モチーフの高さについて

加藤和也 (シカゴ大学)

§1. Introduction

1983 年に Faltings は、 1922 年に提起されてから 60 年以上未解決であった Mordell 予想を解決した ([Fa])。そのとき、 Faltings は、これまた大変な予想であった アーベル多様体についての Tate 予想を証明するというものすごいことをやり、それを用いて Mordell 予想を証明したのであった。この、 アーベル多様体についての Tate 予想の解決においては、 Faltings の定義した「 アーベル多様体の高さ」というものが重要な役割を果たした。

アーベル多様体の特別な場合である楕円曲線の高さは、望月新一氏の abc 予想の仕事（[Mo]）においても、重要な役割を果たしている。

本稿では、この 「 アーベル 多様体の高さ」 が、「 モチーフ の高さ」に一般化できることを述べたい。そして

(1) 数論の大きな未解決予想である、一般の Tate 予想や、 Mordell-Weil 型の予想が、この モチーフ の高さと関わること。

(2) Hodge 構造の退化の理論が、モチーフ の高さの理論の局所理論ととらえられること。

にふれたい。簡単な述べ方になるので、より正確な事は、論文 [K1], [K2] をご覧いただければ幸いである。 ([K1], [K2] も証明など略してあり、詳細は別の論文を準備中である。）

§2. 物理学と数論

今回の代数学シンポジウムには、物理学から、大栗博司氏が参加された。

ありがたい機会と考えて、筆者は一時、講演題名を「整数論と、物理学、 Hodge 構造」としたいと組織委員のかたに申し出ていたのであるが、筆者の物理学についての力不足のためそれは実現できず、「 モチーフ の高さ」を題名にすることにした。

筆者は臼井三平氏、中山能力氏と、２０年近く Hodge 構造の退化を研究して来た。筆者はもともと数論の研究者なので、 Hodge 構造の退化の話が、数論と関係することを期待してきた。上の (2) の点は、それが実際に起きるということである。

Hodge 構造の話、特に Hodge 構造の退化の話は、物理学とも関係すると聞く。臼井三平さんは最近の論文 [Us] で、 Hodge 構造の退化と mirror symmetry、物理学の関係を考察している。この報告集の中山能力さんの稿にも、 mirror symmetry, 物理学への言及がある。筆者も、 Hodge 構造の退化と物理学の関係を考察している Spencer Bloch 氏と共同研究をさせていただいているので、いつか物理学にも関係できたらいいなと思っている。物理学と、数論は、異質なことのように見えるけれども、たとえば上の (2) の点から言えば、

物理学 ←(近い)→ Hodge 構造 ←(近い)→ モチーフ ←(近い)→ 数論

というふうに、近いのではないかと思われる。

大栗さんは御著書 [Og] に、「重力の研究をしています」とふつうの世間で話しても、「そうですか、かねがね重力についてはふしぎに思っておりました」と喜んでくれる人には会えない、と書いておられる。とはいえ、体重を量れば重力を感じることができるのであり、これに対し、数論の現象は感じる事ができないし、心配事を抱えていそうな人に「素数のことをお悩みでは？」とたずねてみても、まず反応がないであろう。なので、数論の研究者からはお叱りを受けかねないけれども、物理学を表舞台の学問、数論を舞台裏の学問とたとえたくなるのである。しかし、目に見える表舞台が、目に見

えない舞台裏によって支えられているように、目に見える物理的現象は、目に見えない数論的現象によって支えられているのではないかと思うのである。（実際の講演では、表社会、裏社会とたとえてしまった。これは良いたとえではなかったと思うので取り下げたい。）もちろん、数論も、「体重を素因数分解してみると、病気の早期発見ができる」というふうに表舞台に躍り出る日が来るかもしれないのであるが。

§3. 数の高さ、目にやさしい数、耳にやさしい数、代数多様体の点の高さ

数の高さというもの、代数多様体の点の高さというものが、数論において重要な役割をはたしてきた。まずこれを紹介する。あとで述べるように、アーベル多様体の高さやモチーフ の高さはそれと関係するものである。

有理数 m/n (m, n は互いに素な整数、 $n \neq 0$) の高さ $H(m/n)$ は、

$$H(m/n) = \max(|m|, |n|)$$

と定義される。有理数の高さは、その有理数の複雑さの度合いを表わす感じのものである。

もっと一般に、代数的数 α の高さ $H(\alpha)$ は、 α のみたす有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の最低次の代数方程式を $c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ (ここに、 $c_0, \ldots, c_n$ は整数で、それらの最大公約数は 1) とするとき、

$$H(\alpha) = \max(|c_0|, \ldots, |c_n|)$$

と定義される。これも、数 α の複雑さの度合いを表わしている。

目に優しい数、耳に優しい数がある。たとえば、特に目に優しい数として、黄金比 $(1 + \sqrt{5})/2$ は有名である。また、簡単な整数の比を持つ弦から生じる和音は、耳にここちよい。 $5 : 4$ の比を持つ弦からは、ドとミの和音が生まれ、ここちよい。

$(1 + \sqrt{5})/2$ は $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ の解であり、その高さは 1 であって、たいへん小さい。 $5/4$ の高さは 5 であって、これも大変小さい。

２次の代数的数で高さの小さいものが目に優しく、有理数（= 1 次の代数的数）で高さの小さい数が耳に優しいのだと思う。２次、 1 次というのは、目は２次元的に外界を把握し、耳は時間に沿って１次元的に外界を把握することに関わるのであろう。

「高さ」は大変素朴な概念であるが、以下でふれるように、数論において重要な役割を果たしてきた。ことに、これこれこういう数は有限個しかない、という形の多くの大きな定理が、「高さ」を用いて証明されてきた。

そういう有限性についての定理の証明で基礎になるのは、「高さ」が持つ次の有限性である。この有限性は簡単に証明される。

$C > 0$ をとると、 $H(\alpha) \leq C$ となる有理数 α は有限個しかない。もっと一般に、各代数体 K について、 $H(\alpha) \leq C$ である K の元 α は有限個しかない。（もっと強く、 $C, C' > 0$ をとると、 $H(\alpha) \leq C$ となる次数 $\leq C'$ の代数的数 α は有限個しかない。）

数の高さの定義から、次のように、代数多様体の点の高さの定義が得られる。

代数体 K 上の代数多様体 $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\ (1 \leq i \leq r)\}$ (ここに、 $f_1, \ldots, f_r$ は K 上の多項式）を考える。 X の K 有理点 ($x_1, \ldots, x_n \in K$ となる点 $(x_1, \ldots, x_n)$）の高さ $H(x_1, \ldots, x_n)$ を、

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \max(H(x_1), \ldots, H(x_n))$$

と定義する。上に述べた、数の高さの有限性により、次が成立する。

$C > 0$ をとると、 X の K 有理点で高さが $\leq C$ のものは有限個しかない。

§4. 「高さ」と、数論の諸問題, I

§3 に紹介した高さの概念は、数論の様々な重要な問題と関わってきた。ふたつ例を挙げたい。

(1) Mordell-Weil　の定理

代数体 K 上のアーベル多様体 A について、その K 有理点全体 $A(K)$ はアーベル群の構造を持つが、このアーベル群が有限生成である、という Mordell-Weil の定理がある。この定理の証明には、 $A(K)$ の元の高さ（ §3 に紹介した、代数多様体の点としての高さ）が大きな役割を果たす。このことは、アーベル多様体の特別な場合である楕円曲線 (= 1 次元アーベル多様体）の場合に、 [KKT] の第一章に解説がしてある。証明法の根幹は、ある $C > 0$ について、 $A(K)$ が高さ $\leq C$ の K 有理点で生成されることが示され、§3 に述べた、高さ $\leq C$ の K 有理点が有限個であることにより、有限生成であることがわかる、というものである。

(2) abc 予想

abc 予想は次のように、高さの問題となり、 abc 予想を一般化した Vojta 予想と呼ばれる大きな予想に一般化されている。

abc 予想は、 $\epsilon > 0$ をとるとき、 $a + b = c$ をみたす、互いに素な自然数 a, b, c については、 $\prod_{p|abc} p \geq c^{1-\epsilon}$ が、有限個の a, b, c の例外を除けば成立するというものである。($\prod_{p|abc} p$ は、 abc の素因数である素数 p すべての積を表わす。） abc 予想については、 [KK] がすぐれた解説書である。 [Ya] も優れている。

有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の代数多様体 $X = \{x \mid x \neq 0, 1\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1x_2 - 1 = 0, (1 - x_1)x_3 - 1 = 0\}$ を考える。(X の二つの表示は、最初の表示の x に、 $(x_1, x_2, x_3) = (x, 1/x, 1/(1 - x))$　を対応させることでつながる。 X の二つ目の表示が、§3 に紹介した代数多様体の形の表示である。）上のような a, b, c に X の $\mathbf{Q}$ 有理点 $x = a/c$ すなわち、 $(x_1, x_2, x_3) = (a/c, c/a, c/b)$ を対応させると、この点の高さは c である。一方、素数 p が abc の素因数であるということは、 $x \bmod p$ が、 $X \bmod p$ からはみでるということである。p が a をわりきれば、 $a/c \bmod p$ は 0 になり、 p が b をわりきれば、 $a/c \bmod p$ は 1 となり、 p が c をわりきれば $a/c \bmod p$ は ∞ となり、 $X \bmod p$ からはみでる。（別の言い方をすると、 X を射影直線 P^1 に埋め込んで $X = P^1 - \{0, 1, \infty\}$ とみなせば、 $p|abc$ とは、 $c/a \bmod p$ が $P^1 \bmod p$ の中で、 $X \bmod p$ の外側である $\{0, 1, \infty\}$ にはいるということである。）

このように、 abc 予想は、代数体 K 上の射影代数多様体 P とその開部分多様体 X について、

(i) X の K 有理点 x の高さと、

(ii) $x \bmod p$ が P の中で X からはみだす素数 p すべての積

を比べたとき、 (ii) の方が、 (i) に比べて比較的大きい、という形の予想である。こういうふうに abc 予想をとらえ、それをもっと一般の代数多様体に一般化した、 Vojta 予想というものが知られている（ [Vo] 参照）。望月新一氏の abc 予想の証明の仕事 [Mo] は、この Vojta 予想を、 X が代数曲線の場合に証明したものである。(なお望月氏のこの仕事は、膨大で理解していくことが大変のため、正しさが他の人々により確認されるにはまだ至っていないようである。筆者も理解すべく努力し、だいぶ理解できてきたとは思うのであるが、今の所まだ「理解した」と言える状態ではない。）

§5. アーベル多様体の高さ

本稿の主題の「モチーフの高さ」は、 Faltings によるアーベル多様体の高さの定義を一般化したものである。この、アーベル多様体の高さを紹介する。

代数体 K 上のアーベル多様体 A について、「A の高さ」というものが定義される。(§4 (1) には、「アーベル多様体の点の高さ」が登場したが、こちらの方は、「アーベル多様体自身の高さ」である。)

そのひとつの定義法は次のものである。「アーベル多様体のモジュライ空間」と呼ぶ代数多様体がある。これは、アーベル多様体(の同型類)全体がなす空間であり、この空間の点は、個々のアーベル多様体と対応する。代数体 K について、このモジュライ空間の K 有理点は、K 上のアーベル多様体のことである。K 上のアーベル多様体 A の高さは、このモジュライ空間の A に対応する K 有理点の、§3 の意味での高さとして定義される。

これが「アーベル多様体の高さ」のひとつの定義であるが、Faltings は、次のようなもうひとつの定義を与え、ふたつの定義が本質的には同じものになるということを証明した。この Faltings による「アーベル多様体の高さのもうひとつの定義」は、アーベル多様体を見て直接に定義するもので、理論的な扱いにおいてすぐれているものである。簡単のため、(代数体一般ではなく)有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の g 次元アーベル多様体 A の場合を説明する。$\Omega(A)$ を、A 上の(代数的な)微分形式全体とすると、$\Omega(A)$ は、$\mathbf{Q}$ 上 g 次元の線形空間となる。$\Omega(A)$ は整構造 $\Omega(A)_{\mathbf{Z}}$ を有する。つまり、整数環 $\mathbf{Z}$ 上階数 g の自由加群であるような、$\Omega(A)$ の部分 $\mathbf{Z}$ 加群 $\Omega(A)_{\mathbf{Z}}$ が自然に定まる。これは、ネロンモデルの理論により、A のネロンモデル (A が $\mathbf{Q}$ 上のものであるのに対し、その $\mathbf{Z}$ 上版として定まるもの) $A_{\mathbf{Z}}$ をとると、$\Omega(A)_{\mathbf{Z}}$ は、$A_{\mathbf{Z}}$ 上の微分形式全体として定義されるのである。$\omega_1, \ldots, \omega_g$ を $\Omega(A)_{\mathbf{Z}}$ の $\mathbf{Z}$ 加群としての基底とする。Faltings による A の高さ $H(A)$ は、

$$H(A) = |\int_{A(\mathbf{C})} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_g \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\omega}_g|^{-1/2}$$

と定義される。

§6. 「高さ」と、数論の諸問題, II

「アーベル多様体の高さ」と数論のかかわりについて二点述べる。

(1) 代数体 K 上のアーベル多様体の Tate 予想とは、K 上のアーベル多様体 A, B について、同型

$$\mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{G_K}(T_\ell A, T_\ell B)$$

が成立するというものであった。ここに ℓ は素数、G_K はガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ ($\bar{K}$ は K の代数閉包), $T_\ell A$ は A の ℓ 進 Tate 加群 $\varprojlim_n \mathrm{Ker}(A(\bar{K}) \to A(\bar{K})\ ;\ x \mapsto \ell^n x)$ である。$T_\ell A \cong \mathbf{Z}_\ell^{2g}$ であり、これに G_K が作用する。Tate 予想の同型の持つ意味は、アーベル多様体のこと(同型の左辺)は、$T_\ell A, T_\ell B$ への G_K の作用の様子(同型の右辺)を見ればわかるというもので、アーベル多様体という理解しがたいもののことが、ガロア群が作用する加群という、もっと扱いやすくわかりやすいものを見ればわかる、というものである。

Faltings は「アーベル多様体の高さ」を駆使して、アーベル多様体の Tate 予想を証明した。証明の中で大事であったのは、「$C > 0$ をとると、高さが $\leq C$ である K 上のアーベル多様体(の同型類)は有限個しかない」、ということであった。この有限性は、アーベル多様体の高さを、モジュライ空間の点の高さと見れば、§3 に述べた、代数多様体の点の高さについての有限性からしたがう。

Faltings は、Mordell 予想を証明した。Mordell 予想は、

C を代数体 K 上の種数 $g > 1$ の代数曲線とすると、C の K 有理点全体 $C(K)$ は有限集合である

というものである。Faltings は、C のヤコビ多様体と呼ばれる g 次元アーベル多様体をとり、アーベル多様体についての、自身が証明した Tate 予想を応用する事でこれを証明した。

(2) 望月新一氏による abc 予想の証明は、アーベル多様体の特別な場合である楕円曲線の高さを考察するものであった。§4 (2) に出て来た $P^1 - \{0, 1, \infty\}$ は、楕円曲線のモジュライ空間と見なせる。この空間の点 $\lambda \in P^1 - \{0, 1, \infty\}$ に楕円曲線 $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ が対応する。この見方をすると、abc 予想は次のように書き変えられる。

$\epsilon > 0$ をとると、$\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線 E について、$\prod_{p\,;\,\text{悪い素数}} p \geq H(E)^{1-\epsilon}$ が、有限個の E を除いて成立する。ここに $\prod_{p\,;\,\text{悪い素数}} p$ は、E が p で bad reduction となる素数 p の積。

実際、abc 予想を §4 (2) のように解釈したときに、$a + b = c$, $\lambda = a/c$ と置いたことを思い出してみると、$p|a$ ということが $\lambda \bmod p = 0$ ということ、つまり $E \bmod p$ が特異点を持つ代数曲線 $y^2 = x^2(x-1)$ となることを意味し、E は p で bad reduction となるし、こうして、$p|abc$ という条件は、E が p で bad reduction となることと同値になる。

望月氏は、abc 予想をこの楕円曲線についての問題として考察した。望月氏の abc 予想について論文の大きな部分は、楕円曲線の研究となっている。

§7. モチーフの高さ

Faltings による代数体 K 上のアーベル多様体 A の高さの定義を、代数体 K 上のモチーフ M の高さの定義へと一般化する。簡単のため、$K = \mathbf{Q}$ とする。

そのため、Faltings の定義を、もっと一般化しやすい形に解釈しなおす。一般に $\mathbf{Q}$ 上の非特異射影代数多様体 X (アーベル多様体はその例）について、各整数 $m \geq 0$ に対し、次のような m 次コホモロジー群が定義される。

(i) 通常の、整係数 m 次コホモロジー群 $H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$.

(ii) m 次 de Rham コホモロジー群 $H^m_{dR}(X)$. これは、$\mathbf{Q}$ 上の有限次線形空間で、Hodge filtration と呼ばれる減少 filtration $H^m_{dR}(X) = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset \dots$ を持つ。

この (i), (ii) のコホモロジー群は互いに関係する。(i) と (ii) はまず Hodge 理論により、$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} H^m_{dR}(X) \cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ という関係を持つ。また、素数 ℓ ごとに、エタールコホモロジーの理論により、$\mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ には、$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ が作用し、その作用の様子と $H^m_{dR}(X)$ が ℓ 進 Hodge 理論により関係する。

X がアーベル多様体 A であるとき、$m = 1$ ととると、アーベル多様体の高さの紹介 (§5) の中にでてきた $\Omega(A)$ は、$\Omega(A) = F^1$ と理解される。この場合 $F^2 = 0$ なので、$\Omega(A) = \mathrm{gr}^1 H_{dR}(A)$ （ここに、$\mathrm{gr}^r = F^r/F^{r+1}$) と書くこともできる。$\Omega(A)$ の基底 $\omega_1, \dots, \omega_g$ について、§5 に出て来た $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g$ は、$\mathrm{gr}^1 H^1_{\mathrm{dR}}(A)$ の最高外べき $\wedge^g \mathrm{gr}^1 H^1_{dR}(A)$ の基底であり、§5 に出て来た $(\int_{A(\mathbf{C})} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_g)^{1/2}$ は、Hodge 理論から定まる $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g$ の長さと理解される。

モチーフの話に移る。モチーフには、純モチーフ (pure motive) とその一般化である混合モチーフ (mixed motive) があるが、ここでは、簡単のため純モチーフについてのみ説明する。体 K 上の純モチーフ M は、K 上の非特異射影代数多様体 X についての「 $H^m(X)$ 」のようなものである。（正確なことを論ずると長くなるので、この純モチーフの説明で我慢していただきたい。）$K = \mathbf{Q}$ とする。$M = H^m(X)$ である場合には、$M_{\mathbf{Z}} = H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, $M_{dR} = H^m_{dR}(X)$ が得られ上に述べたように Hodge 理論、ℓ 進 Hodge 理論によって互いに関係するが、純モチーフ M から、有限生成 $\mathbf{Z}$ 加群 $M_{\mathbf{Z}}$, $\mathbf{Q}$ 上の有限次線形空間 M_{dR} が得られ同様に Hodge 理論、ℓ 進 Hodge 理論によって関係する。

$\mathbf{Q}$ 上の純モチーフの高さが次のように定義される。 Faltings の定義との関係は、 A がアーベル多様体で $M = H^1(A)$ のとき、純モチーフ M の高さが Faltings の定義による A の高さに一致するというものである。

各整数 r について、 $\mathrm{gr}^r M_{dR}$ の最高外べきには、 ℓ 進 Hodge 理論を使って整構造が定まる。その $\mathbf{Z}$ 上の基底 u_r をとる。 Hodge 理論を使って、 u_r の長さ $|u_r|$ を定義することができる。 M の高さ $H(M)$ は、

$$H(M) = \prod_{r \in \mathbf{Z}} |u_r|^{-r}$$

と定義される。（詳しいことは、 [K1] をご覧いただきたい。）

§8. 「高さ」と、数論の諸問題, III

モチーフの高さと数論の諸問題の関わりについて、三点述べる。

(1) Tate 予想

Faltings が証明したアーベル多様体についての Tate 予想は、もっと一般的であり未解決である、モチーフに関する Tate 予想の特別の場合である。モチーフに関する Tate 予想は代数体 K 上のモチーフ M, N と素数 ℓ について、

$$\mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{G_K}(M_{\mathbf{Z}_\ell}, N_{\mathbf{Z}_\ell})$$

が成立するというものである。ここに $M_{\mathbf{Z}_\ell} = \mathbf{Z}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}} M_{\mathbf{Z}}$ で、これには $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ が作用する。

これについて、 Faltings による、アーベル多様体についての Tate 予想の証明のまねをすることにより、次のことが示せる。モチーフのタイプを固定したとき、もしそのタイプの、高さ $\leq C$ のモチーフ（の同型類）が有限個であることが言えれば、そのタイプの純モチーフについての Tate 予想は、 ℓ が、 M, N について悪い素数でないという仮定のもとで証明できる。(「タイプを固定するとは、 Hodge number を固定するということである。）これについて、 [K1] に説明した。

この有限性は、アーベル多様体の高さについては、§6 に述べたように、アーベル多様体のモジュライ空間があることで証明できたのであるが、たいていのタイプのモチーフのモジュライ空間は存在しない（アーベル多様体の場合、アーベル多様体を代数多様体の点と見なすことができるが、一般のモチーフを代数多様体の点と理解することはできない）ので、この有限性を証明するのは、今の所困難である。

(2) Mordell-Weil の定理型の予想

代数体上の代数多様体の様々な K 群（代数的 K 群）がアーベル群として有限生成であることが予想されている。 Mordell-Weil の定理はその特別な例である。この予想も、 K 群がモチーフの同型類のなすアーベル群と理解されることにより、「タイプを固定した高さ $\leq C$ の混合モチーフの同型類は有限個」、が言えれば、多くの場合に証明できる。（証明は、 Mordell-Weil の定理の証明のまねをする。）

(3) abc 予想 (Vojta 予想）

モチーフの abc 予想というものが、次のように定式化できると思う。研究テーマとしておもしろいのではないかと思う。純モチーフのタイプを固定すると、

$\mathbf{Q}$ 上のそのタイプの純モチーフ M について、ある $a > 0$ について、

$$\prod_{p\,;\,\text{悪い素数}} p \geq H(M)^a$$

が有限個の例外の M を除いて成立する。

（代数体上の話の時は、素数を素イデアルで置き換える。）

これに限らず、モチーフの高さについては様々な問題、予想が、どんどん湧きいでてくるような気がする。「高さ」はもともと数論の様々な問題と関係してきたので、モチーフの高さもそうであるといいなと思う。筆者は定理を証明する能力は年とともに低下しつつあるような気がするので、夢のある予想をいっぱい提起する貢献をできたらいいなと思っている。

§9. Hodge 構造の退化との関係

筆者は Spencer Bloch 氏と、 Hodge 構造の退化の理論（いわゆる nilpotent orbit や SL(2)-orbit の理論）の、物理学や数論への応用をめざして共同研究をしている。Bloch 氏は物理学の学会に招かれて講演をすることのある人で、物理学の雑誌に論文を複数出している。

「モチーフの高さが、モチーフが変化するときにどう変化するか」ということと、「Hodge 構造が退化していくとき何がおきるか」ということは、後者を前者の局所理論と見る事ができる。（代数体を大域体、複素数体をその局所体と見て、代数体上のモチーフの局所理論が Hodge 構造の理論と見る。）これについて、 [K2] の最後に少しふれた。

物理学に出てくる積分値 I_t が、パラメーター t が 0 に近づくとき発散していくとし、この発散の仕方を理解したいとする。 Bloch 氏の研究を見ると、物理学に登場する積分値は、ある Hodge 構造の不変量と理解されることが多く、 I_t が発散していくということは、 t をパラメーターとする Hodge 構造が、 t が 0 に近づくとき退化していくことと理解できることが多いようである。なので、 Hodge 構造の退化の理論が、物理学における発散の理解に役立つと考えられている。これが、モチーフの高さの、モチーフが変化するときの挙動についての話と関係していると思われる。

参考文献

[Fa] Faltings, Gerd: Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. 73 (1983), 349–366.

[K1] Kato, Kazuya: Heights of motives, Arxiv 1306.5691.

[K2] Kato, Kazuya: Heights of mixed motives, Arxiv 1306.5693.

[KKT] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅: 数論 I、岩波書店 (2005)

[KK] 黒川信重 · 小山信也: ABC 予想入門、 PHP サイエンス · ワールド新書 (2013).

[Mo] Mochizuki, Shinichi: Inter-universal Teichmüller Theory I–IV (preprint).

[Og] 大栗博司: 重力とは何か、幻冬舎 (2012).

[Us] Usui, Sampei: A study of mirror symmetry through log mixed Hodge theory (preprint).

[Vo] Vojta, Paul: Diophantine approximation and Nevanlinna theory, Lecture Notes in Math. 2009 (2010). 111–224.

[Ya] 山崎隆雄: ファルマーの最終定理と abc 予想、数学セミナー 2010 年 12 月号。山崎氏の home page にも、「フェルマー予想と abc 予想」という講義ノート及び補足がある。