

## 山名俊介氏「保型形式とその $L$ 函数の研究」

保型形式は現代の数論において、最も重要な研究対象の一つである。保型形式自体が興味深い対象であると共に、それに付随する保型  $L$  函数を媒介として、様々な数論的対象物の研究と関連している。

山名俊介氏は、保型形式とその  $L$  函数の研究において、いくつもの顕著な貢献をしてきた。彼自身の研究手法は表現論的であるが、古典理論にも精通していることが彼の強みの一つである。また、彼の論文は数学的表現及び論旨の展開が極めて明快であるという定評がある。

山名氏の業績は多岐にわたるが、その主たるもののいくつかについて簡単に説明する。

保型  $L$  函数の研究においては、保型  $L$  函数の積分表示を発見することが研究の端緒になる場合がほとんどであり、解析接続や極の存在の考察といった解析的性質だけでなく、保型  $L$  函数の特殊値の代数性のような算術的な性質も積分表示から導かれる。Rankin (1939), Selberg (1940) を嚆矢とする Rankin-Selberg method は、有力な積分表示の方法である。  $GL(n) \times GL(m)$  の場合については、1970–80 年代における、Jacquet, Piatetski-Shapiro と Shalika による一連の論文及び Mœglin-Waldspurger (1989) によって理論は一応の完成を見、現在広く応用されている。一方、Rankin-Selberg method に並ぶ主要な積分表示の方法として、doubling method と呼ばれるものがある。これは、1980 年代に Piatetski-Shapiro と Rallis によって導入された、Siegel Eisenstein 級数を用いて、単純古典群の standard  $L$  函数の積分表示を得る方法である。リーマンのゼータ函数が Euler 積に分解するように、保型  $L$  函数は局所体上の局所  $L$  函数のすべての素点にわたる Euler 積として与えられる。有限個を除いた有限素点は不分岐素点であり、不分岐素点上の局所  $L$  函数は、不分岐なデータから組合せ論的に計算される。不分岐素点上の局所  $L$  函数のみの積をとった部分  $L$  函数からも色々わかることはあるが、分岐素点上の局所  $L$  函数を把握することなしには、不完全な理解しかできない。Lapid-Rallis (2005) は、分岐素点における局所  $L$  函数及び局所  $\varepsilon$  因子を、局所  $\gamma$  因子を用いて定義した。山名氏は [7] において、doubling method における局所ゼータ積分から得られる局所  $L$  函数及び局所  $\varepsilon$  因子が、Lapid-Rallis の定義したものと一致することを示し、doubling method による古典群の standard  $L$  函数の局所理論を完結させた。さらに、それらを用いて、大域的テータ対応の非消滅と大域的  $L$  函数の解析的性質（特殊値の非消滅、極の存在）の関係、及び、局所テータ対応における類似の問題を完璧に解明した。Doubling method による積分表示は数論の様々な方面で用いられおり、この結果は現在、多くの重要な局面で応用されている。論文 [7] に先立ち、論文 [6] をはじめとする数篇の論文において、山名氏はテータ対応における最重要公式である Siegel-Weil 公式の、特に四元数ユニタリ群の場合について、深い結果を得ていた。論文 [7] は、これら一連の研究の一つの結実点と言うこともできる。

保型形式の部分群上での積分は、保型形式の周期と呼ばれ、保型  $L$  函数と密接な関係がある。市野篤史氏との共著論文 [2], [3] は、現在の保型  $L$  函数論の中心的課題の一つである、函数等式を中心での値に関する Gan-Gross-Prasad 予想と深く関連した、正規化された周期についての考察を行った重要な論文である。近年の保型  $L$  函数論における最大の結果の一つといって過言でない、Beuzart-Plessis, Chaudouard, Zydor (Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **135** (2022)), Beuzart-Plessis, Chaudouard (Forum Math. Pi **13**

(2025)) による, ユニタリ群の場合の Gan-Gross-Prasad 予想及び市野-池田予想の完全解決においても, 論文 [2], [3] の結果は重要な役割を果たしている.

ある群の保型形式から別の群の保型形式を構成するリフティングの理論は, 保型形式研究の中心的課題の一つである. 山名氏は指導教員の池田保氏による池田リフティングの, 四元数ユニタリ群への拡張を目標に研究活動を開始した. 博士論文は [5] として公刊されたが, この研究に関連して半整数楕円保型形式やジーゲル保型形式についての興味深い結果を得, いくつかの論文を出版した. 池田リフティングについては, 後年, 単著論文 [8] 及び池田氏との共著論文 [4] によって, Hilbert 保型形式への拡張・一般化を証明した. 古典理論の深い理解に根ざした表現論的考察が見事に展開されている.

近年, 山名氏はそれまでの研究の方向をシフトし, Ming-Lun Hsieh 氏との高階数代数群保型形式の岩澤理論, 特に  $p$  進  $L$  関数の構成についての研究を精力的に行っている. これまでに, [1] を含む数篇の論文を出版している. 楕円保型形式の岩澤理論的研究は, 数論にいくつもの重要な帰結をもたらし, 大きな貢献をしてきた. それと同様に, 高階数代数群保型形式の岩澤理論も, 今後の数論の発展に大いに寄与すると期待される. 高階数の場合の困難さは, 保型  $L$  関数の解析的性質を解明する困難さによるところが大きい. その点において, 保型  $L$  関数の解析的性質の研究の第一人者である山名氏と代数的数論の研究の第一人者である Hsieh 氏は, 大変に強力な共同研究チームを構成する組み合わせであるといえる. さらに顕著な研究成果が期待される.

以上に述べたように, 山名俊介氏の保型形式と保型  $L$  関数に関するこれまでの研究業績は極めて顕著であり, これからも更なる発展が期待される. 代数学賞を受賞するのに誠に相応しいものである.

#### 主要論文:

1. M-L. Hsieh; S. Yamana, *Five-variable  $p$ -adic  $L$ -functions for  $U(3) \times U(2)$* . Adv. Math. **476** (2025), Paper No. 110355, 87 pp.
2. A. Ichino; S. Yamana, *Periods of automorphic forms: the case of  $(GL_{n+1} \times GL_n, GL_n)$* . Compos. Math. **151** (2015), 665–712.
3. A. Ichino; S. Yamana, *Periods of automorphic forms: the case of  $(U_{n+1} \times U_n, U_n)$* . J. Reine Angew. Math. **746** (2019), 1–38.
4. T. Ikeda; S. Yamana, *On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms*. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **53** (2020), 1121–1181.
5. S. Yamana, *On the lifting of elliptic cusp forms to cusp forms on quaternionic unitary groups*. J. Number Theory **130** (2010), 2480–2527.
6. S. Yamana, *On the Siegel-Weil formula: the case of singular forms*. Compos. Math. **147** (2011), 1003–1021.
7. S. Yamana,  *$L$ -functions and theta correspondence for classical groups*. Invent. Math. **196** (2014), 651–732.
8. S. Yamana, *On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Hermitian cusp forms*. Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), 5395–5438.