

権業善範氏「高次元極小モデル理論の構築とその応用」

権業善範氏は代数幾何学の中の双有理幾何学、とりわけアバンドンス予想 (abundance conjecture) を中心に極小モデル理論の研究をしてきた。

極小モデル予想とは、任意の代数多様体は良い双有理モデル (極小モデル) X を持つという予想である。良いモデルというのは標準因子 (canonical divisor) K_X の曲線との交点数に関する数値的条件で定義される。この予想は、極小モデルの存在という代数多様体の分類の出発点を与えるだけでなく、双有理写像という代数幾何学特有の写像の構造を解析するという意味でも重要である。この予想は一般型の代数多様体の場合を含む重要な場合に証明されているが、完全には未解決であり、フリップ列の終結 (termination) 予想が残っている。

アバンドンス予想とは、数値的に定義されていた極小モデル X が良い幾何学的構造 (ファイバー空間構造 $f: X \rightarrow Y$) を持つという予想である。この構造は、小平邦彦氏による楕円曲面論の高次元化に対応していて、Calabi–Yau ファイバー空間とも呼ばれる。なお、代数幾何学におけるファイバー空間では、ファイバーの連結性だけが仮定されていて、特異ファイバーの存在や次元のジャンプさえも許容されている。

固定点自由化定理の一般化を使うと、アバンドンス予想を示すためには以下の 2 点を証明すれば良いことがわかる。(I) 自然数 m が存在して、 $H^0(X, mK_X) \neq 0$ (大域切断の存在); (II) K_X が数値的に自明でないときには、さらに以下が成立: $\limsup_{m \rightarrow \infty} \dim H^0(X, mK_X) = \infty$ (大域切断が十分たくさんある、だからアバンドンス)。 (I) は非消滅予想とも呼ばれる。(I), (II) 両方とも 3 次元では肯定的に解決されているが、高次元では難しく、なかなか手が出ないのが現状である。(I), (II) をまとめて、「小平次元 = 数値的小平次元」とも表せる。アバンドンス予想は、極小モデルではないような一般の代数多様体に対しても拡張して考えることができる; 数値的小平次元を小平次元と同様に双有理不変量として定義することができるからである (中山昇氏)。こうすれば、アバンドンス予想を極小モデル予想とは独立に考えることができる。

アバンドンス予想を一般次元で証明するためには、次元に関する帰納法を使うのが自然である。代数多様体 X に対する予想を代数多様体と境界からなる対 (X, B) (log pair) に対する予想に拡張し、境界 B (次元が 1 つ低い) での主張を仮定して、 B 上の大域切断を全体 (X, B) にまで延長するという論法である。この場合、 B は一般には可約であるので、元々の代数多様体に関する主張を、(1) log pair に拡張し、さらに (2) 可約な対 (semi-log pair) にまで拡張するという段階が必要になる。

権業氏は一連の論文で、(1) でのアバンドンス予想と極小モデル予想を仮定すれば、(2) でのアバンドンス予想が従うことを証明した。そのために、権業氏は自己同型群の多重標

準表現の有限性という上野健爾氏による 70 年代の定理を (2) の場合に拡張した. この「大域切断の貼り合わせ」に関する結果は, 次元に関する帰納法を機能させるための重要なステップと言える.

残るのは, 境界上に構成した大域切断を代数多様体全体に延長するという問題である. Demailly 氏は B が既約な場合には大沢-竹越の延長定理を拡張して延長問題を考えたが, B が可約な場合にはなかなかうまくいかなかった. 権業氏と松村氏の共同研究はこれに挑戦し, 特異点を持った計量で Lelong 数が消えるようなものの構成に帰着させるというものであった.

以上の結果は標数 0 の体上の代数多様体に関するものであるが, 正標数の体や混標数の環上の代数多様体に関しても同様の理論が期待されており, 権業氏にはその方面の結果もある. 現在標数 0 の極小モデル理論の進展は足踏み状態であるが, 正標数や混標数では F 特異点の理論などに大きな進展がある. 権業氏はこの方面でも活躍している.

極小モデル理論のような大きな予想を研究することは, たとえ完全に解決ができなくても部分的な結果が得られたり, または問題を解くための方法の探究を通して重要な発見があったりするため, 非常に重要かつ有意義である.

代数的ファイバー空間の標準因子は相対的な半正値性を持つ. これは小平楕円曲面論における標準因子公式を一般化したものであり, 以下のように述べられる: 全空間の標準因子 = (底空間の標準因子 + ファイバーの退化から来る境界因子 + ファイバーのモジュライから来る半正値因子) の引き戻し. この性質は, 複素多様体に対しては一般的には成り立たず, 標数 0 の代数多様体特有の現象であり, ファイバーのモジュライ空間の存在と関係していると予想される.

権業氏は半正値性定理やそれを一般化した弱正値性定理をさらに一般化するとともに, これを有理連結性を持つような代数多様体に対して適用して, 全空間の性質から底空間の性質を導くことに応用した. このような論法には, 代数多様体の分類において有用な結果を次々と導くことが期待できる. 有理連結多様体は極小モデル理論の帰結の一つとして得られる代数多様体のクラスであり, 有理多様体や単有理多様体を含むものである. 例えば, 権業氏は有理連結多様体に対しては非消滅予想が成立することを示している. 有理連結多様体の構造の研究はこれから重要性を増すものと思われる.

半正値性定理の状況を一般化して, 代数多様体, 境界因子, 半正値因子 (正確には十分高いモデルで半正値になる因子) からなる三つ組を generalized pair と呼ぶ (pair ではないが). generalized pair は帰納法との相性がよく, Birkar 氏による BAB 予想の証明で重要な役割を果たしたので, log pair のように独自の分野に発展する可能性がある. そこで権業氏は log pair に関する結果を generalized pair に拡張することに地道に取り組んでいて, termination 予想や abundance 予想に使える日が来ることが期待されている.

これら一連の権業氏の研究は日本が世界に誇れる研究であり, 代数学賞にふさわしいも

のである。