

## 越谷重夫氏「有限群のモジュラー表現論の研究」

越谷重夫氏は、有限群のモジュラー表現論において、ブロック理論、森田同値、Scott 加群の Brauer 直既約性、Alperin–McKay 条件など、多岐にわたるテーマで優れた業績を多数発表しています。とくに、有限群のモジュラー表現論における重要な問題である Broué 予想、Donovan 予想、Puig 予想の研究において大きな貢献をしています。

有限群の表現論は、大きく二つの場合に分けられます。標数が 0, あるいは有限群の位数を割らない体上での表現は「通常表現」とよばれ、この場合 Maschke の定理により群環は半単純となり、すべての加群が単純加群の直和に分解されます。これに対して、標数が群の位数を割る体上の表現である「モジュラー表現」では群環は半単純とならず、より複雑な構造をもつ加群の解析が必要となります。歴史的には、Frobenius による指標理論の導入から始まり、Maschke の定理による通常表現論の基礎付け、Brauer によるモジュラー表現論の展開を経て、有限群の表現論は有限群の分類に大きな役割を果たしてきました。モジュラー表現における Brauer の哲学は「正標数  $p$  の体上での有限群の表現は、その  $p$  局所的な表現の情報 ( $p$  部分群やその正規化部分群に関する表現の情報) によって統制される」というものであり、この考え方に基づいて McKay 予想、Alperin の重み予想、Brauer の高さ 0 予想、Broué 予想などが提唱されました。

1980 年代後半に提唱された Broué の予想は、可換不足群をもつブロックが  $p$  局所部分群の対応するブロックと導来圏同値になるという主張であり、有限群のモジュラー表現論における最重要課題の一つとして、越谷氏の研究の中心となるものです。1989 年の Rickard および 1998 年の Rouquier による巡回不足群をもつブロックでの Broué 予想の解決に続き、2002 年に越谷氏は位数 9 の初等可換群を不足群にもつ主ブロックについての Broué 予想の解決を発表しました。巡回不足群をもつブロックは有限表現型であるのに対し、位数 9 の初等可換群を不足群にもつブロックは無有限表現型の wild 型であり、大変大きな成果であるといえます。その後から 2010 年代半ばにかけて、越谷氏は位数 9 の初等可換群を不足群にもつ散在型単純群の非主ブロックに対して、Broué 予想の検証例を多数構成しています。また、Broué 予想や後述の Puig 予想に関する研究において、Scott 加群が Brauer 直既約性をもつことを示すことが重要となりますが、近年の越谷氏の研究では、準二面体 2 群 (2021 年)、リース 2 群 (2021 年) を vertex にもつ Scott 加群の Brauer 直既約性を示すことに成功するなど、予想の解決に向けて大きく貢献する成果を発表し続けています。

$p$  局所的情報がブロックの森田同値類の情報を統制するのではないかという観点で重要な予想として、Donovan 予想、Puig 予想があります。与えられた不足群に対し森田同値、

splendid 森田同値を除いたブロックの数は有限であると主張する予想であり、Broué 予想と並んで有限群のモジュラー表現論における中心的課題の一つとなっています。越谷氏はこれらの予想に関する研究でも優れた成果を得ています。その一つとして、位数 9 の初等可換群を不足群にもつ主ブロックにおける Donovan 予想の解決があげられます。また、近年では、Donovan 予想よりも強い Puig 予想に関し、Lassueur や Sambale らとの国際共同研究により、二面体群 (2020 年)、一般四元数群 (2020 年)、準二面体群 (2022 年) を不足群にもつ主ブロックに対し Puig 予想の解決に成功し、さらに中心拡大に関する理論を整備し、リース 2 群を不足群にもつ主ブロックに関する Puig 予想の解決 (2024 年) にも成功するなど、研究を大きく進展させる重要な成果を得ています。

有限群の表現論は、群環という有限次元多元環の表現論の特別な場合として位置づけられます。モジュラー表現論におけるブロック理論や射影加群の解析は、多元環の表現論における一般的枠組みと深く結びついています。さらに Broué 予想や Donovan 予想は、群環のブロックを森田同値や導来圏同値の観点から分類しようとする試みであり、これは有限次元多元環の表現論における中心的課題とも重なっています。したがって有限群の表現論における越谷氏の貢献は、多元環の表現論やホモロジー代数など周辺分野へも影響を及ぼしているものといえます。

越谷氏は研究者の育成にも精力的に取り組んでおり、多くの学位取得者を輩出しています。自身の学生に限らず、国内外の研究集会で若手研究者等に積極的に助言を行い、その学術的成長を支援してきました。また、国際的な共同研究・研究交流も活発に行い、国内外の研究をつなぐ橋渡し役として重要な役割を果たしてきました。これらの活動を通じ、主導的な立場からこの分野の発展に大きく貢献してきたことは特筆すべき点であります。

以上のように、越谷氏の有限群のモジュラー表現論およびその周辺分野における貢献は非常に大きく、代数学賞受賞にふさわしいものです。