日 本 数 学 会

1989年度年会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

1 9 8 9 年 4 月

於

日本大学理工学部

19.尾和　重義（近畿大理工）　On starlike, convex and close-to-convex of complex order ………… 15

20.尾和　重義（近畿大理工）　Starlikeness of certain integral operator ………… 15
P.G.Todorov(Paissii Hilendarski Univ.)
M.Obradovic(Univ. of Belgrade)

21.尾和　重義（近畿大理工）　Convolution theorems for functions of Sakagushi Type ………… 15

22.谷口　雅彦（京大理）　Green函数の擬等角変分についての注意 ………… 15

23.栗林　章和（中央大）
木村　秀幸（東工大）　Generalized Teichmüller spaces and their applications ………… 15

13:00〜14:20

24.吉田　克明（日大理工）　Local injectivity of Prym maps for some families of compact Riemann surfaces ………… 15

25.加藤　満生（琉球大教育）　AppellのF_4型微分方程式系と同値な線形パッフ形式 ………… 15

26.斎藤　三郎（群馬大工）　Schrödinger equation におけるisometrical identities とinverse formulas ………… 15

27.斎藤　三郎（群馬大工）　Heat equation におけるisometrical identities と inverse formulas ………… 10

14:30〜15:30　特別講演

佐藤　宏樹（静岡大理）　Schottky群とSchottky空間について

4月4日（火）第IV会場

9:30〜12:00

28.石田　　久（京産大理）　Weakly exact differentials and normal operators on open Riemann surfaces ………… 15

29.都丸　　正(群馬大医療技術短大部)　二次元超曲面特異点(Brieskorn型)の巡回商について ………… 15

30.阿部　幸隆（富山大理）　双対条件と双正則写像の拡張問題について ………… 15

31.鈴木　正昭（富山大理）　C^nの凸領域における正則自己写像の反復極限について ………… 10

32.足立　幸信(姫路学院女子短大)
鈴木　昌和（九州大工）　複素多様体上の小林擬距離の退化する集合について ………… 15

33.木村　郁雄（神戸大教養）　正則凸包について ………… 10

34.竹腰　見昭（京大数理研）　Stein多様体上のLiouville型定理 ………… 15

35.大沢　健夫（京大数理研）　L^2調和形式の初等的存在証明 ………… 15

13:00〜14:00

36.Norm Levenberg(Wellesley College)
山口　博史（滋賀大教育）　ロバン函数に関しての不等式について ………… 15

37.渡辺　公夫（筑波大数）　Riemann-Roch thorem for normal isolated singularities ………… 15

38.宮野　俊樹（東工大理）
野口潤次郎（東工大理）　非正曲率多様体への調和写像及び正則写像のモジュライについて ………… 15

14:15〜15:15　特別講演

辻　　元（都立大理）　複素解析幾何へのKähler-Einstein計量の応用について

I

自然数1の無限集合と複素平面のラセン構造

横山重夫　　北本高校

定理1　自然数1は無限集合である。

(証明) 虚数単位 i で表すと自然数1は次の集合になる。

$$1=\{\cdots\cdots i^{-4},\ i^{0},\ i^{4},\ i^{8},\ i^{12},\ i^{16}\cdots\cdots\}$$

これより、自然数1は無限集合である。

問題2　1の4乗根を求めよ。

(解)

$$1^{\frac{1}{4}}=\{\cdots\cdots i^{-4},\ i^{0},\ i^{4},\ i^{8},\ i^{12},\ i^{16}\cdots\cdots\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=\{\cdots\cdots i^{-1},\ i^{0},\ i,\ i^{2},\ i^{3},\ i^{4}\cdots\cdots\}$$

$$\therefore\quad 1^{\frac{1}{4}}=\{\pm 1,\ \pm i\}$$

問題3　i の平方根を求めよ。

(解)

$$i^{\frac{1}{2}}=\{\cdots\cdots i^{-3},\ i,\ i^{5},\ i^{9},\ i^{13}\cdots\cdots\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\{\cdots\cdots i^{-\frac{3}{2}},\ i^{\frac{1}{2}},\ i^{\frac{5}{2}},\ i^{\frac{9}{2}},\ i^{\frac{13}{2}}\cdots\cdots\}$$

$$=\{i^{\frac{1}{2}},\ i^{\frac{5}{2}}\}$$

i を極形式で表わし、ド・モアブルの定理で変形する。

$$i^{\frac{1}{2}}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=(1+i)/\sqrt{2}$$

$$i^{\frac{5}{2}}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-(1+i)/\sqrt{2}$$

$$\therefore\ i^{\frac{1}{2}}=\pm(1+i)/\sqrt{2}$$

定義4．1価虚数単位 j は $j^2=-1$ の関係が成立しない虚数単位である。

例5．定義4より $\cdots j^{-3} \neq j \neq j^5 \neq j^9 \cdots\cdots$ である。

定理6．1価虚数単位 j を底，実数 t を変数とする指数関数 $w=j^t$ のグラフは複素平面上の単位円である。

（証明）複素平面上の単位円の円周上に任意の点Pをとる。点Pの偏角を $\pi t/2$ とすると

$$P=\cos\frac{\pi}{2}t+j\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}\right)^t$$

$$\therefore P=j^t$$

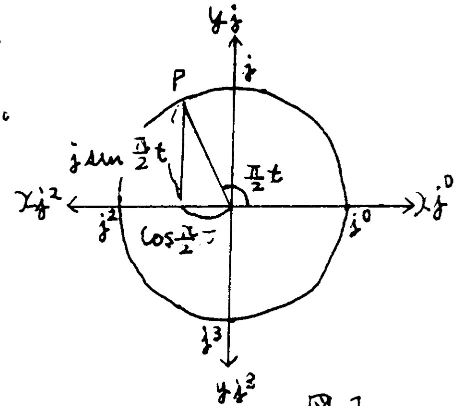


図1

以上より、$w=j^t$ のグラフは単位円の円周である。

定理7　複素平面はラセン構造である。

（証明）変数 t が0から4まで変化すると $w=j^t$ は単位円を一周する。4以上の t についても，t の値が4変化すると $w=j^t$ は単位円を一周する。以上より、複素平面は図2のようにラセン構造をしている。

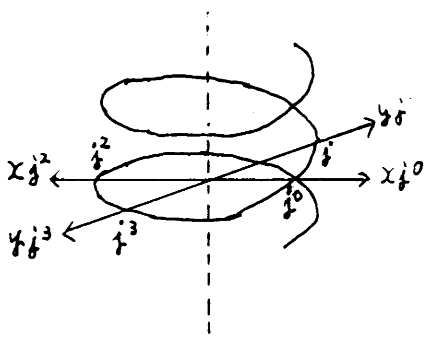


図2

2

On the necessary and sufficient conditions for left(right) Fréchet-differentiability of functions and the corresponding generalized Cauchy-Riemann equations in general hypercomplex extensions of normed linear spaces.

笹山浩良　笹山研究所

$\mathfrak{S}$を実又は複素数体上のassociativeなn次元複素数系の環としe$_1$がprincipal unitであるような単位系(e_1,...,e_n)をもつものとする。又、$E(\mathfrak{S})$,$E'(\mathfrak{S})$を夫々実又は複素線型ノルム空間$\mathbb{B}$,$\mathbb{B}'$の$\mathfrak{S}$-拡大即ち$\mathbb{B}$,$\mathbb{B}'$にassociateされた$\mathfrak{S}$上のhypercomplex linear n-tuple spacesとする。1987年秋の分科会で$E(\mathfrak{S})$の領域Dより$E'(\mathfrak{S})$への函数の左(右)Fréchet可微分性に対する必要条件及びmonogenicly F-differentiabilityに対する必要十分条件を報告した。今回は次の結果をのべる：

定理 $D\subset E(\mathfrak{S})$より$E'(\mathfrak{S})$への函数$f(X)\equiv\sum_{i=1}^{n}u_i(x_1,\ldots,x_n)\,e_i=\sum_{i=1}^{n}e_iu_i(x_1,\ldots,x_n)$がDで左F-可微分なるために必要且つ十分な条件は$u_i(i=1,\ldots,n)$が凡べてDでF-可微分で且つ拡張されたCauchy-Riemann方程式

$$\partial_{x_j}u_k=\sum_{i=1}^{n}\gamma^{k}_{ji}\,\partial_{x_1}u_i\quad(j,k=1,\ldots,n)$$

を満足することである。右F-可微分性に対しても同様。ここに$\partial_{x_k}u_j$，γ^k_{ji}は一昨年秋の時と同一である。

3 平面開集合上の補間点列について

成田淳一郎　　大同工業大学

平面開集合 D 内の点列 $S=\{z_n\}$ に対し，S が有界正則関数族 $H^{\infty}(D)$ に対する補間点列であるかどうかの判定について，その局所性「任意の $z \in \mathbf{C}$ に対しある近傍 U が存在し，$S \cap U$ が $H^{\infty}(D \cap U)$ に対する補間点列ならば，S は $H^{\infty}(D)$ に対する補間点列である」及びその応用として，補集合 $\mathbf{C} \setminus D$ の成分の直径の下限が正であるような開集合 D に対しては，双曲距離を用いた判定条件が得られた．補間点列に対応する定数（constant of interpolation）についても開集合の形状による評価が得られる．

指数型整関数の補間について

4

杉山 宏　NTT通研

指数型整関数 $f(z)$ の Borel 変換を $B_f(\zeta)$ とする.

$B_f(\zeta)$: $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)/\zeta^{n+1}$ より生成される解析関数.

M_f : $B_f(\zeta)$ の存在領域の補集合 $\Rightarrow$ $f(z)$ の spectrum

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} B_f(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta, \quad \Gamma \text{ は } M_f \text{ を含む path.}$$

$\boxed{\text{Carlson の定理}}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} M_f \subset \{\zeta \mid |\mathrm{Im}\,\zeta| < \pi\} \\ f(n) = 0, (n = 0, 1, \cdots) \end{array}\right\} \longrightarrow f(z) \equiv 0$$

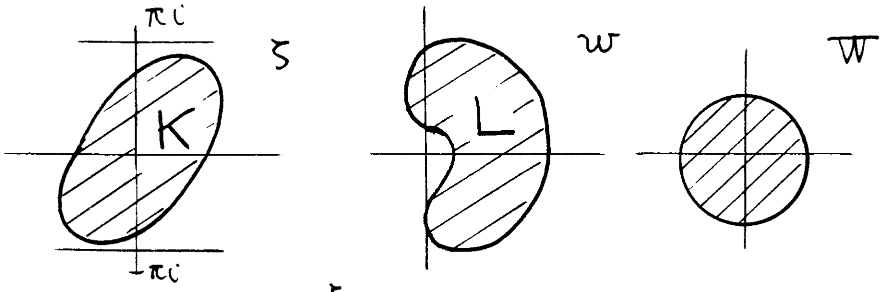
$\boxed{\text{Buck の補間公式}}$ (2)

$$f(z) = \text{ML-}\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{u\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z) u^{n+1}}{\{\log(n+3)\}^{n+1}} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{\{\log(n+2)\}^n}$$

(Mittag-Leffler 総和法)

$$\begin{cases} f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{z}{k} & : \text{Newton 補間公式} \\ \Delta^k f(0) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} f(l) \end{cases}$$

総和法が不要であり, M_f の形に depend した公式を作る.



$\boxed{K: \text{固定}}$ $\quad K \xrightarrow{w=e^{\zeta}} L \;,\quad L^c \xrightarrow[\text{(等角写像)}]{W=\Phi(w)} \{W \mid |W|>1\}$

$\boxed{\text{Faber多項式}}$ [3] $\quad \Phi_n(w) = \{\Phi(w)\}^n$ の多項式部分

$$e^{z\log w} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\Phi_n(w) \;,\quad (w \in L \text{ の或近傍})$$

$$c_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta} \frac{w^z \Phi'(w)}{\{\Phi(w)\}^{n+1}}\,dw \;,\quad (\Delta \text{ は } L \text{ を一周する})$$

$$e^{z\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\Phi_n(e^{\zeta}) \qquad (\zeta \in K \text{ の或近傍}).$$

$M_f \subseteq K$ ならば.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n[f]\, c_n(z)} \Leftarrow \text{補間公式}$$

$$\Lambda_n[f] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} B_f(\zeta)\Phi_n(e^{\zeta})\,d\zeta \;:\; f(0),$$

$\cdots f(n)$ の一次結合.

(1) Boas : Entire functions , Academic press (1954)

(2) Boas-Buck : Polynomial expansions of analytic functions, Springer (1964)

(3) Smirnov-Lebedev : Functions of a complex variable, Iliffe (1968)

単葉関数とディリクレ積分

5

山下愼二　　　　　　都立大学理

開区間$(-\pi, \pi)$で実数値可積分関数ϕが与えられた時、$U=\{|z|<1\}$で正則なϕ外部関数は

$$\exp[*\int\{(e^{it}+z)/(e^{it}-z)\}\phi(t)dt]$$

で定義される。ここに$*\int\cdot dt$は$(-\pi, \pi)$でのtに関する積分平均である。fがUで正則なとき$A(f)=\iint_U|f'(z)|^2/(1+|f(z)|^2)^2dxdy$と書く。更に、fがディリクレ有限とは$\iint_U|f'(z)|^2dxdy<\infty$の時を言う。U内正則単葉で、$f(0)=f'(0)-1=0$を満たす関数族をSとするとき、$f\in S$ならば、$A(f)\leqq\pi$である。各関数$f\in S$は半径に沿って有限な極限$\rho f(t)$を殆ど全ての点$e^{it}$で持つ。各$f\in S$は分解$f(z)=zF(z)$をU内で持つ。ここでFは$\log|\rho f|$外部関数である。更に、

$$\phi_1=\min(\log|\rho f|, 0);\quad \phi_2=-\max(\log|\rho f|, 0)$$

と書く。<u>定理1.　$f\in S$とし、F_kをϕ_k外部関数とすると、F_kは、有界かつディリクレ有限$(k=1, 2)$で$f(z)/z$</u>

$=F_1(z)/F_2(z)$ が成立する。これは次の一般的な定理から得られる。　定理2. もしF がϕ外部関数ならば、A(F) はϕのみで表現される、ある積分♥である。更に次の結果も副産物として得られる。定理3. もしf $\in$ S ならば、A(f)-A(F) は次の積分に等しい:

$$*\int \pi |\rho f(t)|^2/(1+|\rho f(t)|^2)dt.$$

これは円板$\{|z|<|\rho f(t)|\}$ の球面面積の$(-\pi, \pi)$での積分平均に他ならない。　前述の積分♥は

♥$=(\pi/4)(*\int)(*\int)$ ♠$(s,t)dsdt$,　ここで

♠$(s,t)=\{\sin(t/2)\}^{-2}\{\phi(s+t)-\phi(s)\}\times$

$\{$ ♣$(s+t)-$ ♣$(s)\}$ で♣は次の合成関数である。

♣$=\{\exp(2\phi)\}/\{1+\exp(2\phi)\}$.

6

有界でディリクレ積分有限な正則関数の商

山下愼二　　都立大学理

リーマン面R上有理型関数fで

$$\iint_R |f'(z)|^2/(1+|f(z)|^2)^2 dxdy < \infty$$

をみたし、さらに、$\{|z|<\infty\} \setminus f(R)$ が(2次元)ルベーグ測度正であるものの全体をMD(R)とかく。また、R上正則なfで

$$\iint_R |f'(z)|^2 dxdy < \infty$$

であるものの全体をAD(R), さらにAD(R)の関数で有界なものの全体をABD(R)とかく。明らかに、

$$ABD(R) \subset AD(R) \subset MD(R).$$

リーマン面Rでその上の関数族X(R)が複素定数のみからなるものの全体をO_Xとする。 *定理*. $\forall f \in MD(R)$, $\exists g, \exists h \in ABD(R)$, $f=g/h$. この定理から、直ちに、$O_{MD}=O_{AD}=O_{ABD}$. 定理の証明にはグェン・ファン・ウィの結果 (Arkiv för Matematik **17** (1979), 19-27) を使うのみである。 なお、$O_{AD}=O_{ABD}$ は酒井良による。

7

極小曲面のブロック定数

山下愼二　　　都立大理

円板　$D=\{|w|<1\}$ $(w=u+iv)$　から$\mathbf{R}^n$への非定値写像 $x=(x_1, \ldots, x_n)$ が極小曲面Sを定義するとは、各 $x_k (1 \leqq k \leqq n)$ がDで調和で、 $x_u x_v=0, x_u x_u=x_v x_v$ がDで成り立つ時をいう。ここに、 $x_u (x_v)$ は x の $u(v)$ に関する偏微分ベクトルで、積は内積である。Sの点は $P(w)=(w, x(w))$ と表す。Sは $d(P_1, P_2)=\inf_\Gamma \int_\Gamma |x_u(w)||dw|$ を距離とする距離空間である。ここに、 $P_k=P(w_k)$ で Γ はD内で w_1とw_2とを結ぶ長さある曲線を動く。 $\exists P_0 \in S$, $d(P, P_0)<r, P=P(w) \Rightarrow x_u(w) \neq 0$ である様な $r>0$ の上限を $b(x)$ とかく時、 $b_n=\inf\{b(x); |x_u(0)|=1\}$ を n 次元ブロック定数と呼ぶ。関数論でのブロック定数はb_2である。半世紀以上前、E.F. ベッケンバッハは $b_3 \geqq 16^{-1}3^{-1/2}=0.036\ldots$ を示した。<u>定理</u>． $b_n \geqq n^{-1/2}b_2$ $(n \geqq 3)$. 特に、周知の結果： $b_2 > 4^{-1}3^{1/2}$ を使えば、 $b_3 > 0.25$ である。

8

Nevanlinna parametrizations for the extended interpolation problem

髙橋世知子　　奈良女子大 理学部

単位円 $D: |z|<1$ で正則かつ $|f| \leq 1$ である函数 f の全体を $\mathcal{B}$ とする。D 内の高々可算個の点列 $\sigma = \{z_1, z_2, \cdots\}$ 及び各 z_i で与えられた n_i 個の複素数の組 $\{c_{i0}, \cdots, c_{i\,n_i-1}\}$ に対する拡張された補間問題の解 f, 即ち

$$f(z) = c_{i0} + c_{i1}(z-z_i) + \cdots + c_{i\,n_i-1}(z-z_i)^{n_i-1} + O((z-z_i)^{n_i}) \quad (\forall z_i \in \sigma)$$

となる $f \in \mathcal{B}$ の全体を $\mathcal{E}$ とする。

Bijective mapping $\pi: \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ が D で正則な函数 P, Q, R, S を用いて

$$\pi(g) = \frac{Pg+Q}{Rg+S} \qquad (\forall g \in \mathcal{B})$$

と表わされるとき この π を $\mathcal{E}$ の (Nevanlinna) parametrization と呼ぶ。$\mathcal{E}$ の parametrization の全体を $\mathcal{P}$ とする。

(1) $\pi \in \mathcal{P}$ を表わす P, Q, R, S は次の性質を持つ:

(a) $S \neq 0$;

(b) $|P/S| < 1$, $|Q/S| < 1$, $|R/S| < 1$;

(c) $Q/S \in \mathcal{E}$;

d) $\dfrac{PS-QR}{S^2} = U \cdot \prod_{z_i \in \sigma} \left(\lambda_i \dfrac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z} \right)^{n_i}$, $\begin{cases} \lambda_i = 1 & (z_i = 0) \\ \lambda_i = -|z_i|/z_i & (z_i \neq 0) \end{cases}$

$U \in \mathcal{B}$, $U \neq 0$ in D と表わされる.

(2) $\mathcal{E}$ が少くとも2つの解を持つならば $\mathcal{E}$ の parametrization が存在する。([2], [4])

$\bar{D}$ の Möbius transformation 全体のつくる群を $\mathcal{G}$ とすると

$$\tau^*(\pi)(g) = \pi(\tau \circ g) \quad (\tau \in \mathcal{G},\ \pi \in \mathcal{P},\ g \in \mathcal{B})$$

によって $\mathcal{G}$ は $\mathcal{P}$ に作用しているが

(3) 任意の π, $\hat{\pi} \in \mathcal{P}$ に対して $\hat{\pi} = \tau^*(\pi)$ となる $\tau \in \mathcal{G}$ が1つ唯1つ存在する.

文献

[1] J.B.Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic press, 1981.

[2] Nevanlinna, Über beschränkte analytischer Funktionen, Ann. Acad. Sci.ser A 32(1929)No.7

[3] S. Takahashi, Extension of the theorems of Carathéodory-Toeplitz-Schur and Pick, Pacific J. Math., 136 (1989)

[4] S. Takahashi, Extended interpolation problem for bounded analytic functions, 人間文化研究科年報(奈良女子大学) 第4号(1988)

劣調和関数の非可積分性

鈴 木 紀 明　　　　広島大・理

$\mathbb{R}^n$ $(n\geqq 2)$ 内の領域 D に対して $\delta_D(x) = \mathrm{dist}(x, D^c)$ とし, 正数 p に対して、$a(p) = \max\{(n-1)(1-p), 0\}$ とおく.

<u>定理 1</u>. D は有界 $C^{1,1}$-領域, $p>0$ とする. D 上の非負劣調和関数 s が

$$\int_D s(x)^p \delta_D(x)^{-1-a(p)}\,dx < \infty$$

を満たすならば $s \equiv 0$ である. 更に, $0<p\leqq(n-2)/(n-1)$ の場合は, s を非負値と限らなくても, $|s|$ が上記の可積分条件を満たせば, $s \equiv 0$ を帰結できる.

<u>注意1</u>. $a(p)$ をより小さい数に置き換えることはできない.

<u>注意2</u>. s を非負調和関数に限れば, $a(p)$ の代わりに $\min\{a(p), p\}$ として主張は成立する.

領域 D が外部円条件を持つとは，任意の $x\in\partial D$ に対して，開球 B で $B\subset D^c$，$\overline{B}\cap\partial D=\{x\}$ となるものが存在するときをいう．（半径は x に依存してもよい．）また，境界点 $x_0\in\partial D$ が Lipschitz 条件を満たすとは，x_0 の近傍 N で $N\cap D$ が Lipschitz 領域となるものが存在するときをいう．

定理 1 の系として次を得る．

定理 2．D を外部円条件を持ち，更に，境界が可算個の点を除いて Lipschitz 条件を満たす有界領域，$0<p\leqq 1$ とする．D 上の非負調和関数 h が

$$\int_D h(x)^p\delta_D(x)^{-1-b(p)}\,dx<\infty$$

を満たすならば $h\equiv 0$ である．但し，$b(p)=\min\{1,a(p)\}$．

注意3． 定理 1，2 の主張は，Hölder 連続な係数を持つ一様楕円型作用素 L（但し，$L1\leqq 0$）に関する L-(劣) 調和関数としてもそのまま成立する．

接境界値を持たない調和関数

相川弘明　　群馬大学 工学部

古典的な Fatou の定理は f が単位円板 $D = \{|z| < 1\}$ 上の有界正則関数であるとき f は円周 ∂D 上の殆どすべての点で非接境界値を持つことを示している。Fatou の定理はいろいろな方向に一般化されている。一つの方向は f の仮定を緩めることであり、例えば f が有界または非負調和関数ならば Fatou の定理の結論が成立する。一方、境界への近づき方に関して Littlewood [3] は 1927 年次を示した。C_0 を ∂D に内側から 1 で接する任意の曲線とし、C_θ で C_0 を θ だけ原点中心に回転した曲線を表す。このとき

定理 A. 単位円板 D 上の有界調和関数 h で

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} h(z)$$

が**殆どすべての** $\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$, に対して振動するものが存在する。さらに、$D$ 上の有界正則関数 f で

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} f(z)$$

が**殆どすべての** $\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$, に対して振動するものが存在する。

上の定理の後半は前半からすぐに従うことに注意しよう。実際 $f = \exp(h + ih^*)$, h^* は h の共役調和関数とおけばよい。この後半に着目して、1957 年 Lohwater-Piranian [4] (cf. Collingwood-Lohwater [2; Theorem 2.22]) は次を示した。

定理 B. 単位円板 D 上の Blaschke 積 B で

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} B(z)$$

が**すべての** $\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$, に対して振動するものが存在する。

領域 D が<u>外部円条件</u>を持つとは，任意の $x \in \partial D$ に対して，開球 B で $B \subset D^c$，$\overline{B} \cap \partial D = \{x\}$ となるものが存在するときをいう．（半径は x に依存してもよい．）また，境界点 $x_0 \in \partial D$ が <u>Lipschitz 条件</u>を満たすとは，x_0 の近傍 N で $N \cap D$ が Lipschitz 領域となるものが存在するときをいう．

定理１の系として次を得る．

<u>定理 ２</u>．D を外部円条件を持ち，更に，境界が可算個の点を除いて Lipschitz 条件を満たす有界領域，$0 < p \leqq 1$ とする．D 上の非負調和関数 h が

$$\int_D h(x)^p \delta_D(x)^{-1-b(p)} \, dx < \infty$$

を満たすならば $h \equiv 0$ である．但し，$b(p) = \min\{1, a(p)\}$．

<u>注意３</u>．定理１，２ の主張は，Hölder 連続な係数を持つ一様楕円型作用素 L（但し，$L1 \leqq 0$）に関する L-(劣)調和関数としてもそのまま成立する．

接境界値を持たない調和関数

相川弘明　　群馬大学 工学部

古典的な Fatou の定理は f が単位円板 $D=\{|z|<1\}$ 上の有界正則関数であるとき f は円周 ∂D 上の殆どすべての点で非接境界値を持つことを示している。Fatou の定理はいろいろな方向に一般化されている。一つの方向は f の仮定を緩めることであり、例えば f が有界または非負調和関数ならば Fatou の定理の結論が成立する。一方、境界への近づき方に関して Littlewood [3] は 1927 年次を示した。C_0 を ∂D に内側から 1 で接する任意の曲線とし、C_θ で C_0 を θ だけ原点中心に回転した曲線を表す。このとき

定理 A. 単位円板 D 上の有界調和関数 h で

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} h(z)$$

が殆どすべての $\theta, 0\le\theta\le 2\pi,$ に対して振動するものが存在する。さらに、D 上の有界正則関数 f で

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} f(z)$$

が殆どすべての $\theta, 0\le\theta\le 2\pi,$ に対して振動するものが存在する。

上の定理の後半は前半からすぐに従うことに注意しよう。実際 $f=\exp(h+ih^*)$, h^* は h の共役調和関数とおけばよい。この後半に着目して、1957 年 Lohwater-Piranian [4] (cf. Collingwood-Lohwater [2; Theorem 2.22]) は次を示した。

定理 B. 単位円板 D 上の Blaschke 積 B で

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} B(z)$$

がすべての $\theta, 0\le\theta\le 2\pi,$ に対して振動するものが存在する。

Blaschke 積は有界正則関数なので、これは定理 A の後半の改良になっている。それならば定理 A の前半、つまり調和関数に対してはどうかと考えるのは自然であろう。一見すると定理 B で得られた有界正則関数の実部または虚部をうまく組み合わせて求める調和関数が得られるように思われるが、実際はそうではない。定理 A の注意にも述べたように、調和関数から正則関数を作るのは straightforward であるが逆は難しいのである。また Blaschke 積の絶対値の log は Green ポテンシャルであるので、定理 B は調和関数というよりは、振動する Green ポテンシャルの存在を示しているとも考えられる。そこで Littlewood のように単位円板上の Poisson 積分に戻って考えて定理 A の前半が改良できることを示す。

定理. 単位円板 D上の有界調和関数 h で

$$\lim_{|z|\to 1, z\in C_\theta} h(z)$$

がすべての $\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$, に対して振動するものが存在する。

この定理は 1980 年 Barth[1] が提出した問題の解答になっている。また定理の高次元への一般化についても述べる。

文　献

[1] D. A. Brannan and J. G. Clunie, Aspects of contemporary complex analysis, Academic Press, 1980.

[2] F. E. Collingwood and A. J. Lohwater, The theory of cluster sets, Cambridge University Press, 1966.

[3] J. E. Littlewood, On a theorem of Fatou, J. London Math. Soc. 2 (1927), 172-176.

[4] A. J. Lohwater and G. Piranian, The boundary behavior of functions analytic in a disk, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, no.239 (1957).

Properties of certain multivalent functions

斎藤　斉　　群馬工業高専

A_p を単位円板 $U=\{z : |z|<1\}$ 内で正則な関数

$$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_n z^n \quad (p\in N=\{1,2,3,\cdots\})$$

の族とする。この関数族について若干の性質を導く。

定理1　$f(z)\in A_p$ とする。

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\right\}>\frac{p!}{(p-j)!}\alpha \quad (0\leqq\alpha<1)$$

ならば、

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f^{(j-1)}(z)}{z^{p-j+1}}\right\}>\frac{p!}{(p-j+1)!}\,\frac{2(p-j+1)\alpha+1}{2(p-j)+3}$$

が成り立つ（$j=1,2,\cdots,p$）。

定理2　$\lambda\geqq 0$, $f(z)\in A_p$ とする。また、

$$F_\lambda(z)=(1-\lambda)f(z)+\lambda z f'(z)$$

とする。このとき

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{F_\lambda^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\right\} > \alpha \quad \left(0 \leqq \alpha < \frac{p!(1-\lambda+p\lambda)}{(p-j)!}\right)$$

ならば

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f^{(j)}(z)}{z^{p-j}}\right\} > \frac{(p-j)!\,2\alpha + p!\,\lambda}{(p-j)!\,(2-\lambda+2p\lambda)}$$

が成り立つ（$j=1, 2, \cdots, p$）。

12

Fuchs群の極限集合のHausdorff次元に関する一評価。

仲田正躬　山形大学理学部

Γを、複素平面の単位開円板に作用する，有限生成Fuchs群で放物的変換を含まないものとする。原点を中心とするΓのDirichlet基本領域に附随したΓの対称な生成系をΓ_0とする。C. Series（そしてR. Bowen）は有限集合Γ_0の右側無限直積 $\Gamma_0 \times \Gamma_0 \times \cdots$ のある閉部分集合上の"ずらし"を用いて，Γの極限集合のHausdorff次元をエルゴード論に関するある量で表した。

ここでは，ある種のFuchs群について，このようなC. Series（そしてR. Bowen）の結果から導かれたエルゴード論に関するある量が，より具体的な式によって評価出来ることを示す。

なお，Γの極限集合のHausdorff次元の評価については，例えばA. F. Beardon (1966)にあるが，ここで得た式はBeardonのそれよりもよい評価式であることがわかる。

13 連結な elliptic harmonic space における Hervé の位相と Constantinescu-Cornea の位相の一致について

森 中 央　　大阪工大 一般教育科

可算基をもつ調和空間Xにおける正優調和関数全体のつくる convex cone 上にはいろいろの位相が導入された。Xが Brelot space のときは Hervé の位相 τ_H と Mokobodzki の graph convergence の位相 τ_G および関数の reduite から生成される位相 τ_R があるが τ_G と τ_R は Bauer space においても定義され、これらが一致することが T. Barth (1970) によって示された。また、τ_G は standard H-cone S 上でも定義され、これが S 上の natural topology τ_{nat} に一致することが N. Boboc, G. Bucur, A. Cornea (1981) によって示されている。さらに、Xが Doob convergence axiom をみたすとき、U Schirmeier (1983) は τ_{nat} が Constantinescu-Cornea の位相 τ_{cc} に一致することを示した。

我々は、τ_H が X が連結な elliptic

harmonic space ~~上~~の正優調和関数の全体のつくる cone 上で定義され，これが τ_{cc} に一致することを示す.

14

Some notes on algebroid solutions of the differential equation $(w')^n=P(z,w)/Q(z,w)$

戸 田 暢 茂 (名 工 大)

Let $a_0,\ldots,a_p$; $b_0,\ldots,b_q$ $(p,q\in N,\ a_p\cdot b_q\neq 0)$ be polynomials without common zero and put

$$P(z,w)=\sum_{j=0}^{p} a_j w^j\ ,\quad Q(z,w)=\sum_{k=0}^{q} b_k w^k\ .$$

We suppose that the differential equation

$$(w')^n=P(z,w)/Q(z,w)\quad (n\in N)$$

is irreducible over the field of rational functions and that this equation has a ν-valued transcendental algebroid solution $w=w(z)$ in $|z|<\infty$. It is known that $p\geqq n+q$. We obtain the following theorems.

Theorem 1. ∞ is a Picard exceptional value if and only if $p=n+q$.

Theorem 2. For $\alpha\in C$, the following three conditions are equivalent:

1) $\delta(\alpha)>0$;

2) α is a Picard exceptional value;

3) $P(z,w)=(w-\alpha)^n P_1(z,w)$, $P(z,\alpha)\not\equiv 0$.

Theorem 3. For $\beta \varepsilon C$ such that $Q(z,\beta) \not\equiv 0$,

$\Theta(\beta)=0$ if and only if $P(z,\beta) \not\equiv 0$.

Theorem 4. If the solutions of the equation

$Q(z,w)=0$ in w are simple,

$$\nu \geqq \max(n, nq/2)+1.$$

15 Admissible Solutions of the Schwarzian Differential Equation $\{w, z\}^m = R(z, w)$

石崎 克也 東京高専

代数的常微分方程式

(1) $\Omega(z, w, w', \ldots, w^{(k)}) = \sum_{k\in I} a_k(z) w^{i_0} w'^{i_1} \ldots, w^{(k)i_k} = 0$

に対する Malmquist-Yosida type の定理を見つけることを問題意識とした研究のなかで、すでに Binomial 方程式については Steinmetz-Rieth [1] によって結論づけられ、その他の形の方程式についても（G-L予想などの問題も含め）Toda, Laine らの先生方により扱われ種々の結果が出されている。

2階の方程式を扱ったものとして Steinmetz [3] が、3階のものとして Steinmetz [2] がある。この中で彼は $\{w, z\} = q(z)$ の解の factorization について Schwarzian の性質を用いて論理を展開している。

ここでは、$P(z, w)$, $Q(z, w)$ を有理型函数を係数とする w についての多項式とし Schwarzian differential equation

(2) $\{w, z\}^m = \dfrac{P(z, w)}{Q(z, w)} = R(z, w)$

について述べることにする。

THEOREM 1 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ を異なる複素数とする。(2) が admissible solution（許容解）$w = w(z)$ を持てば、

$$\deg R + 2m \sum_{j=1}^{k} \delta(a_j, w) \leqq 4m .$$

Th.1 は R の次数と w の defect に関係があることを示している。もしも w が2つの Picard の 除外値をもてば $\deg R = 0$ である 例えば、定数係数 Riccati 方程式 $w' = w^2 + aw + b$ ($a^2 - 4b \neq 0$) の超越解は、2つの除外値をもち Schwarzian differential equation $\{w, z\} = 2(b - \frac{a^2}{4})$ を満たす。(2) で P と Q の次数は Schwarzian の性質のより、等しいと仮定してよい。また、w' の零点と Q の零点が等しい

ことから、Q(z, w) の形は限定される。

THEOREM 2　(2) が許容解をもつならば Q(z, w) は次のいずれかである。$(\tau_i \neq \tau_j,\ i \neq j)$

$$(w + b_1(z))^{2m}\ (w + b_2(z))^{2m},\quad (w^2 + a_1(z)w + a_0(z))^{2m},$$
$$(w + b(z))^{2m},\quad (w + b(z))^{2m}(w - \tau_1)^m(w - \tau_2)^m,$$
$$(w - \tau_1)^m(w - \tau_2)^m(w - \tau_3)^m(w - \tau_4)^m,$$
$$(w - \tau_1)^m(w - \tau_2)^{2m/3}(w - \tau_3)^{2m/6},$$
$$(w - \tau_1)^{2m/3}(w - \tau_2)^{2m/3}(w - \tau_3)^{2m/3},$$
$$(w - \tau_1)^m\ (w - \tau_2)^{m/2}(w - \tau_3)^{m/2}\ \text{or}\ \tau.$$

THEOREM 3　(2) が許容解を持ち、R が w のみの多項式ならば、(2) は適当な一次分数変換によって形のいずれかに帰着される。

$(\tau_i \neq \tau_j,\ i \neq j)$

(E1)　$$\{u, z\} = C\,\frac{(u - \sigma_1)(u - \sigma_2)(u - \sigma_3)(u - \sigma_4)}{(u - \tau_1)(u - \tau_2)(u - \tau_3)(u - \tau_4)},$$

(E2)　$$\{u, z\}^3 = C\,\frac{(u - \sigma_1)^3(u - \sigma_2)^3}{(u - \tau_1)^3(u - \tau_2)^2(u - \tau_3)},$$

(E3)　$$\{u, z\}^3 = C\,\frac{(u - \sigma_1)^3(u - \sigma_2)^3}{(u - \tau_1)^2(u - \tau_2)^2(u - \tau_3)^2},$$

(E4)　$$\{u, z\}^2 = C\,\frac{(u - \sigma_1)^2(u - \sigma_2)^2}{(u - \tau_1)^2(u - \tau_2)(u - \tau_3)},$$

(H)　$$\{u, z\} = C\,\frac{(u - \sigma_1)(u - \sigma_2)}{(u - \tau_1)(u - \tau_2)},$$

(R)　$$\{u, z\} = C.$$

References

[1] J.V.Rieth, Doctoral Dissertation, 1986.

[2] N.Steinmetz, Funkcialaj Ekvacioj, 24 (1981), 307-315.

[3] N.Steinmetz, Results in Math., 10 (1986), 152-219.

16　負の係数をもつある正則関数族について

関 根 忠 行　　日大薬

U を単位円板，A(α)を U 内で正則な関数

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (e^{i\alpha} a_n \geqq 0; |\alpha| < \frac{\pi}{2})$$

からなる関数族とする。

A(α,β) を A(α) の関数で

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha} f'(z)\right] > \beta \qquad (0 \leqq \beta < \cos\alpha)$$

をみたす関数からなる関数族とする。

この関数族 A(α,β) について２，３の結果を報告する。これらの結果において，α = 0 とすると Sarangi-Uralegaddi[1] が得た結果となる。

[1] S.M.Sarangi and B.A.Uralegaddi, The radius of convexity and starlikeness for certain classes of analytic functions with negative coefficients.I,Atti.Accad. Naz.Lincei Rend.Sc.fis.mat.nat.65(1978),38-42.

17 On a certain class of analytic functions involving Hadamard products

斎藤 斉・尾和重義　群馬高専・近畿大理工
Milutin Obradović　Univ. of Belgrade

Uを単位円板、AをU内で正則な関数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の族とする。 $S^*(\alpha)$, $K(\alpha)$ をそれぞれ位数αの星型関数、凸型関数からなるAの部分族とする。

次にTを

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geqq 0)$$

なる形の関数からなるAの部分族とし、またそれぞれ

$$T^*(\alpha) = T \cap S^*(\alpha)$$
$$C(\alpha) = T \cap K(\alpha)$$

とおく。 さらに

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^k (n-\alpha) a_n \leqq 1-\alpha$$

を満たす関数からなるTの部分族を$T^*(k, \alpha)$とおく

$(0 \leqq \alpha < 1,\ k \in N_0 = \{0, 1, 2, \cdots\})$。

また $f(z) \in A$ に対して

$$D^0 f(z) = f(z),\quad D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z),$$
$$\cdots,\ D^k f(z) = D(D^{k-1} f(z)) \quad (k \in N = \{1, 2, 3, \cdots\})$$

とする。ここでは、関数族 $T^*(\alpha)$, $C(\alpha)$, $T^*(k, \alpha)$ についていくつかの結果を導く。

定理 1　　$f_j(z) \in T^*(\alpha_j)$ ならば

$$Re\left\{\frac{D^m F_j(z)}{D^{m-1} F_j(z)}\right\} > \alpha^* \quad (z \in U)$$

である。ここで

$$f_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \quad (a_{n,j} \geqq 0)$$
$$F_j(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{n,j}\right) z^n,\quad \alpha^* = \max_{1 \leqq j \leqq m} \{\alpha_j\}$$

とする。

定理 2　　$f(z) \in T^*(k, \alpha)$ ならば

$f(z) \in T^*(k-j, \beta(j, \alpha))$ である。

ここで、$\beta(j, \alpha) = 1 - \dfrac{1-\alpha}{2^j(2-\alpha) - (1-\alpha)} \quad (1 \leqq j \leqq k)$。

18

ある正則関数族の星型半径と凸型半径について

谷口彰男・Milutin Obradović　日大文理, Univ. of Belgrade
布川護・尾和重義　群馬大教育, 近畿大理工

$A = \{ f \mid f(z)$ は $|z|<1$ で正則かつ $f(0)=0,\ f'(0)=1 \}$,

$N = \{ f \mid f(z)$ は $|z|<1$ で正則かつ $f(0)=1 \}$

とし $0 \leqq \alpha < 1$, $0<\beta$, $0<r \leqq 1$ に対し

$S_r^*(\alpha) = \{ f \in A \mid |z|<r$ で $\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \}$,

$K_r(\alpha) = \{ f \in A \mid |z|<r$ で $\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \}$,

$N(\beta) = \{ f \in N \mid |z|<1$ で $|\arg f(z)| < \frac{\pi}{2}\beta \}$

とする。ここで特に、$S^* = S_1^*(0)$, $K = K_1(0)$ とする。

このとき、われわれは次の結果を得たので報告する。

定理 1. もし $f \in A$ が、ある $g \in S^*$ に対し $f/g \in N(\beta)$ ならば、$f \in S_{r_0}^*(\alpha)$ である。ただし

$$r_0 = \frac{1+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\beta}}{1+\alpha}$$

である。この結果は sharp である。

定理 2. もし $f \in A$ が、ある $g \in K$ に対し $f'/g' \in N(\beta)$ ならば、$f \in K_{r_0}(\alpha)$ である。ただし r_0 は定理 1 で与えられる r_0 である。この結果は sharp である。

19

ON STARLIKE, CONVEX AND CLOSE-TO-CONVEX OF COMPLEX ORDER

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Uを単位円板，AをUで正則な関数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

の族とする。ここでは

complex order b の starlike function からなるAの部分族 $S_0^*(b)$，

complex order b の convex function からなるAの部分族 $K_0(b)$，

complex order b の close-to-convex function からなるAの部分族 $C_0(b)$ が導入される。

特に，$b=1-\alpha$ $(0\leqq\alpha<1)$ のとき，これらの関数族はそれぞれ今までに研究された関数族 $S^*(\alpha)$, $K(\alpha)$, $C(\alpha)$ になる。

ここでは、関数族 $S_0^*(b)$, $K_0(b)$, $C_0(b)$ に関して得られた最近の結果を報告する。

20 STARLIKENESS OF CERTAIN INTEGRAL OPERATOR

Shigeyoshi Owa (Kinki University)
P. G. Todorov (Paissii Hilendarski University)
M. Obradović (University of Belgrade)

Uを単位円板，AをUで正則な関数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の族とする．Rを $\mathrm{Re}\{f'(z)\} > 0 \ (z \in U)$ を満たす関数$f(z)$からなるAの部分族，$F_c(z)$を，$f(z) \in A$に対して，

$$F_c(z) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1} f(t)\,dt \quad (c \geqq 0)$$

で定義される integral operator とするとき、次の結果が得られる．

［定理］ $c \geqq 0$, $0<\gamma<1$, $0<\delta<1$ とし，c, γ, δ が $\tan\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) \leqq \frac{c+1}{\gamma}$,

$\delta + \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\delta = \gamma$, $\frac{\delta\pi}{2} \leqq \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{c}\right)$

を満たすものとする．このとき，$f(z) \in R$ ならば $F_c(z) \in S^*$ である．ただし，S^* は星型関数からなるAの部分族とする．

21

CONVOLUTION THEOREMS FOR FUNCTIONS OF SAKAGUCHI TYPE

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Zhworen Wu (Tongji University)

Uを単位円板，AをUで正則な関数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

の族とする。$f(z)\in A$に対して

$$D^0 f(z)=f(z),$$

$$D^1 f(z)=Df(z)=zf'(z),$$

$$f_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}f(\varepsilon^{\nu}z)\quad(k\in N)$$

とし，

$$f_k^{\lambda}(z)=\left(\lambda D+(1-\lambda)D^0\right)f_k(z)$$

とする。この$f_k^{\lambda}(z)$を用いて，関数族

$S_n^{(k)}(\lambda,h)$　および　$C_n^{(k)}(\lambda,h)$

が導入され，これらの関数族について得られた最近の結果を報告する。

22

Green函数の擬等角変分についての注意.

谷口雅彦　　　京大理

まず第一変分に関しては、有限型リーマン面に対するSontag-Guerreroの公式や米谷氏による一般の面に対する公式が知られている。米谷氏は極の近傍での無変形条件を課したが、これは除くことができ、更にSontag-Guerreroの公式を含む次の一般公式が得られる。

定理　リーマン面 R の部分面 S_0 $(\notin O_G)$ と擬等角写像 : $S_0 \hookrightarrow R$ の族 $\{f_t : t \in I\}$ が与えられたとする。q に極をもつGreen函数を $g_t(\cdot, q)$ とし、$\phi_t(q) = dg_t(\cdot, q) + i\,{}^*dg_t(\cdot, q)$ とおく。f_t のベルトラミ係数を μ_t とする。

$$|f_t - id|_z = O(t), \quad \|\mu_t\|_\infty = O(t) \quad (t \to 0)$$

とする（$|\cdot|_z$ は各局所変数 z に関する絶対値）と、

$$\begin{aligned} g_t(p,q) - g_0(p,q) = {} & \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \iint_{S_0} \phi_0(p) \cdot \mu_t \wedge {}^*\phi_0(q) \\ & - \mathrm{Re}\{ a_q(z(p)) \cdot |f_t(p) - p|_z + a_p(z(q)) \cdot |f_t(q) - q|_z \} \\ & + O(t^2) \qquad\qquad (t \to 0) \end{aligned}$$

(ただし $\phi_0(*) = a_*(z)dz$ とし、評価は $S_0 \times S_0 -$ {対角線} 上で広義一様である。

次に第二変分については Garabedian–Schiffer や山口氏の公式があるが、米谷氏は擬等角変形を用いてロバン定数の多重優調和性(山口の定理)の別証明を与えた。実は更に Garabedian–Schiffer 型の、次の公式も成り立つ。

定理 R から他の R_t $(t \in I)$ の上への擬等角写像 f_t のベルトラミ係数を $\mu(t)$ と書く。$\{\mu(t)\}$ は極 q の近傍での無変形条件をみたし、$\mu(0) = 0$, $\|\mu(t)\|_\infty < 1$ $(t \in I)$ とする。更に、μ は I 上可微分で $\frac{d\mu}{dt}$ も $t=0$ で可微分とすると、各 R_t 上の q でのロバン定数 $\gamma(t)$ は $t=0$ で二回微分可能で、$\phi_t = \phi_t(q)$ として、

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}(0) = \frac{-1}{2\pi} \mathrm{Re} \iint_{R_0} \left\{ \frac{d^2\mu}{dt^2}(0) \cdot \phi_0 \wedge {}^*\phi_0 + \frac{d\phi_t}{dt}(0) \wedge {}^*\!\left(\frac{d\phi_t}{dt}(0)\right) \right\}$$

23

generalized Teichmüller spaces and their applications

栗　林　暲　和　　中央大
木　村　秀　幸　　東工大

Riemann面 S とその自己同型群 $\mathrm{Aut}(S)$ の部分群 G との対 (S, G) を考える。(S, G) と (S', G') が位相的同値であるとは orientation-preserving な位相写像 $f: S \to S'$ と isomorphism $\gamma: G \to G'$ がつぎの図

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S' \arrow[d, "\sigma'"] \\
S \arrow[r, "f"'] & S'
\end{tikzcd}
$$

がすべての $\sigma \in G$ に成立つように存在する場合をいう。f が conformal であるとき (S, G) と (S', G') とは等角的同値であるという。その同値類を $\langle S, G \rangle$ と表す。$\mathfrak{F}(S_0, G_0) = \{\langle S, G \rangle \mid \langle S, G \rangle \sim \langle S_0, G_0 \rangle\}$ とおき、$\mathfrak{F}(S_0, G_0)$ から "generalized" Teichmüller 空間を作る。つぎにこの空間を既に得られている種数 $g=5$ の Riemann面の自己同型群について得られる空間に応用する。

24

Local injectivity of Prym maps for some families of compact Riemann surfaces

吉田克明　日本大学理工学部

$\tilde{R}$, R を compact Riemann 面, $\pi: \tilde{R} \longrightarrow R$ を double covering とする。$\tilde{R}$, R の genus を $\tilde{g}$, g とし, $2n$ 個の分岐点を持つとすると, R-H relation より $\tilde{g}=2g+n-1$. $J(\tilde{R})$, $J(R)$ を $\tilde{R}$, R の Jacobi varieties, divisor class 上の写像から induce される自然な onto homo. $Nm: J(\tilde{R}) \longrightarrow J(R)$ に対して, Prym variety $P=(\ker Nm$ の連結成分$)$, 及び同種写像 $i_*: J(R) \times P \longrightarrow J(\tilde{R})$ が自然に定義される。大雑把にいえば P は $J(\tilde{R})/J(R)$ を表現しているといえる。$n=0, 1$ の場合はかなり詳しく研究されている (Mumford, Fay), $n \geqq 2$ については, まだよく調べられていないように思われる。そこで, いくつかの典型例についての結果を報告する。

(1) $\tilde{R}: y^4=x(x-1)(x-t)$ (genus 3), $R: y^2=x(x-1)(x-t)$ (genus 1)

(2) $\tilde{R}: y^6=x(x-1)(x-t)$ (genus 4), $R: y^3=x(x-1)(x-t)$ (genus 1)

(3) $\tilde{R}: y^4=x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$ (genus 6)

$R: y^2=x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$ (genus 2)

(1), (2) は $n=2$, (3) は $n=3$ の例になっている。

結果: (1)の場合は parameter t が Prym variety に現われない。(2), (3)の場合は, t 及び, t_1, t_2, t_3 が Prym variety に parameters として反映する。特に(3)では t_1, t_2, t_3 が独立の parameter となる。

これは直接周期行列を計算してもほぼわかる。しかし (3) については t_1, t_2, t_3 の独立性は証明できない。parameters の Prym variety への影響を explicit に調べる為に Kodaira-Spencer map $\kappa: T_{S,0} \longrightarrow H^1(\tilde{R}, \mathcal{T}_{\tilde{R}})$ を計算した。ここで, $T_{S,0}$ は parameter space の tangent space, $\mathcal{T}_{\tilde{R}}$ は $\tilde{R}$ の tangent sheaf である。

次に 各々の場合に canonical な homology basis を見い出し, $\tilde{R}$ の period matrix, すなわち $J(\tilde{R})$ を計算する。また second order の transformation を作用させて, P を定義する period matrix を具体的に決定する。

25

Appell の F_4 型微分方程式系と同値な線形パッフ形式

加藤 満生　　　　琉球大学教育学部

Appell の F_1 ,F_2 ,F_3 型の微分方程式系は，線形パッフ形式にかけることが知られているが，ここでは F_4 型の微分方程式系も $dv=Qv$，$Q=\sum Q_j \, d\log(f_j)$，Q_j は定数行列，f_j は一価または二価関数，と書けることを報告し，その一つの応用として F_4 のある reducible な系と F_1 の系の（一変数の quadratic transformation にあたる）関係を示す.

26 Schrödinger equation における isometical identities と inverse formulas

齋藤三郎 群馬大・工

再生核を用いる積分変換の一般論の視点から、具体例として heat equation における isometrical identities と inverse formulas について結果を得ていたが、林 仲夫氏によって偏微分方程式の立場から、興味深い解釈と応用が展開されつつある。そこで、林氏の研究との比較についてふれた後、我々の研究の延長線上で、Schrödinger の方程式における具体的な結果について報告する：

任意に固定された $t > 0$ と $n \geqq 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{0} |F(\xi)|^2 (-\xi)^n d\xi < \infty$$

なる関数の積分変換

$$u(x,t) = \frac{1-i}{2\sqrt{2\pi bt}} \int_{-\infty}^{0} F(\xi) \times$$

$$\exp\left\{ \frac{i}{4bt}(x-\xi)^2 \right\} (-\xi)^n d\xi \quad (b > 0),$$

任意に固定された $t > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2 \ e^{a^2 \xi^2} \, d\xi < \infty \quad (a > 0)$$

なる関数の積分変換

$$u(x,t) = \frac{1 - i}{2\sqrt{2\pi b t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \times$$

$$\exp \left\{ \frac{i}{4bt} (x - \xi)^2 \right\} d\xi$$

における isometrical identities と inverse formulas 等が、複素解析の視点から論じられる。

27　Heat equation における isometrical identities と inverse formulas

齋藤三郎　群馬大・工

林 仲夫氏の研究の影響で、既に得られていた結果の一般化:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 \; e^{A\xi^2+B\xi} \, d\xi$$

$$= \frac{4\pi t \sqrt{\frac{1}{2t} - A}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-B^2}{4\left(\frac{1}{2t} - A\right)}\right) \times$$

$$\iint_{\mathbb{C}} |u(z,t)|^2 \exp\left\{\left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{4t^2\left(\frac{1}{2t} - A\right)}\right)x^2\right.$$

$$\left. - \frac{Bx}{2t\left(\frac{1}{2t} - A\right)} - \frac{y^2}{2t}\right\} dxdy$$

$$(1 > 2At,\ B: \text{real})$$

が与えられるとともに、

$$\int_0^t |F(\xi)|^2 \, d\xi < \infty$$

なる関数の積分変換

$$u(x,t) = \int_0^t F(\xi) \frac{x \, e^{\frac{-x^2}{4(t-\xi)}}}{2\sqrt{\pi}\,(t-\xi)^{\frac{3}{2}}} \, d\xi$$

と

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi,s)|^2 (t-s)^{-(\nu+\frac{1}{2})} \times$$

$$e^{-\frac{a^2}{8(t-s)}} d\xi ds < \infty \quad (\nu > 0,\ a > 0)$$

なる関数の積分変換

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,s) \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \times$$

$$e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-s)}} (t-s)^{-(\nu+\frac{1}{2})} e^{-\frac{a^2}{8(t-s)}} d\xi ds$$

における isometrical identities と inverse formulas が、複素解析的な視点から論じられる。

Schottky群とSchottky空間について

佐藤 宏樹　静岡大学・理学部

Schottky群はKlein群の中で最も簡単な代数的構造及び幾何学的構造を持っている．それにもかかわらずSchottky群の発展はKlein群に比べ遅々たるの感を免れ得ない．そのSchottky群のまわりも近年少しざわつき始め，Klein群以外の研究者による研究も目に付くようになってきた（e.g. Phillips−Sarnak [13]）．最近のSchottky群の研究は1967−68年のMaskit [11]とChuckrow [4]の仕事を出発点としている．そして，その後の発展はSchottky空間の境界の研究と深くかかわっているように見える．本講演においてはSchottky空間の境界に焦点を当てつつ，これまでの研究の経過及び現状について述べる．尚，記号及び用語の意味は講演中に説明する．

§1.　Schottky空間とその境界

Maskit [11]，Chuckrow [4]からMaskit [12]までのSchottky群，Schottky空間及びその境界について

Klein群と密接に関係している結果を列挙する.

1. <u>Maskit [11] の結果 (Schottky群の特徴付)</u>

Gが有限生成, purely loxodromic, freeなKlein群ならば, GはSchottky群である.

2. <u>Chuckrow [4] の結果</u>

(i) Schottky空間$\mathfrak{S}_g$はY_gにおいてopen connectedである. (ii) Schottky空間の境界$\partial\mathfrak{S}_g$上の群はg個の元により生成されたdiscreteでfreeな群でellipticな元は含まない. (iii) $\partial\mathfrak{S}_g$上の群はcuspであるか, 又はKlein群ではないかである.

3. <u>Marden [10] の結果</u>

古典的Schottky空間$\mathfrak{S}_g^0$の境界上の群はKlein群である. これと2.より次のことが分る: Schottky群は必ずしも古典的Schottky群ではない.

4. <u>Zarrow [25] の結果</u>

古典的Schottky空間$\mathfrak{S}_g^0$はconnectedである.

5. <u>Jørgensen－Marden－Maskit [9] の結果</u>

古典的Schottky空間$\mathfrak{S}_g^0$の境界上の群は幾何学的有限なKlein群である.

双曲空間$\mathbb{H}^3$に作用させるとき その基本領域の境界が有限個の多面体からなる.

6. <u>Maskit [12] の結果</u>

Gをg個の元で生成された幾何学的有限で free な群とする．このとき，(i) Gが parabolic な元を含まないならば，$G \in \mathcal{S}_g$．(ii) Gが parabolic な元を含むならば，Gは$\partial \mathcal{S}_g$の accessible point である．(i), (ii) より次のことが分る．幾何学的有限で free な Klein 群は$\overline{\mathcal{S}_g}$上にある．

§2. Augmented Schottky space

ここでは Schottky 空間にその境界の一部を付け加えた空間，即ち nodes 持ちの Riemann 面を表す点を付け加えた空間（augmented Schottky space）について考える．まず，Schottky 空間に global な座標を導入することから始める．これに関して Bers [1] は non-dividing nodes を持つ Riemann 面を表す global な座標を，Schottky 群の生成元の traces と固定点を用いて導入した．しかし，この方法では dividing nodes を持つ Riemann 面を表すことはできない．そこで Sato [16, 18] は生成元の traces と固定点の cross-ratios を用いて dividing nodes を持つ Riemann 面をも表す一般的な座標を導入した．Rodriguez [14, 15] は Schottky type の群に対しこの Sato の結果を

拡張した．また，Gerritzen-Herrlich [6] は Sato と同じ方法で extended Schottky space に座標を導入した．この座標を用いることにより次の結果が得られる．

1. Sato [19] の結果（Uniformization Theorem）

S を genus g の nodes 持ち，又は nodes なしのコンパクトな Riemann 面とする．このとき適当な basic system of Jordan curves $\tilde{\Sigma}$ と，$\tilde{\Sigma}$ に関する augmented Schottky space $\hat{\mathcal{S}}_g(\tilde{\Sigma})$ の点 τ があって $S(\tau)=S$ である．

2. Sato [20] の結果

G を固定された marked Schottky 群とする．$\tilde{\Sigma}$ を G に対する固定された basic system of Jordan curves とする．点 $\tau\in\delta^{I,J}\mathcal{S}_g(\tilde{\Sigma})$ を与える．ここで，$I\supset I(J)\neq\phi$ である．このとき，次の様な点列 $\{\tau_n\}\subset\mathcal{S}_g(\tilde{\Sigma})$ が存在する：
$$\tau_n\to\tau\ ,\qquad S(\tau_n)\to S(\tau^*)\quad(n\to\infty).$$
ここで，τ^* は τ からある方法によって得られた点である．

次に augmented Schottky space の fiber space 上の保型形式に関して述べる．non-dividing nodes のみ持つ場合は Bers [1]，そして dividing nodes（但し，standard system of Jordan curves の場合）を持つ場合に対しては Sato [17] の結果がある．

3. Sato [17] の結果

$\check{\Sigma}$ を standard system of Jordan curves とする. $g \geqq 2$, $q \geqq 2$ を整数とする. $\tau_0 \in \partial^{I,J}\mathcal{S}_g(\check{\Sigma})$ とする. このとき, 次の性質(i)−(v)を持つ analytic subvariety $Z \subset \mathcal{S}_g^{I,J}(\check{\Sigma})$ と, $s=0,1,2,\cdots,2g-3$ それぞれに対し $d=(2q-1)(g-1)$ 個の正則関数 $f_{s,i}(\tau,z)$, $(\tau,z)\in \sum_{t=0}^{2g-3}\mathfrak{F}_t\mathcal{S}_g^{I,J}(\check{\Sigma})$ が存在する: (i) それぞれの $J' \subset J$ に対し, $Z \cap \partial^{J'}\mathcal{S}_g^{I}(\check{\Sigma})$ は空集合であるか, 又は $\partial^{J'}\mathcal{S}_g^{I}(\check{\Sigma})$ 内の pure codimension 1 の集合であるかである. (ii) $\tau_0 \notin Z$. (iii) $T \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ に対し $S_s(\tau)=S_t(\tau)$ かつ $G_t(\tau)=T\,G_s(\tau)\,T^{-1}$ とする. このとき, $z \in \Omega'(G_s(\tau))$ に対し $f_{s,i}(\tau,z)=f_{t,i}(\tau,T(z))\,T'(z)^q$ $(i=1,2,\cdots,d)$ である. (iv) $i=1,2,\cdots,d$ に対し, $\hat{f}_i(\tau,\hat{z})$ $(\tau\in\mathcal{S}_g^{I,J}(\check{\Sigma}),\ \hat{z}\in S(\tau))$ を $f_{s,i}(\tau,z)$ の $S(\tau)$ への射影とする. このとき, $\hat{f}_i(\tau,\hat{z})$ は $S(\tau)$ 上の regular q-微分である. (v) これらの q-微分 $\hat{f}_i(\tau,\hat{z})$ は $\tau \notin Z$ のとき, そのときのみ1次独立である.

§3. その他の話題

ここでは古典的Schottky空間及び古典的Schottky群について最近の結果を述べる.

1. §1で述べたように，Schottky群は必ずしも古典的Schottky群ではない．Zarrow [25] の古典的でないSchottky群の例は有名であったが，その群は古典的Schottky群であるということが最近 Sato [22] によって指摘された．$g=2$ の場合でさえ，古典的Schottky空間の形については殆んど何も分ってはいない．real type の古典的 Schottky 空間に関しては Sato [21, 23] の仕事がある．特に第I typeの群については，どのようなとき古典的 Schottky群 (= Schottky群) となるか，freeな群となるか，discreteな群となるかなどが調べられている (Sato [24])．この方面の最近の H. Yamamoto の結果も興味深いものがある．

2. 次に古典的 Schottky群に関する Phillips - Sarnak, Brooks, Doyleの最近の仕事を紹介する．彼らは次の問題を hyperbolic space の Laplacian のスペクトルと関連づけて考察した：n 次元の古典的 Schottky群の limit set Λの Hausdorff 次元はいかほどか？

(1) Phillips - Sarnak [13] の結果

$n>2$ のとき，$\dim\Lambda < n-C_n$ となる正の定数 C_n が存在する．

注意. (i) $n=2$ の場合は, Phillips - Sarnak の方法は適用できない. (ii) $n=1$ の場合は成り立たない.

(2) Brooks [2]の結果 ($n=2$ の場合)

Apollonian packing から得られた円の任意有限個の集まりに対しては, $\dim \Lambda < 2 - C_2$ となる正の定数 C_2 が存在する.

(3) Doyle [5] の結果 ($n=2$ の場合の解決)

$\lambda_0(H^3/G)$ を H^3/G 上の Laplacian のスペクトルの最小値とする. このとき, 任意の古典的 Schottky群 G に対し $\lambda_0(H^3/G) \geq L_2 > 0$ となる定数 L_2 が存在する. この結果と Patterson の結果及び Sullivan の結果を一緒にすれば次の結果が出る: $\dim \Lambda < 2 - C_2$ となる正の定数 C_2 が存在する

これらの他にも Brooks [3] や Hejhal [8] の興味ある仕事がある.

References

[1] L.Bers, Automorphic forms for Schottky groups, Advances in Math. 16 (1975), 332-361.

[2] R.Brooks, The spectral geometry of the Apollonian packing, Comm.Pure and Appl. Math. 38 (1985), 357-366.

[3] R.Brooks, On the deformation theory of classical Schottky groups, Duke Math. J. 52 (1985), 1009-1024.

[4] V.Chuckrow, On Schottky groups with applications to Kleinian groups, Ann. of Math. 88 (1968), 47-61.

[5] P.G.Doyle, On the bass note of a Schottky group, Acta Math. 160 (1988), 249-284.

[6] L.Gerritzen and F.Herrlich, The extended Schottky space, J.reine angew. Math. 389 (1988), 190-208.

[7] L.Gerritzen and M.van der Put, Schottky groups and Mumford Curves, Lecture Notes in Math. 817, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1980.

[8] D.Heihal, On Schottky and Teichmüller spaces, Advances in Math. 15 (1975), 133-156.

[9] T.Jørgensen, A.Marden and B.Maskit, The boundary of classical Schottky space, Duke Math. J. 46 (1979), 441-446.

[10] A.Marden, Schottky groups and circles, Contributions to Analysis, Academic Press, New York, 1974, 273-278.

[11] B.Maskit, A characterization of Schottky groups, J. Analyse Math. 19 (1967), 227-230.

[12] B.Maskit, On free Kleinian groups, Duke Math. J. 46 (1981), 755-765.

[13] R.Phillips and P.Sarnak, The Laplacian for domains in hyperbolic space and limit sets of Kleinian groups, Acta Math. 155 (1985), 173-241.

[14] R.Rodriguez, On Schottky-type groups with applications to Riemann surfaces with nodes I, Complex Variables 1 (1983), 279-291.

[15] R.Rodriguez , On Schottky-type groups with applications to Riemann surfaces with nodes II, Complex Variables 1 (1983), 293-310.

[16] H.Sato, On augmented Schottky spaces and automorphic forms, I, Nagoya Math. J. 75 (1979), 151-175.

[17] H.Sato, On augmented Schottky spaces and automorphic forms, II, Nagoya Math. J. 88 (1982), 79-119.

[18] H.Sato, Introduction of new coordinates to the Schottky space — The general case —, J. Math. Soc. Japan 35 (1983), 23-35.

[19] H.Sato, Augmented Schottky spaces and a uniformization of Riemann surfaces, Tôhoku Math. J. 35 (1983), 557-572.

[20] H.Sato, Limits of sequences of Riemann surfaces represented by Schottky groups, Tôhoku Math. J. 36 (1984), 521-539.
[21] H.Sato, Classical Schottky groups of real type of genus two, I, Tôhoku Math. J. 40 (1988), 51-75.
[22] H.Sato, On a paper of Zarrow, Duke Math. J. 57 (1988), 205-209.
[23] H.Sato, Classical Schottky groups of real type of genus two, II, in preparation.
[24] H.Sato, Discreteness of real two-generator free groups, to appear in Analytic Functions Theory of One Variable (Yang et al.,ed), Longman.
[25] R.Zarrow, Classical and non-classical Schottky groups, Duke Math. J. 42 (1975), 717-724.

marked Schottky group $G = \langle A_1, \dots, A_g \rangle$ ordered

$G \sim G' \Leftrightarrow \exists T \in \text{Möb} ;\ A_j' = T A_j T^{-1},\ 1 \le j \le g.$

$\{\text{marked Schottky grp}\}/\sim \ = \mathcal{S}_g$.

classical G とは Jordan domain = disk.

$\mathcal{S}_g \supset \mathcal{S}_g^{\circ} = \{\text{classical } G\}/\sim$.

$G < \text{Möb}$,

G : discrete $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} A_n \in G,\ A_n \to I \\ \Rightarrow \exists n_0 \le \forall n,\ A_n \equiv I \end{array} \right.$

$\Uparrow \quad \not\Downarrow$

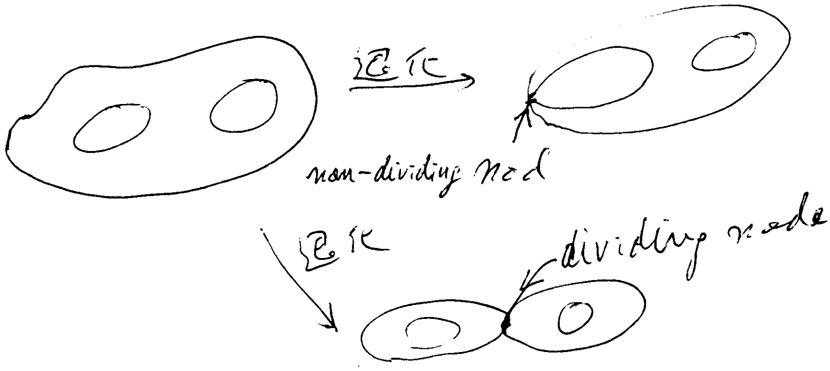
G : discont. on $X \subset \mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall K \subset X, \text{ cpt.} \\ \#\{A \in G ;\ A(K) \cap K \ne \phi\} < \infty \end{array} \right.$

$G = \left\{ \dfrac{az+b}{cz+d} ;\ ad-bc = 1,\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \right\}$

Picard群は discrete だが、discont. でない (on $X \ne \phi$ open)

G : Schottky grp は有限生成, purely loxodromic, free, Kleinian gr.

1. Maskit [11] (1967)



28

Weakly exact differentials and normal operators on open Riemann surfaces.

石田 久 (京産大理)

Rは Green関数を持つ Riemann面, R^* は R の Royden compact化, Δ はその harmonic boundary とする. Δ が有限個の互いに素な compact subset $\delta_1,\ldots,\delta_n$ の和で表せる時, $(P)=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ は Δ の (finite) partition であるという.

R 上の2乗可積分な実調和微分のなす Hilbert 空間を Γ_h と表し, Dirichlet 積分有限な generalized harmonic measure の微分で生成される Γ_h の部分空間を $\Gamma_{\hat{hm}}$ と表す. また, δ_j で 1, $\Delta-\delta_j$ で 0 となる Dirichlet 積分有限な generalized harmonic measure $(1\leqq j\leqq n)$ の微分で生成される Γ_h の部分空間を $(P)\Gamma_{\hat{hm}}$ と表す.

R 内の relative cycle γ が, R のある開集合 G の相対境界 ∂G に向きを含めて一致し, $\overline{\partial G}\cap\Delta=\phi$ となるとき γ はweakly dividing cycle という. さらに $\bar{G}\cap\Delta\cap\delta_j\neq\phi$ ならば $\bar{G}\cap\Delta\supset\delta_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ となるとき γ は (P)-weakly dividing cycle という. ただし閉包は R^* でとるものとする.

ほとんどすべての weakly (または (P)-weakly) dividing cycle γ にそって周期を持たないような Γ_h の微分を weakly (または (P)-

weakly) exact harmonic differential といい，その全体のなす部分空間を Γ_{hwe}（または (P)Γ_{hwe}）と表す．次の直交分解が分かる．

定理１． $\Gamma_h = \Gamma_{\widehat{hm}} + {}^*\Gamma_{hwe} = (P)\Gamma_{\widehat{hm}} + {}^*(P)\Gamma_{hwe}$.

$\bar{V}$ を R の閉局所円板で f は ∂V 上の実解析関数とする．

定理２． つぎの（１)～(３）をみたす $u \in HBD(R-V)$ が唯一つ存在する．

（１） $u|_{\partial V} = f$.

（２） $R-V$ 上で $u = v + p$ と表せる．ただし，$dv \in \Gamma_{\widehat{hm}}$（または (P)$\Gamma_{\widehat{hm}}$）で，p は Dirichlet potential.

（３） ほとんどすべての weakly（または (P)-weakly) dividing cycle $\gamma \subset R - \bar{V}$ に対して $\int_\gamma {}^*du = 0$.

定理２の u を，$\hat{L}_1(f)$（または (P)$\hat{L}_1(f)$)，と表すとき

定理３． $f \to \hat{L}_1(f)$（または (P)$\hat{L}_1(f)$）は normal operator である．

29

二次元超曲面特異点(Brieskorn型)の巡回商について

都丸 正　　函数論

$(X, 0)$ を、$0 \in \{x_0^{a_0}+x_1^{a_1}+x_2^{a_2}=0\} \subset \mathbb{C}^3$ なる三変数 Brieskorn型の多項式 で定義される孤立特異点とし、G を $g=(e_\ell^{i_0}, e_\ell^{i_1}, e_\ell^{i_2})$ なる元で生成される巡回群とする、ただし $e_\ell = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\ell}}$ とする。このときGの $\mathbb{C}^3$ 上への作用を $g\cdot(x_0, x_1, x_2) = (e_\ell^{i_0}x_0, e_\ell^{i_1}x_1, e_\ell^{i_2}x_2)$ で与えるとき、 $a_0 i \equiv a_1 i \equiv a_2 i \mod (\ell)$ なる条件が満たされれば、GはX上へ作用し、X／Gは $\pi(0)$ のみで2次元正規特異点をもつ（ $\pi: X \longrightarrow X/G$）。しかもX／Gは $\mathbb{C}^*$ ー作用を持つ。よって、Ｐｉｎｋｈａｍより $(X/G, \pi(0))$ の座標環である有限生成正規次数付き環は $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(Y, \mathcal{O}(kD))\cdot t^k$ なる形に書ける。但し、Yは非特異代数曲線,DはY上Qー係数因子。

定理　上の $(X/G, \pi(0))$ に対し、Dは次のようになる：

$$D = E + \sum_{i=0}^{2} \frac{p_i}{q_i} D$$

。ただし、q_i は a_i の約数。ここで $Y = (X-(0))/\mathbb{C}^*/G$ とし、EはY上整係数因子。

証明は　Ｏｒｌｉｋ－Ｗａｇｒｅｉｃｈ，藤木　による議論を用いてなされる。また、その議論から $a_0, a_1, a_2, i_0, i_1, i_2$ から q_i, p_i $(i=0,1,2)$ を計算するｎｕｍｅｒｉｃａｌ ａｌｇｏｒｉｓｍを与えることが出来る。なお、Gはｒｅｆｌｅｃｔｉｏｎをもたないという仮定は不要である。なぜならHをｒｅｆｌｅｃｔｉｏｎの生成する部分群、$\bar{G}$ をG／Hとするとき X／Gは $\bar{X}/\bar{G}$ に同型になる。ただし $\bar{X} = \{x_0^{b_0}+x_1^{b_1}+x_2^{b_2}=0\}$ とし b_i は a_i の 約数 。X／G　の ｍｉｎｉｍａｌ ｒｅｓｏｌｕｔｉｏｎ の例外集合の ｗｅｉｇｈｔｅｄ ｄｕａｌ ｇｒａｐｈ は星型になるが、このとき、上の定理及び、ｍｉｎｉｍａｌ resolutionの一意性によりminimal resolutionのgraphの枝の長さはmax（a_0, a_1, a_2）以下となり、ℓをいくら大にしても枝の長さはそれ以上とならない。また、Gがtrivialな場合central curveの種数、及び自己交点数を与える公式はOrlik−Wagreich [1] において与えられているが、Gがnon−trivialな場合も類似の公式を与えることが可能である（cf [2]）。なお、2−次元以上においても類似な性質がいえることをDemazure's constructionを用いて考察する。n+1−変数多項式 $f \in \mathbb{C}[x_0, \cdot\cdot, x_n]$ に対し、$(X, 0) = \{f = 0\}$ は原点でisolated singularityを持つとする。Gを上のような巡回群する。さらに、$\omega = \frac{dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n}{\partial f / \partial x_i}$ なる $X - \{0\}$ 上のholomorphic differential formを考える。

命題 上の状況において次は同値。

(1) X／G：Gorenstein,

(2) ω：G−invariant.

これから（X, 0）を始めのようにBrieskorn型のものにとるとX／GのGorenstein性のnumericalな判定ができる。これから、上のような構成により non−Gorenstein singularity でhyper−surface singularityの巡回商となっている多くの実例を得る。また、δ_m−種数 が 0 or 1 なる2−dim nomalsingularity で$\mathbb{C}^*$−作用を持つものは、（X, 0）としてsimple elliptic singularity $\widetilde{E}_8$（定義式として必ずしもBrieskorn型を仮定しない）の上記の様な巡回群の対角型の作用による商として得られることを注意しておく。

30

双対条件と双正則写像の拡張問題について

阿部幸隆　　富山大・理

Dを$\mathbb{C}^n$の滑らかな境界をもつ有界擬凸領域とする．$L^2(D)$でD上の二乗可積分関数の空間を表わし，$W^s(D)$ $(s>0)$をソボレフ空間とする．$f\in L^2(D)$はL^2-内積$\langle\cdot, f\rangle$により$W^s(D)$の双対空間の元とみなせる．そのようにみなした$L^2(D)$を$L^{-s}(D)$と表わし，そのノルムを$|||\cdot|||_{-s}$とする．任意の$f\in L^2(D)$に対し

$$|||f|||_s := \sup_{\substack{g\in L^{-s}(D)\\ |||g|||_{-s}=1}} |\langle f, g\rangle|$$

とおく．$|||f|||_s<\infty$のときfは$L^{-s}(D)^*$の元とみなせる．

$H^\infty(\overline{D}) := \{f\in C^\infty(\overline{D})\ ;\ f\text{は正則}\}$ とおく．

定理．D_1，D_2を$\mathbb{C}^n$の滑らかな境界をもつ有界擬凸領域とする．固有正則写像$f: D_1\longrightarrow D_2$が

(*) $u\cdot H\circ f\in L^{-s}(D_1)^*$ for $\forall s>0$, $\forall H\in H^\infty(\overline{D_2})$

を満たせば，fは$\overline{D_1}$まで滑らかに拡張できる．とくにfが双正則写像のときには，$\overline{D_1}$まで微分同型に拡張できる．ここで，uはfのヤコビアンとする．

次の命題により，定理は条件Rの場合を含むことがわかる，

命題．D_1，D_2は定理と同じとする．D_1が条件Rを満たせば，すべての固有正則写像 $f: D_1 \longrightarrow D_2$ は条件(*)を満たす．

系．D_1，D_2は定理と同じとする．双正則写像 $f: D_1 \longrightarrow D_2$ が $|f|^2 \in C^\infty(\overline{D_1})$ を満たせば，fは$\overline{D_1}$から$\overline{D_2}$への微分同型に拡張できる．

条件(R) $^\forall s$, $^\exists m$ $P: W^{s+m}(D) \to W^s(D)$, bdd.

$\Longleftarrow\ P(C^\infty(\overline{D})) \subset H^\infty(\overline{D})$

31

$\mathbb{C}^n$の凸領域における正則自己写像の反復極限について

鈴木正昭　　富山大学・理学部

Dを$\mathbb{C}^n$内の有界凸領域とし, $\mathcal{H}(D) = \mathrm{Hol}(D, D)$にはコンパクト一様収束位相を与えておく。

$f \in \mathcal{H}(D)$に対し $f^m = f^{m-1} \circ f$ を fのm回反復とよぶ. $\mathrm{Fix}(f) = \{z \in D ; f(z) = z\}$とおく。さらに$\Gamma(f) = \overline{\{f^m\}}$, $\Gamma'(f) = \{\{f^m\}$の sub-sequencial limits の全体$\}$ とする.

前に次のような問題を私は考えた;「$\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$のとき$\Gamma'(f)$の任意の元$\varphi$は境界値写像(i.e. $\varphi(D) \subset \partial D$)か?」(M. Suzuki: Kodai Math J. 10 (1987)).

M. Abate も同じような問題を考えているが彼の証明には誤りがある(Math. Z. 198 (1988))

前には部分的な解しか与えられなかったが, 今回上の問に肯定的に答えることができることを報告する。

32 複素多様体上の小林擬距離の退化する集合について

足立幸信　姫路学院女短大
鈴木昌和　九州大学工学部

Xを~~コンパクト~~複素多様体，MをXの領域で$\overline{M}=X$なるものとする。Xの点pがMに関する limiting nonhyperbolic point であるとは，$\exists q \in X$, $p \neq q$, $\exists p_j \in M$, $\exists q_j \in M$ s.t. $p_j \to p$, $q_j \to q$, $\lim_{j\to\infty} d_M(p_j, q_j) = 0$ なることをいう。ここにd_MはM上の小林擬距離である。XのMに関する limiting nonhypb. point 全体を$S_M(X)$とおく。$S_M(X)$がXの閉集合であることは容易にわかる。

SをXの analytic subset とする。Mが hyperbolically imbedded modulo S in X とは$S_M(X) \subset S$となることである。このときSを含む勝手な analytic subset S'に対してもMは hypb. imbd. mod S' in Xとなる。そこで$S_M(X)$が空でなく，ある analytic subset に含まれるとき，$S_M(X)$を含む最小の

analytic subset S をとり、M は hypb. imbd. mod S minimaly in X と呼ぶことにする。

多様体上の閉集合に対し、q 位擬凹集合（q は非負の整数）という概念が上田氏によって定義されている。（63年秋期特別講演）
すると、次の定理が成立する。

［定理1.］ $S_M(X)$ は 1位の擬凹集合である。

［系.］ S を X の analytic curve とし、M が hypb. imbd. mod S minimaly in X とすると、
$S = S_M(X)$.

［定理2.］ 系の状況において、S の任意の既約成分の種数は 1 以下である。

上記定理の証明は Ahlfors の被覆面の理論と、Royden の方法を使って行なう。

33

正則凸包について

木村郁雄　　神戸大・教養

Xを$\mathbb{C}^n$内の正則領域とする。$\{X_t\}_{t\in I}$, $(I=(0,1))$ が次の条件をみたすXの部分領域の族であるとする。

1) 各X_tは正則領域

2) $t<t'$ ならば $X_t \Subset X_{t'}$

3) $X=\bigcup_{t\in I} X_t$ および $X_t=\bigcup_{t'<t} X_{t'}$, $(t\in I)$

4) $\bigcap_{t<t'} X_{t'} = X_t$, $(t\in I)$

このとき、次のことが成り立つ。

<u>補題</u>　集合 $J=\{t\in I \mid \bigcap_{t<t'} X_{t'} \neq \overline{X_t}\}$ は第1類の集合である。

<u>定理</u>. 各$t\in I$に対して、$\bigcap_{t<t'} X_{t'}$はXにおいて正則凸な集合である。

<u>系</u>. 各$t\in I-J$に対して$\overline{X_t}$はXにおける正則凸な集合である。

これらのことは、Stein多様体の族についても成り立つ。

34

Stein多様体上のLiouville型定理

竹腰見昭

京大数理研
（阪大教養）

$(A, ds_A^2) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\mathbb{C}^n, ds_e^2)$ を $m \geq 1$ 次元連結閉部分多様体とする。但し ds_e^2 は $\mathbb{C}^n$ 上の Euclid 計量で $ds_A^2 = \iota^* ds_e^2$ とする。

$n(A, r) := \mathrm{Vol}(A \cap B(r), ds_A^2)/r^{2m}$

とおくと $n(A,r)$ は r に関して非減少する函数である。この講演では次の結果を報告する

定理 $(A, ds_A^2) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\mathbb{C}^n, ds_e^2)$ に対して

$$(*) \qquad \int_\delta^\infty \frac{dt}{t\, n(A,t)} = \infty$$

がある正数 δ に対して成立する時、次のLiouville型定理がA上成立する

α) (A, ds_A^2) 上には非定数有界調和函数は存在しない

β) $f: A \to N$ を射影代数多様体Nへの正則写像とし $L \to N$ を豊富

optimal ?, $\dfrac{\log n(A,r)}{\log r} \to 0 \Rightarrow$ Liv. Thm. か?

γ) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}(A) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^{\dim A})$ as Fréchet space.

(very ample)な正則直線束とする。
この時集合 $E_f(L) := \{\sigma \in \mathbb{P}(\Gamma(N, L))$
$: \mathrm{Im} f \cap \mathrm{supp}(\sigma) = \phi\}$が正の測度を
もてばfは定数写像である
γ) A上には非定数負値多重劣調和
函数は存在しない
注意. 非コンパクトケーラー多様体上のLiouville
型定理はその正則断面曲率或いはRicci曲
率が下に有界の場合は幾つかの結果が知
られているが下に有界でない場合にはほとんど
何も知られていなかった. 実際、Aがアフィン代
数多様体($\Leftrightarrow$ 必要十分 $n(A, r)$が有界, 従って(*)
が満たされる. 但しこの場合にはα), β),
γ)が成立する事は既に知られている)であって
もその正則断面曲率は常に非正であるが, 下
に有界とは限らない. 更に条件(*)が
Liouville型定理を期待する上で最良な
ものかどうかは判っていない.

35

L^2 調和形式の初等的存在証明

大沢健夫　　京大数理研

Mをn次元複素多様体、$D=\{x\in M;\ \varphi(x)<0\}$を強擬凸有界領域とする。但し$\varphi$は$C^2$級かつ$\forall y\in\partial D$に対し$d\varphi(y)\neq 0$.

<u>定理</u>　D上のエルミート計量ds_D^2について、もし"$\exists C>0$, $\exists\varepsilon>0$ s.t. $\varphi(y)>-\varepsilon$なる$\forall y\in D$に対し$C^{-1}ds_D^2(y)<-\partial\bar{\partial}\log(-\varphi)(y)<C\,ds_D^2(y)$"ならば、$p+q=n$なる非負整数の対$(p,q)$に対して常に、$L^2$調和$(p,q)$形式全体の空間$\mathcal{H}^{p,q}_{ds_D^2}$は無限次元である。

Diederich, Fefferman 等によるBergman計量の評価式を認めれば次の系を得る。

<u>系</u>　Mがスタイン多様体ならばDのBergman計量$ds^2_{B,D}$に関して$\dim\mathcal{H}^{p,q}_{ds^2_{B,D}}=\infty$. 但し$p+q=n$.

Key lemma は次の命題である。

<u>命題</u>　$\mathcal{D}_1^{p,q}:=\{D$上のC^∞ (p,q)形式$\}$,
$\mathcal{D}_2^{p,q}:=\{f\in\mathcal{D}_1^{p,q};\ \|\bar{\partial}f\|_{ds_D^2}<\infty\}$,

$\mathcal{D}_3^{p,q} := \{ f \in \mathcal{D}_2^{p,q} \, ; \, \|f\|_{ds_D^2} < \infty \}$ とおくと, $p+q=n-1$ なる非負整数 p, q に対し,

$$\dim \mathcal{D}_2^{p,q} / (\mathcal{D}_3^{p,q} + \bar\partial \mathcal{D}_1^{p,q-1}) = \infty$$

但し計量 ds_D^2 は定理の条件を満たすものとする。

注) 命題 ⇒ 定理はDonnelly-Feffermanの評価式と良く知られた楕円型方程式の解の内部正則性とから言える。命題の証明には $\bar\partial_b$ 方程式の解が正則関数として片側に延びるという結果しか用いないので初等的と言って差しつかえないと思う。また, 形式的には $p=n, q=0$, $p=0, q=n$ の場合を上の議論はcoverしていないが, これはtrivial caseである。

Ref.
T. Ohsawa, On the infinite dimensionality of the middle L^2-cohomology of complex domains, to appear in Publ. R.I.M.S., '89.

$\mathcal{H}^{p,q} = \mathrm{Ker}(\bar\partial + \bar\partial^*) \cap L^{p,q}_{(2)}$

$H^{p,q}_{(2)} = \mathrm{Ker}\,\bar\partial \cap L^{p,q}_{(2)} / \{ g \in L^{p,q}_{(2)}, \exists u \in L^{p,q-1}_{(2)}, \bar\partial u = g \}$

$H^{p,q}_{(2)}$

$\dim < \infty \Rightarrow$ sep. $\rightarrow H^{p,q}_{(2)} = \mathcal{H}^{p,q}$

ロバン函数に関しての不等式

36 $$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\log(-\Lambda)}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}a_\alpha\bar{a}_\beta \geqq c\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\log(-\Lambda)}{\partial z_\alpha}a_\alpha\right|^2.$$

について。

Norm LEVENBERG Wellesley College
山口博史 滋賀大(教育)

Dを$\mathbb{C}^n$ $(n\geqq 2)$の領域で滑らかな境界∂Dを有するものとする。$\forall \zeta\in D$に対して，ζに極をもつグリーン函数$G(\zeta,z)$，そのロバン定数$\Lambda(\zeta)$を考える：

$$\Lambda(\zeta)=\lim_{z\to\zeta}\left(G(\zeta,z)-\frac{1}{\|\zeta-z\|^{2n-2}}\right)$$

$\Lambda(\zeta)$はDの負の値をとる実解析的函数を定義する。$\Lambda(\zeta)$をロバン函数と呼ぶ。

$S_n=\{a\in\mathbb{C}^n \mid \|a\|=1\}$とおく。以後，$D$は$\mathbb{C}^n$の擬凸状域と仮定する。さすれば，$\log(-\Lambda(\zeta))$は$D$上の強多重劣調和函数になっていた。更に，次が言える：

(1) $\exists c, d>0$ such that

$$\sqrt{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\log(-\Lambda)}{\partial z_\alpha\partial\bar{z}_\beta}a_\alpha\bar{a}_\beta} \geqq c\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\log(-\Lambda)}{\partial z_\alpha}a_\alpha\right|-d$$

for all $\zeta\in D$, $a\in S_n$.

(2) ∂Dの各点が強擬凸状か又はregularならば、

$\exists c>0$ such that

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \log(-\lambda)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} a_\alpha \bar{a}_\beta \geqq c \left| \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \log(-\lambda)}{\partial z_\alpha} a_\alpha \right|^2$$

(3) Dが擬凸状で、(2)の不等式を成立させる$c>0$は決して存在しない例がある。

$$D \text{が凸} \Rightarrow l_2 \geqq \frac{1}{2n-2} |l_1|^2$$

37

Riemann-Roch Theorem for normal isolated singularities

渡辺公夫　　筑波大学
数学系

We show that the analogous formula of Riemann-Roch also holds for normal isolated singularities of arbitrary dimensions.

Let (X,x) be a germ of an n-dimensional normal isolated singularity. By a theorem of Artin, (X, x) can be realized as a Zariski open subset of a projective variety Y with x as its only singularity. Let $\pi : M \longrightarrow X$ be a good resolution of the singular point. Then, in a natural manner, we get a desingularization $\rho : N \longrightarrow Y$ of Y by letting N to be $(Y - \{x\}) \cup M$. Let $E = \pi^{-1}(\{x\})$ and denote by A_i $(i=1,\dots,r)$ the irreducible componets of E.

Let F be a line bundle on M. We now define the Euler-Poincaré characteristic $\chi(M,\mathcal{O}(F))$ by

$$\chi(M,\mathcal{O}(F)) = \dim \Gamma(M-E,\mathcal{O}(F))/\Gamma(M,\mathcal{O}(F)) - \sum_{q=1}^{\infty}(-1)^q \dim H^q(M,\mathcal{O}(F)).$$

Let $T(N,g)$ be the T-characteristic of $g \in H^2(N,\mathbb{C})$. Then we have

Theorem. (Riemann-Roch theorem for integral divisors). For any integral divisor D with the first Chern class d on M, the equality

$$\chi(M,\mathcal{O}(F+[D])) - \chi(M,\mathcal{O}(F)) = T(N,\overline{f}) - T(N,\overline{f}+d)$$

holds, where $\overline{f}$ is an extension of the (1,1)-Hodge component of $\delta(F)_{\mathbb{C}} \in H^2(M,\mathbb{C})$ to $H^2(N,\mathbb{C})$.

As a corollary we have the following:

Theorem. Let $\pi : Y \longrightarrow X$ be a good resolution of normal three dimensional isolated singularity (X,x). Denote by A_i $(i = 1,\dots,r)$ the irreducible component of the exceptional set $E = \pi^{-1}(\{x\})$. Suppose that (X,x) is Gorenstein. Then the canonical divisor K_Y is given by

$$K_Y \sim \sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i$$

for some integers λ_i's. Let $p_g(X,x)$ be the geometric genus of (X,x). Then

$$24p_g(X,x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \{c_2(A_i) + c_1(A_i)c_1(N_{A_i})\},$$

where N_{A_i} is the normal bundle of A_i in Y.

38

非正曲率多様体への調和写像及び正則写像のﾓｼﾞｭﾗｲについて

宮野俊樹　東工大理
野口潤次郎　東工大理

（イ）N をｺﾑﾊﾟｸﾄﾘｰﾏﾝ多様体で，その断面曲率は非正であるとする．M をｺﾝﾊﾟｸﾄﾘｰﾏﾝ多様体とする．ここでは，M から N への調和写像の全体 Harm(M, N) にｺﾝﾊﾟｸﾄ開位相を入れ，その構造を調べる．その方法は（ロ） N，M がｺﾑﾊﾟｸﾄ化可能な完備ｹｰﾗｰ多様体で体積有限かつ N が完備双曲的でそのｺﾑﾊﾟｸﾄ可 N に双曲的に埋め込まれている場合にも有効に適用出来る．

先ず，N，M を最初に述べた（イ）のものとする．Schoen-Yau [2] は，Harm(M, N) の任意の連結成分 Z はｺﾑﾊﾟｸﾄﾘｰﾏﾝ多様体の構造を持ち，$x \in M$ を任意に固定すると evaluation 写像 Φ_x: $f \in Z \longrightarrow f(x) \in N$ は全測地的部分多様体への等長挿入であることを示した．（Nが局所対称な時は砂田 [3] も示している．）

M: complete.

主補題．（ｉ）$f_0 \in Z$ が（等長）挿入ならば，任意の $f \in Z$ も（等長）挿入である．

Vol(M) < ∞, N complete curv ≤ 0, f_0 f harm. $f_0 \sim f$ (homotopic), f_0 isom ⇒ f isom.

（ｉｉ）$f_0 \in Z$ が全測地的（$\nabla df_0 = 0$）ならば，任意の $f \in Z$ も全測地的である．

上と同様

定理 I．N のﾘｯﾁ曲率は負とする．Φ_x を含む Harm(Z, N)の連結成分を Y とすると，Y はｺﾑﾊﾟｸﾄﾘｰﾏﾝ多様体になり，写像 Ψ: $(y, z) \in Y \times Z \longrightarrow y(z) \in N$ は全測地的部分多様体への挿入になる．

$\dim_{\mathbb{R}} Y \geq 2$, or $\dim_{\mathbb{R}} Z \geq 2$
$\# \mathrm{Isom}(Y) < \infty$
or
$\# \mathrm{Isom}(Z) < \infty$

次に，（ロ）の場合を考える．

定理 II．一般的に N を完備双曲的多様体で，そのｺﾑﾊﾟｸﾄ可に双曲的に埋め込まれているとする．すると N の正則変換群 Aut(N) は有限群である．

Z を Hol(M, N) の一つの連結成分とする．evaluation 写像 Φ_x:

$f \in Z$ --> $f(x) \in N$ は全測地的等長正則挿入写像になる（野口[1]）．
Y を Φ_x を含む $\mathrm{Hol}(Z, N)$ の連結成分とする．

定理 iii．写像 Ψ：$(y, z) \in Y \times Z \longrightarrow y(z) \in N$ は全測地的部分多様体への正則挿入である．

かかる N の重要な，興味ある例として，有界対称領域 D の算術的商空間 D/Γ がある．特に D がⅣ型の時，$\dim \mathrm{Hol}(M, D/\Gamma) \leqq 1$ となる（野口[1]）．よって上述の Y，Z は共に上半平面 H の商空間で有限型のものとなる．Ψ を持ち上げれば全測地的正則埋込 $\widetilde{\Psi}$：$H^2 \longrightarrow D$ を得る（$\mathrm{rank}\, D = 2$ に注意）．特に Ψ が代数的 K3 曲面族の変形から導かれるものについては斎藤（政）が最近，完全に決定した．

文献．

[1] J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces, Invent. Math. 93 (1988), 15-34.

[2] R. Schoen and S. T.Yau, Compact group actions and the topology of manifolds with non-positive curvature, Topology 18(1979), 361-380.

[3] T. Sunada, Rigidity of certain harmonic mappings, Invent. Math. 51(1979), 297-307.

$f: M \to N$

$$ {}_M g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - {}_M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} + {}_N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(f) \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} \right\} = 0 $$

$df \in C^\infty(T^*M \otimes f^{-1}TN)$

$\nabla df = 0$ 全測地的

$\nabla df \in C^\infty(T^*M \otimes T^*M \otimes f^{-1}TN)$

$\mathrm{Trace}\, \nabla df = 0$

複素解析幾何への Kähler-Einstein 計量の応用について

東京都立大学理学部　　辻　　元

1　極小モデル予想と Kähler-Einstein metrics

Aubin-Yau の Calabi 予想の解決により標準束が正または0の代数多様体は、Kähler-Einstein 計量を許容することが解った。 このことから標準束が負の代数多様体について宮岡－Yau 不等式が成立すること、またその等号の場合にその代数多様体が超球の商と双正則になることが導かれる。しかし、標準束が正または0となる代数多様体は、代数多様体の分類理論の立場から見るとかなり特殊なもので Aubin-Yau の定理もその応用上十分に満足できるものとは言えない。一次元の複素多様体は、常に定曲率完備な Kähler 計量を許容するが、高次元の代数多様体についても標準的な計量を構成することが望まれよう。

一方、最近、代数幾何学では極小モデルの理論が研究され3次元までの代数多様体については、川又、森などの努力により極小モデルの存在が証明されている。 極小モデルの理論とは、簡単に言えば与えられた非特異代数多様体を双有理に改変して標準因子 (canonical divisor) が数値的に半正 (numerically effective) な minimal variety を得るか、または、一般のファイバーが標準因子の負になる **Q**−Fano variety となる代数的ファイバー空間を弱い特異性 (canonical singularity) をもつ代数多様体のカテゴリーで得る理論である。ここで numerically effective とは、任意の effective curve との intersection number が0以上になることを言う。現在3次元より高次元の場合、極小モデルの存在は証明されていないが、もし極小モデルの存在が一般次元で証明されれば、双有理幾何学の立場からは、極小代数多様体と **Q**−Fano variety のみを研究すれば十分である。 ここで minimal variety とは、**Q**−factorial かつ canonical divisor が numerically effective で高々canonical singularity のみを持つものを言い、**Q**−Fano variety とは、**Q**−factorial かつ canonical divisor が ample で

高々canonical singularity のみを持つものを言う。微分幾何学的には、各々 Ricci tensor が seminegative な compact Kähler manifold 、Ricci positive な compact Kähler manifold にだいたい相当するものと考えられる。従って、微分幾何学的に言えば極小モデルの理論は与えられた非特異代数多様体から Ricci positive な要素を single out する理論とも言える。

以上のことから minimal variety が微分幾何学的に良い性質を持つ計量を許容することを期待するのは自然であろう。実際、一般型極小代数多様体については次の定理が成り立つ。

定理 1 *([6, 7, 9])* 一般型極小代数多様体は、標準的な *Kähler-Einstein* 計量を持ち、その計量は自然に定まる固有部分代数多様体の外で C^∞ 級である。また n 次元極小代数多様体 X について $codimSingX \geq 3$ なら（この条件は、任意の X について適当な改変をすれば極小性を変えることなく満たすようにできる）*Bogomolov* 型不等式：

$$(-1)^n c_1^n(X) \leq (-1)^n \frac{2n}{n-1} c_1^{n-2}(X) c_2(X)$$

が成立する。

この定理は種数 2 以上の compact Riemann surfaces に負の定曲率計量が入ることの自然な高次元化と考えられる。この種の定理は、$n = 2$　の場合には、小林亮一によって 2 次元の極小モデルが非特異になること及び有理二重点が商特異点となることを利用して研究されていた ([1]) 。高次元の場合は、極小モデルに現れる特異点は、必ずしも商特異点ではなく複雑なので対応する偏微分方程式は、非線型退化楕円型の方程式となる。

そのため方程式を放物型にして楕円性の退化を避けたり代数幾何学的な考察による perturbation をすることが必要になる。

ところで超球の商を数値的に特徴付ける問題は宮岡－Yau 不等式の等号の場合に当り微分幾何学的また代数幾何学的に興味ある問題である。この問題に関して Kähler-Einstein 計量の応用として projective manifold については、Yau により解答が与えられている。　quasiprojective manifold については、2 次元の場合、小林亮一により満足すべき解答が得られて

いる ([2]) 。小林の方法は、境界に現れる曲線の分類と 2 次元極小モデルの存在に依っている。

3 次元以上の場合には、境界に現れる divisor の分類は、数値的条件だけからでは複雑すぎて不可能である。 そこで、より intrinsic な方法を考える必要がある。筆者は、complete Kähler-Einstein metric を Kähler-Einstein orbifold metric で近似する方法を作り境界が非特異か高々商特異点を持つ場合に次の定理を証明した。 Tian-Yau([4]) は、それを正規交叉因子の場合に拡張した。

定理 2 *([5, 8, 4])* Xを n 次元 *projective algebraic manifold* 、Dをその正規交叉因子とし、 $K_X + (1-\varepsilon)D$は、十分小さな正の有理数εについて *ample* であるとする。このとき宮岡－ *Yau* 不等式

$$c_1^n(\Omega_X^1(\log D)) \leq \frac{2(n+1)}{n} c_1^{n-2}(\Omega_X^1(\log D))c_2(\Omega_X^1(\log D))$$

が成立し等号が成立すれば $X - D$は $\mathbf{C}^n$内の超球 B^nの正則自己同型群の不連続部分群による商と双正則同値である。

以上の様に極小代数多様体を微分幾何学的に研究するには、特異性を持つ Kähler-Einstein metric を構成することが有効である。

一方、代数多様体の分類理論の立場から見ると $\mathbf{Q}-$Fano variety も微分幾何学的手法により研究されることが期待される。 smooth Fano variety については、次の予想を解くことが基本的であると思われる。

予想 1 n のみに依る正定数 $C(n)$ が存在して任意の n 次元 *smooth Fano variety* X について

$$c_1^n(X) \leq C(n)$$

が成立する。

$\mathbf{Q}-$Fano variety に対しては、Kähler-Einstein metric は存在しないことがあるので余り有効ではない。 しかし Ricci 曲率が、次元のみに依存する正の定数で下から抑えられるような Kähler metric を anticaninical class の中に構成することができれば予想は肯定的に解決される。これについては、残念ながらまだ部分的な結果しか得られていない。

2 Complete Kähler manifold のコンパクト化

この節では、Kähler-Einstein metric の前節とは全く異なる応用を与える。有界対称領域の算術商のコンパクト化は、佐竹－Baily-Borel により構成され算術商は、全て quasiprojective になることが知られている。Andreotti と Grauert は、それに先だって有界対称領域の算術商が pseudoconcave であることに注目しコンパクト化を関数論的に構成しようとしていた。　筆者は A. Nadel と共同で Andreotti-Grauert の方針を押し進め、佐竹-Baily-Borel 定理の次のような一般化を行った。

定理 3 *([3])M を m 次元完備 Ricci negative　Kähler 多様体で次の条件を満足するものとする。*

1. *M は、very strongly (m-2)-pseudoconcave 。*
2. *M の universal cover は、Stein 多様体。*

この時、M は、*quasiprojective manifold* の構造を持つ。

ここで (m-2)-pseudoconcave とは、compact subset の外で weakly plurisubharmonic で Levi form が超関数の意味で少なくとも 2 個の正の固有値を持つような $(-\infty, 0]$ への infinite exhaustion が存在することを言う。定理 3 の条件は、有界対称領域の算術商については、容易に確かめられる。定理 3 の証明の主要な道具は、Bers の同時一意化定理、Kähler-Einstein metrics の存在定理、それと次の L^2－Riemann-Roch 不等式である。

定理 4 *([3]) (M, ω) を m 次元 complete Kähler manifold で*

$$Ric_M \leq -\omega$$

を満たすものとする。　このとき

$$\liminf_{\nu\to\infty} \nu^{-m} \dim H^0_{(2)}(M, K_M^{\otimes\nu}) \geq \frac{1}{m!}\int_M c_1^m(K_M)$$

が成立する。ここで$H^0_{(2)}$は、L^2−*holomorphic sections*の空間を表し、$c_1(K_M)$は、K_Mのωから定まる *hermitian metric* に関する *first Chern form* を表す。

この定理によって(negative Ricci curvature の)Kähler-Einstein manifold の first Chern form の積分に意味与えられる訳である。この定理は、canonical bundle に対してだけでなく positivity に簡単な条件を付加すれば一般の hermitian line bundle に対しても同じ形で成立する。

参考文献

[1] R. Kobayashi, A Remark on the Ricci Curvature of Algebraic Surfaces of General Type, Tohoku Math. J. 36(1984), 385-399.

[2] R. Kobayashi, Einstein Kähler V-metrics on open Satake V-surfaces with isolated quotient singularities, Math. Ann. 272(1985), 385-398.

[3] A. Nadel and H. Tsuji, Compactification of Complete Kähler Manifolds of Negative Ricci Curvature, J.D.G. to appear.

[4] G. Tian and S.-T. Yau, Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry, in Mathematical Aspects in String Theory, ed. S.-T. Yau, Adv. Ser Math. Phys. Vol. 1 , World Scientific (1987), 574-628.

[5] H. Tsuji, An Inequality of Chern Numbers for Open Algebraic Varieties, Math. Ann. 277 (1987), 483-487.

[6] H. Tsuji, Existence and Degeneration of Kähler-Einstein metrics for Minimal Algebraic Varieties of General Type, Math. Ann. 281(1988),123-133.

[7] H. Tsuji, An Inequality of Chern Numbers of Bogomolov type for Minimal Varieties, Proc. of Japan Acad. 64, 177-179 (1988).

[8] H. Tsuji, A Characterization of Ball Quotients with Smooth Boundary, Duke Math. J. 57 (1988), 537-554.

[9] K. Sugiyama, On Existence of Einstein-Kähler Metrics on Compact Projective Varieties with only Canonical Singularities, preprint.