日　本　数　学　会

１９９８年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

１９９８年３月

於　名城大学

[25] F. Haslinger: Szegö kernels of certain unbounded domains in $\mathbf{C}^2$, Rev. Roumain Math. Pures Appl., **39** (1994), 939-950.

[26] ——: Singularities of the Szegö kernels for certain weakly pseudoconvex domains in $\mathbf{C}^2$, J. Funct. Analysis **129** (1995), 406-427.

[27] G. Herbort: Logarithmic growth of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex domains in $\mathbf{C}^3$ of finite type, Manuscripta Math. **45** (1983), 69-76.

[28] ——: The growth of the Bergman kernel on pseudoconvex domains of homogeneous finite diagonal type, Nagoya Math. J. **126** (1992), 1-24.

[29] ——: On the invariant differential metrics near pseudoconvex boundary points where the Levi form has corank one, Nagoya Math. J. **130** (1993), 25-54.

[30] L. Hörmander: L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[31] M. Ise: On Thullen domains and Hirzebruch manifolds I, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 508-522.

[32] J. Kamimoto: Singularities of the Bergman kernel for certain weakly pseudoconvex domains, to appear in the Journal of Math. Sci, the Univ. of Tokyo.

[33] ——: Asymptotic expansion of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex tube domains in $\mathbf{C}^2$, preprint.

[34] ——: The Bergman kernel on decoupled pseudoconvex tube domains, to appear in Proc. of ISAAC Congress *Reproducing kernels and their applications*, Kluwer Academic Publishers.

[35] ——: On the non-analytic examples of Christ and Geller, Proc. Japan Acad., **72**, Ser. A (1996), 51-52.

[36] ——: On the singularities of non-analytic Szegö kernels, preprint.

[37] ——: On an integral of Hardy and Littlewood, to appear in Kyushu J. of Math.

[38] J. Kamimoto, H. Ki, and Y-O. Kim: Some approximations on $L^1(\mathbf{R}^n)$, preprint.

[39] A. Korányi: The Bergman kernel function for tubes over convex cones, Pacific J. Math. **12** (1962), 1355-1359.

[40] S. G. Krantz: *Geometric Analysis and Function Spaces*, CBMS, **81**.

[41] J. D. McNeal: Local geometry of decoupled pseudoconvex domains, Proceedings in honor of Hans Grauert, Aspekte de Mathematik, Vieweg, Berlin (1990), 223-230.

[42] ——: Estimates on the Bergman kernels of convex domains, Adv. Math. **109** (1994), 108-139.

[43] ——: On large value of L^2 Holomorphic functions, Math. Res. Letters **3** (1996), 247-259.

[44] A. Nagel: Vector fields and nonisotropic metrics, Beijing Lectures in Harmonic Analysis, (E. M. Stein, ed.), Princeton University Press, Princeton, NXJ, (1986), 241-306.

[45] N. Nakazawa: Asymptotic expansion of the Bergman kernel for strictly pseudoconvex complete Reinhardt domains in $\mathbf{C}^2$, Osaka J. Math. **31** (1994), 291-329.

[46] T. Ohsawa: Boundary behavior of the Bergman kernel function on pseudoconvex domains, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **20** (1984), 897-902.

[47] ——: On the extension of L^2 holomorphic functions III: negligible weights, Math. Z. **219** (1995), 215-225.

[48] S. Saitoh: Fourier-Laplace transforms and the Bergman spaces, Proc. of AMS **102** (1988), 985-992.

[49] J. Yu: Peak functions on weakly pseudoconvex domains, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 1271-1295.

E-mail adress: `joe@sci.kumamoto-u.ac.jp`

1998春

函 数 論 分 科 会

3月26日（木）　第III会場

9：40～12：00

14：15～15：50

16：15～17：15　特別講演

吉田　英信（千葉大理）　*劣調和関数とネバンリンナ ノルム

3月27日（金）　第III会場

10：00〜11：30

3月28日（土）　第III会場

10：00〜11：30

14：15〜15：15　特別講演

神本　丈（熊 本 大 自 然）　弱擬凸領域のベルグマン核に関する漸近解析

1 Modern form solutions obtained by operator N^{ν} method to a nonhomogeneous constant coefficients ordinary differential equation
(Illustrative Examples)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In this paper, some illustrative examples on the theorems derived, in a previous paper, by N-fractional calculus operator N^{ν} method to the nonhomogeneous constant coefficients linear second order ordinary differential equation are reported.

References

[1] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[2] K. Nishimoto and Susana S. de Romero ; N - fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Whittaker equations (I), J. Frac. Calc. Vol. 9, May (1996), 17 - 22.

[3] K. Nishimoto Judith A. de Durán and Leda Galué; N - fractional calculus operator N^{ν} method to nonhomogeneous Fukuhara equations (I), J. Frac. Calc. Vol. 9, May (1996), 23 - 31.

[4] K. Nishimoto, J. A. Guerra and M. S. de Guerra ; N - fractional calculus operator N^{ν} method to an extended Gauss type nonhomogeneous ordinary differential equation (I), J. Frac. Calc. Vol. 10, Nov. (1996), 25 - 32.

[5] K. Nishimoto; Operator N^{ν} method to a generalized linear second order homogeneous ordinary differential equation, J. Frac. Calc. Vol. 11, May (1997), 1 - 9.

[6] K. Nishimoto; Operator N^{ν} method to a generalized linear second order nonhomogeneous ordinary differential equation of Fuchs type, J. Frac. Calc. Vol. 11, May (1997), 11 - 20.

[7] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5 (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[8] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

2 N-method to constant coefficients linear $n(\in Z^{+} \geq 2)$th order ordinary differential equations

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

Abstract

In a previous paper of the author, it is reported that the constant coefficient nonhomogeneous (homogeneous) linear second order ordinary differential equation can be reduced to a linear first order ordinary differential equation (variable separable form), then we can obtain the solutions to the second order equation.

In this paper, it is shown that the constant coefficients nonhomogeneous (homogeneous) linear $n(\in Z^{+} \geq 2)$th order ordinary differential equation can be reduced to a linear first order one (one of variable separable form finally) again by repetition of the same procedure as the one to second order equation.

This method of the author was found in his research work of applications of N-fractional calculus (N^{ν} operator) to the Bessel, Whittaker and Fukuhara equations, etc..

References

[1] K. Nishimoto; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5 (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto; Modern form solutions obtained by operator N^{ν} method to a nonhomogeneous constant coefficients ordinary differential equation, JFC. Vol. 12, Nov. (1997), 1 - 8. (1996), 1 - 7.

3 CONDITIONS FOR THE CLASS OF CARATHÉODORY FUNCTIONS

Mamoru Nunokawa (University of Gunma)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)
Hitoshi Saitoh (Gunma College of Technology)
Ji A Kim (Pukyong National University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $U = \{z \in C : |z| < 1\}$. If a function $p(z)$ belonging to $\mathcal{A}$ satisfies

$$\mathrm{Re}\, p(z) > 0 \quad (z \in U),$$

then $p(z)$ is said to be a Carathéodory function. We denote by $\mathcal{P}$ consisting of all such functions $p(z)$.

Theorem 1 *If a function $p(z) \in \mathcal{A}$ satisfies*

$$\int_{|z|=r} \left| \mathrm{Re}\, \frac{zp'(z)}{p(z)} \right| d\theta < \pi$$

for arbitrary r $(0 < r < 1)$, then $p(z) \in \mathcal{P}$.

Theorem 2 *Let a function $p(z) \in \mathcal{A}$ satisfy*

$$\frac{\alpha}{1-4\alpha} < \mathrm{Re}\, \frac{zp'(z)}{p(z)} < \alpha \quad (z \in U),$$

where α is an arbitrary real number not less than $\frac{1}{4}$. Then we have

$$\int_{|z|=r} \left| \mathrm{Re}\, \frac{zp'(z)}{p(z)} \right| d\theta < \pi$$

for arbitrary r $(0 < r < 1)$, therefore we have $p(z) \in \mathcal{P}$.

Theorem 3 *If a function $p(z) \in \mathcal{A}$ is typically real and*

$$\int_{|z|=r} \left| \mathrm{Re}\, \frac{zp'(z)}{p(z)} \right| d\theta < 2\pi$$

for arbitrary r $(0 < r < 1)$, then $p(z) \in \mathcal{P}$.

4 A PROBLEM FOR ANALYTIC FUNCTIONS WITH NEGATIVE COEFFICIENTS

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{T}_n$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \quad (a_k \geq 0\ ;\ n \in N)$$

which are analytic in the open unit disk $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ and satisfy $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ $(z \in U - \{0\})$. Let $\mathcal{S}_n^*(\alpha)$ and $\mathcal{C}_n(\alpha)$ be the subclasses of $\mathcal{T}_n$ consisting of all starlike functions of order α and of all convex functions of order α, respectively.

Let, for $b \in C - \{0\}$,

$$\mathcal{T}_n^*(b) = \left\{ f \in \mathcal{T}_n : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right) > 0 \right\}$$

and

$$\mathcal{K}_n(b) = \left\{ f \in \mathcal{T}_n : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{1}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \right\}.$$

Problem *Let $n \in N$ and let $b \in C - \{0\}$.*

(1) $f(z) \in \mathcal{T}_n^*(b) \iff \sum_{k=n+1}^{\infty}(k + |b| - 1)a_k \leq |b|$.
(2) $f(z) \in \mathcal{K}_n(b) \iff \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k + |b| - 1)a_k \leq |b|$.

Let

$$\mathcal{Q}_n^*(b) = \{f \in \mathcal{T}_n : \sum_{k=n+1}^{\infty} (k + |b| - 1)a_k \leq |b|\}$$

and

$$\mathcal{P}_n^*(b) = \{f \in \mathcal{T}_n : \sum_{k=n+1}^{\infty} \left((k-1)\frac{\mathrm{Re}b}{|b|} + |b|\right) a_k \leq |b|\}.$$

Theorem 1 *Let $n \in N$ and let $b \in C - \{0\}$.*

(1) $\mathcal{Q}_n^*(b) \subset \mathcal{T}_n^*(b)$.
(2) $\mathcal{T}_n^*(b) \subset \mathcal{P}_n^*(b)$.
(3) $0 < b < \infty \Longrightarrow \mathcal{Q}_n^*(b) = \mathcal{T}_n^*(b) = \mathcal{P}_n^*(b)$.
(4) $-\frac{n}{2} < \mathrm{Re}b \leq 0 \Longrightarrow \mathcal{P}_n^*(b) \not\subseteq \mathcal{T}_n^*(b)$.
(5) $b \in (-\infty, -n) \cup (-\frac{n}{2}, 0) \Longrightarrow \mathcal{T}_n^*(b) \not\subseteq \mathcal{Q}_n^*(b)$.

Let

$$\tilde{Q}_n(b) = \{f \in \mathcal{T}_n : \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k+|b|-1)a_k \leq |b|\}$$

and

$$\tilde{P}_n(b) = \{f \in \mathcal{T}_n : \sum_{k=n+1}^{\infty} k\left((k-1)\frac{\mathrm{Re}b}{|b|} + |b|\right)a_k \leq |b|\}.$$

Theorem 2 *Let $n \in N$ and let $b \in C - \{0\}$.*

(1) $\tilde{Q}_n(b) \subset \mathcal{K}_n(b)$.
(2) $\mathcal{K}_n(b) \subset \tilde{P}_n(b)$.
(3) $0 < b < \infty \Longrightarrow \tilde{Q}_n(b) = \mathcal{K}_n(b) = \tilde{P}_n(b)$.
(4) $-\frac{n}{2} < \mathrm{Re}b \leq 0 \Longrightarrow \tilde{P}_n(b) \not\subseteq \mathcal{K}_n(b)$.
(5) $b \in (-\infty, -n) \cup (-\frac{n}{2}, 0) \Longrightarrow \mathcal{K}_n(b) \not\subseteq \tilde{Q}_n(b)$.

5 微分作用素を用いた留数計算 IV

—留数計算アルゴリズム（有理関数)—

田島 慎一 新潟大学工学部　中村 弥生 お茶の水女子大学大学院

前回の学会における講演, "微分作用素を用いた留数計算 I, II, III" で報告した結果を, 有理関数の留数計算に応用し, 留数計算アルゴリズムを与える.

準備と復習　複素平面 $X = \mathbf{C}$ 上に有理関数

$$u(z) = \frac{1}{(z-\alpha_1)^{r_1}\dots(z-\alpha_n)^{r_n}}$$

が与えられたとする. $u(z)$ の極における主要部のみを取り出す為, $u(z)$ の正則関数の層による剰余を取り, それを $m = (u(z) \bmod \mathcal{O}_X)$ とおく. 今, $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $A_j = \{\alpha_j\}$ とおくと, $u(z)$ は $X \setminus A$ において正則であるから, m は A に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ の元とみなすことができる. $\mathcal{D}_X$ を X 上の線型微分作用素のなす層とする. このとき $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は左 $\mathcal{D}_X$加群の構造を持つ. m を annihilate するような微分作用素全体は環 $\mathcal{D}_X$ の左イデアルとなる. それを $\mathcal{J}$ とおく, i.e., $\mathcal{J} = \{R \in \mathcal{D}_X | Rm = 0\}$.

さて,

$$P = (\prod_j (z-\alpha_j))\frac{d}{dz} + \sum_j r_j(\prod_{\ell\neq j}(z-\alpha_\ell)), \quad Q = (z-\alpha_1)^{r_1}\dots(z-\alpha_n)^{r_n}$$

と置くと, $Pm = Qm = 0$ が成り立つが, さらに, 次が成立する.

Theorem 1 微分作用素 P, Q はイデアル $\mathcal{J}$ を生成する, *i.e.*,

$$\mathcal{J} = \langle P, Q\rangle.$$

正則微分形式 $\psi(x)dx \in \Omega_X$ に対し, $\psi(x)mdx$ の極 A_j における留数を対応させる写像

$$Res_{A_j}(\cdot, m) : \psi(x)dx \mapsto \frac{1}{2\pi i}\oint_{A_j} \psi(x)mdx$$

を考え, さらに $K = \{\psi(x)dx \in \Omega_X | Res_{A_j}(\psi(x)dx, m) = 0, j = 1, 2, \dots, n\}$ とおく.

イデアル $\mathcal{J}$ に属するような微分作用素の形式随伴作用素全体のなす集合は右 $\mathcal{D}_X$ イデアルとなる. これを $\mathcal{J}^*$ とおくと, 次が成り立つ.

Theorem 2

$$K = \{(R^*\phi(x))dx | R^* \in \mathcal{J}^*, \phi(x)dx \in \Omega_X\}.$$

即ち, $\mathcal{D}_X$-加群としての duality を用いることにより, 各点 A_j における留数の値が全て零となるような微分形式

$$\frac{\psi(x)dx}{(z-\alpha_1)^{r_1}\dots(z-\alpha_n)^{r_n}}$$

を特徴付ける事ができる.

基底の構成 $r_1+\dots+r_n=r$ とおき, $g(z)$ を高々 $r-1$ 次の多項式として, 微分形式 $\dfrac{g(z)}{(z-\alpha_1)^{r_1}\cdots(z-\alpha_n)^{r_n}}dz$ に対する各点 $z=\alpha_1,\dots,\alpha_n$ での留数を考える. ここで, $G=\{\psi(x)dx\in\Omega_X|\psi(x)\in \mathbf{C}[x], \deg\psi(x)\le r-1\}$ とおく. 但し, $\mathbf{C}[x]$ は $\mathbf{C}$ 上の x 変数多項式を表す. このとき, 次が成り立つ.

Theorem 3

$$K\cap G=\langle(P^*1)dz,(P^*z)dz,\dots,(P^*z^{r-n-1})dz\rangle.$$

つまり, 各点 $z=\alpha_1,\dots,\alpha_n$ で留数が零となる微分形式 $\dfrac{g(z)}{(z-\alpha_1)^{r_1}\cdots(z-\alpha_n)^{r_n}}dz$ で, $\deg g(z)\le r-1$ を満たすもの全体のなす空間は, $g(z)$ が $P^*1,P^*z,\dots,P^*z^{r-n-1}$ の一次結合の形で与えられるものである.

ここで, $u(z)$ の分母 $q(z)$ の因数分解の形が分からない場合にも, 作用素 P を次で与えることができる.

$$P=\frac{q(z)}{GCD(q(z),q'(z))}\frac{d}{dz}+\frac{q'(z)}{GCD(q(z),q'(z))}.$$

ここで, $q'(z)=\dfrac{dq(z)}{dz}$ である. これにより, 分母の因数分解の形が分からない一般の有理関数に対しても, Theorem 3 で述べた $K\cap G$ の基底を計算することができる.

留数計算アルゴリズム 微分形式 $\dfrac{g(z)}{q(z)}dz$ に対して, $q_s(z)$ を $q(z)$ の square free part とおくと, 留数が残る場合の係数関数は $h(z)$ を高々 $n-1$ 次の多項式として, $\dfrac{h(z)}{q_s(z)}$ の形で与えられる. このような $h(z)$ で一次独立なものは n 個あり, これらに対し, $h(z)\dfrac{q(z)}{q_s(z)}$ を $g_1(z),\dots,g_n(z)$ とおく. これと, Theorem 3 で得た K の基底とを用いることにより, 次のようにして $g(z)$ を留数が零になる部分と留数が残る部分とに分けることができる.

まず, $g(z),P^*1,P^*z,\dots,P^*z^{r-n-1},g_1(z),\dots,g_n(z)$ の $1,x,\dots,x^{r-1}$ に対する係数からなるベクトルをそれぞれ $W,U_j(j=0,\dots,r-n-1),V_k(k=1,\dots,n)$ とおく. このとき, $W=\sum_{j=0}^{r-n-1}a_jU_j+\sum_{k=1}^{n}b_kV_k$ を満たす定数 $c_j(j=0,\dots,r-n-1),d_k(k=1,\dots,n)$ が求まり, これより,

$$\frac{g(z)}{q(z)}dz=\sum_{j=0}^{r-n-1}c_j\frac{P^*z^j}{q(z)}dz+\sum_{k=1}^{n}d_k\frac{g_k(z)}{q(z)}dz$$

と書くことができる. つまり, 与えられた有理関数の分母の因数分解が分からない場合でも, 留数が零になる部分と各極での位数が1となる部分とを比較的簡単に分けることができる.

6　微分作用素を用いた留数計算 V

——中国剰余定理とグレブナ基底——

田島 慎一　　新潟大学工学部

キーワード: D-加群, 代数的局所コホモロジー, 常微分作用素の補間

1　記号

複素平面 $X = \mathrm{C}$ 上の正則関数の層を $\mathcal{O}_X$ とおき, 正則関数を係数に持つ線型微分作用素全体のなす環の層を $\mathcal{D}_X$ とおく. 平面 X 内の有限個の点 $z = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ からなる集合を A とおく. この時, A に台を持つ代数的局所コホモロジー群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は左 $\mathcal{D}_X$ 加群の構造を持ち, 佐藤-河合-柏原の意味で極大過剰決定系となる. いま, $A_j = \{\alpha_j\}$ とおくと, $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ は次のように直和分解される.

$$\mathcal{H}^1_{[A]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{H}^1_{[A_1]}(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{H}^1_{[A_2]}(\mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}^1_{[A_n]}(\mathcal{O}_X).$$

2　中国剰余定理あるいは補間定理

各点 A_j における代数的局所コホモロジー群から, 任意の元 $m_j \in \mathcal{H}^1_{[A_j]}(\mathcal{O}_X)$ をとる. すると $c_{j,\ell} \in \mathrm{C}$ $(\ell = 1, \ldots, r_j)$ を用いて次の形に一意的に表せる.

$$m_j = \left(\sum_{\ell=1}^{r_j} \frac{c_{j,\ell}}{(z-\alpha_j)^\ell} \bmod \mathcal{O}_X\right).$$

ここで $\mathcal{D}_X m_j = \mathcal{D}_j/\mathcal{J}_j$ なるイデアル $\mathcal{J}_j$ は次の形の生成元を持つ.

$$P_j = (z-\alpha_j)\frac{d}{dz} + h_j(z), \quad Q_j = (z-\alpha_j)^{r_j}.$$

ただし, $h_j(z)$ は $h_j(\alpha_j) = r_j$ を満たす多項式である ($deg(h_j) < r_j$) .　ここで $r_j > 1$ ならばこれらはグレブナ基底となっている. $r_j = 1$ の時は $Q_j = z - \alpha_j$ のみでグレブナ基底となる.

さて, 各点 A_j において m_j が与えられたとする. この時, イデアル $\mathcal{J}$ を次で定める.

$$\mathcal{J} = \{R \in \mathcal{D}_X \mid Rm_j = 0, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

零階の微分作用素 $Q = (z-\alpha_1)^{r_1}(z-\alpha_2)^{r_2}\cdots(z-\alpha_n)^{r_n}$ は, 明らかにイデアル $\mathcal{J}$ に属する.

定理

(i) イデアル $\mathcal{J}$ に属し, 大域的に定義される一階の微分作用素 P で次のような形のものが存在する. ただし $h(z)$ は次数が $r_1+r_2+\cdots+r_n$ 未満の多項式である.

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)\frac{d}{dz}+h(z)$$

(ii) P,Q はイデアル $\mathcal{J}$ を生成する.

(iii) イデアルとして $\langle P,Q_j\rangle=\langle P_j,Q_j\rangle$ が成り立つ.

3 例

例 1. 有理関数 $\dfrac{2+z}{z^3}$ は次の微分方程式を満たす.

$$((2+z)z\frac{d}{dz}+6+2z))\frac{2+z}{z^3}=0.$$

今, 零階の微分作用素 $Q=z^3$ を用いて $D=(2+z)z\frac{d}{dz}+6+2z$ を局所化すれば $\langle D,Q\rangle=\langle P,Q\rangle$ となる. ただし

$$P=4z\frac{d}{dz}+12-2z+z^2$$

とおいた.

例 2. 二階の微分作用素

$$D=(z+2)z(z-1)\frac{d^2}{dz^2}+6(z^2+2z-1)\frac{d}{dx}+6(z+3)$$

は有理関数$\dfrac{1}{z^2}$ と$\dfrac{1}{(z-1)^3}$ を一次独立な解に持つ. 今, 零階の微分作用素 Q_1,Q_2 を $Q_1=z^2,Q_2=(z-1)^3$ でさだめると

$$\langle D,Q_1\rangle=\langle P_1,Q_1\rangle,\quad \langle D,Q_2\rangle=\langle P_2,Q_2\rangle$$

が成り立つ. ただし

$$P_1=z\frac{d}{dz}+2,\quad P_2=(z-1)\frac{d}{dz}+3$$

とおいた. 微分作用素 P_1,P_2 を補間すると

$$P=z(z-1)\frac{d}{dz}+(-2+2z+15z^2-19z^3+7z^4)$$

を得る. いま $Q=z^2(z-1)^3$ とおくと $\langle D,Q\rangle=\langle P,Q\rangle$ が成り立ち, P,Q がグレブナ基底となる. 例えば, 作用素 D は P,Q を用いて次のように表せる.

$$D=\{(z+2)\frac{d}{dz}-7+28z-16z^2\}P+\{-7\frac{d}{dz}-164+112z\}Q.$$

留数計算への応用については, あらためて別の機会に述べる予定である.

7　Painlevé 超越関数の値分布について II

下村　俊　　　慶応大・理工

前回の学会では (III′) 型の Painlevé 方程式に関する値分布論的性質について話したが，今回は (V) 型の Painlevé 方程式

$$(\mathrm{V})\quad \frac{d^2w}{dt^2} = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} + \frac{(w-1)^2}{t^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma\frac{w}{t} + \delta\frac{w(w+1)}{w-1}$$

$('= d/dt)$ に関する結果を報告する．方程式 (V) は $t = 0, \infty$ に動かない特異点を持っており，解は一般には多価関数である．$t = e^z$ とおくことにより，(V) は

$$(\mathrm{V}')\quad w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 + (w-1)^2\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma e^z w + \delta e^{2z}\frac{w(w+1)}{w-1}$$

$('= d/dz)$ に変換され，(V′) の任意の解は z–平面上有理型である．$\gamma = \delta = 0$ の場合は，(V′) は

$$(w')^2 = (2\alpha w^2 + Cw - 2\beta)(w-1)^2$$

(C: 任意定数）に帰着され，これは求積可能である．従って

$$(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$$

なる条件のもとで (V′) を考える．この方程式の解のうち admissible なもの，つまり

$$r/T(r,w) \to 0 \qquad \text{n.e. as } t \to 0$$

をみたすものについて，その値分布論的性質を調べた．例えば admissible な解の零点については次の定理が得られた．

定理1． $\beta \neq 0$ のとき $m(r, 1/w) = S(r, w)$.

定理2． $\beta = 0$ とする．

（1） $\delta \neq 0$ のとき:

（a） $4\alpha\delta + (\gamma \pm (-2\delta)^{1/2})^2 = 0$ であり，w が Riccati 方程式

$$\pm w' - (\pm 1 + (-2\delta)^{-1/2}\gamma) w(w-1) = -(-2\delta)^{1/2} e^z w$$

を満たすとき

$$m(r, 1/w) = T(r, w) + O(1).$$

（b） それ以外のとき

$$m(r, 1/w) \leq (1/2) T(r, w) + S(r, w).$$

（2） $\delta = 0$ のとき，$w \equiv 0$ 以外の w に対し

$$m(r, 1/w) \leq (1/2) T(r, w) + S(r, w).$$

また，$a \in \mathbf{C} - \{-1, 0, 1\}$ なる値についての分岐指数については次の評価を得た．

定理3． $\delta \neq 0$ ならば，$\vartheta(a, w) \leq 1/4$, そして $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$ ならば，$\vartheta(a, w) \leq 1/6$.

8 On Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum, II

TODA Nobushige   Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a nondegenerate, transcendental holomorphic curve from C into $P^n(C)$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) : C \to C^{n+1} - \{0\}.$$

Let X be a set of holomorphic curves $A = [a_1, \cdots, a_{n+1}]$ from C into $P^n(C)$ which satisfy $T(r, A) = o(T(r, f))$ $(r \to \infty)$ and are in N-subgeneral position, where $T(r, f)$ is the characteristic function of f and $\#X \geq 2N - n + 2$; $N \geq n \geq 1$, and put

$$X(0) = \{A = [a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}] \in X : a_{n+1} = 0\}$$

We denote by $\delta(A, f)$ the deficiency of A with respect to f and by $\Gamma(f)$ the set of meromorphic functions $a(z)$ in the complex plane satisfying $T(r, a) = o(T(r, f))$ $(r \to \infty)$. Then, it is known([1]) that if f is nondegenerate over $\Gamma(f)$, the following inequality holds:

(1) $$\textstyle\sum_{A \in X} \delta(A, f) \leq 2N - n + 1.$$

The purpose of this talk is to give some results on $\delta(A, f)$ when the equality holds in (1) and when $N > n$.

(b) We put

$$u(z) = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(z)|,$$

$$t(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\log u(re^{i\theta}) - \log u(e^{i\theta})\} d\theta$$

and

$$\Omega = \limsup_{r \to \infty} \frac{t(r, f)}{T(r, f)}.$$

2. Result. We suppose that f is nondegenerate over $\Gamma(f)$ and that

$$\sum_{A \in X} \delta(A, f) = 2N - n + 1.$$

Then, we can prove the following theorems applying the method used in [2]. We put

$$N_1(f) = \#\{A \in X : \delta(A, f) = 1\}.$$

Theorem 1. If there are $n+1$ linearly independent curves $A_1, \cdots, A_{n+1} \in X$ such that

$$\delta(A_j, f) = 1 \quad (j = 1, \cdots, n+1),$$

then, $n = 1$ and $N_1(f) = 2N$.

Corollary 1. Either (i) $N_1(f) \leq N$ or (ii) $n = 1$ and $N_1(f) = 2N$ must hold.

Theorem 2. If $\Omega < 1$ and if there exist n linearly independent curves $A_1, \cdots, A_n \in X(0)$ satisfying $\delta(A_j, f) = 1$ $(j = 1, \cdots, n)$, then $n = 1$ and $N_1(f) = 2N$.

Corollary 2. If $\Omega = 0$, then $n = 1$ and $N_1(f) = 2N$.

Theorem 3. When $\#X < \infty$, if there exist $N - n + 1$ same curves $A_1, \cdots, A_{N-n+1} \in X$, then

$$\delta(A_j, f) = 1 \quad (j = 1, \cdots, N - n + 1).$$

References.

[1] M. Ru and W. Stoll: The Cartan conjecture for moving targets. Proc. of Symposia in Pure Math., 52(1991), 477-508.

[2] N. Toda: An extension of the defect relation for holomorphic curves, III. NIT Sem. Rep. on Math., 139(1996), pp.13.

9 John 領域上の優調和関数の可積分性

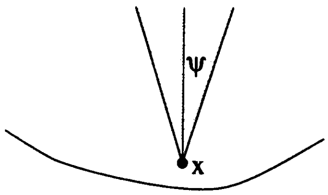
相川弘明　　島根大学総合理工学部

D を $\mathbb{R}^n$の有界領域，$S^+(D)$ を D 上の正の優調和関数の全体とする．Armitage [3, 4] は Dが滑らかなとき $S^+(D) \subset L^p(D)$，$0 < p < n/(n-1)$，を示した．Maeda-Suzuki [6] がこの結果を Lipschitz 領域に拡張し，Lipschitz 定数に応じた p の評価を与えた．2次元の有限連結領域のとき内部セクター条件により Masumoto [7, 8] は sharp な p を与えた．高次元の時は Aikawa [1] が coarea 公式や境界 Harnack 原理を用いて sharp な p を Lipschitz 領域に対して与えた．
以上の結果は内部だけでなく外部条件を本質的に用いていたが，内部条件だけで規定される，もっと悪い領域，ここで考える John 領域や，いわゆる "Hölder 領域" に対して, Stegenga-Ullrich [9] はある小さい $p > 0$ があって，$S^+(D) \subset L^p(D)$ となることを示した．さらに Lindqvist [5] は一般の非線形方程式の正の優解に対しても同じ結果が成立することを示した．しかし，彼らの方法では p は非常に小さくて 1 にはなれない．この講演では十分に太い John 領域に対して $S^+(D) \subset L^1(D)$ となることを報告する．

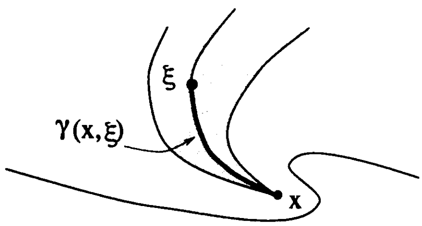
定義. 任意の $x \in D$ に対し，x を頂点とし開きがψ，大きさが一定の cone が D 内にとれるとき D は角度ψの内部 cone 条件を満たすという．これに対して「捻れた」cone が取れる時を John 領域という．すなわち，ある定数 $c_J > 0$ と点 $x_0 \in D$ があって任意の $x \in D$ が長さ有限の曲線 γで結ばれ, しかも

$$\delta_D(\xi) \geq c_J \ell(\gamma(x, \xi)) \quad \text{for all } \xi \in \gamma,$$

となるとき D を John 定数 c_Jを持つ John 領域という．ただし，$\delta_D(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$，$\gamma(x, \xi)$ はγの x とξを結ぶ部分であり，$\ell(\gamma(x, \xi))$ はその長さを表す．明らかに，角度ψの内部 cone 条件を満たす領域は John 定数 $\sin\psi$の John 領域である．



Cone Condition



Twisted Cone Condition

定理. *(i)* $1-2^{-n-1} \le c_J < 1$ のとき，*John* 定数 c_J の有界 *John* 領域 D に対して，$S^+(D) \subset L^1(D)$.
(ii) $\cos\psi > 1/\sqrt{n}$ のとき，角度 ψ の内部 *cone* 条件を満たす領域に対して，$S^+(D) \subset L^1(D)$.

注意. (i) 上の角度の条件は sharp; c_J はもっと良い評価が可能.
(ii) 証明は Cranston-McConnell 型の不等式[2] を用いる.
(iii) D が外部容量密度条件を満たせばもう少し詳しい結果が出る.

参考文献

[1] H. Aikawa, *Integrability of superharmonic functions and subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 109–117.

[2] H. Aikawa, *Norm estimate of Green operator, perturbation of Green function and integrability of superharmonic functions* (to appear).

[3] D. H. Armitage, *On the global integrability of superharmonic functions in balls*, J. London Math. Soc. (2) **4** (1971), 365–373.

[4] D. H. Armitage, *Further result on the global integrability of superharmonic functions*, J. London Math. Soc. (2) **6** (1972), 109–121.

[5] P. Lindqvist, *Global integrability and degenerate quasilinear elliptic equations*, J. Analyse Math. **61** (1993), 283–292.

[6] F.-Y. Maeda and N. Suzuki, *The integrability of superharmonic functions on Lipschitz domains*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 270–278.

[7] M. Masumoto, *A distorsion theorem for conformal mappings with an application to subharmonic functions*, Hiroshima Math. J. **20** (1990), 341–350.

[8] M. Masumoto, *Integrability of superharmonic functions on plane domains*, J. London Math. Soc. (2) **45** (1992), 62–78.

[9] D. A. Stegenga and D. C. Ullrich, *Superharmonic functions in Hölder domains*, Rocky Mountain J. Math. **25** (1995), 1539–1556.

URL: `http://www.math.shimane-u.ac.jp/~haikawa`
E-mail address: haikawa@riko.shimane-u.ac.jp

10　Monotone ソボレフ関数の境界挙動について

水田　義弘　　広島大学総合科学部
下村　　哲　　広島大学総合科学部

Gardiner [1], Stoll [8], Herron-Koskela [4], Mizuta [5], [6] の研究に関連して，$\mathbf{R}^n$ の単位球 $\mathrm{B} = B(0,1)$ 上でのソボレフ関数 u の球面平均の境界挙動と，その応用として，monotone である関数の境界挙動について報告する．

単位球 B で定義されたソボレフ関数 u が，条件

$$\int_{\mathrm{B}} |\nabla u(x)|^p \rho(x)^\alpha \, dx < \infty \tag{1}$$

を満足するものとしよう．ここに，$\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $\rho(x) = 1 - |x|$, $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < p-1$ とする．原点を中心とし半径 $r > 0$ の球面 $S(0,r)$ 上の L^q 平均

$$S_q(u,r) = \left(\frac{1}{|S(0,r)|} \int_{S(0,r)} |u(x)|^q \, dS(x) \right)^{1/q}$$

を考える．ここに，$|S(0,r)| = \sigma_n r^{n-1}$ は球面 $S(0,r)$ の面積を表す．

定理　1．　条件 (1) を満足する p-細連続関数 u に対して，$p < q < \infty$ かつ

$$\frac{n-p-1}{p(n-1)} < \frac{1}{q} < \frac{n-p+\alpha}{p(n-1)}$$

ならば，

$$\liminf_{r \to 1} (1-r)^{(n-p+\alpha)/p-(n-1)/q} S_q(u,r) = 0.$$

調和関数の一般化として，最大値・最小値の原理を満たす連続関数は，monotone と呼ばれる．２階の楕円型偏微分方程式の解ばかりでなく，非線形方程式の解も monotone となる場合がある．特に，擬等角写像の各成分は $\mathcal{A}$ 調和で，したがって，monotone である (cf. [2], [3]) ．

定理　2．　条件 (1) を満たす B 上の monotone 関数 u に対して，$n-1 < p < n+\alpha$, $p < q < \infty$ かつ

$$\frac{1}{q} < \frac{n-p+\alpha}{p(n-1)}$$

ならば，

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^{(n-p+\alpha)/p-(n-1)/q} S_q(u,r) = 0.$$

$q = \infty$ のとき，一般的な結果を得るために，(1) を一般化して，条件

(2) $$\int_{\mathbf{B}} |\nabla u(x)|^p \varphi(|\nabla u(x)|) \rho(x)^\alpha \, dx < \infty$$

を考える．ここに，φ は区間 $(0, \infty)$ 上正値かつ非減少関数で

$$\varphi(r^2) \leq M\varphi(r) \qquad (r \geq 0)\ .$$

定理 3. 条件 (2) を満たす B 上の monotone 関数 u に対して，$n - 1 < p \leq n + \alpha$ かつ $\kappa(0) = \infty$ ならば，

$$\lim_{|x| \to 1} [\kappa(\rho(x))]^{-1} u(x) = 0.$$

ここに，

$$\kappa(r) = \left[\int_r^1 \left(t^{n-p+\alpha} \varphi(t^{-1}) \right)^{-1/(p-1)} \frac{dt}{t} \right]^{1-1/p}.$$

$\varphi \equiv 1$, $p = n$, $\alpha = 0$ のとき，定理 3 は，Herron-Koskela [4] によって示された．
本報告の結果は [7] にまとめられたものである．

参考文献

[1] S. J. Gardiner, Growth properties of pth means of potentials in the unit ball, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 861-869.

[2] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Second Edition, Springer-Verlag, 1983.

[3] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, 1993.

[4] D. A. Herron and P. Koskela, Conformal capacity and the quasihyperbolic metric, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), 333-359.

[5] Y. Mizuta, Spherical means of Beppo Levi functions, Math. Nachr. **158** (1992), 241-262.

[6] Y. Mizuta, Hyperplane means of potentials, J. Math. Anal. Appl. **201** (1996), 226-246.

[7] Y. Mizuta and T. Shimomura, Boundary limits of spherical means for BLD and monotone BLD functions in the unit ball, to appear in Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A.I. Math.

[8] M. Stoll, Boundary limits of subharmonic functions in the unit disc, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 567-568.

11 On continuity of extremal distance in case islands exist

Naondo Jin (Gakushuin Univ.) and Makoto Ohtsuka

Let K be a compact set consisting of mutually disjoint compact sets K_0 and K_1 in $\mathbb{R}^d$, and E be a relatively closed bounded subset of $\mathbb{R}^d \setminus K$ such that the closure of each component of E is disjoint from K and $\mathbb{R}^d \setminus (K \cup E)$ is a domain. Hence $K \cup E$ is a compact set and each component of $K \cup E$ is a subset of either K_0 or K_1 or E. We call each component of E an island.

We set $Z = \mathbb{R}^d \setminus (K \cup E)$. A sequence $\{Z_n\}_{n=0,1,\dots}$ of subdomains of $\mathbb{R}^d$ with the following properties will be called an exhaustion of Z: $Z = \cup_{n=0}^{\infty} Z_n$, $\mathbb{R}^d \setminus Z_0$ is a compact set, $\overline{Z}_n \subset Z_{n+1}$ for each $n \geq 0$, the boundary of each Z_n consists of finitely many polygonal surfaces, no component of $Z \setminus Z_n$ is compact in Z for each n.

We consider a new space Ξ whose elements consist of the points of $\mathbb{R}^d \setminus (K \cup E)$ and the components of $K \cup E$ so that each component of $K \cup E$ is regarded as a point in Ξ. We shall use the notation p to denote the mapping of $\mathbb{R}^d$ onto Ξ, and call this mapping the projection.

Now we consider a bounded open set G whose closure meets every component of $K \cup E$. We shall denote by $\Gamma = \Gamma_\Xi(K_0, K_1, E, G)$ the family of curves γ in Ξ which connect $p(K_0)$ and $p(K_1)$ such that every $\gamma \setminus p(K \cup E)$ is contained in G and the component curves of every $\gamma \setminus p(K \cup E)$ are locally rectifiable.

We assume $\Gamma \neq \emptyset$ and call a function ρ in $\mathbb{R}^d$ Γ-admissible or simply Γ-ad. if it is non-negative Borel measurable and $\int_c \rho ds \geq 1$ for every $c \in \Gamma$. Given a weight ω and $p, 1 \leq p < \infty$, we define the weighted modulus $M_p(\Gamma;\omega) = M_p(K_0, K_1, E, G;\omega)$ by

$$\inf_\rho \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \rho^p \omega dx; \rho \text{ is } \Gamma\text{-ad.} \right\};$$

in case $\Gamma = \emptyset$ we define $M_p(\Gamma;\omega)$ to be zero. The weighted extremal length $\lambda_p(\Gamma;\omega) = \lambda_p(K_0, K_1, E, G;\omega)$ is defined to be $1/M_p(K_0, K_1, E, G;\omega)$. We call them the weighted modulus and extremal length of a condenser (K_0, K_1, E, G) too.

Let $\{Z_n\}_{n=0,1,\dots}$ be an exhaustion of Z as above. By taking $\{Z_n\}_{n=n_0,n_0+1,\dots}$ as $\{Z_n\}_{n=0,1,\dots}$ for a large n_0 if necessary, we may assume from the beginning that no component of $Z \setminus Z_0$ contains both some points of K_0 and some points of K_1. Let $K_0^{(n)}$ (resp. $K_1^{(n)}$) be the union of the components of $\mathbb{R}^d \setminus Z_n$ each of which is not disjoint from K_0 (resp. K_1). Set $K^{(n)} = K_0^{(n)} \cup K_1^{(n)}$ and $E^{(n)} = \mathbb{R}^d \setminus (Z_n \cup K^{(n)})$. Like Ξ we consider the space Ξ_n for each $n \geq 0$ which consists of the points of $\mathbb{R}^d \setminus (K^{(n)} \cup E^{(n)})$ and the components of $K^{(n)} \cup E^{(n)}$. As above we introduce a topology on Ξ_n and use the terminology "projection" and the notation p_n for the mapping of $\mathbb{R}^d$ onto Ξ_n. We define $\Gamma(K_0^{(n)}, K_1^{(n)}, E^{(n)}, G)$ like $\Gamma = \Gamma(K_0, K_1, E, G)$ and write it as Γ_n for simplicity.

We define also $M_p(\Gamma_n;\omega) = M_p(K_0^{(n)}, K_1^{(n)}, E^{(n)}, G;\omega)$ and $\lambda_p(\Gamma_n;\omega) = \lambda_p(K_0^{(n)}, K_1^{(n)}, E^{(E)}, G;\omega) = 1/M_p(\Gamma_n;\omega)$. We shall use the simple notation M, λ, $M^{(n)}$ and $\lambda^{(n)}$. We call λ (resp. $\lambda^{(n)}$) the extremal distance between K_0 (resp. $K_0^{(n)}$) and K_1 (resp. $K_1^{(n)}$) through E (resp. $E^{(n)}$).

Our main result is the following theorem.

Theorem. As $n \to \infty$ $\lambda^{(n)}$ tends to λ.

To prove this theorem the next lemma is essential.

Lemma. Let $\omega \in A_p$, $0 < \varepsilon < 1$, Γ, Γ_n be as above and $0 < a < \infty$. Let $\rho \in L^{p,\omega}(\mathbb{R}^d)$ be a positive lower semicontinuous function which is continuous in $G \setminus (K \cup E)$. Then for each $\varepsilon > 0$, we can find a Borel measurable function $\rho' \geq \rho$ which have the following properties:

1) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^d} \rho'^p \omega dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} \rho^p \omega dx + \varepsilon.$

2) Suppose there exists a sequence of $c_n \in \Gamma_n, n = 1, 2, \ldots$, satisfying $\int_{c_n} \rho' ds \leq a$. Then there exists $\tilde{c} \in \Gamma$ such that $\int_{\tilde{c}} \rho ds \leq a + \varepsilon$.

We shall define "contour graph" which is a refinement of "contour sequences" in [MR]. To prove this lemma we shall follow the discussion in [MR] using "contour graph" instead of "contour sequences".

Comments. The proof of our lemma in the case when no islands exist will appear in [AO] as Lemma 6.1 (Shlyk-Ohtsuka). [Sh, p.91, Theorem 1.3] gives a proof of our Theorem in the non-weighted case but it does not seem to be easy to understand it.

References

[AO] H. Aikawa and M. Ohtsuka: Extremal length of vector measures. to appear.

[MR] A. Marden and B. Rodin: Extremal and conjugate extremal distance on open Riemann surfaces with applications to circular-radial slit mappings. Acta Math. 115, (1966), 237-269.

[Sh] V. Shlyk: Normal domains and removable singularities. Izv. Ross. Akad. Nauk Cer. Mat. 57 (1993), no.4; translation in Russian Acad. Sci. Izv. Math. 43 (1994), 83-104.

12　調和関数の一意性定理

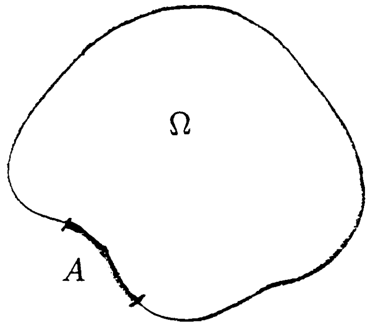
鈴木紀明　　名古屋大・多元数理

次の古典的結果が考察の出発点である．

定理 A. Ω を滑らかな境界をもつ $\mathbf{R}^n$ の領域とし，A を境界 $\partial\Omega$ の空でない開部分集合とする．$h \in C^1(\overline{\Omega})$ が Ω で調和で，

$$h(x) = \frac{\partial}{\partial n}h(x) = 0, \quad \forall x \in A \tag{1}$$

を満たせば，h は恒等的に零である ($\partial/\partial n$ は外法線微分)．



上記の結果を滑かとは限らない領域に拡張することが目的である．次の記号を使う：

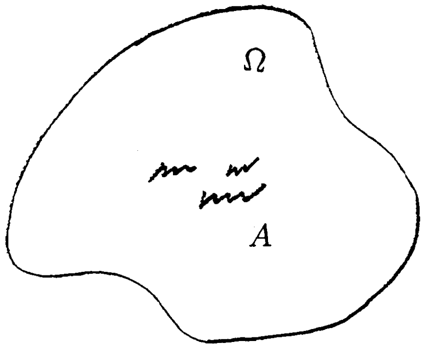
$$\delta_\Omega(y) = \inf_{x\in\partial\Omega} \|y-x\|, \quad y \in \Omega$$

δ_Ω を使って，定理 A が次の様に一般化できる．

定理. Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域とし，A を $\partial\Omega$ の空でない開部分集合とする．$\Omega \cup A \cup (\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ の Ω を含む連結成分を Ω_0 で表す．Ω 上の調和関数 h が

$$\lim_{y\to x} \frac{h(y)}{\delta_\Omega(y)} = 0, \quad \forall x \in A \tag{2}$$

を満たし，かつ $\Omega_0 \setminus \Omega$ の面積が正ならば，$h \equiv 0$ である．



注意 1. Ω が滑らかで，$h \in C^1(\overline{\Omega})$ のとき，(1) $\Leftrightarrow$ (2).

注意 2. 定理における仮定「$\Omega_0 \setminus \Omega$ の面積が正」に関連し次の定義をする：D を領域とし F を閉部分集合とする．F が "調和関数のグラディエントに関する一致集合" とは $h(x) = \nabla h(x) = 0,\ x \in F$ を満たす D 上の調和関数は零しかないときを言う．例えば，F の面積が正なら F はこの性質を持つ．$n = 2$ なら F は D 内に集積点をもてばよい (関数 $(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)h$ が正則関数になる).

定理の仮定は「$\Omega_0 \setminus \Omega$ が Ω_0上の調和関数のグラディエントに関する一致集合」とできる．

参考文献

N.Suzuki, A uniqueness theorem for harmonic functions, Preprintreihe Mathematik Katholische Universität Eichstätt, 97-013 (1997).

13　回転不変負値測度のピカール原理

中井三留　大同工業大学
多田俊政　大同工業大学

d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 2)$ の穴空き単位球 $\{x \in \mathbf{R}^d : 0 < |x| < 1\}$ を Ω, 単位球面 $\{x \in \mathbf{R}^d : |x| = 1\}$ を Γ とする. $\Omega \cup \Gamma$ 上のラドン測度 μ に対して, $\Omega \cup \Gamma$ 上で連続, Ω 上 $(-\Delta + \mu)u = 0$ を超関数の意味でみたし, Γ 上零となる関数 u の全体を $\mathcal{P}$ と記すとき, ある $u \in \mathcal{P}$ に対して $\mathcal{P} = \{\lambda u : \lambda \in \mathbf{R}^+\}$ となるならば, μ に対して**ピカール原理**が成立すると言う. これについて, 次の事実が既知である.

定理 A([1]). ***$d = 2$ で, μ が $\mu \leq 0$ となるカトー族の測度ならば, μ に対してピカール原理が成立する.***

ここで $\Omega \cup \Gamma$ 上のラドン測度 μ が**カトー族**の測度であるとは, すべての $a \in \Omega \cup \Gamma$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\sup_{x \in B(a,\varepsilon)\cap(\Omega\cup\Gamma)} \int_{B(a,\varepsilon)\cap(\Omega\cup\Gamma)} g(x-y)d|\mu|(y)\right) = 0$$

となることである, 但し $B(a,\varepsilon)$ は a 中心半径 $\varepsilon > 0$ の球, $g(t) = \log(1/|t|)$ $(d = 2)$, $1/|t|^{d-2}$ $(d \geq 3)$, $|\mu|$ は μ の全変分測度とする. またすべてのボレル集合 $E \subset \Omega \cup \Gamma$ とすべての直交変換 τ に対して $\mu(\tau E) = \mu(E)$ となるとき, $\Omega \cup \Gamma$ 上のラドン測度 μ は**回転不変**であると言う. μ がルベーグ測度 λ について絶対連続のとき, λ に関する μ

のラドン・ニコディム密度を $d\mu/d\lambda$ と記す. $d \geq 3$ の場合定理 A の正否は不明であるが, 次のことがわかっている.

定理 B([2]). **$d \geq 2$ のとき, μ が $\mu \leq 0$ かつ回転不変で $d\mu/d\lambda$ が局所ヘルダー連続ならば, μ に対してピカール原理が成立する.**

本講演の目的は上記の定理 B で $d\mu/d\lambda$ が存在して局所ヘルダー連続となると言う条件が不要なことを報告することにある. 即ち

定理. **$d \geq 2$ のとき, μ が $\mu \leq 0$ かつ回転不変ならば, μ に対してピカール原理が成立する.**

この結果の成立を支えるいくつかの要素のうち, 次の事実が最も重要である.

命題. **$\Omega \cup \Gamma$ 上のラドン測度 μ が回転不変ならば必然的にカトー族の測度である.**

参照文献

[1] M. Nakai and T. Tada: *Picard principle for negative planar potentials*, Math. Ann., **308**(1997), 319–332.

[2] M. Nakai and T. Tada: *Monotoneity and homogeneity of Picard dimensions for signed radial densities*, Hokkaido Math. J., **26**(1997), 253–296.

14　可容性と可測性

二宮信幸

Choquet が 1953 年に発表した論文は善く有名である。その論文は明らかに Cartan の研究に端を発する。今度，R^m ($m \geqq 3$) におけるニュートン・ポテンシャル

$$U^\mu(x) = \int |x-y|^{2-m} d\mu(y)$$

に対して，正の測度 μ の任意集合 A への内掃散測度 μ_A^i，外掃散測度 μ_A^e，A の μ-内容量 $C_\mu^i(A)$，μ-外容量 $C_\mu^e(A)$ を作ったのは Cartan であるからである。両者が一致するとき μ-可容といわれ，単に $C_\mu(A)$ とかかれる。点 x は，x におかれた Dirac 測度 ε_x に対して，$(\varepsilon_x)_A^i = \varepsilon_x$ なるとき A の内正則点，$(\varepsilon_x)_A^e = \varepsilon_x$ なるとき A の外正則点と呼ばれる。そうでないとき A の内(外)非正則点と呼ばれる。

有理点を中心，半径が有理数である球面測度（球面上に一様に分布された正の測度で，全質量はその半径の

$n-2$ 乗）をすべて並べて $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \cdots$ とし，正の係数列 $\{a_n\}$ をとって，正の測度 $\alpha = \sum a_n \lambda_n$，$\sum a_n < \infty$，が全質量有限，かつニュートン・ポテンシャルが全空間で有限連続な関数であるようにする．このとき，α の集合 A への内（外）掃散測度 α_A^i（α_A^e）に対して

（1）全空間で $U^{\alpha_A^i}(x) \leq U^{\alpha}(x)$

$$\left(U^{\alpha_A^e}(x) \leq U^{\alpha}(x) \right),$$

（2）A の内（外）正則点で例外なく等号，内（外）

非正則点で例外なく不等号，

が成立つ．このとき，

定理．R^n（$n \geq 3$）において，集合 A が α-可容であるための必要かつ十分な条件は，その内（外）正則点の集合を A^i（A^e）とするとき，集合 $A^e - A^i$ がエネルギー有限なすべての正の測度に関して測度 0 であることである．

特別講演

劣調和関数とネバンリンナノルム

千葉大学理学部　　吉田　英信

ここでは、ネバンリンナノルムと呼ばれる、関数の増大度を測る計量が重要な役割を果たす、２種類の結果について報告する。

第一部　Phragmén-Lindelöf 型の定理とその拡張について

Dを複素平面上の有界領域とし、$f(z)$ は Dで正則とする。Dの境界∂Dのすべての点ζにおいて

$$(1-1) \qquad \overline{\lim}_{z\to\zeta, z\in D}|f(z)| \leq 1$$

ならば、D上全体で $|f(z)| \leq 1$ である（最大値原理）。条件 (1-1) を弱め、例えば、「境界の一点ζ_0以外のすべての点で (1-1) が成立するとして、ζ_0でどんな付加条件があれば同じ結論が続くか?」はζ_0を無限遠点に移す変換を考えれば、Dを右半平面とし、(1-1) のかわりに任意の実数 t に対して

$$(1-2) \qquad \overline{\lim}_{z\to it, \Re z>0}|f(z)| \leq 1$$

で、付加条件として、$|z| \to \infty$ の際の $f(z)$ の振舞に関する条件を考えることとなる。この種の研究は Phragmén-Lindelöf [24] によってはじめられ、以後この種の定理は Phragmén-Lindelöf 型の定理とよばれている。1922 年に F. and R. Nevanlinna [22] は、彼等の結果を次の形に整理、拡張した。

定理 N_1 (F. and R. Nevanlinna [22]).　$f(z)$ は右半平面$\Re z > 0$ で正則で、(1-2) を満たすとする。このとき、

$$(1-3) \qquad \underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log^+ |f(re^{i\theta})| \cos\theta d\theta = 0$$

ならば、

$$|f(z)| \leq 1 \quad (\forall z = re^{i\theta}, \Re z > 0)$$

定理 N_1を含む、更に一般的な形の定理として

定理 N_2 (F. and R. Nevanlinna [22]).　定理 N_1と同じ仮定のもとに、(1-3) の代りに

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log^+ |f(re^{i\theta})| \cos\theta d\theta \leq \eta \quad (0 \leq \eta < \infty)$$

が成立するならば

$$(1-4) \qquad |f(z)| \le e^{\frac{2\eta r\cos\theta}{\pi}} \quad (\forall z = re^{i\theta}, \Re z > 0).$$

次に、 $|f(z)| \le 1 \quad (\forall z, \Re z > 0)$ かつ

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|f(re^{i\theta})|\cos\theta d\theta \le -\eta \quad (0 \le \eta < \infty)$$

ならば

$$(1-5) \qquad |f(z)| \le e^{-\frac{2\eta r\cos\theta}{\pi}} \quad (\forall z = re^{i\theta}, \Re z > 0).$$

ここで

$$f(z) = e^{\frac{2\eta z}{\pi}} \quad \text{と} \quad e^{-\frac{2\eta z}{\pi}}$$

の時、(1-4) と (1-5) でそれぞれ等号が成立する。

定理 N_1はまた、次の形で一般化された。

定理 N_3 (F. and R. Nevanlinna [22]). $f(z)$ は$\Re z > 0$ で正則とする。更に、

$$\int^{+\infty} \frac{|g(t)| + |g(-t)|}{t^2} dt < +\infty$$

を満たす $(-\infty, +\infty)$ 上の連続関数 $g(t)$ に対して、

$$\overline{\lim}_{z\to it, \Re z>0}|f(z)| \le g(t) \quad (-\infty < \forall t < +\infty)$$

が成立している。このとき、

$$\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log^+|f(re^{i\theta})|\cos\theta d\theta = 0$$

ならば、

$$\log|f(z)| \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{r\cos\theta}{t^2 + r^2 - 2tr\sin\theta} d\theta \quad (\forall z = re^{i\theta}, \Re z > 0)$$

これらの 3 定理に共通して、積分

$$(1-6) \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log^+|f(re^{i\theta})|\cos\theta d\theta, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|f(re^{i\theta})|\cos\theta d\theta$$

と $r\to\infty$ に際してのそれの振舞いが重要な役割を果たしている。Heins [12] は帯状領域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < y < +\infty\}$ 上の劣調和関数 $u(x,y)$ に対する積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(x,y)\cos x dx \quad (-\infty < y < \infty)$$

を (1-6) に因んで、ネバンリンナノルムと呼んだ。

その後、定理 N_1, 定理 N_2は上記の Heins の論文も含めて劣調和関数の定理として考えられ、また右半平面は半空間へと拡げられて研究されてきた。更に、半空間をその特別な場合として含む錐（コーン）上の劣調和関数に対して上記の 3 定理がどんな形をとるかを考えることは、(1-6) の重み $\cos\theta$の正体を知ることも含めて、意味のあることであろう。

先ず、結果を述べるための必要な記号等を説明する。n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ に極座標を導入する。すなわち $\mathbf{R}^n$の点 (X, y), $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ とその極座標 (r, Θ), $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ とは

$$x_1 = r(\Pi_{j=1}^{n-1} \sin\theta_j) \quad (n \geq 2), \quad y = r\cos\theta_1,$$

かつ、$n \geq 3$ ならば

$$x_{n+1-k} = r(\Pi_{j=1}^{k-1} \sin\theta_j)\cos\theta_k \quad (2 \leq k \leq n-1),$$

の関係がある。ただし

$$0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta_j \leq \pi\ (1 \leq j \leq n-2;\ n \geq 3),\ -2^{-1}\pi < \theta_{n-1} \leq 2^{-1}3\pi.$$

また、$\mathbf{R}^n$内の単位球面（$n = 2$ ならば単位円周）と上半単位球面 $\{(1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) \in \mathbf{R}^n;\ 0 \leq \theta_1 < \pi/2\}$ ($n = 2$ ならば右半単位円周 $\{(1, \theta_1) \in \mathbf{R}^2;\ -\pi/2 < \theta_1 < \pi/2\}$) は、それぞれ $\mathbf{S}^{n-1}$と $\mathbf{S}_+^{n-1}$で表す。$\mathbf{S}^{n-1}$上の点 $(1, \Theta)$ とΘを時々同一視する。

Ωを $\mathbf{S}^{n-1}$上の領域とする時、集合

$$\{(r, \Theta) \in \mathbf{R}^n;\ (1, \Theta) \in \Omega,\ 0 < r < \infty\} = (0, +\infty) \times \Omega$$

は錐（コーン）（$n = 2$ の場合は角領域）で、$C_n(\Omega)$ によって表される。すると、半空間 ($n = 2$ ならば右半平面)

$$\mathbf{T}_n = \{(r, \Theta) \in \mathbf{R}^n;\ \Theta \in \mathbf{S}_+^{n-1},\ 0 < r < \infty\}$$

はコーンの特別の場合 $\mathbf{T}_n = C_n(\mathbf{S}_+^{n-1})$ である。

以下では、考察を簡潔にするために、Ωの境界は充分になめらかとする。例えば、$n \geq 3$ のとき、互いに交わらない有限個の (超) 閉曲面（$n = 3$ ならば閉曲線）によって囲まれた $C^{2,\alpha}$-領域 $(0 < \alpha < 1)$ (Gilbarg and Trudinger [11])。

Δ_n $(n \geq 2)$ をラプラシアンとし、Λ_nを

$$\Delta_n = \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\Lambda_n$$

とする。曲面 $\mathbf{S}^{n-1}$ $(n \geq 2)$ 上で、次のディリクレ問題

$$(1-7) \qquad (\Lambda_n + \lambda)F = 0 \quad \text{in } \Omega \quad かつ \qquad F = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

を考える。このとき、λ_Ωによって(1-7)の正の最小固有値を表し、$f_\Omega(\Theta)$によってλ_Ωに対応する正規化された固有関数(正値解)を表す。すなわち、

$$\int_\Omega f_\Omega^2(\Theta)d\sigma_\Theta = 1$$

($d\sigma_\Theta$は$\mathbf{S}^{n-1}$のΘでの面積測度)。更に、2次方程式

$$t^2 + (n-2)t - \lambda(\Omega, k) = 0$$

の正解、負解を $\alpha_\Omega, -\beta_\Omega$ とする。特に、$\Omega = \mathbf{S}_+^{n-1}$の時、$\alpha_\Omega = 1, \quad \beta_\Omega = n-1,$

$$f_\Omega(\Theta) = (2ns_n^{-1})^{1/2}\cos\theta_1 \quad (s_n\text{は}\mathbf{S}^{n-1}\text{の表面積})。$$

次に、$u(P) = U(r,\Theta)$ を $C_n(\Omega)$ 上の劣調和関数とし、積分

$$\int_\Omega u(r,\Theta)f_\Omega(\Theta)d\sigma_\Theta$$

を $N_u(r)$ で表す。また、$S \subset \partial C_n(\Omega)$ に対して

$$\overline{\lim}_{P\to Q, P\in C_n(\Omega)} u(P) \le 0 \quad (\forall Q \in S)$$

を満たす時、u は「S上で Phragmén-Lindelöf の条件を満たす」という。

以上の準備のもとに、結果を（イ）（ロ）（ハ）（ニ）（ホ）に分けて述べる。なお、これらのどの結果に対しても、なめらかな境界をもつ $\mathbf{R}^{n-1}(n \ge 2)$ 内の有界領域 Dに対するシリンダー（$n=2$ のときは、帯状領域）

$$\{(X,y) \in \mathbf{R}^n : X \in D, \quad -\infty < y < +\infty\}$$

上での劣調和関数に関する結果が対応して得られることを注意したい（Ahlfors [1], Heins [12], Deny and Lelong [6], Yoshida [28],[29]）。

（イ）ネバンリンナノルムの regularity

2数 a, b $(0 \le a < b \le +\infty)$ に対して、

$$C_n(\Omega; a, b) = \{(r,\Theta) : (1,\Theta) \in \Omega, a < r < b\} = (a,b) \times \Omega$$

とする。この時、$(a,b)\times\partial\Omega$上で Phragmén-Lindelöf の条件を満たす $C_n(\Omega; a,b)$ 上の劣調和関数 u に対して、$N_u(r)$ ($N_u(r) > -\infty$ が示される) のある種の convexity を利用して、次の結果が得られる。

定理 1.1(Yoshida [28]). $u(r,\Theta)$ は $C_n(\Omega; a,b)(0 \le a < b \le +\infty)$ 上で劣調和で $(a,b)\times\partial\Omega$上で Phragmén-Lindelöf の条件を満たすとする。$a=0$ の場合に、
(i) $\eta_u = \lim_{r\to 0} r^{\beta_\Omega} N_u(r)$ $(-\infty < \eta_u \le +\infty)$ が存在する
(ii) $\eta_u \le 0$ のとき、$r^{-\alpha_\Omega}N_u(r)$ は $(0,b)$ 上で非減少

$b = +\infty$ の場合

(i)' $\mu_u = \lim_{r\to\infty} r^{-\alpha_\Omega} N_u(r)$ $(-\infty < \mu_u \le +\infty)$ が存在する

(ii)' $\mu_u \le 0$ のとき、$r^{\beta_\Omega} N_u(r)$ は $(a, +\infty)$ 上で非増加

Remark 1.1. 定理 1.1 は、Ahlfors [1] と Heins [12] による $\mathbf{T}_2$上の正則関数 $f(z)$ による $\log^+ |f(z)|$ に対する結果、Ahlfors [1] による $\mathbf{T}_n$上の非負調和関数に対する結果、Heins [15] による $\mathbf{T}_2$上の非負劣調和関数に対する結果、Keller [15] による $\mathbf{T}_3$上の調和関数に対する結果、Dinghas [9],[10] による $\mathbf{T}_n$上の非負劣調和関数に対する結果、Huber [14] による $\mathbf{T}_n$上の劣調和関数に対する結果、Kuran [16] による $\mathbf{T}_n$上の優調和関数に対する結果、を含んでいる。

(ロ) Phragmén-Lindelöf 型の定理（定理 N_1を含む）

定理 1.2(Yoshida [28]). $u(r,\Theta)$ は $C_n(\Omega)$ 上での劣調和関数で、$\partial C_n(\Omega) - \{O\}$($O$は $\mathbf{R}^n$ の原点) 上で Phragmén-Lindelöf の定理を満たすとき、

$$\mu_{u^+} = \eta_{u^+} = 0$$

ならば

$$u(r,\Theta) \le 0 \quad (\forall(r,\Theta) \in C_n(\Omega)).$$

Remark 1.2. 定理 1.2 は Deny and Lelong [6] による $C_n(\Omega)$ 上の劣調和関数にかんする結果と Kuran [17] による $\mathbf{T}_n$上の劣調和関数に関する結果を含んでいる。また、Armitage and Fugard [3] による$\Omega = \{\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) \in \mathbf{S}^{n-1}; 0 \le \theta_1 < \omega\}$ $(0 < \omega < \pi)$ に対する $C_n(\Omega)$ 上の劣調和関数に対する結果を含んでいる。

(ハ) 劣調和関数の調和優関数（定理 N_2を含む）

定理 1.3(Yoshida [28]). $u(r,\Theta)$ は $C_n(\Omega)$ 上での劣調和関数で、$\partial C_n(\Omega) - \{O\}$ 上で Phragmén-Lindelöf の条件を満たす。このとき、

$$(1-8) \qquad \underline{\lim}_{r\to\infty} r^{-\alpha_\Omega} M_u(r) \quad \text{かつ} \quad \underline{\lim}_{r\to 0} r^{\beta_\Omega} M_u(r) < +\infty \quad (M_u(r) = \sup_{\Theta\in\Omega} u(r,\Theta))$$

ならば

$$(1-9) \qquad u(r,\Theta) \le (\mu_u r^{\alpha_\Omega} + \eta_u r^{-\beta_\Omega}) f_\Omega(\Theta) \quad (\forall(r,\Theta) \in C_n(\Omega)).$$

もし、

$$u(r,\Theta) \ge 0 \quad (\forall(r,\Theta) \in C_n(\Omega))$$

ならば、(1-9) の右辺は $u(r,\Theta)$ の最小調和優関数である。

Remark 1.3 境界で 0 になる調和関数

$$(Ar^{\alpha_\Omega} + Br^{-\beta_\Omega}) f_\Omega(\Theta)$$

に対して、等号成立。条件 (1-8) なしでは、$\mu_u < +\infty$, $\eta_u < +\infty$ でも (1-9) は成立しない。

Remark 1.4. 定理 1.3 は、Keller [15] による $\mathbf{T}_3$上の調和関数に関する結果、Kuran [16] による $\mathbf{T}_n$上の正値優調和関数に関する結果、を含んでいる。

$C_n(\Omega; R_1, R_2)$ $(0 < R_1 < R_2 < +\infty)$ のグリーン関数 $G^{R_1R_2}(P, Q)$ $(P = (R, \theta), Q = (r, \Theta) \in C_n(\Omega))$ の Azarin [4] での評価式

$$\frac{\partial G^{R_1,R_2}(P_1,Q)}{\partial R} \leq C_1\left(\frac{R_1}{r}\right)^{\beta_\Omega}\frac{f_\Omega(\theta)f_\Omega(\Theta)}{R_1^{n-1}} \quad (\forall P_1 = (R_1,\theta),\ \theta \in \Omega; \forall Q = (r,\Theta) \in C_n(\Omega))$$

$$-C_2\left(\frac{r}{R_2}\right)^{\alpha_\Omega}\frac{f_\Omega(\theta)f_\Omega(\Theta)}{R_2^{n-1}} \leq \frac{\partial G^{R_1,R_2}(P_2,Q)}{\partial R} \quad (\forall P_2 = (R_2,\theta),\ \theta \in \Omega; \forall Q = (r,\Theta) \in C_n(\Omega))$$

より

$$M_u(r) \leq (C_3\eta_{u^+}r^{-\beta_\Omega} + C_4\mu_{u^+}r^{\alpha_\Omega})\max_{\Theta\in\Omega} f_\Omega(\Theta) \quad (0 < r < +\infty)$$

$(C_1, C_2, C_3, C_4$ はΩのみによる定数) を得るので、$\mu_{u^+} < +\infty$, $\eta_{u^+} < +\infty$ から (1-8) が続く。この事から、定理 N_2を含む次の定理を得る。

定理 1.4(Yoshida [28]). $u(r, \Theta)$ は $C_n(\Omega)$ 上での劣調和関数で、$\partial C_n(\Omega) - \{O\}$ 上で Phragmén-Lindelöf の境界条件を満たす。

$$\mu_{u^+} < +\infty \quad かつ \quad \eta_{u^+} < +\infty$$

ならば、

$$u(r,\Theta) \leq (\mu_u r^{\alpha_\Omega} + \eta_u r^{-\beta_\Omega})f_\Omega(\Theta) \leq (\mu_{u^+}r^{\alpha_\Omega} + \eta_{u^+}r^{-\beta_\Omega})f_\Omega(\Theta) \quad (\forall(r,\Theta) \in C_n(\Omega))$$

（二） Maximum modulus $M_u(r)$ の regularity とネバンリンナノルムとの関係

定理 1.5(Yoshida [28]). $u(r, \Theta)$ は $C_n(\Omega)$ 上で劣調和で、$\partial C_n(\Omega) - \{O\}$ 上で Phragmén-Lindelöf の条件を満たすとする。もし

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} r^{\beta_\Omega} M_u(r) < +\infty$$

ならば

$$A_u = \lim_{r\to\infty} r^{-\alpha_\Omega} M_u(r), \quad 0 \leq A_u \leq +\infty$$

が存在し、

$$A_u = (K_u)^+ \max_{\Theta\in\Omega} f_\Omega(\Theta) = \mu_{u^+} \max_{\Theta\in\Omega} f_\Omega(\Theta)$$

$$(K_u = \overline{\lim}_{r\to\infty} r^{-\alpha_\Omega} \sup_{\Theta\in\Omega}[u(r,\Theta)\{f_\Omega(\Theta)\}^{-1}])$$

Remark 1.5. Ahlfors [1] は、(1-2) を満たす $\mathbf{T}_2$上の正則関数 $f(z)$ による $\log|f(z)|$ に対して、極限 $A_{\log|f|}$が存在するかとたずねた。この問いを、Heins [12] は肯定的に答え、関係

$$A_{\log|f|} = (\frac{2}{\pi})^{1/2}\mu_{\log^+|f|}$$

を与えた。Heins [13] はこの関係式を $\mathbf{T}_2$上の非負劣調和関数に拡張し

$$A_u = (\frac{2}{\pi})^{1/2}\mu_u$$

を示した。Keller [15] は $\mathbf{T}_3$上の調和関数 h に対して、A_hの存在を示し、

$$A_h = (\frac{3}{2}\pi)^{1/2}\mu_{h^+}$$

を与えた。Lelong-Ferrand [19] は $C_n(\Omega)$ 上の劣調和で、$\partial C_n(\Omega)$ 上で Phragmén-Lindelöf の境界条件を満たす関数に対して、A_uの存在と

$$A_u = (I_u)^+ \max_{\Theta\in\Omega} f_\Omega(\Theta) \quad (I_u = \sup_{(r,\Theta)\in C_n(\Omega)} r^{-\alpha_\Omega} u(r,\Theta)\{f_\Omega(\Theta)\}^{-1})$$

を示した。

（ホ）定理 N_3を含む結果について

$G_{C_n(\Omega)}(P,Q)$ を $C_n(\Omega)$ のグリーン関数とし、$\frac{\partial}{\partial\nu}G_{C_n(\Omega)}(P,Q)$ を点 $Q\in\partial C_n(\Omega)-\{O\}$ での内法線微分とする。

次に、$g(Q)$ は$\partial C_n(\Omega)-\{O\}$ 上の局所可積分関数で、

$$(1-10)\quad \int^{+\infty} r^{-\alpha_\Omega-1}(\int_{\partial\Omega}|g(r,\Theta)|d\sigma_\Theta)dr < +\infty, \quad \int_0 r^{\beta_\Omega-1}(\int_{\partial\Omega}|g(r,\Theta)|d\sigma_\Theta)dr < +\infty$$

(ただし、$n=2$ のとき$\Omega=(\gamma,\delta)$ とすれば $\int_{\partial\Omega}|g(r,\Theta)|d\sigma_\Theta = |g(r,\gamma)|+|g(r,\delta)|$) を満たすとする。このとき、ポアソン積分は

$$H(C_n(\Omega);g)(P) = \frac{1}{c_n}\int_{\partial C_n(\Omega)-\{0\}} g(Q)\frac{\partial}{\partial\nu}G_{C_n\Omega}(P,Q)d_{\sigma_\Theta} \quad c_n = \begin{cases} 2\pi & (n=2) \\ (n-2)s_n & (n\geq 3). \end{cases}$$

定理 1.6(Yoshida [28]). $g(Q)$ は $\partial C_n(\Omega)-\{O\}$ 上の連続関数で (1-10) を満たす。$u(P)$ は $C_n(\Omega)$ 上劣調和で

$$\overline{\lim}_{P\in C_n(\Omega),P\to Q} u(P) \leq g(Q) \quad (\forall Q\in\partial C_n(\Omega)-\{O\}).$$

このとき、4つの極限

$$\mu_{u^+}, \eta_{u^+}, \mu_u, \eta_u \quad (0\leq \mu_{u^+}, \eta_{u^+} \leq +\infty,\ -\infty < \mu_u, \eta_u \leq +\infty)$$

が共に存在し、もし

$$(1-11) \qquad \mu_{u^+} < +\infty \quad \text{かつ} \quad \eta_{u^+} < +\infty$$

ならば、

$$(1-12) \quad u(P) \leq H(C_n(\Omega); g)(P) + (\mu_u r^{\alpha_\Omega} + \eta_u r^{-\beta_\Omega}) f_\Omega(\Theta) \quad (\forall P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega))$$

Remark 1.6. $g(Q) \equiv 0$ の時、定理 1.4 を得る。条件 (1-11) なしでは、$\mu_u < +\infty$, $\eta_u < +\infty$ でも (1-12) は成立しない。

Remark 1.7. 定理 1.6 は、$\mathbf{T}_2$上の正則関数 $f(z)$ による $\log|f(z)|$ に対する定理 N_3と、Boas [5,pp.92-93] による結果、Keller [15] による $\mathbf{T}_3$上の調和関数に関する結果、Kuran [18] による $\mathbf{T}_n$上の正値劣調和関数に関する結果を含んでいる。

第二部　非有界領域でのディリクレ問題の特殊解と一般解

Dを $\mathbf{R}^n$の領域とし、gを S, $S \subset \partial D$上の連続関数とする。“gに関する D上のディリクレ問題” すなわち、h が Dで調和で、かつあらゆる点 $Q \in S$において

$$(2-1) \qquad \lim_{P \in D, P \to Q} h(P) = g(Q)$$

なる h を求める問題は、Dが有界領域で $S = \partial D$のときは完全に解かれている。しかし D が有界領域であっても、∂D上の例えば、一点 Q_0に対して $S = \partial D - \{Q_0\}$, 更には∂D上の 2 点 Q_0, Q_1に対して $S = \partial D - \{Q_0, Q_1\}$ のとき、この問題の解はどのようなものであろうか。

最初に述べたと同様に、ケルビン変換によって、Q_0を無限遠点に移して考えれば、D は非有界領域であって、∂Dのまたは一点を除いた∂Dのあらゆる点 Q において (2-1) が成立するような、Dの調和関数を決定する問題とみなせる。これに関する最初の研究は次の、R.Nevanlinna [23] による次の結果である。

定理 $\mathbf{N}_4$ (R.Nevanlinna [23]). 関数 $g(t)$ は、$\mathbf{R}$ 上連続で

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{g(t)}{1+|t|^{2+l}} dt < \infty \quad (l \text{ は非負整数})$$

を満たすとする。この時、右半平面 $\mathbf{T}_2$ 上の、$g(t)$ $(t \in \partial \mathbf{T}_2 = \mathbf{R})$ に関するディリクレ問題の解（これを $H(\mathbf{T}_2, l; g)(z)$ で表す）で

$$(2-2) \qquad H(\mathbf{T}_2, l; g)(re^{i\theta}) \cos\theta = o(r^{l+1}) \quad (r \to \infty)$$

を満たすものが存在する。また、もし $h(z)$ が gに関する $\mathbf{T}_2$上のディリクレ問題の解で、しかも

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-(l+1)}\mu(r)=0 \quad (\mu(r)=\sup_{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}} |h(z)|\cos\theta)$$

を満たすならば、

$$h(z)=H(\mathbf{T}_2,l;g)(z)+\sum_{k=0}^{l} A_k r^k \cos k\theta,$$

ただし、すべての A_k $(k=0,1,\ldots,l)$ は h だけによる定数である。

$\mathbf{T}_2$上での R.Nevanlinna [23] の研究から隔たること久しく、最近、Siegel [25],[26] が $\mathbf{T}_n$ 上で再びこの問題を取上げ論じました。その論文中に提出されたある問題が、Yoshida [30] においてネバンリンナノルムを利用して解かれたのを契機に、$\mathbf{T}_n$上の結果はコーン上の結果に拡張されました (Yoshida and Miyamoto [31])。以下ではこれらの結果を、(イ) 特殊解、(ロ) ある種の一般解、に分けて、しかも原点 Oが$\partial C_n(\Omega)$ の除外点である場合とそうでない場合に分けてのべます。

第一部の場合と同様に、ここでのすべての結果には、シリンダー上での対応する結果があることを付記します (Widder [27] は帯状領域 (この境界は２本の直線) で、R.Nevanlinna [23] と同様な問題を考えた、 Miyamoto [20],[21])。

(イ) 特殊解について

(1-7) の、正の固有値の非減少列と、それに対応する正規直交固有関数列（固有空間の次元だけ重複して並べられている）を $\{\lambda(\Omega,k)\}_{k=1}^{\infty}$と $\{f_k^{\Omega}(\Theta)\}_{k=1}^{\infty}$ で表す ($\lambda(\Omega,1)$、$f_1^{\Omega}(\Theta)$ は第一部のλ_Ω、$f_\Omega(\Theta)$)。すると$\Omega\subset\mathbf{S}^{n-1}$に対して、整数列 $\{k_i\}$, $k_1=1$, $k_2=2$,

$$\lambda(\Omega,k_i)<\lambda(\Omega,k_{i+1})\ \lambda(\Omega,k_i)=\lambda(\Omega,k_i+1)=\lambda(\Omega,k_i+2)=\ldots=\lambda(\Omega,k_{i+1}-1)$$

が定まってくる。次に、$\alpha(\Omega,k),-\beta(\Omega,k)(\alpha(\Omega,k),\beta(\Omega,k)>0)$ は方程式

$$t^2+(n-2)t-\lambda(\Omega,k)=0$$

の解とする。

ポアソン核を定義しよう。l,m を非負２整数とする。２点 $P=(r,\Theta)\in C_n(\Omega),Q=(t,\Xi)\in\partial C_n(\Omega)-\{O\}$ に対して、

$$\overline{V}(C_n(\Omega),l)(P,Q)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{k_{l+1}-1} 2^{\alpha(\Omega,k)+n-1}c((H_\Xi)_1,k)t^{-\alpha(\Omega,k)-n+1}r^{\alpha(\Omega,k)}f_k^{\Omega}(\Theta) & (l\geq 1)\\ 0 & (l=0)\end{cases}$$

$$\underline{V}(C_n(\Omega),m)(P,Q)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{k_{m+1}-1} (\frac{3}{2})^{\beta(\Omega,k)}2^{m-1}c((H_\Xi)_3,k)t^{\beta(\Omega,k)-m+1}r^{-\beta(\Omega,k)}f_k^{\Omega}(\Theta) & (m\geq 1)\\ 0 & (m=0)\end{cases}$$

を考える。但し、$j=1,3$ に対して

$$c((H_\Xi)_j,k)=\int_\Omega (H_\Xi)_j(\Theta)f_k^{\Omega}(\Theta)d\sigma_\Theta,\quad (H_\Xi)_j(\Theta)=c_n^{-1}\frac{\partial}{\partial\nu}G_{C_n(\Omega)}((1,\Theta),(2,\Xi))$$

更に、$P \in C_n(\Omega)$, $Q = (t, \Xi) \in \partial C_n(\Omega) - \{O\}$ の関数

$$\overline{W}(C_n(\Omega), l)(P, Q) = \begin{cases} \overline{V}(C_n(\Omega), l)(P, Q) & (1 \le t < \infty) \\ 0 & (0 < t < 1) \end{cases}$$

$$\underline{W}(C_n(\Omega), m)(P, Q) = \begin{cases} \underline{V}(C_n(\Omega), m)(P, Q) & (0 < t \le 1) \\ 0 & (1 < t < \infty) \end{cases}$$

を考える。$C_n(\Omega)$ に対するポアソン核 $K(C_n(\Omega), l, m)(P, Q)$ を

$$K(C_n(\Omega), l, m)(P, Q) = c_n^{-1} \frac{\partial}{\partial \nu} G_{C_n(\Omega)}(P, Q) - \overline{W}(C_n(\Omega), l)(P, Q) - \underline{W}(C_n(\Omega), m)(P, Q)$$

$$(P \in C_n(\Omega),\ Q \in \partial C_n(\Omega) - \{O\}).$$

で定める。このとき、

$$K(C_n(\Omega), 0, 0)(P, Q) = c_n^{-1} \frac{\partial}{\partial \nu} G_{C_n(\Omega)}(P, Q).$$

$F(P) = F(r, \Theta)$ を $C_n(\Omega)$ 上の関数とする時、

$$N_F(r) = \int_\Omega F(r, \Theta) f_1^\Omega(\Theta) d\sigma_\Theta$$

非負２整数 p, qに対して、

$$\underline{\mu}_p(F) = \underline{\lim}_{r \to \infty} r^{-\alpha(\Omega, k_{p+1})} N_F(r) \quad かつ \quad \underline{\eta}_q(F) = \underline{\lim}_{r \to \infty} r^{\beta(\Omega, k_{q+1})} N_F(r)$$

更に、極限値が存在する時、

$$\mu_p(F) = \lim_{r \to \infty} r^{-\alpha(\Omega, k_{p+1})} N_F(r) \quad かつ \quad \eta_q(F) = \lim_{r \to \infty} r^{\beta(\Omega, k_{q+1})} N_F(r)$$

と表す。

定理 2.1. l, m を非負２整数とする。$\partial C_n(\Omega) - \{O\}$ 上の連続関数 gは

(2 − 3)

$$\int^\infty t^{-\alpha(\Omega, k_{l+1})-1} \left(\int_{\partial\Omega} |g(t, \Xi)| d\sigma_\Xi\right) dt < \infty, \quad \int_0 t^{\beta(\Omega, k_{m+1})-1} \left(\int_{\partial\Omega} |g(t, \Xi)| d\sigma_\Xi\right) dt < \infty$$

を満たすとする。このとき

$$H(C_n(\Omega), l, m; g)(P) = \int_{\partial C_n(\Omega) - \{O\}} g(Q) K(C_n(\Omega), l, m)(P, Q) d\sigma_Q$$

は gに関する$\partial C_n(\Omega) - \{O\}$ 上のディィリクレ問題の解で

$$\mu_l(|H(C_n(\Omega), l, m; g)|) = 0 \quad かつ \quad \eta_m(|H(C_n(\Omega), l, m; g)|) = 0.$$

定理 2.2(Yoshida and Miyamoto [31]). lを非負整数とする。$\partial C_n(\Omega)$ 上の連続関数 g は

(2 − 4)
$$\int_1^\infty t^{-\alpha(\Omega, k_{l+1})-1} \left(\int_{\partial\Omega} |g(t, \Xi)| d\sigma_\Xi\right) dt < \infty,$$

を満たすとする。このとき

$$(2-5) \qquad H(C_n(\Omega),l,m;g)(P)=\int_{\partial C_n(\Omega)-\{O\}} g(Q)K(C_n(\Omega),l,m)(P,Q)d\sigma_Q$$

は gに関する $C_n(\Omega)$ 上のディリクレ問題の解で

$$(2-6) \qquad \mu_l(|H(C_n(\Omega),l,m;g)|)=0.$$

Remark 2.1. (2-5) については、既に述べた定理 N_4中の $H(\mathbf{T}_2,l;g)(z)$ が最初で、$\mathbf{T}_n$については、Finkelstein and Scheiberg [9], Armitage [2], Gardiner [10], Siegel [25],[26] によって与えられた。また (2-5) の増大度に対する評価は、定理 N_4の (2-2) が最初であるが、Siegel [25],[26] が $\mathbf{T}_n$の場合のある評価を示し、それに関連した彼の問いに答える形で、Yoshida [30] が $\mathbf{T}_n$の場合についての (2-6) を証明した。

$\partial C_n(\Omega)-\{O\}$ 上の任意の連続関数 gに関する $C_n(\Omega)$ 上のディリクレ問題の特殊解を求めるために、もっと一般なポアソン核を定義する。$\varphi(t)(\psi(t))$ は $t\geq 1(0<t\leq 1)$ での正値連続関数で

$$\varphi(1)=2^{-\alpha_\Omega}\ (\psi(1)=(\frac{3}{2})^{-\beta_\Omega})$$

を満たすとする。また

$$\overline{S}(\Omega,\varphi,i)=\{t\geq 1;-\alpha(\Omega,k_i)=(\log 2)^{-1}\log(t^{n-1}\varphi(t))\}$$

$$(\underline{S}(\Omega,\psi,i)=\{0<t\leq 1;-\beta(\Omega,k_i)=(\log\frac{3}{2})^{-1}\log(t^{n-1}\psi(t))\})$$

とおく。さらに、$\overline{S}(\Omega,\varphi,N)(\underline{S}(\Omega,\psi,N))\neq\emptyset$ かつ $\overline{S}(\Omega,\varphi,N+1)(\underline{S}(\Omega,\psi,N+1))=\emptyset$ を満たす Nが存在するとき $\{i;1\leq i\leq N\}$ を $\overline{J}(\Omega,\varphi)(\underline{J}(\Omega,\psi))$ で表す。このような Nが存在しないときは$\overline{J}(\Omega,\varphi)(\underline{J}(\Omega,\psi))$ はすべての正整数とする。$\overline{S}(\Omega,\varphi,i)(\underline{S}(\Omega,\psi,i))$ 内の t の最小値（最大値）を$\overline{t}(i)=\overline{t}(\Omega,\varphi,i)(\underline{t}(i)=\underline{t}(\Omega,\psi,i))$ で表し、$\overline{S}(\Omega,\varphi,N+1)(\underline{S}(\Omega,\psi,N+1))=\emptyset$ の時、$\overline{t}(N+1)=\infty$ $(\underline{t}(N+1)=0)$ とおく。更に

$$\overline{W}(C_n(\Omega,\varphi)(P,Q)=\begin{cases}0 & (0<t<1)\\ \overline{V}(C_n(\Omega),i)(P,Q) & (\overline{t}(i)\leq t<\overline{t}(i+1),\ i\in\overline{J}(\Omega,\varphi))\end{cases}$$

$$\underline{W}(C_n(\Omega,\psi)(P,Q)=\begin{cases}0 & (1<t<\infty)\\ \underline{V}(C_n(\Omega),i)(P,Q) & (\underline{t}(i+1)<t\leq\underline{t}(i),\ i\in\underline{J}(\Omega,\psi))\end{cases}$$

$$(P\in C_n(\Omega),Q\in\partial C_n(\Omega)-\{O\})$$

とおく。すると、ポアソン核は

$$K(C_n(\Omega),\varphi,\psi)(P,Q)=c_n^{-1}\frac{\partial}{\partial\nu}G_{C_n(\Omega)}(P,Q)-\overline{W}(C_n(\Omega),\varphi)(P,Q)-\underline{W}(C_n(\Omega),\psi)(P,Q),$$

$$K(C_n(\Omega),\varphi)(P,Q)=c_n^{-1}\frac{\partial}{\partial\nu}G_{C_n(\Omega)}(P,Q)-\overline{W}(C_n(\Omega),\varphi)(P,Q).$$

定理 2.3. $g(Q)$ は$\partial C_n(\Omega)-\{O\}$ 上の連続関数とする。このとき、

$$H(C_n(\Omega),\varphi,\psi;g)(P)=\int_{\partial C_n(\Omega)-\{O\}} g(Q)K(C_n(\Omega),\varphi,\psi)(P,Q)d\sigma_Q$$

が、gに関する $C_n(\Omega)$ 上のディリクレ問題の解となるような、gに関係して作られた２つの正値関数$\varphi(t),\psi(t)$ が存在する。

定理 2.4(Yoshida and Miyamoto [31]). $g(Q)$ は$\partial C_n(\Omega)$ 上の連続関数とする。このとき、

$$H(C_n(\Omega),\varphi;g)(P)=\int_{\partial C_n(\Omega)-\{O\}} g(Q)K(C_n(\Omega),\varphi)(P,Q)d\sigma_Q$$

が、gに関する $C_n(\Omega)$ 上のディリクレ問題の解となるような、gに関係して作られた正値関数$\varphi(t)$ が存在する。

Remark 2.2. Finkelstein and Scheinberg [9], Gardiner [10] は半空間 $\mathbf{T}_n$に対して定理 2.4 を示した。

（ロ）ある種の一般解について

一般解を考える上で次の定理が本質的です。

定理 2.5. p, qは２つの正整数とし、$h(r,\Theta)$ は $C_n(\Omega)$ 内調和で、$\partial C_n(\Omega)-\{O\}$ 上連続的に 0 になる関数とする。もし

$$\underline{\mu}_p(h^+)=0,\quad \underline{\eta}_q(h^+)=0$$

ならば

$$h(r,\Theta)=\sum_{k=1}^{k_{p+1}-1} A_k r^{\alpha(\Omega,k)} f_k^{\Omega}(\Theta)+\sum_{k=1}^{k_{q+1}-1} B_k r^{-\beta(\Omega,k)} f_k^{\Omega}(\Theta)\quad (\forall(r,\Theta)\in C_n(\Omega))$$

ただし、A_k $(k=1,2,\ldots,k_{p+1}-1)$, B_k $(k=1,2,\ldots,k_{q+1}-1)$ は定数。

定理 2.6(Yoshida and Miyamoto [32]). p を正整数とし、$h(r,\Theta)$ は $C_n(\Omega)$ 内調和で、$\partial C_n(\Omega)$ 上連続的に 0 になる関数とする。もし

(2 − 7)
$$\underline{\mu}_p(h^+)=0$$

ならば

$$h(r,\Theta)=\sum_{k=1}^{k_{p+1}-1} A_k r^{\alpha(\Omega,k)} f_k^{\Omega}(\Theta)\quad (\forall(r,\Theta)\in C_n(\Omega))$$

ただし、A_k $(k=1,2,\ldots,k_{p+1}-1)$ は定数。

Remark 2.3. R.Nevanlinna は定理 N_4の証明において、右半平面上で、条件

$$\max_{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}}|h(z)|\cos\theta=o(r^{p+1})\quad (r\to\infty)$$

のもとにこの結果を証明した。Siegel [25],[26] も半空間上でこれと同様な条件のもとでこの結果を証明した。しかし、Siegel に先立って、まったくこの種の問題とは無関係に、それゆえ条件 (2-7) の別表現をもって、半空間の場合の定理 2.6 を Kuran [16] は既に証明していた。

定理 2.1 と定理 2.5 からただちに、一般解に関する次の定理を得る。

定理 2.7. l, m は非負 2 整数、p, q は $p \geq l$, $q \geq m$ を満たす 2 正整数、gは (2-3) を満たす$\partial C_n(\Omega) - \{O\}$ 上の連続関数とする。さらに $h(r,\Theta)$ が gに関する $C_n(\Omega)$ 上のディリクレ問題の解で

$$\underline{\mu}_p(h^+) = \underline{\eta}_q(h^+) = 0,$$

を満たすとする。このとき、

$$h(r,\Theta) = H(C_n(\Omega), l, m; g)(P) + \sum_{k=1}^{k_{p+1}-1} A_k r^{\alpha(\Omega,k)} f_k^{\Omega}(\Theta) + \sum_{k=1}^{k_{q+1}-1} B_k r^{-\beta(\Omega,k)} f_k^{\Omega}(\Theta)$$

$(\forall (r,\Theta) \in C_n(\Omega))$. ただし、$A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, k_{p+1} - 1)$, B_k $(k = 1, 2, \ldots, k_{q+1} - 1)$ は定数。

定理 2.8(Yoshida and Miyamoto [31]). lは非負整数、p は $p \geq l$を満たす正整数、gは (2-4) を満たす$\partial C_n(\Omega)$ 上の連続関数とする。さらに $h(r,\Theta)$ が gに関する $C_n(\Omega)$ 上のディリクレ問題の解で

$$\underline{\mu}_p(h^+) = 0$$

を満たすとする。このとき、

$$h(r,\Theta) = H(C_n(\Omega), l, m; g)(P) + \sum_{k=1}^{k_{p+1}-1} A_k r^{\alpha(\Omega,k)} f_k^{\Omega}(\Theta) \quad (\forall (r,\Theta) \in C_n(\Omega))$$

ただし、A_k $(k = 1, 2, \ldots, k_{p+1} - 1)$ は定数。

Remark 2.4. Yoshida [30] は $\mathbf{T}_n$の場合の定理 2.8 を証明した。

参考文献

[1] L.V. Ahlfors, *On Phragmén-Lindelöf's principle*, Trans. Amer. Math. Soc. **41**(1937)1–8.

[2] D.H. Armitage, *Representations of harmonic functions in half-spaces*, Proc. London Math. Soc. (3)**38**(1979)53–71.

[3] D.H. Armitage and T.B. Fugard, *Subharmonic functions in cones* , The Queen's University of Belfast, 1985.

[4] V.S. Azarin, *Generalization of a theorem of Hayman on subharmonic functions in an m-dimensional cone*, Mat. Sb. **66**(1965); *Amer. Math. Soc. Translations* , (2)**80**(1969)119–138.

[5] R.P. Boas, *Entire Functions*, Academic, New York, 1954.

[6] J. Deny and P. Lelong, *Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône*, Bull. Soc. France **75**(1947)89–112.

[7] A.Dinghas, *Konvexitätseigenschaften von Mittelwerten harmonischer und verwandter Funktionen*, Math. Z. **63**(1955)109–132.

[8] A.Dinghas, *Über einige Konvexitatssätze für die Mittelwerte von subharmonischen Funktionen*, J. Math. Pures Appl. **44**(1965)223–247.

[9] M. Finkelstein and S. Scheinberg, *Kernels for solving problems of Dirichlet type in a half-plane*, Advances in Math. **18**(1975)108–113.

[10] S.J. Gardiner, *The Dirichlet and Neumann problems for harmonic functions in half-spaces*, J. London Math. Soc. (2)**24**(1981)502–512.

[11] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 1977.

[12] M. Heins, *On the Phragmén-Lindelöf principle*, Trans, Amer. Math. Soc. **60**(1946)238–244.

[13] M. Heins, *On some theorems associated with the Phragmén-Lindelöf principle*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A **46**(1948)10pp.

[14] A. Huber, *On functions subharmonic in a half-space*, Trans, Amer. Math. Soc. **82**(1956)147–159.

[15] H. Keller, *Über das Anwachsen von Potentialfunktionen im dreidimensionalen Raum*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A **83**(1950)35pp.

[16] Ü. Kuran, *Study of superharmonic functions in* $\mathbf{R}^n \times (0,\infty)$ *by a passage to* $\mathbf{R}^{n+3}$, Proc. London Math. Soc. **20**(1970)276–302.

[17] Ü. Kuran, *On half-spherical means of subharmonic functions in half-spaces*, J. London Math. Soc. (2)**2**(1970)305–317.

[18] Ü. Kuran, *Harmonic majorizations in half-balls and half-spaces*, Proc. London Math. Soc. (3)**21**(1970)614–636.

[19] J. Lelong-Ferrand, *Extension du théorème de Phragmén-Lindelöf-Heins aux fonctions sous-harmoniques dans un cône ou dans un cylindre*, C. R. Acad. Sci. Paris **229**(1949)411–413.

[20] I. Miyamoto, *Harmonic functions in a cylinder which vanish on the boundary*, Japanese J. Math. **22**(2)(1996)241–255.

[21] I. Miyamoto, *A type of uniqueness of solutions for the Dirichlet problem on a cylinder*, Tôhoku Math. J. **48**(2)(1996)267–292.

[22] F. Nevanlinna and R. Nevanlinna, *Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie*, Acta Soc. Sci. Fenn. **50**(5)(1922)46pp.

[23] R. Nevanlinna, *Über eine Erweiterung des Poissonschen Integrals*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A **24**(4)(1925)1–15.

[24] E. Phragmén and E. Lindelöf, *Sur une extension d'un principle classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier*, Acta Math. **31**(1908)385–406.

[25] D. Siegel, *The Dirichlet problem in a half-spaces and a new Phragmén-Lindelöf principle*, Maximum Principles and Eigenvalue Problems in Partial Differential Equations, e.d. P.W.Schaefer, Pitman, New York, 1988.

[26] D. siegel and E.O. Talvia, *Uniqueness for the n-dimensional half space Dirichlet problem*, Pacific J. Math. **175**(1996)571–587.

[27] D.V. Widder, *Functions harmonic in a strip*, Proc. Amer. Math. Soc. **12**(1961)67–72.

[28] H. Yoshida, *Nevanlinna norm of a subharmonic function on a cone or on a cylinder*, Proc. London Math. Soc. (3)**54**(1987)267–299.

[29] H. Yoshida, *Harmonic majorization of a subharmonic function on a cone or on a cylinder*, Pacific J. Math. **148**(1991)369–395.

[30] H. Yoshida, *A type of uniqueness for the Dirichlet problem on a half-space with continuous data*, Pacific J. Math. **172**(2)(1996)591–609.

[31] H. Yoshida and I. Miyamoto, *Solutions of the Dirichlet problem on a cone with continuous data*, J. Japan Math. Soc. **50**(1)(1998)(to appear).

[32] H. Yoshida and I. Miyamoto, *Harmonic functions in a cone which vanish on the boundary*, Math.Nachr. (to appear).

15　ベルグマン計量の調和性による面のRigidity

米谷文男　京都工繊大　工芸

山口博史　滋賀大　教育

複素平面$\mathbf{C}_t$ 内の円盤 $B=\{t:|t|<\rho\}$ の各点 t に対して複素平面 $\mathbf{C}_z$ 上に被覆した有限型リーマン面 $D(t)$ が対応しているとする。各 $D(t)$ のポアンカレ計量、ベルグマン計量を それぞれ $A_1(t,z)|dz|^2$, $A_2(t,z)|dz|^2$ で表わす。これらの計量の動きを 1 変数函数論的立場と多変数函数論的立場の両面から考えてみよう。

一. 擬等角変形　リーマン面 $D(0)$ 上のベルトラミー微分μ_t で与えられる metric $|d\xi+\mu_t d\bar{\xi}|$ から定まる複素構造を持つ面が $D(t)$となっているとして次の条件を置く。

1. $\mu_0=0$ で μ_t は t に関して正則である。

2. $D(0)$ は解析曲線からなる境界部分を持ち, μ_t の台はコンパクトでその台の外が連結とする。

μ_t に対応する $D(0)$ から $D(t)$ への 擬等角写像を $h(t,\xi)$ とする。

二. 擬凸状領域　$B\times\mathbf{C}_z$ 上の被覆領域$\tilde{D}=\cup_{t\in B}(t,D(t))$ を考え、$\partial\tilde{D}=\cup_{t\in B}(t,\partial D(t))$ として次の条件を置く。

1. 各 $D(t)$ は相異なる $n(\geq 0)$ 個（但し、n は t に依らない）の分岐点$\{\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)\}$ を持ち、各 $\xi_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ は $t\in B$ について正則である。

2. 各 $\partial D(t), t\in B$ は C^∞ 級の滑らかさを持ち、しかも $t\in B$ と共に滑らかに動く。

3. 各点 $(t_0,z_0)\in\partial\tilde{D}$ は $\tilde{D}$ の擬凸状境界点である。

$\xi\in D(0)$ を通る $\tilde{D}$ の holomorphic section を $h(t,\xi)$ とする。このとき次が言える。

定理 (1) $\log A_i(t,h(t,\xi))$ は B 上劣調和である。

(2) 少なくともひとつの ξ_0 に対して$\log A_i(t,h(t,\xi_0))$ が B 上調和となれば D は $B\times D(0)$ と、次の形の正則変換 $\tilde{D}\ni(t,z)\longrightarrow(t,f(t,z))\in B\times D(0)$ により双正則である。

注. 一の立場ではξ, ξ_0 をμ_t の台の外にあるとしている。(1)の $i=1$ は (Kizuka : Ann. Acad. Sci. Fenn. 20 (1995)) に依る。証明はポアンカレ計量、ベルグマン計量が共にロバン定数で表わされる(Suita : Arch. Rat. Mech. Anal. 46(1972)) ことに注目して領域が変動するときのロバン定数等に関する 2 階の変分公式を用いてなされる。

16　円板の調和写像について

柴田敬一　国際自然科学研

リーマン面の解析構造の局所的変形のうちで局所座標の擬等角変形は重要なもののひとつである。このことを座標平面に即して言えば、周上での対応を与えたときの円板相互間の擬等角位相同型を考えることにあたるわけで、そのような話題について語るのは意味のあることであろう。

今回は、昨秋の講演の続きとして複素数値函数のディリクレ原理を中心に、前回の講演を補足、説明する。

17

種数4のコンパクト リーマン面の自己同型群の位相同値による分類について

木村　秀幸　　　　愛知産業大学・造形

X を種数 $g(\geq 2)$ のコンパクト リーマン面、$\mathbf{Aut}(X)$ を X 上の双正則写像全体の作る群、$G \subset \mathbf{Aut}(X)$ を $\mathbf{Aut}(X)$ の部分群とする。このとき組 (X,G) に対して次の同値関係を定義する：2 つの組 $(X_1,G_1),(X_2,G_2)$ が（位相）同値であるとは向きを保つ同相写像 $h: X_1 \to X_2$ および同型写像 $\iota: G_1 \to G_2$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ \sigma\downarrow & & \downarrow \iota(\sigma) \\ X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \end{array} \qquad \forall \sigma \in G_1$$

が成り立つことをいう。本講演では $g=4$ の場合の位相同値による分類について報告する。

主結果

定理　X を種数4のコンパクト リーマン面、$\mathbf{Aut}(X)$ を X 上の双正則写像全体の作る群、$G \subset \mathbf{Aut}(X)$ を $\mathbf{Aut}(X)$ の部分群とする。このとき組 (X,G) は 75 個の位相同値による同値類に分類される。

位相同値性の言い換え

与えられた組 (X,G) に対して X を Fuchs 群 K を用いて $X = {}^{U}/_{K}$ と表わし、G の元の U への持ち上げと K の元で生成された群を Γ とする、ただし U は上半平面。このとき $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{U}/_{K} & \xrightarrow{\gamma} & {}^{U}/_{K} \end{array} \qquad \tilde{\gamma} \in \Gamma$$

を可換にするGの元γが定まる。この対応はΓからGへの全射準同型写像でありその核Kはtorsion freeである。この準同型写像をφと名付ける。

もし(X_1,G_1)と(X_2,G_2)が位相同値ならば向きを保つ同相写像$h:X_1\to X_2$のUへの持ち上げ(で向きを保つ同相写像)$\tilde{h}:U\to U$で

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{h}} & U \\ \sigma_1\downarrow & & \downarrow\sigma_2\ (\forall\sigma_1\in\Gamma_1,\sigma_2\in\Gamma_2) \\ U & \xrightarrow{\tilde{h}} & U \end{array}$$

を満たすものが存在する。そして$\sigma\to\tilde{h}\sigma\tilde{h}^{-1}$は$\Gamma_1$と$\Gamma_2$の間の同型写像を与える、これを$\theta$と書く。このような同型写像を向きを保つ同相写像$\tilde{h}$からinduceされた同型写像と呼ぶ。このとき図式

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & G_1 \\ \theta\downarrow & & \downarrow\iota \\ \Gamma_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \end{array}$$

が可換となる。ただしφ_1,φ_2はそれぞれ$(X_1,G_1),(X_2,G_2)$が定める全射準同型写像である。

逆にこの図式を可換にする向きを保つ同相写像からinduceされた同型写像θおよび同型写像$\iota:G_1\to G_2$が存在すれば対応する2つの組$(X_1,G_1),(X_2,G_2)$は位相同値となる。この場合φ_1とφ_2が位相同値であると呼ぶ。

定理の証明は$\varphi:\Gamma\to G$を上記の意味の位相同値で分類することにより得られる。

参考文献

[1] S.A.Broughton, Classifying finite group actions on surfaces of low genus, J. Pure Applied Algebra69(1990) pp.233-270.

[2] I.Kuribayashi, Classification of automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus two, preprint,Tsukuba,(1986) .

18

DIVERGENCE OF PROJECTIVE STRUCTURES AND LENGTHS OF MEASURED LAMINATIONS

HARUMI TANIGAWA

Given a complex structure, we investigate diverging sequences of projective structures (or projective connections) on the fixed complex structure in terms of Thurston's parametrization. In particular, we will give a geometric proof of the theorem originally proved by Kapovich which claims that the sequence of monodromies diverges when a sequence of projective structures on a fixed complex structure diverges. In course of arguments, we extend the concept of realization of laminations for PSL(2, **C**)-representations of surface groups.

Let P_g be the space of projective structures on Σ_g. Then P_g has a natural structure as a fiber space over Teichmüller space T_g. Let $\pi : P_g \to T_g$ be the natural projection. Let $mon : P_g \to \mathrm{Hom}_{ne}(\Sigma_g, \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ be the mapping which sends each projective structure to its monodromy representation. Then we have the following;

Theorem [T2]. *Let K be any compact subset of T_g. Then $mon|\pi^{-1}(K) : \pi^{-1}(K) \to \mathrm{Hom}_{ne}(\Sigma_g, \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C}))/\mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ is proper.*

REFERENCES

[H] D. Hejhal, *Monodromy groups and linearly polymorphic functions*, Acta math. **135** (1975), 1-55.

[Ka] M. Kapovich, *On monodromy of complex projective structures*, Invent. math. **119** (1995), 243-265.

[T1] H. Tanigawa, *Grafting, harmonic maps and hyperbolic surfaces*, (to appear in J. Diff. Geom.).

[T2] H. Tanigawa, *Divergence of projective structures and lengths of measured laminations*, (to appear in Duke Math. J..

19 A LOWER ESTIMATE OF HYPERBOLIC METRIC BY GREEN'S FUNCTION

須川 敏幸　　京都大学・理学部

R を双曲的リーマン面として $\rho_R = \rho_R(z)|dz|$ を曲率 -4 の双曲計量（Poincaré 計量）とする。双曲計量及びそれから誘導される双曲距離の評価は種々の計算において重要なステップとなるが、上からの評価より下からの評価の方が難しいことが多いように思われる。例えば R が複素平面 $\mathbb{C}$ の部分領域の場合は $\delta_R(z) = \mathrm{dist}(z, \partial R)$（ここに dist は Euclid 計量による距離を表す）としたとき Schwarz-Pick の補題より

$$\rho_R(z) \le \frac{1}{\delta_R(z)}$$

が一般的に成り立つことが分かるが、逆向きの不等式は一般には成り立たない。$\rho_R(z) \ge \mathrm{const.}/\delta_R(z)$ が成り立つための必要十分条件は ∂R が一様完全であることである [2]。あるいは、仮にこのような評価が得られたとしても、双曲距離の下からの評価のためには与えられた 2 点を結ぶあらゆる path を考えて長さの下限を取る必要があるため下からの評価は計量（またはその密度）の下からの評価よりも一段と難しい。(上からの評価には例えば適当な path を一つ取ってやれば十分である。)

そこで別のもう少し扱いやすい、あるいは計算しやすい等角不変量によってこれらの量を下から評価することを考えたい。この講演では正値調和函数あるいは Green 函数を用いる。

まず h を R 上の非定数正値調和函数とする。(従って $R \notin O_G$ である。) すると $Dh := dh + i * dh = 2h_z dz$ は R 上の正則微分 (holomorphic 1-form) でありその絶対値 $|Dh| = 2|h_z||dz|$ は広義の計量となる。ここに 1-form $\omega = adx + bdy$ に対して $*\omega = -bdx + ady$ である。"広義の" と言ったのはつまり Dh の零点以外では滑らかな Riemann 計量であるが Dh の零点では $|Dh|$ が 0 になってしまうので、この点において退化してしまうからである。しかし、計量による距離などを定義する上では差し支えない程度の特異性なのでそれほど深刻に考える必要はない。

まず Schwarz-Pick の補題から容易に分かるように次の評価が成り立つ。

Theorem 1.

$$\frac{|Dh|}{2h} \le \rho_R.$$

しかしこの形は Green 函数に対しては直接適用できない。そこで次のような函数のクラスを導入して定理を述べる。連続函数 $g : R \to (0, +\infty]$ が広義の調和函数であるとは各点 $a \in R$ に対してその点の近傍で g が（有限値）調和であるか、またはある定数 $c \ge 1$ が存在して $z = z(p)$ を a における R の局所座標で $z(a) = 0$ なるものとするとき $g + c\log|z|$ が a の近傍で調和であることとする。後者のような a を g の極と呼ぶ。さらに上において定数 c が 1 に取れる時にその極を Green 型であると呼ぶことにする。全ての極が Green 型であるとき g は Green 型の広義の調和函数と呼ぶことにする。

そこで広義の調和函数 g に対して次の広義のリーマン計量

$$\sigma = \sigma_g = \frac{|Dg|}{2\sinh(g)}$$

を考える。仮定よりこのσは R 上の連続な計量であり Dg つまり dg の零点及び $c > 1$ なる g の極において 0 となり逆に 0 となるのはそれらの点に限る。極が Green 型の時はその点においてσは滑らかであることに注意しておく。定義から明らかなように R の Green 函数は Green 型の広義の調和函数である。

Theorem 2. **g を R 上の広義の調和函数とするとき次が成り立つ。** $\sigma_g \leq \rho_R$.

Proof. σの Gauss 曲率$\Delta(\log\sigma)/\sigma^2$は$\sigma$の零点を除いては恒等的に$-4$ であることが直接計算により分かる。従って Ahlfors の補題 [1] により$\sigma \leq \rho_R$であることが分かる。

ここで$\sigma_g \geq |dg|/2\sinh(g), \sigma_g \geq |*dg|/2\sinh(g)$ であるから次の系を得る。

Corollary 3. **g を R 上の広義の調和函数とし $p, q \in R$ を任意の 2 点とする。このとき双曲距離について次の評価を得る。**

$$d_R(p,q) \geq \frac{1}{4}\left|\log\frac{\coth g(p)}{\coth g(q)}\right|.$$

Corollary 4. **γは R の *Green* 函数 $g = G(\cdot, a)$ の等高線 $g = c$ の部分弧とする。このとき**

$$\int_\gamma \rho_R(z)|dz| \geq \frac{1}{2\sinh c}\int_\gamma |*dg| = \frac{\pi}{\sinh c}\omega(\gamma, a, R(c))$$

が成り立つ。ここに$\omega(\gamma, a, R(c))$ は領域 $R(c) = \{p \in R; g(p) > c\}$ における a から見たγの調和測度とする。

定理 2 がどの程度良いかについてであるが、例えば g が Green 函数 $G(p,a)$ である場合について $c_0 = \max\{g(b); dg = 0 \text{ at } 0\}$ とした時次の結果が成り立つ。

Theorem 5. **Green 函数 $g(p) = G(p,a)$ 及び上記の c_0に対して領域 $R(c_0) = \{p \in R; G(p,a) > c_0\}$ において次の評価が成り立つ。**

$$\rho_R \leq \frac{|Dg|}{2e^{-c_0}\sinh(g - c_0)} = \frac{e^{c_0}\sinh(g)}{\sinh(g - c_0)}\sigma_g.$$

References

[1] Ahlfors, L. V. *Conformal Invariants*, McGraw Hill, New York (1973).

[2] Beardon, A. F. and Pommerenke, Ch. The Poincaré metric of plane domains, *J. London Math. Soc. (2)*, **18** (1978), 475–483.

20

複素空間座標のz軸と球面関数

横山重夫

上記内容と同じものを１９９７年春季年会幾何学分科会で発表した。緯度角はN極とS極で90°の最大、経度角は180°で不連続の誤証明 別証明を発表する。

定義１ 平面角 $\theta = \frac{1}{2}\pi t$ (radian) は点Qと原点を結ぶ直線OQとx軸との角

定義２ 立体角 $\varphi i = \frac{1}{2}\pi s$ (radian) は点Pと原点を結ぶ直線POと複素平面が作る角

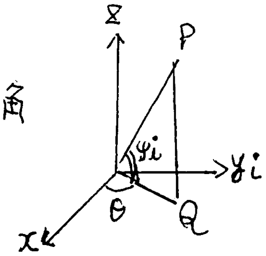


図１：平面角と立体角

定義２は虚数単位iの偏角が90°であるのが根拠

定理１ 複素平面上の単位円は、次式である。

$$w = e^{i\theta} = i^t \quad (1)$$

(証明) $w = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ (2)

$$w = \cos\frac{\pi}{2}t + i\sin\frac{\pi}{2}t \quad (3)$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^t$$

$$= (0 + i\times 1)^t = i^t$$

$$\therefore\ w = e^{i\theta} = i^t \quad (4)$$

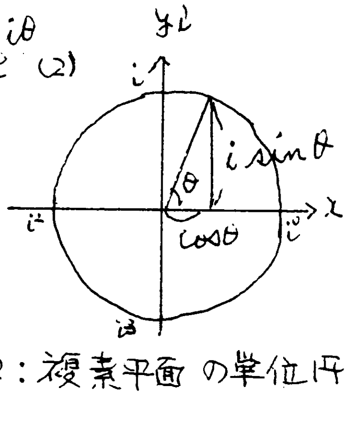


図２：複素平面の単位円

$\boxed{定理2}$ x軸とz軸を含む複素立平面上の単位円は

$$w = \exp(i^2\varphi) = i^2 S \quad \cdots\cdots (5)$$ である

(証明) $w = \cos\varphi i + i\sin\varphi i$ (6)

$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^i = (e^{i\varphi})^i$

$= \exp(i^2\varphi)$ (7)

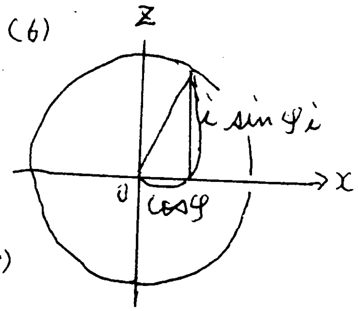


図3：複素立平面上の単位円

$w = \cos\frac{1}{2}\pi Si + i\sin\frac{1}{2}\pi Si$ (8)

$= \left(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi\right)^{iS}$

$= (0 + i\times 1)^{iS} = i^{iS}$ (9)

$\therefore\ w = \exp(i^2\varphi) = i^{iS}$ (5)

$\boxed{定理3}$ 複素空間座標は $P = x + yi + zi^i$ である。

(証明) z軸の立体角は $\varphi i = \frac{1}{2}\pi i$，定理2(5)式より

$$w = (\cos\tfrac{1}{2}\pi i + i\sin\tfrac{1}{2}\pi i) = i^i \quad (10)$$

$$\therefore P = x + yi + zi^i \quad (11)$$

$\boxed{定理4}$ 中心が原点、半径rの複素空間の球面関数

$$w = r\exp(i^2S + it) = r\,i^{Si+t} \quad (12)$$ である。

(証明) 複素立面の単位円と複素立面の単位円の積

$$w = \exp(Si^2)\times\exp(ti) = \exp(Si^2 + ti) \quad (13)$$

は回転し、単位球面関数となる，半径rの球面関数は

$$w = r\exp(Si^2 + ti) = i^{Si+t} \quad (12)$$

21 On generalized holomorphies for functions with several variables in the hypercomplex n-tuple spaces.

Hiroyoshi SASAYAMA　　SASAYAMA INSTITUTE

笹山浩良

1985年、私はDr.A.E.Taylor complex couple space E(C)をQuaternionic quadruple space $E(\Xi_R)$へ拡張し、Fréchet, Gâteaux-微分とR.Fueterの左(右)正則性を拡張した。(cf.PEΦ.ЖyPH. MAT.,1987,no.11,11Б 224,225) 又、更にn次元非可換代数$\mathfrak{S}$上のHypercomplex n-tuple space $E(\mathfrak{S})$へ拡張し、拡張されたC.R.方程式を導いた。そして左(右) supra-Fréchet 可微分性を特徴付ける定理を得た。(cf.PEΦ.ЖyPH.MAT.,1989, no.7,7Б 232). その後 non-associative algebraの場合にも拡張した。又 1989年秋の分科会で $E(\Xi_R)$において hyperholomorphiesを拡張した。又他方F.Ringlebの解析性を$E(\mathfrak{S})$に対して一般化した。(cf.Invited Lectures delivered at the VII-th International Colloquium on Differential Equations,Aug.,1996,Plovdiv,Bulgaria,Vol.I(Academic Publications,Edited E.Minchev,pp.137-145)

今回は、Hypercomplex n-tuple spacesにおける多変数函数をとり上げ、それに対するsupra-F可微分性と拡張されたR.Fueterの左/右正則性及び$E(\Xi_R)$における hyperholomorphyの拡張を述べる。

$F(\mathbb{X}) \equiv F(X_1,\ldots,X_m) \equiv \Sigma_{i=1}^{n} u_i(\overset{(1)}{x}_1,\ldots,\overset{(m)}{x}_n)e_i$ を連結開部分集合 $D \subset E(\mathfrak{S})^m$ よりBanach空間 B'にassociateされた $E'(\mathfrak{S})$ への多変数函数とする。先づ supra-F可微分性については一変数の時と同様に定義すると$\mathfrak{S}$が non-associativeの時、その F-微分

$$dF(\mathbb{X};\Delta\mathbb{X}) \equiv \Sigma_{i=1}^{n} du_i(\overset{(1)}{x}_1,\ldots,\overset{(m)}{x}_n;\Delta\overset{(1)}{x}_1,\ldots,\Delta\overset{(m)}{x}_n) =$$

$$\sum_{a=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_{\overset{(a)}{x}_j} u_i(\mathbb{X};\Delta \overset{(a)}{x}_j)e_i=\sum_{a=1}^{m}\partial_{X_a}F(\mathbb{X};\Delta\mathbb{X}_a)$$

が左(右) supra 線型且つ有界なる事から left (right) 可微分の時、各変数 X_a について supra-F 可微分で

$$\partial_{\overset{(a)}{x}_j} u_i=\sum_{k=1}^{n}\gamma^i_{jk}\,\partial_{\overset{(a)}{x}_1}u_k \quad (a=1,\dots m)$$

及び

$$\sum_{a=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Omega^{k}_{j\ell i}\,\partial_{\overset{(a)}{x}_1} u_j=0 \quad (i,k=1,\dots n)$$

を満足し逆も成立つ。ここに $\Omega^i_{jkh}\equiv\sum_{\ell=1}^{n}(\gamma^\ell_{kh}\gamma^i_{\ell j}-\gamma^i_{k\ell}\gamma^\ell_{hj})$ $(j,k,h=1,\dots n)$ とする。

故に F が supra Fréchet 全微分可能ならば、各変数 X_a について左(右) supra F-可微分であるが u_i の F-可微分性に関して逆は成立しない。但し u_i の一次 Fréchet 偏微分が連続の時は逆も云える。

次に R. Fueter の正則性の拡張の時は

$$\sum_{a=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}e_i\,\partial_{\overset{(a)}{x}_i}F(X_1,\dots X_m;\overset{(a)}{\xi})=0$$

によって total left regularity を定義すると、各変数について左(右)正則ならば全正則であるが逆はいへない。右側も同様。$\overset{(a)}{\xi}\in\mathbb{B}$ が $\overset{(a)}{x}_1$ となった時、左(右)全 x_1-正則と定義すると R. Fueter の多項式 $p(z)$ の拡張の満たす正則性の拡張となる。

最後に $E(\Xi_R)$ における多変数函数に対しての hyperholomorphy は一般には

$$\sum_{a=1}^{m}\overline{\mathfrak{S}}_{[r]\,\mathfrak{X}_a}f(\mathfrak{X}_1,\dots,\mathfrak{X}_m;\overset{(a)}{\xi}+i\overset{(a)}{\eta}+j\overset{(a)}{\zeta}+k\overset{(a)}{\vartheta})=0 \quad (r=1,2,3)$$

によって定義されるがこれも Fueter の正則性の拡張を含んでいるから各変数 $\mathfrak{X}_a$ について r 種 hyperholomorphic なら totally hyperholomorphic になるが逆はいへない。

22 On the global existence of holomorphic solutions of some differential equations on a Stein domain of $\mathbb{C}^{n+1}$ and its application

足立幸信

若林は1968年に $\frac{\partial u}{\partial x_1}=f$ という微分方程式（正則なカテゴリーで考える）は、単連結なStein領域でも、Runge領域においても一般には大域解をもたないことを示した。鈴木文夫は1972年に $\mathbb{C}^n$ のStein領域において、任意の正則関数 f に対し、大域解が存在するための必十条件を与えた。ここでは上の方程式を含む少し一般な方程式 $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n,u)}{\partial(x_1,\ldots,x_{n+1})}=g\ldots(1)$ を考える。考える領域は $\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_{n+1})$ のStein領域 X で、$f_1,\ldots,f_n,g$ は X で正則な既知関数、u を未知関数とする。

定義1　$D=\{(y)=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{C}^n; y=f(p), p\in X, f=(f_1,\ldots,f_n)\}$ とし、triple (X,f,D) が条件 (α) をみたすとは $\forall y\in D$ に対し、$f^{-1}(y)$ は X の純1次元の analytic subset であることをいう。

定義2　$f^{-1}(y)$ の既約成分を f の prime set と呼ぶ。

定義3　prime set S_0 が regular とは $S_\nu\longrightarrow S_0$ となる $\forall\{S_\nu\}$ の極限集合が S_0 のみより成るときをいう。

定義4　関数行列 $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ の rank が $\forall p\in X$ に対し n であり、f の任意の prime set が regular であるとき (X,f,D) は条件 (β) をみたすという。

定義5　(X,f,D) が条件 (β) をみたすとき、f の prime set を一点と見て適当に位相をいれたものを V とすると、V は D 上の不分岐 Riemann 領域と考えることができる。

定理1　（1）が任意の g に対し大域解をもつための必十条件は、次の $(a),(b),(c)$ をみたすこと。

(a)　(X,f,D) は条件 (β) をみたす。

(b)　f の任意の prime set は単連結。

(c)　V はStein多様体。

定義6　$f_1,\ldots,f_n$ を $\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_{n+1})$ の多項式とし、$\forall(y)$ に対し $(\frac{\partial f_i}{\partial X_j})$ の rank は n かつ $f^{-1}(y)$ は単連結な既約 1 次元 analytic subset であるとき f は条件 (γ) をみたすという。

定理2　(f) は条件 (γ) をみたし、$\varphi(y_1,\ldots,y_n)$ は $\varphi\neq 0$ なる任意の整関数とする。すると $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n,u)}{\partial(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\varphi(f_1,\ldots,f_n)\ldots(2)$　は整関数解 u をもち、$y_1=f_1,\ldots,y_n=f_n,y_{n+1}=u$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の auto. である。
(f) が条件 (γ) をみたし、u を整関数とするとき、$y_1=f_1,\ldots,y_n=f_n,y_{n+1}=u$ が $\mathbb{C}^{n+1}$ の auto. であるための必十条件は、u が (2) の type の微分方程式をみたすことである。

問題　X を $\mathbb{C}^{n+1}$ の Stein 領域とし、(1) が $\forall g$ に対し大域解をもつなら、X は $V\times\mathbb{C}$ のある領域と bihol. か?

References

Suzuki.H, Sci.Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku,Sect. A,11(1972),253-258.

Wakabayashi.I, Proc. Japan Acad.,44(1968),820-822

23 複素 LIE 群の自然な多重劣調和 EXHAUSTION 関数とその応用

風間英明　　九州大学数理学研究科
金　大圭　　九州大学数理学研究科
呉　春英　麗水水産大学校応用数学科

Stein 群 $\mathbb{C}^*$ の自然な強多重劣調和 exhaustion 関数

$$\varphi(z) := |z|^2 + \frac{1}{|z|^2}$$

は $\mathbb{C}^*$ の極大コンパクト部分群 $K := \{a \in \mathbb{C}; |a| = 1\}$ について不変である。つまり、任意の $z \in \mathbb{C}^*$ と $a, b \in K$ に対して,

$$\varphi(a\ x\ b) = \varphi(x).$$

同様に Stein 群 $GL(n, \mathbb{C})$ 上の自然な強多重劣調和 exhaustion 関数

$$\Phi(x) := \ \mathrm{trace}(x\ x^*) + \frac{1}{\det(x\ x^*)}$$

は $GL(n, \mathbb{C})$ の極大コンパクト部分群である unitary 群 $U(n)$ について、不変である。つまり、任意の $x \in GL(n, \mathbb{C})$ と $u, v \in U(n)$ に対して,

$$\Phi(u\ x\ v) = \Phi(x).$$

一般の複素 Lie 群についても、極大コンパクト部分群について不変な多重劣調和 exhaustion 関数の存在から、複素 Lie 群に対して次の様な結果を得る。

Theorem 1. 複素 *Lie* 群は、常に完備ケーラーである。

Theorem 1 は、滋賀大の山口博史氏より与えられた問題に対する解答である。

Theorem 2. 複素 *Lie* 群上に正の直線束があれば、その直線束に対して、直線束凸性をもつ。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

24 CR写像の正則拡張性について

林本厚志　名大多元数理

CR写像の正則拡張問題について述べる。以下M, $\tilde{M}$を原点を含む$\mathbb{C}^{n+1}$内の実超曲面で、Mの原点での型をlとし、$F=(f_1,\cdots,f_{n+1}):M\to\tilde{M}$を、原点を不動点にもつCR写像とする。

定理1. [3] Fを実超曲面の間のC^{2r+1}級CR写像で、各超曲面の原点はBloom-Grahamの意味で有限型とする。もしFが原点でr－有限多重性を持てば、Fはその点の近傍に正則拡張できる。

・この定理の特別な場合には次のようなものがある。

(I) $\tilde{M}$が原点で非退化レビ型式を持つ場合。

①Mも原点で非退化レビ型式を持つ時、C^3級のFが原点でホップ補題の性質を持てば、Fはその点の近傍に正則拡張できる。[2]

②$n=1$ ($M,\tilde{M}\subset\mathbb{C}^2$)の場合。

$\frac{l}{2}\in\mathbb{N}$である。[1]。C^{l+1}級のFが原点でホップ補題の性質をみたせば、Fはその点の近傍に正則拡張できる。[2]

(II) $M, \tilde{M} \subset \mathbb{C}^2$ の場合.

M, $\tilde{M}$ の原点での型をそれぞれ l, $\hat{l}$ とすると、$\hat{l}/l = l_0$ は、自然数である。[1]. このとき F が原点でホップ補題の性質をみたすことと、F がそこで l_0-有限多重性を持つことが同値であることが分かり、定理1で、$r = l_0$ とできる. [3]. これは、(I) ② の場合の拡張になっている。

定理1や各場合 (I), (II) の証明には、Chong-Kyu Han 氏による写像の完備系 (complete system) についての理論やその発展させた理論が使われる.

参考文献

[1] A. Hayashimoto: On the classification theorem for CR mappings. to appear in Nagoya. Math. J. vol 150.

[2] ———: On the complete system of finite order for CR mappings and its application. Osaka J. Math. に投稿中.

[3] ———: On the relations between the holomorphic extendability theorems and the finiteness properties. preprint.

25 複素アフィン部分空間の直和における A_p補間可能性について

大内　重樹　　（東京工業大学大学院理工学研究科）

p を $\mathbb{C}^n$上のウエイト，つまり，多重劣調和であって，

(1) $p(z) \geq 0$, $\log(1+|z|^2) = O(p(z))$

(2) $|z - z'| \leq 1 \Longrightarrow p(z') \leq C_1 p(z) + C_2$ となるような正定数 C_1, C_2 が存在する

を満たす関数とする．Xを $\mathbb{C}^n$上の解析的部分集合とし，$A(X)$ を X上の解析関数のなす環とするとき，

$$|f(z)| \leq A\exp(Bp(z)) \quad (\forall z \in X)$$

を満たす正定数 A, Bが存在するような $A(X)$ の部分環を $A_p(X)$ とする．特に，$A_p(\mathbb{C}^n)$ を A_p とかく．

制限写像 $\rho_X\colon A(\mathbb{C}^n) \to A(X)$ を $\rho_X(f) = f|_X$ により定義すると，ρ_Xは全射になる．明らかに $\rho_X(A_p) \subset A_p(X)$ であるが，$\rho_X(A_p) = A_p(X)$ のとき，すなわち，任意の $A_p(X)$ 内の関数が A_p内の関数によって補間できるとき，Xを A_pに関する**補間多様体**であるという．

Berenstein と Li [1] は，Xが離散多様体 (すなわち，相異なる $\mathbb{C}^n$内の離散点列) のとき，次のような A_p補間可能性についての結果を示した．

定理． 離散多様体 $X = \{\zeta_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ が A_pに関する補間多様体であるための必要十分条件は，m 個の整関数 $f_1, \ldots, f_m \in A_p$ $(m \geq n)$ と正定数 ε, C が存在して

(1) $X \subset \{z \in \mathbb{C}^n : f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}$

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$, $u \in S^{2n-1} = \{u \in \mathbb{C}^n : |u| = 1\}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{m} |D_u f_j(\zeta_k)| \geq \varepsilon \exp(-Cp(\zeta_k))$$

が成立することである．ただし，

$$D_u f = \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \cdot u_n$$

は，fの u 方向に沿った方向微分である．

X_νを$\mathbb{C}^n$内の余次元k_ν $(1 \leq k_\nu \leq n)$の複素アフィン部分空間とし，$\nu \neq \nu'$ならば，$X_\nu \cap X_{\nu'} = \emptyset$とする．$\mathbb{C}^n$上の内積を$\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$で定義する．$\nu \in \mathbb{N}$に対し$N_\nu = \{v \in \mathbb{C}^n : \langle v, x - y \rangle = 0 \ (\forall x, y \in X_\nu)\}$とおくと，$\mathbb{C}^n$の$k_\nu$次線形部分空間になる．$S_\nu = N_\nu \cap S^{2n-1}$とおく．すると，上の定理とほとんど同じ方法により，Xが複素アフィン部分空間の直和のとき，次のようなA_p補間可能性についての結果を得た．

定理．$X = \bigcup_{\nu \in \mathrm{N}} X_\nu$が$A_p$に関して補間的であるための必要十分条件は，$m$ 個の整関数$f_1, \ldots, f_m \in A_p$ $(m \geq \sup_{\nu \in \mathrm{N}} k_\nu)$と正定数$\varepsilon$, Cが存在して

(1) $X \subset \{z \in \mathbb{C}^n : f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}$

(2) 任意の$\nu \in \mathbb{N}$, $\zeta \in X_\nu$, $u \in S_\nu$に対し

$$\sum_{j=1}^{m} |D_u f_j(\zeta)| \geq \varepsilon \exp(-Cp(\zeta))$$

が成立することである．

この定理により，Xが複素アフィン部分空間の直和のとき，Berenstein と Taylor [2] によって提出された未解決問題の肯定的な解を与えることができる．

系．p, qを$p \leq q$となるウエイト関数とする．このとき，複素アフィン部分空間の直和XがA_pに関して補間的であるならば，A_qに関しても補間的である．

参考文献

[1] C. A. Berenstein and B. Q. Li, *Interpolating Varieties for Weighted Spaces of Entire Functions in* $\mathbb{C}^n$, Publicacions Matemàtiques (1994), 157–173.

[2] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, *On the Geometry of Interpolating Varieties*, Seminaire Lelong-Skoda (1980/1981), Lecture Notes in Math., 919, pp. 1–25, Springer, Berlin.

特別講演

弱擬凸領域のベルグマン核に関する漸近解析

神本 丈 (熊本大学大学院自然科学研究科)

多変数複素関数論，特に $\bar{\partial}$-ノイマン問題において重要な積分核であるベルグマン核については，現在までに非常に多くの研究がなされている．本講演では，特に最近盛んに研究され多くの成果が得られている弱擬凸領域のベルグマン核の特異性の研究を重点的に解説し，その後で最近我々の得た結果を述べる．我々の行う計算の中で，ある一変数の特殊関数の解析が重要となるが，その関数の性質はそれ自体とても興味深く，多くの数学的な研究の中に現れるものである．最近得られたこの特殊関数に関する結果についても，簡単に紹介する．

1. 定義. Ω を $\mathbf{C}^n$ 内の領域とする．Ω 上の L^2-正則関数全体の集合を $B(\Omega)$ と書くとき，$B(\Omega)$ は $L^2(\Omega)$ の部分ヒルベルト空間となることはよく知られている．ベルグマン射影子 $\mathbf{B}$ とは，$L^2(\Omega)$ から $B(\Omega)$ への直交射影子であり，次のように積分核を使って表すことができる．

$$\mathbf{B}f(z) = \int_\Omega K(z,w)f(w)dV(w) \quad \text{for } f \in L^2(\Omega).$$

ただし，dV は Ω 上のルベーグ測度である．積分核 $K : \Omega \times \Omega \to \mathbf{C}$ を Ω のベルグマン核と呼ぶ．この講演では，特にベルグマン核に関して対角線集合に制限しその境界での特異性に興味を持つ．以下 $K(z) = K(z,z)$ とする．

2. 研究の歴史. ベルグマン核は，特にその境界における特異性に，領域の不変量及び L^2-正則関数に関する重要な情報が多く含まれていることが知られており，現在までに非常に多くの研究がなされている．最も簡単で重要な場合である球: $\{z \in \mathbf{C}^n; \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ のベルグマン核は容易に計算でき，$K(z) = n!/\pi^n(1 - \sum_{j=1}^n |z_j|^2)^{-n-1}$ となる．このように，ベルグマン核が閉じた形で記述できれば，その特異性の様子をみることは容易であろう．実際このように閉じた表示を求める試みは，いろいろな興味から現在まで絶えまなく行われてきている ([1],[8],[31],[11],[24], [5],[12],[25],[20],[21], [32],[2],etc.)．しかし，その成功例は非常に限られた領域に関するものであり，一般の領域に関してその試みがうまくいくとはとうてい思われない．従って，ベルグマン核の特異性の様子を知るためには，しかるべき近似を行うことが必要である．現在までの研究を眺めたとき，その近似に関する研究を，正確さの観点から大きく次の三つの種類に分けることができる．第一に，不等式を使ってベルグマン核の特異性の強さを大雑把に評価する．第二に，その強さが正確にわかれば，発散する分の関数を割っておいて，その境界値を求めその値の意味を考える．第三に，漸近展開を使ってその特異性の形を完全に表し，さらにその展開の係数を計算しその意味を考える．現在までのベルグマン核の特異性の研究は，多変数関数論において重要な領域のクラスである擬凸領域に関して盛んに行われているが，その中でも強擬凸領域に関しては，非常に詳しい研究がなされている．以下，強擬凸領域に関する研究を復習した後，この講演の目的である弱擬凸領域に関する現在までに行われている研究について考えたい．

(i) 強擬凸領域に関する研究. $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ を滑らかな境界を持つ有界強擬凸領域とする. Hörmander [30] は, Ω のベルグマン核に関して, $K(z)d(z)^{n+1}$ の境界値が $n!/\pi^n \times$ レビ行列式に等しくなることを示した. ただし, $d(z)$ は z から境界までのユークリッド距離とする. 彼の研究は, $\bar{\partial}$-方程式に関する L^2-評価式を用いたものである. さらに, Diederich [13],[14] は, $K(z)$ の二回までの微分に関して類似する結果を得た. これらの境界値に関する研究は非常に詳しいものであるが, 1974年に C. Fefferman [19] により得られた漸近展開は, ベルグマン核の特異性の研究に飛躍的な進歩をもたらした. 彼はこの精密な結果を使って, Poincaré の時代から懸案とされていた双正則写像の境界拡張に関する問題を肯定的に解決したわけであるが, 彼の研究はベルグマン核の特異性に関する研究の重要性を, 改めて明確に認識させるものとなった. Ω のベルグマン核 $K(z)$ は,

$$K(z) = \frac{\varphi(z)}{r(z)^{n+1}} + \psi(z)\log r(z) \tag{1}$$

と表すことができる. ただし, $r \in C^\infty(\bar{\Omega})$ は領域 Ω の定義関数である (すなわち, $\Omega = \{r > 0\}$, $|dr| > 0$ on $\partial\Omega$). さらに, 関数 φ, ψ は, 境界まで込めて滑らかに拡張され, r に関して展開することができる. 上の結果から, 強擬凸領域のベルグマン核の特異性は, 本質的に定義関数 r によって一変数的に表されていることがわかる. Fefferman の研究は, Kohn らによる$\bar{\partial}$-ノイマン問題に関する研究を基礎としながらも, 彼の計算には古典的な常微分方程式論に現れる漸近解析的な手法が随所に垣間見られる. その後 Boutet de Monvel と Sjöstrand [6] により, 複素数値をとる相関数を持つフーリエ積分作用素を用いて, 同様な展開が得られることが示された.

(ii) 弱擬凸有限型領域に関する研究. ところで, 領域の条件から強擬凸性を取り除いたときに, 現在のベルグマン核の特異性に関する研究は, 詳しいものはたくさんあるものの強擬凸の場合に比べてまだ発展途上にあるといえる. 境界におけるレヴィ形式の退化は, ベルグマン核の特異性を複雑にし, その解析を非常に困難なものにしている. 我々は, さらに領域に有限型 (of finite type) という条件を付けて考察する. この有限型という性質は, $\bar{\partial}$-ノイマン問題において劣楕円型評価 (subelliptic estimate):

$$|||\phi|||_\epsilon^2 \le C(||\bar{\partial}\phi||^2 + ||\bar{\partial}^*\phi||^2 + ||\phi||^2) \quad (\epsilon > 0), \tag{2}$$

を満たすための必要十分条件であり, 領域の幾何学的な特徴付けは, Kohn や D'Angelo によりなされた. 現在までに盛んに行われている研究は, 境界における特異性の強さの不等式による評価である ([27],[46],[18],[7],[41], [28],[15],[29],[16],[42],[9], [47],[23],[43]). 特に2次元の場合の Catlin [7] により得られた次の評価は完全なものである. Ωを有限型領域とし, z^0 を境界上のタイプ $2m$ の点とする. このとき, Ω のベルグマン核は z^0 の小さな近傍で, 評価

$$c_1 \sum_{l=2}^{2m} \frac{|C_l(z)|}{r(z)^{2+\frac{2}{l}}} < K(z) < c_2 \sum_{l=2}^{2m} \frac{|C_l(z)|}{r(z)^{2+\frac{2}{l}}}$$

を持つ. ただし, r は Ω の定義関数で, $C_l \in C^\infty(\bar{\Omega})$ はレヴィ形式に関係する関数である. 類似する結果としては, Herbort [29] または Cho [9] によりレビ形式の退化が一次元

の場合について，McNeal [41] により decoupled と呼ばれる領域の場合について，よく似た評価が得られている．最近 Boas, Straube, Yu [3] は，h-extendible というクラスの有限型領域に関して評価よりも詳しい境界値に関する結果を得ている．この h-extendible と呼ばれるクラスは，Yu [49] により定義されたものであるが，全く同時期に Diederich と Herbort [16] は，このクラスの領域についての重要な研究を行っており，彼らは そのクラスを semi-regular と呼んでいる．このクラスは，非常に多くの有限型領域を含むものであることを注意しておく．$\mathbf{C}^{n+1}$ 内の有限型領域の境界点 z^0 が h-extendible であるとは，z^0 の近傍において領域が，z^0 を原点に写すような適当な双正則な座標変換により，

$$\mathrm{Im} z_0 > P(z_1,\ldots,z_n) + O(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^{2m_j+\alpha}) + O((\mathrm{Re} z_0)^2) \quad (\alpha \in (0,1)) \tag{3}$$

で定義される領域の原点の近傍の一部に写されるときをいう．ただし，P はある種の斉次性を持ち，原点の (Catlin の意味での) 多重タイプが $(1, 2m_1, \ldots, 2m_n)$ となるような多項式である．[3] にある結果は重要なので紹介する．原点の近くで (3) により定義される領域のベルグマン核 $K(z)$ について以下が成り立つ．

$$\lim_{z\to 0, z\in\Gamma} K(z)\cdot d(z)^{2+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}} = K_0(i, 0, \ldots, 0). \tag{4}$$

ここで，K_0 は 原点の近くで $\mathrm{Im} z_0 > P(z_1,\ldots,z_n)$ で定義される領域のベルグマン核とし，Γ を原点を頂点とする境界の接方向から角度をもつ錘とする．上の結果から，$K_0(i,0,\ldots,0)$ が計算される場合には，その極限値が正確に求まることになる．実際に，[3] では対称性の高い特別な領域に関して計算を行っており，その結果において極限値に領域の不変量が見出される．また，Diederich と Herbort [16] は，(4) について別証明を与えている．

以上に述べてきた研究は詳しいものであるが，漸近展開 (1) のような強いものではなく，特異性の正確な形を見出すことは困難である．現在までに，弱擬凸領域に関する漸近展開に関する研究がないわけではないが ([26],[22])，彼らの結果における展開から，特異性の様子を知ることは難しいように思われる．本講演では，領域に 2 次元，柱状という条件を付けて，そのベルグマン核についてある種の漸近展開を与える．その際に必要となるアイデアには，弱擬凸の場合の特異性の性質が強く反映されている．

3. 2 次元有限型柱状領域のベルグマン核の漸近展開． この節では，[33] にある 2 次元有限型柱状領域のベルグマン核の漸近展開に関する結果を紹介する．

次の性質を持つ関数 $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ を考える．f は，常に $f'' \geq 0$ をみたし，0 の近くで $f(x) = x^{2m}g(x)$ $(m = 2,3,\ldots)$ と表すことができる．ただし，g は $g(0) > 0$ かつ $xg'(x) \leq 0$ をみたす．Ω_f は，$\omega_f := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y > f(x)\}$ を基底とする柱状領域である．すなわち，

$$\Omega_f = \mathbf{R}^2 + i\omega_f.$$

自然な写像 $\pi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，$\pi(z_1,z_2) = (\mathrm{Im} z_1, \mathrm{Im} z_2)$ で定義する．$z^0 \in \partial\Omega_f$ が $\pi(z^0) = (0,0)$ をみたすとき，z^0 は弱擬凸でかつタイプ $2m$ の点であり，$\pi^{-1}((0,0))$ 以外では，z^0

の近くの点は強擬凸である．集合 $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ を$\Delta = \{(\tau, \varrho); 0 < \tau \leq 1,\ \varrho > 0\}$ で定義し，変換 $\sigma : \overline{\omega_f} \to \overline{\Delta}$ を

$$\sigma : \begin{cases} \tau = \chi(1 - f(x)/y), \\ \varrho = y, \end{cases}$$

で定義する．ここで関数 $\chi \in C^\infty([0,1))$ は，次をみたすものとする．$[0,1]$ 上 $\chi'(u) \geq 1/2$ であり，$0 \leq u \leq 1/3$ のとき $\chi(u) = u$，また $1 - 1/3^{2m} \leq u \leq 1$ のとき $\chi(u) = 1 - (1-u)^{\frac{1}{2m}}$ となる．$\sigma \circ \pi$ は，$\overline{\Omega}$ から $\overline{\Delta}$ への写像となることに注意しておく．σ は，$\omega_f \cap \{x \geq 0\}$ (または $\omega_f \cap \{x \leq 0\}$) から Δ への同型写像を引き起こす．σ による ω_f の境界の対応は，次のようになる．$\sigma((\partial\omega_f) \setminus \{(0,0)\}) = \{(0,\varrho); \varrho > 0\}$，さらに $\sigma^{-1}(\{(\tau,0); 0 \leq \tau \leq 1\}) = \{(0,0)\}$．この事実は，$\sigma$ が原点において $\partial\omega_f$ を (実の) ブロー・アップしていることを示している．

次の定理は，写像 σ が，Ω_f のベルグマン核の特異性を理解するために，有用であることを示している．

定理． 領域 Ω_f のベルグマン核 Ω_f は，z^0 の近傍で次のように表される:

$$K(z) = \frac{\Phi(\tau, \varrho^{\frac{1}{m}})}{\varrho^{2+\frac{1}{m}}} + \tilde{\Phi}(\tau, \varrho^{\frac{1}{m}}) \log \varrho, \tag{5}$$

ここで，$\Phi \in C^\infty((0,1] \times [0,\varepsilon))$ 及び $\tilde{\Phi} \in C^\infty([0,1] \times [0,\varepsilon))$ $(\exists \varepsilon > 0)$ が成り立つ．

さらに，Φ は，集合 $\{\tau > \alpha\varrho^{\frac{1}{2m}}\}$ $(\alpha > 0)$ の上で，次をみたす．任意の非負な整数 μ_0 に対して，

$$\Phi(\tau, \varrho^{\frac{1}{m}}) = \sum_{\mu=0}^{\mu_0} c_\mu(\tau) \varrho^{\frac{\mu}{m}} + R_{\mu_0}(\tau, \varrho^{\frac{1}{m}}) \varrho^{\frac{\mu_0}{m} + \frac{1}{2m}}. \tag{6}$$

ここで，

$$c_\mu(\tau) = \frac{\varphi_\mu(\tau)}{\tau^{3+2\mu}} + \psi_\mu(\tau) \log \tau. \tag{7}$$

ただし，$\varphi_\mu, \psi_\mu \in C^\infty([0,1])$ であり，φ_0 は $[0,1]$ 上正である．さらに，R_{μ_0} は不等式：$|R_{\mu_0}(\tau, \varrho^{\frac{1}{m}})| \leq C_{\mu_0}[\tau - \alpha\varrho^{\frac{1}{2m}}]^{-4-2\mu_0}$ をみたす．ただし，C_{μ_0} は正の定数である．

上の定理の主張するところを述べる．(5),(6),(7) から，弱擬凸な点において，ベルグマン核は本質的に二変数 τ, ϱ に関して漸近展開されており，特異性が一変数的であった強擬凸の場合と大きく異なる．変数 τ, ϱ の意味を考えると，それらに関する展開は，それぞれ強擬凸性及び弱擬凸性により引き起こされたものであると解釈できる．実際に，τ に関する展開 (7) は，Fefferman の漸近展開 (1) と同じ形を持つ．さらに，ϱ に関する展開は弱擬凸性からくるもので，本質的に新しいものであるが，展開の変数に分数巾がかかっていることを除けば，その形は (1) と同じである．テイラー展開の形をしていた強擬凸の場合と比較して，弱擬凸の場合はピュイズー展開の形をしている．弱擬凸特有の展開に関しては，2節で述べた劣楕円型評価 (2) に関する次の事実を考えると自然に感じられる．2次元の場合，タイプ $2m$ の有限型領域 ($m = 1$ のとき強擬凸になる) に関しては，ϵ が最大 $1/2m$ のときまで 評価 (2) が成り立つ．考える領域の枠組を有限型としたとき，劣楕

円型評価においては，強擬凸と弱擬凸の違いは ϵ の値にのみ現れるが，よく似た違いがベルグマン核の漸近展開においても見られるわけである．

注意． 1) Boas, Straube, Yu の結果 (4) の観点から，Ω_f のベルグマン核について次が得られる．$K(z)\cdot\varrho^{2+\frac{1}{m}}$ の Γ 上における極限値は，

$$c_0(1)=\varphi_0(1)=g(0)^{\frac{1}{m}}(4\pi)^{-2}\Gamma(2+1/m)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\phi(v)^{-1}dv,$$
$$\phi(v)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-w^{2m}+vw}dw$$

となる．上の値はこれ以上に簡単に書くことは難しそうである．結果 (4) から，モデルとして $\{\mathrm{Im}z_2>g(0)[\mathrm{Im}z_1]^{2m}\}$ をとるような有限型領域に関する極限値についても同じ値をとることがわかる．また，弱擬凸領域特有の現象として，近づけ方に制限しないとき境界値は τ に依存して決まる．実際，境界値は $c_0(\tau)$ となり，τ を 0 に近づけたとき発散する．このことは，ベルグマン核の特異性にある種の approach region が存在することを示している．その形状は正則関数や調和関数の境界挙動の研究に現れる approach region の形状と似ているが ([40] を参照)，それらの関連性は現在のところわからない．

2) ブロー・アップというアイデアは，特別な状況では高次元の場合にも有効となる．[32],[34] においては，レビ形式が退化した次元だけの回数のブロー・アップをすることにより，ある種の有限型領域のベルグマン核の特異性の様子が明瞭になることが示されている．最近，我々はこの方針で decoupled な高次元の柱状領域に関しても漸近展開を得ることに成功した．その展開において Catlin の多重タイプが展開の変数に反映している．

3) 上の柱状領域に関して，セゲー核についても同様な結果が得られている ([33])．

4. 証明のスケッチ． 前節で述べた定理の証明の簡単な流れと重要となる点を説明する．

(I. 積分表示.) あるクラスの柱状領域のベルグマン核は，積分表示を得ることができることが知られている ([39],[44],[48],[25])．我々は，その積分表示を手掛かりに計算を行う．関数 f が $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)|x|^{-1-\epsilon}>0$ $(\epsilon>0)$ をみたすとき，Ω_f のベルグマン核は次のように表示される:

$$K(z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x\lambda-2y\mu}\frac{d\lambda d\mu}{D(\lambda,\mu)},\quad D(\lambda,\mu)=\iint_{\omega_f}e^{-2\xi\lambda-2\mu\eta}d\xi d\eta.$$

(II. モデル領域.) 強擬凸領域の場合，Fefferman は球をモデルとし，そのずれを特異性の中から漸近展開という形で取り出している．我々も基本的には，同様な方針で漸近展開を求めるわけであるが，そのモデルの領域として $\Omega_0=\{\mathrm{Im}z_2>g(0)[\mathrm{Im}z_1]^{2m}\}$ を考える．このベルグマン核の z^0 における特異性は，3 節で述べた変換 σ を使えば非常にきれいに表すことができる．

(III. 局所化.) 定理の条件をみたす関数 $f_1,f_2\in C^{\infty}(\mathbf{R})$ について，いま原点の近くで $f_1(x)=f_2(x)$ であると仮定する．このとき，領域 $\Omega_{f_1},\Omega_{f_2}$ のベルグマン核をそれぞれ K_1,K_2 とすると，$K_1(z)-K_2(z)$ が z^0 の小さな近傍で実解析的になる．従って，z^0 におけるベルクマン核の特異性は局所的な情報できまるので，考える領域をできるだけモデル領域に近づけておく．

$\varphi \fallingdotseq$ Bessel fn.

$\varphi^{(2m-1)} - cx\varphi = 0$

(IV. ブロー・アップ.)　(I) で述べた積分表示を，変換 σ を使って整理する．このことにより，モデル領域とのずれが，積分表示の中に特異性として漸近的な形で見出されるようになり，実際に漸近展開を得るために計算可能な形となる．

(V. 計算.)　常微分方程式論に現れる古典的な漸近解析で用いられる技術を駆使し，ラプラス型積分の漸近展開を 3 回にわたって行う．(この作業が最も大変である．)

5.　特殊関数 ϕ の解析．　ベルグマン核の極限値 (3 節) に現れた特殊関数 ϕ の解析は，定理にある漸近展開を得るために必要となる．詳しくは述べないが，柱状領域 $\{\mathrm{Im} z_2 > [\mathrm{Im} z_1]^{2m}\}$ $(m = 2, 3, \ldots)$ のベルグマン核の対角線集合以外の滑らかさについて，境界上 C^∞-級ではあるが実解析的ではないという非常に奇妙に思われる事実が，Christ と Geller [10] により発見されている．彼らの証明で，最も重要な役割を果たすのが関数 ϕ の零点の存在である ([35],[36] も参照)．特殊関数 ϕ はその他多くの数学的な研究に関連して登場し，その性質自体が十分興味深いものである．詳しい解説は，[37],[38] を参照して頂くことにして，重要な性質を箇条書きにしておく．以下に現れる c_j は，すべて m のみ依存する正の定数とし，$\phi^{(k)} := d^k\phi/dv^k$ とする．

1. ϕ はエアリー型の常微分方程式: $\phi^{(2m-1)} - (2m)^{-1}v\phi = 0$ をみたす．
2. 鞍点法により，ϕ はベッセル関数を使って近似される: $|\arg v| < \pi$ のとき，$\phi(iv) = c_1\tilde{v}^{\frac{1}{2m}}e^{-c_2\tilde{v}} \cdot J_0(c_3\tilde{v} + \pi/(8m-4)) \cdot \{1 + O(\tilde{v}^{-1})\}$ $(\tilde{v} := v^{\frac{2m}{2m-1}})$．$\phi$ が偶関数であることを考慮すると，ϕ に関して $\arg v = n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$ においてストークス現象が起きていることがわかる．
3. (2 から) 零点の漸近分布は次にようになる．Pólya により ϕ の零点はすべて虚軸にあることがわかっており，いまその零点の集合を $\{\pm ia_j; 0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots\}$ とするとき，$j = c_4 a_j^{\frac{2m}{2m-1}} + m/(4m-2) + O(j^{-1})$ as $j \to \infty$ が成り立つ．
4. (2,3 から) 無限積表示 $\phi(x) = 1/m\Gamma(1/2m)\prod_{j=1}^{\infty}(1 + x^2/a_j^2)$ が得られる．
5. (3,4 から) ϕ はラゲール・ポリヤのクラス ([38] を参照) に属する．
6. (1,4 から) ϕ および $\phi^{(k)}$ $(k \in \mathbf{N})$ のすべての零点は単位的である．
7. (6 と同値の命題になるが) $x^{k-1}e^{-x^{2m}}$ と $x^k e^{-x^{2m}}$ $(k \in \mathbf{N})$ を $\mathbf{R}$ 上平行移動して得られる有限個の関数を適当に選び、それらを $\mathbf{C}$ 上適当に線形結合することにより，$L^1(\mathbf{R})$ の任意の関数は，そのノルムに関して近似される．6 との同値性は，フーリエ解析において有名なウィナーの定理により得られる．

上の 5,6,7 については，Haseo Ki 氏と Young-One Kim 氏との共同研究 [38] によるものである．

参考文献

[1] S. Bergman: Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen, Math. Sbornik. Akad. Nauk SSSR (1936), 79-96.

[2] H. P. Boas, S. Fu and E. J. Straube: The Bergman kernel function: Explicit formulas and zeroes, preprint.

[3] H. P. Boas, E. J. Straube and J. Yu: Boundary limits of the Bergman kernel and metric, Michigan Math. J. **42** (1995), 449-461.

[4] D. Boichu and G. Coeuré: Sur le noyau de Bergman des domianes de Reinhardt, Invent. Math. **72** (1983), 131-152.

[5] A. Bonami and N. Lohoué: Projecteures de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimation L^p, Compositio Math. **46** Fasc 2, (1982), 159-226.

[6] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand: Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, Soc. Math. de France Astérisque **34-35** (1976), 123-164.

[7] D. Catlin: Estimates of Invariant Metrics on Pseudoconvex Domains of Dimension Two, Math. Z. **200** (1989), 429-466.

[8] B. L. Chalmers: On boundary behavior of the Bergman kernel function and related domain functionals, Pacific J. Math. **29** (1969), 243-250.

[9] S. Cho: Boundary behavior of the Bergman kernel function on some pseudoconvex domains in $\mathbf{C}^n$, Trans. of AMS **345** (1994), 803-817.

[10] M. Christ and D. Geller: Counterexamples to analytic hypoellipticity for domains of finite type, Ann. of Math. **235** (1992), 551-566.

[11] J. P. D'Angelo: A Note on the Bergman Kernel, Duke Math. J. **45** (1978), 259-265.

[12] ———: An explicit computation of the Bergman kernel function, J. Geom. Analysis **4** (1994), 23-34.

[13] K. Diederich: Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudokonvexen Gebieten Math. Ann. **187** (1970), 9-36.

[14] ———: Ueber die 1. und 2. Ableitungen der Bergmanschen Kernfunktion und ihr Randverhalten. Math. Ann. **203** (1973), 129-170.

[15] K. Diederich and G. Herbort: Geometric and analytic boundary invariants. Comparison results, J. Geom. Analysis **3** (1993), 237-267.

[16] ———: Pseudoconvex domains of semiregular type, *Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry*, Aspects of Mathematics **E26**, Vieweg 1994.

[17] ———: An alternative proof of a theorem of Boas-Straube-Yu, *Complex Analysis and Geometry*, Pitman Research notes in Mathematics Series, vol. 366 (1997), 112-118.

[18] K. Diederich, G. Herbort and T. Ohsawa: The Bergman kernel on uniformly extendable pseudconvex domains, Math. Ann. **273** (1986), 471-478.

[19] C. Fefferman: The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math. **26** (1974), 1-65.

[20] G. Francsics and N. Hanges: Explicit formulas for the Szegö kernel on certain weakly pseudoconvex domains, Proc. AMS **123** (1995), 3161-3168.

[21] ———: The Bergman kernel of complex ovals and multivariable hypergeometric functions, J. Funct. Analysis **142** (1996), 494-510.

[22] N. W. Gebelt: The Bergman kernel on certain weakly pseudoconvex domains, Math. Z. **220** (1995), 1-9.

[23] S. Gong and X. Zheng: The Bergman kernel function of some Reinhardt domains, Trans. of AMS **348** (1996), 1771-1803.

[24] P. C. Greiner and E. M. Stein: On the solvability of some differential operators of $\Box_b$, Proc. Internat. Conf. (Cortona, Italy, 1976-1977), Scuola Norm. Sup. Pisa, (1978), 106-165.