mathrm{Out}\, F_n$: 階数 n の**自由群の外部自己同型群**

$\mathcal{M}_g$: 多くの分野に関わる，$\mathrm{Out}\, F_n$: 幾何学的群論，発展中

$\mathcal{M}_g$ は $H = H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ に作用, 交叉形式 μ を保つ $\Rightarrow$

リー群の算術部分群への全射

$$p : \mathcal{M}_g \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(H, \mu) \cong \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$$

$$p : \mathrm{Out}\, F_n \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(H_1(F_n)) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$$

Garoufalidis-Levine（葉廣, Goussarov 理論に基づく）:

$$\mathcal{H}_{g,1} = \{\,\text{ホモロジーシリンダー}\,\}/\text{ホモロジー同境}$$

二つのバージョン:

$$\mathcal{H}_{g,1}^{\text{smooth}} \xrightarrow[\text{全射}]{\text{大きな核, Freedman}} \mathcal{H}_{g,1}^{\text{top}}$$

Garoufalidis-Levine（葉廣, Goussarov 理論に基づく）:

$\mathcal{H}_{g,1} = \{$ ホモロジーシリンダー $\}/$ホモロジー同境

二つのバージョン:

$$\mathcal{H}_{g,1}^{\text{smooth}} \xrightarrow[\text{全射}]{\text{大きな核, Freedman}} \mathcal{H}_{g,1}^{\text{top}}$$

$\mathcal{M}_{g,1}$(境界付き曲面の写像類群) を拡張する群

$\mathcal{M}_g$: 曲面束を分類する群

$\mathcal{H}_{g,1}$: “ホモロジー曲面束”を統率する群

種々の群とモジュライ空間 (3)

これらの群の相互関係

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_{g,1} & \mathcal{M}_{g,1} \arrow[l, "\supset"', "\text{拡張}"] \arrow[r, "\subset", "n=2g"'] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{Aut}\, F_n \arrow[d, "q"'] \\
 & \mathcal{M}_g \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Out}\, F_n \arrow[d, "p"'] \\
 & \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\subset", "n=2g"'] & \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

上記の群に対応するモジュライ空間

$$\mathcal{M}_g \xrightarrow{\text{固有不連続}} \mathcal{T}_g : \text{ Teichmüller 空間}$$

商空間は Riemann **モジュライ空間：**

$$\mathrm{M}_g = \{\,\textbf{種数}\, g \text{ Riemann } \textbf{面の双正則類}\,\}$$

上記の群に対応するモジュライ空間

$$\mathcal{M}_g \xrightarrow{\text{固有不連続}} \mathcal{T}_g : \text{ Teichmüller 空間}$$

商空間は Riemann **モジュライ空間：**

$$\mathrm{M}_g = \{\,\text{種数 } g \text{ Riemann 面の双正則類}\,\}$$

Culler-Vogtmann **による** Outer Space CV_n:

$$\mathrm{Out}\, F_n \xrightarrow{\text{固有不連続}} \mathrm{CV}_n$$

商空間は（計量）グラフのモジュライ空間:

$$\mathrm{G}_n = \{\,\text{階数 } n \text{ metric graph の同型類}\,\}$$

主偏極アーベル多様体，計量のモジュライ空間

$$\mathbf{A}_g = \mathfrak{H}_g/\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}),\ \mathbf{X}_n = \mathrm{O}(n)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$$

主偏極アーベル多様体，計量のモジュライ空間

$$\mathbf{A}_g = \mathfrak{H}_g/\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}),\ \mathbf{X}_n = \mathrm{O}(n)\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$$

以上四つのモジュライ空間の相互関係：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_g & & \mathbf{G}_n \\ \text{Abel-Jacobi}\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow\ \text{ホモトピーの意味で} \\ \mathbf{A}_g & \xrightarrow[n=2g]{} & \mathbf{X}_n \end{array}$$

最後に，算術的写像類群（完全系列の中央）：

$$1 \to \widehat{\mathcal{M}_g^1} \to \pi_1^{\mathrm{alg}}\left(\mathbf{M}_g^1/\mathbb{Q}\right) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to 1$$

背景: Grothendieck, Deligne, 伊原, Drinfeld 理論

主テーマ: 上記の種々の群，モジュライ空間に

特徴的なコホモロジー類（特性類）を定義し，

それらの性質や相互関係を統一的に理解すること

群は難しい $\Rightarrow$ “線形化”してリー代数の問題にする

上記の群の研究においても，リー代数が現れる

(I) $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}), \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ には古典的リー代数:

$$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) \ \sim \ \mathfrak{sp}(2g,\mathbb{R}) \supset \mathfrak{u}(g)$$

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \ \sim \ \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}); \mathrm{O}(n)$$

$H^*(\mathfrak{g}, K)$: 平坦 G-バンドルの特性類

$K \subset G$: 極大コンパクト群

(II) $\mathcal{M}_g$ にはシンプレクティック微分リー代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$

Theorem (Dehn-Nielsen-Zieschang)

$$\mathcal{M}_{g,1} \cong \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,\pi_1\Sigma_{g,1} ; \varphi(\zeta) = \zeta\} \quad \zeta : \text{境界}$$

"微分する" $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{g,1}$ の "リー代数" の定義

$\mathfrak{h}_{g,1} = \{$ FreeLie $\langle H \rangle$ のシンプレクティック微分 $\}$

(II) $\mathcal{M}_g$ にはシンプレクティック微分リー代数 $\mathfrak{h}_{g,1}$

Theorem (Dehn-Nielsen-Zieschang)

$$\mathcal{M}_{g,1} \cong \{\varphi \in \mathrm{Aut}\,\pi_1\Sigma_{g,1}; \varphi(\zeta) = \zeta\} \quad \zeta : 境界$$

"微分する" $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{g,1}$ の "リー代数" の定義

$\mathfrak{h}_{g,1} = \{$ FreeLie $\langle H \rangle$ のシンプレクティック微分 $\}$

$\mathbb{Z}$ 上で定義されるが，本講演では $\mathbb{Q}$ 上で考える

Johnson のトレリ群に関する素晴らしい成果 (1979 ~1985) を更に発展させる中で定義した

$\mathcal{M}_{g,1}$ の $\pi_1\Sigma_{g,1}$ の降中心列への作用 $\Rightarrow \{\mathcal{M}_{g,1}(k)\}_k$

$\Rightarrow$ リー代数の埋め込み (Johnson 準同型)

$$\tau : \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{g,1}(k)/\mathcal{M}_{g,1}(k+1) \subset \mathfrak{h}_{g,1}^{+}$$

$\operatorname{Im}\tau \subset \mathfrak{h}_{g,1}^{+}$ の決定: 重要な研究テーマ，　基本:

随伴するリー代数 (3)

$\mathcal{M}_{g,1}$ の $\pi_1\Sigma_{g,1}$ の降中心列への作用 $\Rightarrow \{\mathcal{M}_{g,1}(k)\}_k$

$\Rightarrow$ リー代数の埋め込み (Johnson 準同型)

$$\tau: \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_{g,1}(k)/\mathcal{M}_{g,1}(k+1) \subset \mathfrak{h}_{g,1}^{+}$$

$\mathrm{Im}\,\tau \subset \mathfrak{h}_{g,1}^{+}$ の決定: 重要な研究テーマ，　基本:

$$\mathrm{Im}\,\tau(1) \cong \wedge^3 H \quad \text{(Johnson)}$$

$$\mathrm{Im}\,\tau \otimes \mathbb{Q} = \langle \wedge^3 H \otimes \mathbb{Q} \rangle \subset \mathfrak{h}_{g,1}^{+} \otimes \mathbb{Q} \quad \text{(Hain)}$$

Conant-Kassabov-Vogtmann (hairy グラフ)

榎本-佐藤 (写像)，Conant-Kassabov (Hopf 代数)

河澄-久野 (Goldman-Turaev リー双代数) 等,

逆井-鈴木-M. : $(\mathfrak{h}_{g,1})^{\mathrm{Sp}}$ の構造の一般論＋ Sp-不変テンソル空間上の標準的計量 $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\tau \otimes \mathbb{Q}$ を次数 6 まで完全に決定

河澄-久野 (Goldman-Turaev リー双代数) 等,

逆井-鈴木-M. : $(\mathfrak{h}_{g,1})^{\mathrm{Sp}}$ の構造の一般論＋ Sp-不変テンソル空間上の標準的計量 $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\tau \otimes \mathbb{Q}$ を次数 6 まで完全に決定

$\mathrm{Im}\,\tau$ の決定問題は依然として未解決

$\mathfrak{h}_{g,1}$ は $\mathcal{M}_{g,1}$ のリー代数と呼ぶには “大きすぎる”

$\mathrm{Im}\,\tau$ の外側の意味: 順に $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),\ \mathrm{Out}\,F_n,\ \mathcal{H}_{g,1}$

(III) Kontsevich グラフホモロジー理論

三つの無限次元シンプレクティック・リー代数

$\mathfrak{c}_g \twoheadleftarrow \mathfrak{a}_g \supset \mathfrak{l}_g$: commutative, associative, lie wor(l)ds

$\mathfrak{l}_g = (\mathcal{M}_g$ で既出の $\mathbb{Z}$ 上のリー代数 $\mathfrak{h}_{g,1}) \otimes \mathbb{Q}$

$\mathfrak{a}_g = \{T_0 H_{\mathbb{Q}}$ のシンプレクティック微分 $\}$

$\mathfrak{c}_g = \{$ 多項式 Hamilton ベクトル場 $/\mathbb{R}^{2g}\}$:

有限型不変量 (大槻), Sp-葉層の特性類に関連

(IV) **数論から**

fundamental Lie algebra

$$\mathfrak{f} = \mathrm{FreeLie}\,\langle \sigma_3, \sigma_5, \sigma_7, \cdots \rangle$$ (Soulé 元)

織田, **伊原**, Deligne **予想の証明：中村，松本**,

Hain-**松本** $\cdots$ Brown **に至る一連の大きな成果** $\Rightarrow$

$$\mathfrak{f} \subset (\mathfrak{h}^+_{g,1}/\mathrm{Im}\,\tau)^{\mathrm{Sp}}$$ ($\otimes\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}$ **上で正しい？**)

上記の種々のリー代数の相互関係:

$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{\mathfrak{h}}_{g,1} \xrightarrow{\text{central extension}} \mathfrak{h}_{g,1} \arrow[d] & \\
\mathfrak{k} \ltimes \operatorname{Im}\tau & \operatorname{Im}\tau \subset \mathfrak{h}_{g,1} \subset \mathfrak{a}_g \arrow[l] \arrow[d, "p"'] & \mathfrak{h}_{g,1} \arrow[d, "p"'] \\
 & \mathfrak{sp}(2g,\mathbb{R}) \arrow[r, "n=2g"'] & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})
\end{tikzcd}
$$

第一行: 群 $\Theta^3 \subset \mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}}$ に対応する中心拡大（予想）

対応する群の相互関係:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}} \arrow[r] & \mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}} \\
\pi_1^{\mathrm{alg}}\left(\mathbf{M}_g^1/\mathbb{Q}\right) & \mathcal{M}_{g,1} \arrow[l, "\hat{}"'] \arrow[u, "\cup"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Out}\, F_n \arrow[d, "p"'] \\
 & \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\subset", "n=2g"'] & \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

群の系列

$$G_1 \xrightarrow{i_1} G_2 \xrightarrow{i_2} \cdots \to G_k \xrightarrow{i_k} G_{k+1} \to \cdots$$

条件： $(i_k)_* : H_i(G_k) \to H_i(G_{k+1})$ **は安定域で同型**

をみたすときホモロジー安定性をもつという.

群の系列

$$G_1 \xrightarrow{i_1} G_2 \xrightarrow{i_2} \cdots \to G_k \xrightarrow{i_k} G_{k+1} \to \cdots$$

条件： $(i_k)_* : H_i(G_k) \to H_i(G_{k+1})$ は安定域で同型

をみたすときホモロジー安定性をもつという.

ホモロジー安定性をもつ:

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_g$, $\mathrm{Out}\,F_n$, 対称群 (中岡)

$\mathcal{H}_{g,1}$ のホモロジー安定性: 何も知られていない

上記 4 つの系列の安定有理コホモロジー:

ホモロジー安定性と安定コホモロジー (2)

Theorem (Borel)

(i) $\lim_{n\to\infty} H^*(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z});\mathbb{R}) \cong \wedge_{\mathbb{R}}(\beta_3, \beta_5, \ldots)$ (Borel **類**)

(ii) $\lim_{g\to\infty} H^*(\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z});\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[c_1, c_3, c_5, \cdots]$ (Chern **類**)

Theorem (Madsen-Weiss)

$$\lim_{g\to\infty} H^*(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) \cong \lim_{g\to\infty} H^*(\mathcal{M}_{g,1};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\text{MMM 類}]$$

Theorem (Galatius)

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{H}^*(\mathrm{Aut}\, F_n;\mathbb{Q}) \cong \lim_{n\to\infty} \widetilde{H}^*(\mathrm{Out}\, F_n;\mathbb{Q}) = 0$$

非安定コホモロジー: 既知の結果は極めて少ない

$\mathcal{M}_g$: **大量** (Harer-Zagier, Penner), **具体例は僅か**

非安定コホモロジー: 既知の結果は極めて少ない

$\mathcal{M}_g$: **大量** (Harer-Zagier, Penner), **具体例は僅か**

$\mathrm{Out}\,F_n$: Galatius $\Rightarrow$ **すべて非安定！**

$H_*(\mathrm{Out}\,F_n;\mathbb{Q})$ $(n \leq 6)$ (Hatcher-Vogtmann, Gerlits, **大橋**):

非自明なのはつぎの二つだけ：

$$H_4(\mathrm{Out}\,F_4;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}, \qquad H_8(\mathrm{Out}\,F_6;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$$

後述する Morita 類が生成

こうした状況で逆井，鈴木両氏との共同研究:

Theorem (逆井-鈴木-M.)

$\operatorname{Out} F_n$ $(n \leq 11)$ の整係数オイラー数 e はつぎで与えられる

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e	1	1	2	1	2	1	1	-21	-124	-1202

東工大 *TSUBAME*　約 5 兆次元

こうした状況で逆井，鈴木両氏との共同研究:

Theorem (逆井-鈴木-M.)

$\mathrm{Out}\, F_n$ $(n \leq 11)$ の整係数オイラー数 e はつぎで与えられる

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e	1	1	2	1	2	1	1	-21	-124	-1202

東工大 *TSUBAME*　約 5 兆次元

奇数次のコホモロジー類の存在を初めて証明

幾何的意味：それ自身の意味＋

特性類: “ホモロジー曲面束” (逆井-鈴木-M.)

特性類: 高次元多様体束 (Berglund-Madsen)

種々の特性類の定義と幾何的意味

Chern 類: $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R}) \overset{\text{極大コンパクト}}{\supset} \mathrm{U}(g)$

$$H^{2k}(\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z});\mathbb{Q}) \ni c_k \leftarrow c_k \in H^{2k}(\mathrm{BU}(g))$$

実ベクトル束としては平坦 $\Rightarrow\ p_i = 0\ \Rightarrow\ 2c_2 = c_1^2, \cdots$

Borel 類: $\beta_{2k+1} \in H^{4k+1}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z});\mathbb{R})\ (k=1,2,\ldots)$

$$H^{4k+1}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z});\mathbb{R}) \ni \beta_{2k+1} \leftarrow \beta_{2k+1} \in H^{4k+1}(\mathrm{BGL}(\infty,\mathbb{C})^\delta)$$

Cheeger-Chern-Simons 類

MMM 類の定義: $\pi : E \to X$: 曲面束

$T\pi$: ファイバーに沿う接束, $e \in H^2(E;\mathbb{Z})$: Euler 類

$$H^{2i+2}(E;\mathbb{Z}) \ni e^{i+1} \mapsto e_i := \pi_*(e^{i+1}) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$$

Mumford: $\mathbf{A}^i(\overline{\mathbf{M}}_g) \ni \kappa_i \mapsto (-1)^{i+1}e_i \in H^{2i}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q})$

Theorem (河澄-M., MMM 類 $\overset{\text{関係}}{\sim}$ Johnson τ)

$$\mathrm{Im}\left(H^*(\wedge^3 H_{\mathbb{Q}}/H_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Sp}} \to H^*(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q})\right) = \mathcal{R}^*(\mathcal{M}_g)$$

tautological algebra$=\langle$MMM 類$\rangle \subset H^*(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q})$

代数幾何およびトポロジーで重要な研究対象

特性類の間の密接な関連:

Hodge 束 $= \mathcal{M}_g \to \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ の引き戻し, Mumford, M.：

奇数次の MMM 類 $\overset{\text{等価}}{\Longleftrightarrow}$ Hodge 束の Chern 類

$(T\pi)^*$ に Grothendieck-Riemann-Roch の定理，あるいは
族の Atiyah-Singer の指数定理，　一方 $T\pi$ 自身に施すと

偶数次の MMM 類 $=$ M_g の Pontrjagin 類 (M.)

g によらず，また M_g の微分構造のみによる

Igusa 理論 (高次 Franz-Reidemeister torsion) $\Rightarrow$

Theorem (逆井-鈴木-M.)

偶数次の MMM **類** : *Borel* **類が** $\mathrm{Out}\, F_{2g}$, $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ **上で異なる理由で消滅することに伴う** 2^2 **次特性類**

Igusa 理論 (高次 Franz-Reidemeister torsion) $\Rightarrow$

Theorem (逆井-鈴木-M.)

偶数次の MMM 類 : *Borel* 類が $\mathrm{Out}\,F_{2g}, \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 上で異なる理由で消滅することに伴う 2^2 次特性類

Chern 類, MMM 類, Borel 類の “環”が閉じた

Chern 類 $\overset{\text{消滅}}{\Rightarrow}$ Borel 類 $\overset{\text{消滅}}{\Rightarrow}$ 偶数次の MMM 類

2^2 次特性類が元に戻る：Bott 周期性定理の発現

リー代数 $\mathfrak{h}_{g,1}^{+}$ の生成元 (アーベル化) の決定問題

の観点から研究上の重要な転機を述べる

リー代数 $\mathfrak{h}_{g,1}^{+}$ の生成元 (アーベル化) の決定問題の観点から研究上の重要な転機を述べる

1990 年頃, 全射 (トレース写像と呼ばれる) を定義:

$$\mathrm{trace} : \mathfrak{h}_{g,1}^{+} \to \bigoplus_{k=1}^{\infty} S^{2k+1} H_{\mathbb{Q}}$$ (重複度 1, 中村)

これと第一 Johnson 像が $\mathfrak{h}_{g,1}^{+}$ を生成する？

(今となってはあまりに楽観的に) 予想した

(I) 数論との出会い

1980 年代後半，織田氏:

$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が $(\mathfrak{h}_{g,1}/\mathrm{Im}\,\tau)^{\mathrm{Sp}}$ に “現れる”だろう

1994 年, 中村氏から証明の知らせ (中村，松本)

私の理解をはるかに超えるところで大きな進展

(I) 数論との出会い

1980 年代後半，織田氏:

$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が $(\mathfrak{h}_{g,1}/\mathrm{Im}\,\tau)^{\mathrm{Sp}}$ に “現れる”だろう

1994 年, 中村氏から証明の知らせ (中村，松本)

私の理解をはるかに超えるところで大きな進展

初め：Galois 像は $\mathfrak{h}_{g,1}^{+}$ の新しい生成元？

後に：trace 達のブラケットで表示できるだろう

未解決，最近 Hain 氏 (w. 松本, Brown)：進展あり

(II) Kontsevich グラフホモロジー (1990 年代初め)

当初よく分からない $\Rightarrow$ 次第に $\mathfrak{h}_{g,1}$ に極めて重要

Theorem (Kontsevich)

(i) $H_*(\mathfrak{c}_\infty) \overset{\text{等価}}{\sim}$ **“本来の”グラフホモロジーの全体**

(ii) $H_*(\mathfrak{a}_\infty) \overset{\text{等価}}{\sim} H^*(\mathcal{M}_g^n;\mathbb{Q})^{\mathfrak{S}_n}$ $(n, 2g-2+n>0)$ **の全体**

(iii) $H_*(\mathfrak{l}_\infty) \overset{\text{等価}}{\sim} H^*(\mathrm{Out}\,F_n;\mathbb{Q})$ $(n \geq 2)$ **の全体**

$\mathfrak{l}_\infty = \mathfrak{h}_{\infty,1}$ は $\mathcal{M}_g$ の研究において既出だったが

$\mathrm{Out}\,F_n$ とも深く関わることを示した驚きの結果

この定理 + 写像類群の研究 $\Rightarrow$

$$\mu_k \in H_{4k}(\mathrm{Out}\, F_{2k+2};\mathbb{Q})\ (k=1,2,\ldots)$$

を定義し $\mu_1 \neq 0$ を示した（1999 年）

現在 Morita 類と呼ばれる，すべて非自明を予想:

この定理 + 写像類群の研究 $\Rightarrow$

$$\mu_k \in H_{4k}(\mathrm{Out}\, F_{2k+2}; \mathbb{Q}) \ (k = 1, 2, \dots)$$

を定義し $\mu_1 \neq 0$ を示した（1999 年）

現在 Morita 類と呼ばれる，すべて非自明を予想:

Theorem (non-triviality of μ_k)

$\mu_2 \neq 0 \in H_8(\mathrm{Out}\, F_6; \mathbb{Q})$ （*Conant-Vogtmann 2004*）

$\mu_3 \neq 0 \in H_{12}(\mathrm{Out}\, F_8; \mathbb{Q})$ （*Gray 2011*）

Theorem (Conant-Hatcher-Kassabov-Vogtmann, 2015)

μ_k はあるアーベル部分群 $\mathbb{Z}^{4k} \subset \mathrm{Out}\, F_{2k+2}$ で表される

(III) 新しい生成元の出現

2011 年に Vogtmann 氏からつぎの結果の知らせ

Theorem (Conant-Kassabov-Vogtmann)

$H_1(\mathfrak{h}_{g,1}^+) \cong \wedge^3 H_{\mathbb{Q}}$ (*Johnson,* 0*-loop*)
$\oplus \left(\oplus_{k=1}^{\infty} S^{2k+1} H_{\mathbb{Q}}\right)$ (*M. trace maps:* 1*-loop*)
$\oplus \left(\oplus_{k=1}^{\infty} [2k+1,1]_{\mathrm{Sp}} \oplus\right.$ *other part*) (2*-loops*) $\oplus$
$\cdots \oplus$ **非自明？**

上記予想を打ち砕く衝撃の結果, つぎと対照的：

Theorem (逆井-鈴木-M.)

リー代数 $\mathfrak{a}_g^+$ は **"有限生成"**, さらに $H_1(\mathfrak{a}_\infty) = 0$

vcd (Harer) に関して最高次コホモロジーの消滅

Corollary (逆井-鈴木-M., Church-Farb-Putman)

$$H^{4g-5}(\mathcal{M}_g;\mathbb{Q}) = 0$$

元に戻って, さらに驚くべきこと:

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} H^1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}); S^{2k}H^1(T^2))$$

$$\overset{\text{Eichler-Shimura}}{\cong} \quad \text{elliptic modular forms}$$

が $\mathfrak{h}^+_{g,1}$ の新しい生成元として “現れる”

(IV) 新しい Sp-不変な生成元の出現

2015 年につぎの**驚くべき**結果が公表された

Theorem (Barthold, 証明は大規模なコンピュータ計算)

$$H_k(\mathrm{Out}\,F_7;\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & (k=0,8,11) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

理由 1：$11 = \mathrm{vcd}\,\mathrm{Out}\,F_7$(vcd について最高次元)

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_g$ の場合と対照的，一方 Kontsevich の定理 $\Rightarrow$

理由 2：$\mathfrak{h}^+_{g,1}$ の生成元として Sp-不変な元の必要性

我々はこの直接証明を試み，$k=11$ 別証＋新情報

Theorem (逆井-鈴木-M.)

全射 $H_1(\mathfrak{h}_{g,1})_{12} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$ $(g \geq 2)$ を構成し，榎本-佐藤写像を経由すること，および $g \geq 8$ で同型を示した

さらに Massuyeau-逆井はつぎの結果を得た

Theorem (Massuyeau-逆井)

(i) $\mathcal{H}_{g,1} \overset{\text{準同型}}{\longrightarrow} \hat{H}_1(\mathfrak{h}^+_{g,1}) \rtimes \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ が存在し，像は "稠密"

(ii) $H_1(\mathcal{H}_{g,1}; \mathbb{Q}) \neq 0$ 　($\mathcal{M}_g$: *perfect* と対照的な結果)

$\mathfrak{h}^+_{g,1}$ の生成元の決定: 予想を遥かに超えて難しい

$\mathfrak{h}^+_{g,1}$ の構造: 底知れない深さと豊穣さをもつ

最近，以前の結果を一般化してつぎを得た

Theorem (逆井-鈴木-M. 論文準備中)

つぎの準同型写像が存在する

$$\rho : H_c^*(\mathfrak{h}_{g,1}) \overset{Kontsevich}{\cong} \Lambda\left[\bigoplus_{n\geq 2} H_*(\mathrm{Out}\, F_n;\mathbb{Q})\right] \to H^*(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}};\mathbb{Q})$$

$H_k(\mathrm{Out}\, F_n;\mathbb{Q}) \ni x \ \Rightarrow \mathcal{H}_{g,1}$ **の次数** $2n-2-k$ **の特性類**

とくに $\rho(\mu_k) \in H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}};\mathbb{Q})$ **で，つぎを予想**

$$\rho(\mu_k) \neq 0 \in H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}};\mathbb{Q}), \quad \rho(\mu_k) = 0 \in H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}};\mathbb{Q})$$

$\rho(\mu_k)$ **の幾何的意味** (Garoufalidis-Levine +**北野** $\Rightarrow$):

“ホモロジー曲面束”の高次 Massey **積の “交叉数”**

第一 MMM **類の幾何的な意味** (Hirzebruch $\Rightarrow$):

曲面束の符号数, i.e. **通常のカップ積の “交叉数”**

展望あるいは夢 (2)

$\rho(\mu_k)$ の幾何的意味 (Garoufalidis-Levine +北野 $\Rightarrow$):

"ホモロジー曲面束"の高次 Massey 積の "交叉数"

第一 MMM 類の幾何的な意味 (Hirzebruch $\Rightarrow$):

曲面束の符号数, i.e. 通常のカップ積の "交叉数"

$\Rightarrow$ 第一 MMM 類の ($k \to \infty$ 深い) 高次の一般化

Manolescu : 三角形分割問題に否定的解決; 松本, Galewski-Stern と $\Theta^3 \stackrel{\text{Rohlin}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/2$ が split しない

特性類 $\rho(\mu_k) \in H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{top}};\mathbb{Q}), H^2(\mathcal{H}_{g,1}^{\mathrm{smooth}};\mathbb{Q})$:

Θ^3 が無限ランクをもつ（古田, Fintushel-Stern）

ことの 4 次元トポロジーへの影響を捉える試み

Poincaré 球面に始まるホモロジー 3 球面の族の

4 次元 C^∞ 世界の中での “Gauss 曲率”を計る試み