2010年度代数学賞

寺尾宏明氏「超平面配置の代数と幾何の研究」

超平面配置（hyperplane arrangement）とは，アファイン空間 $\mathbf{A}^l$ 内の有限個の超平面 $H_1, \ldots, H_n$ の合併として表される図形です．アファイン空間と超平面という単純な対象は，それらが組み合わされることにより豊富な数学的対象となります．群論，位相幾何，代数幾何，リー群論，超幾何関数論，特異点論，組みひも群や応用数学など，超平面配置が現れる場面は多く，多岐の分野にまたがって研究されています．寺尾宏明氏は一貫して，超平面配置にかかわる数学に関する研究を様々な視点から行い，いくつもの優れた成果をあげてきました．世界的にみても何らかの意味で超平面配置にかかわっている研究者は多く，寺尾氏はその中でも中心的な役割を果たしています．共同研究者も分野の垣根を超えた多彩な顔ぶれが並んでいます．Orlik 氏と共著の教科書（Orlik, P., Terao, H., Arrangement of Hyperplane, (xviii+pp.325), Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 300, Springer-Verlag, Berline-Heiderberg-New York, 1992）は hyperplane arrangement に関する標準的な教科書となっています．

はじめに，寺尾氏の free arrangement に関する一連の仕事について紹介します．すべて原点を通る arrangement A が free であるとは，A の定義イデアルを保つベクトル場全体のなす加群が多項式環上の自由加群であることをいいます．free という条件は，強い制約です．free arrangement の代表的な例に，Coxeter 群の reflection hyperplane として現れる Coxeter arrangement があります．Coxeter arrangement に代表されるような特殊な arrangement に特有な性質としては，他に補空間の $K(\pi, 1)$-性があります．Coxeter arrangement の $K(\pi, 1)$-性は Brieskorn により予想され，もっと広いクラスである simplicial arrangement の $K(\pi, 1)$-性が Deligne によって示されました．

寺尾氏は，free arrangement のポアンカレ多項式が，有理一次式の積に分解され，その係数が generalized exponent と呼ばれる量によって与えられることを示しました（Terao, H., Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd–Todd–Brieskorn formula, *Invent. Math.* 63 (1981), no. 1, 159–179）．ポアンカレ多項式が有理一次式に分解されるという条件は非常に強く，この条件をみたさない simplicial arrangement が存在し，したがって $K(\pi, 1)$ であり free でない arrangement が存在します．逆に free ならば $K(\pi, 1)$ ではないか，という予想が斎藤恭司氏により提出されました．ポアンカレ多項式が一次の積に分解される arrangement としては，やはり寺尾氏が定義した fiber type arrangement があります（[T1] Terao, H., Arrangements of hyperplanes and their freeness. I, II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 27 (1980), no. 2, 293–312, 313–320）が，これは $K(\pi, 1)$ となります．束論的に定まる supersolvable arrangement

という概念と fiber type であるという性質が同値であるという寺尾氏の結果（Terao, H., Modular elements of lattices and topological fibration, *Adv. in Math.* 62 (1986), no. 2, 135–154）や，supersolvable arrangement は free であるという Jambu–Terao（Jambu, M., Terao, H., Free arrangements of hyperplanes and supersolvable lattices. *Adv. in Math.* 52 (1984), no. 3, 248–258），Stanley による結果より，上記の斎藤予想は確からしいと考えられていました．しかし，最終的に Edelman–Reiner により反例が発見されるという決着をみました．その過程で，deletion-restriction method などの hyperplane arrangement の研究において有効な議論が発見されました．これは，arrangement A の性質を，A からひとつの hyperplane H を除いたもの A' と H への制限 A'' の性質に帰着させるというものです．この代表的な例が上記論文 [T1] で発見された事実で，free arrangement については A, A', A'' のうちの二つが free であれば残りのひとつも free になるというものです．deletion-restriction method はその後の研究にも強力に使われています．

その後，寺尾氏の研究は超平面配置の補集合上の捻れたホモロジー群や超平面配置の超幾何関数へと向かいました．捻れのないホモロジー群は Orlik–Solomon 代数と呼ばれますが，その基底を組み合わせ論的に構成する手法として broken circuit （壊れた回路）の方法が Jambu–Terao，Björner らにより確立されました．捻れがある場合に適用できる手法として β-nbc 基底の方法が Falk–Terao により確立されました．これをきっかけに，正規交叉でない超平面配置に関する超幾何関数，超幾何微分方程式の研究が始まりました．この基底は超幾何微分方程式と相性がよい対数微分形式で，青本，喜多，Orlik 氏らとの共同研究の成果は，Aomoto, K., Kita, M., Orlik, P., Terao, H., Twisted de Rham cohomology groups of logarithmic forms. *Adv. Math.* 128 (1997), no. 1, 119–152 にまとめられています．

β-nbc 基底の他の応用例として，寺尾氏と Douai 氏との共同研究による Varchenko 予想の解決があります．超平面配置の各超平面の定義方程式の複素巾の積によって捻られた twisted cohomology の周期行列の行列式が，定義方程式の cirtical value と部分的オイラー数により表わされるというのが Varchenko の予想です．Varchenko 予想の l-進エタールコホモロジーに対する類似の結果は F. Loeser により示され，また関数をある同値類で考えた時は Loeser–Sabbah により証明されていましたが，組み合わせ論的な困難さが障害となり，最終的な解決に至りませんでした．組み合わせ論的にあいまいさなしに決まる β-nbc 基底，および deletion-restriction method を用いることにより，この予想は解決されました（Douai, A., Terao, H., The determinant of a hypergeometric period matrix. *Invent. Math.* 128 (1997), no. 3, 417–436）.

この他にも，寺尾氏には次のような研究があります．複素一次関数の複素べきによって定まる写像の critical point の数に関する Varchenko の予想（Orlik, P., Terao, H., The number of critical points of a product of powers of linear functions. *Invent. Math.* 120

(1995), no. 1, 1–14），derivationの空間に定義されたHodge filtrationとcontact filtrationの一致（Terao, H., The Hodge filtration and the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. *Manuscripta Math.* 118 (2005), no. 1, 1–9），とそれに関連するmulti-arrangementに対する接触度数をもつベクトル場の加群の研究（Terao, H., Multiderivations of Coxeter arrangements, *Invent. Math.* 148 (2002), 659–574）があります．また，紙屋,竹村両氏とのランキングパタン問題に関する共同研究（Kamiya, H., Orlik, P., Takemura, A., Terao, H., Arrangements and ranking patterns. *Ann. Comb.* 10 (2006), no. 2, 219–235）など，経済と数学にまたがる新たな研究領域としての超平面配置の可能性を伺わせるものもあります.

このように，寺尾宏明氏の超平面配置に関する研究は多岐にわたり数学の多くの分野と関わる優れたものであり，超平面配置の代数的，幾何的研究において中心的な役割を果たしています．代数学賞を受賞するにふさわしい業績です.