日 本 数 学 会

2000年度秋季総合分科会

函 数 論 分 科 会
講 演 ア ブ ス ト ラ ク ト

2000年 9 月

於 京 都 大 学

函数論分科会委員会規則

1. 函数論分科会委員会（以下，委員会と略）の目的
   函数論研究者の研究活動を活発にし，研究討論及び研究連絡を円滑に行うことを目的とする.

2. 委員会の任務

   (1) 函数論分科会評議員候補者を選出する.

   (2) 数学会より依頼された分科会選出の各種委員 (たとえば，受賞候補推薦委員等) 候補者の推薦.

   (3) 科研費基盤研究（審査区分（1））の代表者の推薦および計画調書提出の依頼.

   (4) 科研費運用に関して代表者または分担者から相談された時はこれに応ずる.

   (5) 学会特別講演およびシンポジウム講演の講演候補者を順位を付して決定する.

   (6) 分科会の行事 (たとえば， シンポジウムの開催等) について決定する.

   (7) 次期委員会委員候補者の推薦.

   (8) その他評議員の要請する案件および分科会に関する一切の問題を協議決定する.

3. 委員会の構成及び委員の選出･任期

   (1) 委員の定数は特に定めないが10名程度をもって構成する. 必要に応じ追加， 削減できる.

   (2) 委員の任期は春季学会から２年間とする. 再任は妨げないが，原則として再々任は認めない.

   (3) 委員の選出は秋季学会において投票によって行う.

      (i) 委員会推薦の新任候補者について信任投票を行い，その結果，投票総数の過半数を得た候補者に委員を委嘱する. その際，函数論の研究分野のバランス，更に地区的にも偏しないよう候補者の推薦を配慮する.

      (ii) 投票の結果，委員会推薦候補者以外に分科会会員の１０名以上から推薦された者があるときには得票数上位２名に委員を委嘱する.

4. 委員会の開催及び議決

   (1) 委員会は評議員が召集する.

   (2) 委員会は委員総数の過半数の出席で成立する.

   (3) 年３回 (春季，シンポジウム，秋季) 定期委員会を開催する. 必要に応じ臨時委員会を開催する事ができる.

   (4) 案件の議決は投票によってはならない. 決定できない時は懸案事項として次回に繰越す. 緊急事項については評議員に処置を一任する.

5. 函数論分科会委員会における評議員の任務

   (1) 委員会の司会をする.

   (2) 数学会評議員会の決定事項を委員会に報告する.

   (3) 委員会で決定した事項 (シンポジウム，学会特別講演等) を施行する.

   (4) 委員会の了承を得て，決定事項を分科会会員に公表する.

付 則　この規則は，1974年10月12日より施行する.
付 則　この規則の改正は，1996年8月1日より施行する.

函数論分科会

9月24日(日)　第VII会場

9:00 ～ 12:00

1 高杉 秀雄 * Goldbach 予測についての新実験 ………… 15

2 柴田 敬一 (国際自然研) Hamilton の定理への補足 ………… 15

3 尾和 重義 (近畿大理工) Sufficient conditions for starlikeness ………… 15

4 中路 貴彦 (北大理) Rudin の直交問題と Nevanlinna counting function について ………… 15

5 大野 修一 (日本工大工)* Lipschitz 空間上の荷重合成作用素 ………… 15

6 志賀 啓成 (東工大理工)* 無限型 Riemann 面上の写像類群について ………… 15
谷口 雅彦 (京大理)
藤川 英華 (東工大理工)

7 M. Denker (Göttingen)* シルピンスキ・ガスケットのマルティン境界表現 ………… 15
佐藤 坦 (九大数理)

8 相川 弘明 (島根大総合理工)* Martin boundary of a fractal domain ………… 15
水谷 友彦 (広島大理)
T. Lundh (Chalmers 大)

9 水谷 友彦 (広島大理) 一様領域, 一様 John 領域の直積 ………… 15

10 佐藤 宏樹 (静岡大理) ピカール群, 8の字結び目群とヨルゲンセン群 ………… 15

14:15 ～ 15:45

11 山岸 義和 (龍谷大理工) ふたつの周期軌道をもつ周期的不定点は安定多様体のカントール花束をもつ ………… 15

12 前川 和俊 (京大人間環境)* $\mathbb{C}^3$ の2次多項式自己同型の力学系 ………… 15

13 角 大輝 (東工大理)* Entropy of fibered rational maps ………… 15

14 中根 静男 (東京工芸大)* Stretching rays for the family of real biquadratic maps ………… 15

15 奥山 裕介 (京大理)* On Siegel cycles of n-subhyperbolic polynomials ………… 15

16:00 ～ 17:00 特別講演

D. Schleicher (Techinische Universität, München) * Dynamics of exponential maps and the dimension paradox 16:00 ～ 17:00

9月25日(月)　第VII会場

9:00 ～ 12:00

16 西本 勝之 (デカルト出版)* On the prime numbers (I) (The structure of prime numbers) ………… 15

17 西本 勝之 (デカルト出版)* N-method to nearly simple harmonic vibration equations (Continued) · 15
S. S. de Romero (Univ. del Zulia)

18 西本 勝之 (デカルト出版)* On N-fractional and partial differintegral equations ………… 15

19 斎藤 三郎 (群馬大工)* Conditional stability of a real inverse formula for the Laplace transform 15
V. K. Tuan (クェート大)
山本 昌宏 (東大数理)

20 斎藤 三郎 (群馬大工)* Representations of analytic functions in terms of local values by means of
森 正武 (京大数理研) the Riemann mapping function ………… 15

21 山下　愼二 (都 立 大 理) Two conditions for a meromorphic function to be normal in the unit disk 15

22 下村　俊 (慶 大 理 工) Painlevé 超越関数の位数は有限である ········· 15

23 澤田　一成 (都 立 工 高 専)* n 葉代数型 Riemann 面の構成とその Picard 定数について ········· 15

24 戸田　暢茂 (名 工 大)* On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II 15

13:00 ~ 14:00　特別講演

石崎　克也 (日 本 工 大)* Nevanlinna theory and its applications ········· 13:00 ~ 14:00

9 月 26 日 (火)　第 VII 会場

9:00 ~ 12:00

25 二村　俊英 (広 島 大 理) 多調和関数に対する Bôcher 型定理について ········· 15
岸　恭子 (広 島 大 理)
水田　義弘 (広島大総合科)

26 西尾　昌治 (阪 市 大 理) 多様体上の caloric morphism の特徴付け ········· 15
下村　勝孝 (茨 城 大 理)

27 下村　勝孝 (茨 城 大 理) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の回転不変な計量に関する caloric morphism ········· 15

28 宮本　育子 (千 葉 大 理) シリンダー内の minimally thin sets と rarefied sets のウイナー型判定条件 15

29 中井　三留　Kato 測度の Picard 次元による分類 ········· 15
多田　俊政 (大 同 工 大)

30 小泉　英介 (東 北 大 理) ホドグラフ変換とチューブ領域の境界上のチャーン・モーザー不変量 ··· 15

31 松島　敏夫 (石 川 工 高 専)* 複雑な境界挙動をもつ単位球上の有界正則函数 ········· 10

32 風間　英明 (九 大 数 理)* 複素 Lie 群上の強 q-擬凸な多重劣調和関数の積分平均 ········· 10
D. K. Kim (Chonbuk Univ.)
C. Oh (Yosu Univ.)

33 大内　重樹 (東 工 大 理 工)* A_p 補間多様体の定義関数の個数について ········· 10

34 相原　義弘 (沼 津 工 高 専)* Algebraic dependence of holomorphic mappings into smooth elliptic curves ········· 15

35 梅野　高司 (九 州 産 大 工) 準アーベル多様体の周期行列について ········· 15

14:15 ~ 15:45

36 藤澤　敦子 (筑 波 大 数 学)* 複素 3 次元超曲面上の純楕円型特異点の定義多項式について ········· 10

37 金坂　尚礼 (筑 波 大 数 学)* On plurigenera of hypersurface purely elliptic singularities ········· 15
渡辺　公夫 (筑 波 大 数 学)

38 中村　弥生 (お茶の水女大)* 擬斉次孤立特異点に関する双対基底の計算 ········· 15
田島　愼一 (新 潟 大 工)

39 野口　潤次郎 (東 大 数 理) 因子の外の整正則曲線と整数点集合の分布について ········· 15
J. Winkelmann (バーゼル大)

40 野口　潤次郎 (東 大 数 理) 準アーベル多様体内の整正則曲線の第二主要定理 ········· 15
J. Winkelmann (バーゼル大)
山ノ井　克俊 (京 大 数 理 研)

16:00 ~ 17:00　特別講演

山ノ井　克俊 (京 大 数 理 研)* Nevanlinna の対数微分の補題の代数幾何的定式化とその応用 ········· 16:00 ~ 17:00

1

※印は本会で記入

※番号	題	Goldbach予測についての新実験

氏名	高杉秀雄	所属	

偶数$2n$（≧6）を二つの素数の和として表わしうる組合せ数を実験して、つぎの式をえたので報告する。

1。組合せ数の集合値は、$c=\sqrt{2}\times 1.04$ として

(1.1) $$\sum_{n=6}^{2n} r_2(2n)=\frac{1}{2}(\pi(cn)-1)^2+\pi(n)-1$$

(1.2) $$\sum_{(n=6)}^{2n} r_2(2n)=\frac{1}{2}\left(\frac{cn}{\log cn-1}-1\right)^2+\frac{n}{\log n-1}-1$$

2．$2n$での組合せ数の基準値は次式の値となり、実際数は基準値より少ない数と多い数の組合せ数にわかれる。

(2.1) $$r_2(2n)=\frac{(\pi(cn)+1)^2}{\sqrt{c}\cdot n}$$

(2.2) $$r_2(2n)=\frac{c^{3/2}\cdot n}{(\log cn-1)^2}$$

3．$r_2(2n)$の組合せ数は、少、少、多、少、少、多、の順に反復しながら無限に連なるので、少組 $r_b(2n)$ と多組 $r_a(2n)$ とに層別すると次式をうる

(3.1) $\sum_{n=6}^{2n} r_2(2n) = \sum_{n=6}^{2n} r_a(2n) + \sum_{n=6}^{2n} r_b(2n)$

(3.2) $\sum_{n=6}^{2n} r_a(2n) \fallingdotseq \sum_{n=6}^{2n} r_b(2n)$

(3.3) $3\, r_2(2n) \fallingdotseq r_a(2n) + 2\, r_b(2n)$

(3.4) $r_a(2n) \fallingdotseq 2\, r_b(2n)$

(3.5) $3\, r_2(2n) \fallingdotseq 2\, r_a(2n) \fallingdotseq 4\, r_b(2n)$

4. 多組 $r_a(2n)$ の組合せ数は、素数5, 7, 11, 13・・・の倍数が重なる周期でさらに多い数になる。これらの周期は双子素数の発生周期に同期している。なおこれらの組合せ数は $1/4\cdot\pi(2n)$ を超えることはない。

5. 少組 $r_b(2n)$ の組合せ数は、式(3.5)に沿って安定して推移する。この実験ではこの組合せ数のすべてが $2/5\cdot(\pi(cn)-1)^2/\sqrt{c}\,n$ を下回ることがなく、この式は n が大きくなるほどその組合せ数も大きくなるので、Goldbach予測は予裕を持って正しいことが予想される。

講演会では新規計算図表を用いた式の組立て方、および末尾が(7-9), (9-1), (1-3)の双子素数の発生周期を含め、上記諸式での具体例を示しながら報告する。

2　Hamilton の 定理への補足

柴田　敬一　国際自然科学研究所

相等しい種数をもつ marked Riemann surfaces 相互間について formulate された極値擬等角写像と Teichmuller 写像との関係が非常に自然であるのに比べて境界対応を与えた単位円盤相互間の場合のそれはまだまだ改良の余地があると思われる。

この講演では天下りに正則 2 次微分を持ち出さずに議論を進められるような一つの方法を提案したい。

3 Some conditions for starlikeness

Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions in U. Let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ be the subclasses of $\mathcal{S}$ consisting of functions $f(z)$ which are starlike of order α in U. Note that $S^* \equiv S^*(0)$.

Z.Lewandowski, S.S.Miller and E.Zlelkiewicz (Proc. Amer. Math. Soc. 56(1976)) have shown

Theorem A If $f(z) \in A$ satisfies

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right)\right\} > 0 \quad (z \in U),$$

then $f(z) \in S^*$.

C.Ramesha, S.Kumar and K.S.Padmanabhan (Chinese J. Math. 23(1995)) have given

Theorem B If $f(z) \in A$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right)\right\} > \alpha \quad (z \in U),$$

for some $\alpha \geq 0$, then $f(z) \in S^*$.

Further, J-L.Li and S.Owa (Georgian Math. J. 5(1998)) have proved

Theorem C If $f(z) \in A$ satisfies

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)\right| < \frac{3}{2} \quad (z \in U),$$

then $f(z) \in S^*$.

In the present talk, we will give some conditions for starlikeness of functions $f(z) \in A$, which are the improvements of the above theorems.

4　Rudin の直交問題と Nevanlinna counting function について

北大大学院理学研究科　　中　路　貴　彦

$0 < p \leq \infty$ のとき、H^p は D 上の Hardy 空間を表わす。ϕ は H^∞ の元で、$\|\phi\|_\infty = 1$ とする。ϕ が ∂D 上で絶対値 1 のとき、ϕ は inner 関数といわれる。ϕ が inner 関数 かつ $\phi(0) = 0$ ならば、$\{\phi^n \,;\, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ は H^2 で直交系である。Rudin はその逆が真であるかという問題を提出した。

<u>Rudin の直交問題</u>

ϕ は H^∞ の元で、$\|\phi\|_\infty = 1$ とする。 $\{\phi^n \,;\, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が H^2 で直交系ならば、ϕ は inner 関数であるか？

<u>知られた結果</u>

ϕ は H^∞ の元で、$\|\phi\|_\infty = 1$ かつ $\{\phi^n \,;\, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が H^2 で直交系とする。

(1) ϕ が Lip_α, $\alpha > 1/2$ ならば ϕ は inner 関数である (Cima-Korenblum-Stessin)

(2) ϕ が univalent ならば ϕ は inner 関数である (Bourdon)

(3) ϕ が連続でないとき、ϕ が inner とならない例がある (Sundberg)。

(3) については、Cima 、Bourdon と M^cCathy から個人的に聞いた。Cima は Sundberg の結果を信じると言っている。しかし、他方、フランスの作用素論の conference で、私が講演したとき、Pisier に Sundberg の例は存在しないのでは（誰も見た人がいない）と言っていた。Cima は ϕ が連続ならば、ϕ は inner 関数ではないかという問題を提出している。

$N_\phi(w)$ が ϕ の Nevanlinna counting function とは、$w \in D \backslash \{\phi(0)\}$ に対して

$$N_\phi(w) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\phi(z)=w} \log \frac{1}{|z|} & w \in \phi(D) \\ 0 & w \notin \phi(D) \end{cases}$$

とする。nearly all w とは exceptional set の logarithmic capacity が零であることである。

<u>知られた結果</u>

(1) ϕ は H^∞ の元で、$\|\phi\|_\infty = 1$ とする。$\{\phi^n\ ;\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ が H^2 で直交系である必要十分条件は、nearly all $w \in D$ に対して $N_\phi(w) = N_\phi(|w|)$ 。これは Bourdon の結果である。

(2) ϕ が inner 関数で ϕ が inner 関数で $\phi(0) = 0$ ならば、nearly all $w \in D$ に対して $N_\phi(w) = \log \dfrac{1}{|w|}$ である。

$\boxed{\text{定理}}$ ϕ は H^∞ の元で、$\|\phi\|_\infty = 1$ とする。$\{\phi^n\ ;\ n = 0, 1, 2, \cdot\}$ が H^2 で直交系である必要十分条件は、区間 $[0, 1]$ 上のある正の Borel 測度で、$1 \in supp\nu_0$ となる ν_0 が一意に存在して、nearly all $w \in D$ に対して

$$N_\phi(w) = \int_{|w|}^1 \log \frac{r}{|w|} d\nu_0(r) \text{ 。}$$

参考文献

1. P.S.Bourdon, Rudin's orthogonality problem and the Nevanlinna counting function, Proc.Amdr.Math.Soc. 125(1997), 1187-1192.

2. J.A.Cima, B.Korenblum and M.Stessin, Composition isometries and Rudin's problem, preprint

5　Lipschitz 空間上の荷重合成作用素

大野　修一　　　日本工業大・工学部

[1]　$0 < \alpha < 1$ に対して, $Lip_\alpha(D)$ を単位円板 D 上の解析関数 f で, 次の Lipschitz 条件をみたすものの集合とする：

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|^\alpha} = O(1), \quad |z| = |w| = 1.$$

さらに, $lip_\alpha(D)$ を $Lip_\alpha(D)$ の関数のうち,

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|^\alpha} = o(1) \quad (w \to z, |w| = |z| = 1)$$

をみたすものとする. これらの空間はそれぞれ Lipschitz, little Lipschitz 空間と呼ばれ, norm

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|^\alpha} : z \neq w \in \partial D\right\}$$

のもとで, Banach 空間となる.

いま, u を D 上の解析関数, φ を D から D への解析的な写像とする. このとき, D 上の解析関数 f に対して,

$$uC_\varphi f = uf \circ \varphi$$

と定義すると, uC_φ は荷重合成作用素と呼ばれる線形作用素となる. 荷重合成作用素は乗法作用素 M_u と合成作用素 C_φ の拡張とみなせる. Lipschitz 空間における合成作用素は, R. C. Roan（1980）や K. M. Madigan（1993）らにより, また乗法作用素については, K. Zhu（1993）によって, 特徴付けられている. ここでは, Lipschitz,little Lipschitz 空間上の荷重合成作用素の有界性と compact 性を特徴付け, それらの系として, 彼等の結果を導く.

[2]　Lipschitz 空間の場合

定理 1 *uC_φ が Lipschitz 空間 $Lip_\alpha(D)$ 上有界であるための必要十分条件は, u と φ が次の条件をみたすことである:*

(i) $u \in Lip_\alpha(D)$;

(ii) $\sup_{z\in D}\left((1 - |z|^2)/(1 - |\varphi(z)|^2)\right)^{1-\alpha}|u(z)\varphi'(z)| < \infty.$

系 1.1 (Zhu) u を D 上の解析関数とする．このとき，M_u が $Lip_\alpha(D)$ 上有界であるための必要十分条件は $u \in Lip_\alpha(D)$ である．

系 1.2 (Madigan) φ を D から D への解析的な写像とする．このとき，C_φ が $Lip_\alpha(D)$ 上有界であるための必要十分条件は

$$\sup_{z\in D}\left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{1-\alpha}|\varphi'(z)|<\infty$$

である．

定理 2 uC_φ は $Lip_\alpha(D)$ 上有界と仮定する．このとき，uC_φ が $Lip_\alpha(D)$ 上 *compact* であるための必要十分条件は，次の (i) または (ii) が成り立つことである::

(i) $\|\varphi\|_\infty < 1$;

(ii) $\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\left((1-|z|^2)/(1-|\varphi(z)|^2)\right)^{1-\alpha}|u(z)\varphi'(z)| = 0$.

系 2.1 u を D 上の解析関数とする．このとき，M_u が $Lip_\alpha(D)$ 上 *compact* であるための必要十分条件は $u=0$ である．

系 2.2 φ を D から D への解析的な写像とする．このとき，C_φ が $Lip_\alpha(D)$ 上 *compact* であるための必要十分条件は $\varphi \in Lip_\alpha(D)$, $\|\varphi\|_\infty < 1$ である．

[3] little Lipschitz 空間の場合

この場合も，例えば次の結果のように，同様な特徴付けがなされる．

定理 3 uC_φ が *little Lipschitz* 空間 $lip_\alpha(D)$ 上有界であるための必要十分条件は u と φ が次の条件をみたすことである:

(i) $u \in lip_\alpha(D)$;

(ii) $\sup_{z\in D}\left((1-|z|^2)/(1-|\varphi(z)|^2)\right)^{1-\alpha}|u(z)\varphi'(z)| < \infty$;

(iii) $\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)^{1-\alpha}|u(z)\varphi'(z)| = 0$.

6　無限型Riemann面上の写像類群について

東工大大学院・理工学研究科　志賀　啓成
京大大学院・理学研究科　谷口　雅彦
東工大大学院・理工学研究科　藤川　英華

1　主結果

本講演では無限型 Riemann 面 R の縮約タイヒミュラー空間 $T^{\#}(R)$ にはたらく縮約写像類群 $Mod^{\#}(R)$ の作用，特にその離散性について考える．有限型 Riemann 面の場合と異なり，一般にその作用は離散的ではない．そこで離散的となるための条件について考える．得られた結果は次のとおりである．

定理 1.1 非可換な基本群を持つ双曲型 *Riemann* 面 R に対して定数 $M >> 1 >> \epsilon > 0$ がとれて，次の２条件を満たすとする．

1. 単射半径が ϵ 以下の点は *cusp* 近傍のみからなる．
2. 単射半径が M 以下の点全体からなる集合のある成分 R^*_M がとれて，$\pi_1(R^*_M)$ から $\pi_1(R)$ への制限写像が全射になる．

このとき，R 内の任意の閉曲線 c に対して $Mod^{\#}_c(R)$ で c のホモトピー類を固定する縮約写像類群の元からなる群とすると，$Mod^{\#}_c(R)$ は $T^{\#}(R)$ に離散的に作用する．

このことから，

系 1.2 *Riemann* 面 R が *uniform geometry* を持つとき，すなわちその *convex core* の単射半径が有界であるとき $Mod_c(R)$ は $T^{\#}(R)$ に離散的に作用する．

$Mod^{\#}(R)$ の作用の離散性については次のことが言える．

定理 1.3 双曲的 *Riemann* 面 R が定理 *1.1* の条件を満たし，更に R の種数，*punctures* の数，*holes* の数のいずれかが正の有限値になるとき $Mod^{\#}(R)$ は $T^{\#}(R)$ に離散的に作用する．

2 Examples

定理 1.1 の条件 1. は離散性のためには落とせない．また，条件 1. は満たすが条件 2. を満たさない Riemann 面で $Mod_c(R)$ が離散的でない例を構成することができる．定理 1.1 の条件を両方満たすが $Mod(R)$ が離散的でない例も構成することができる．

また定理 1.3 については,「種数，punctures，holes の数のいずれかが正の有限値」という条件は外せない．例えば，種数が 0 で境界成分が無限の Riemann 面で $Mod^{\#}(R)$ が離散的でない例を構成することができる．

参考文献

[1] P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Progress in Mathematics **106**, Birkhäser Boston-Basel-Berlin, 1992.

[2] C.J. Earle, F. P. Gardiner and N. Lakic, *Teichmüller spaces with asymptotic conformal equivalence,* preprint.

[3] F. P. Gardiner, Teichmüller theory and quadratic differentials, Wiley-Interscience,New York 1987.

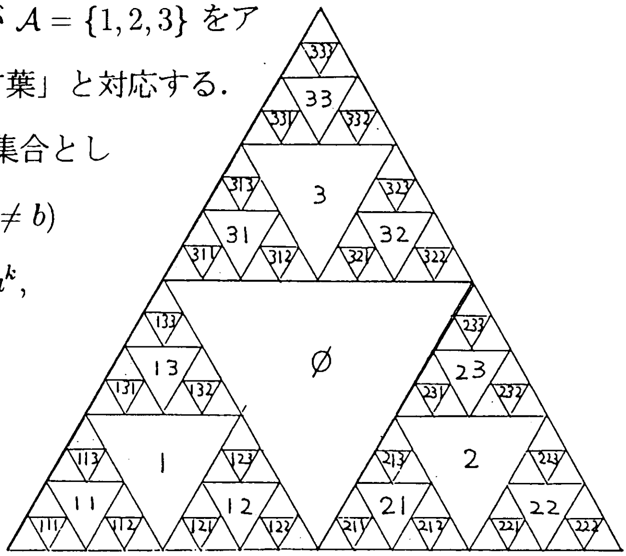
[4] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer-Tokyo 1992.

[5] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, John Wiley & Sons 1988.

7 シルピンスキ・ガスケットのマルティン境界表現

M. Denker (Göttingen)
佐藤　　坦（九大数理)

シルピンスキ・ガスケットを定義するときに通常取り去る逆三角形の部分に下図のようなルールで番号をつける.



すると全ての逆三角形が $\mathcal{A}=\{1,2,3\}$ をアルファベットとする「言葉」と対応する.

$\mathcal{W}$ を「言葉」全体の集合とし $\boldsymbol{w}\in\mathcal{W}$ が $\boldsymbol{w}=\mathrm{u}ab^k$ $(a\neq b)$ の形であれば $\boldsymbol{w}^\#\equiv\mathrm{u}ba^k$, $\boldsymbol{w}=a^k$ の場合には $\boldsymbol{w}^\#\equiv\boldsymbol{w}$ によって「共役な言葉」を定義する.

ここで $\mathcal{W}$ 上の関数 θ を $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^\#$ であれば $\theta(\boldsymbol{v})=2$, $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{v}^\#$ であれば $\theta(\boldsymbol{v})=1$ によって定義する.

さて $\mathcal{W}$ を状態空間とするマルコフ連鎖を遷移確率

$$p(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\equiv\frac{\theta(\boldsymbol{v})}{6},\quad \exists a\in\mathcal{A}, s.t., \ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}a \ or \ \boldsymbol{v}^\#a$$

によって定義する. このとき次のことが分った.

1. **マルティン核 $k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ を厳密に計算することが出来た.** 例えば或る $\mathrm{u}\in\mathcal{W}$ と 或る $w_0,w_1,w_2,w_3,\cdots,w_n,a,c\in\mathcal{A}$ について

$\boldsymbol{v} = \mathrm{u}a, \quad \boldsymbol{w} = \mathrm{u}w_0w_1w_2w_3\cdots w_nc$ と表されているとすると

$$k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = k(\boldsymbol{v}^{\#},\boldsymbol{w}) = \frac{\theta(\boldsymbol{v})}{4}3^{d(\boldsymbol{v})}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{I_{\{a\}}(w_k)}{2^k} + \frac{I_{\{a\}}(w_n)}{2^n}\right)$$

2. 対応する**マルティン境界はシルピンスキ・ガスケット $\mathcal{S}$ と同一視される**.

3. 対応するマルティン距離を $\xi,\eta \in \mathcal{W}_+ \cup \mathcal{S}$ に対して

$$\rho(\xi,\eta) = |2^{-d(\xi)} - 2^{-d(\eta)}| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}\sup_{\mathrm{u}\in\mathcal{W}_n}|k(\mathrm{u},\xi) - k(\mathrm{u},\eta)|,$$

と定義する．ただし $d(\xi)$ は ξ の長さ $(\le +\infty)$ を表す．このとき**マルティン距離はユークリッド距離とリプシッツ同値ではない**．実際或る定数 $K > 0$ が存在して，小さなユークリッド距離 $\|\xi - \eta\|$ の $\xi,\eta \in \mathcal{S}$ について

$$\frac{1}{32}\|\xi - \eta\|\log_2\frac{1}{\|\xi - \eta\|} \le \rho(\xi,\eta) \le K\|\xi - \eta\|\log_2\frac{1}{\|\xi - \eta\|}.$$

4. μ をシルピンスキ・ガスケット $\mathcal{S}$ 上のハウスドルフ測度，φ を $\mathcal{S}$ 上の連続関数とするとき

$$h_\varphi(\boldsymbol{v}) = \int_{\mathcal{S}} k(\boldsymbol{v},\xi)\varphi(\xi)d\mu(\xi).$$

は $\mathcal{W}$ 上の調和関数であり**境界条件** $\lim_{\mathrm{u}\to\xi} h_\varphi(\mathrm{u}) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathcal{S}$ をみたす．

次に問題になるのが「マルコフ連鎖の調和解析」と「そのマルティン境界の調和解析」の対応である．

E.V. Dynkin : Boundary theory of Markov processes (The discrete case) *Russian Mathematical Surveys* **24** (1969) 1-42.

8 Martin boundary of a fractal domain

相川弘明　島根大学
水谷友彦　広島大学
T. Lundh　Chalmers 大学

論文 [1] で有界一様領域の Martin 境界が位相境界と一致することを示した．本講演ではより一般な**一様 John 領域**を：任意の 2 点 x, y が

$$\min\{|x-z|,|z-y|\} \le A\delta_D(z) \quad \text{for all } z \in \gamma,$$
$$\operatorname{diam}(\gamma) \le A\rho_D(x,y)$$

を満たす D 内の曲線 γ で結べる領域であると定義する．ただし，$\delta_D(z)$ は z の境界までの距離であり，$\rho_D(x,y)$ は x, y を D 内で結ぶ曲線の直径の下限で定義される**内部距離**である．Balogh-Volberg [2, 3] 参照．このとき，明らかに

$$\text{一様領域} \subsetneqq \text{一様 John 領域} \subsetneqq \text{John 領域}.$$

定理 1. 有界な一様 John 領域の Martin コンパクト化は内部距離によるコンパクト化と位相同型であり，各境界点はすべて minimal である．さらに，位相境界上の Martin 境界点は高々有限個である．

また，3 次元の Sierpinski Gasket のように，適当な条件を満たす自己相似集合の補集合は一様 John 領域であることを示す．特に，Lindstrøm [4] に似た，**Nesting Axiom** が重要な条件である．

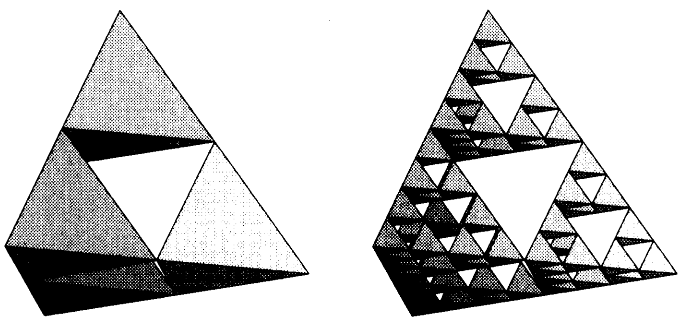


図 1: 3 次元 Sierpinski Gasket F. $D = B \setminus F$ は有界一様領域.

さらに一旦，一様 John 領域が得られると，それを変形して一様 John 領域が得られることを示す．一様 John 領域の位相境界点で，その上の内部距離による理想境界点がただ 1 個の点を，**単純境界点**という．

命題 1. D を有界一様 John 領域とする．この時，D と $\mathrm{int}(\overline{D})$ の間の任意の領域 $\widetilde{D}$ で $\widetilde{D} \setminus D$ が単純境界点からなるものは一様 John 領域である．特に，D が一様領域ならば D と $\mathrm{int}(\overline{D})$ の間の任意の領域 $\widetilde{D}$ は一様領域である．

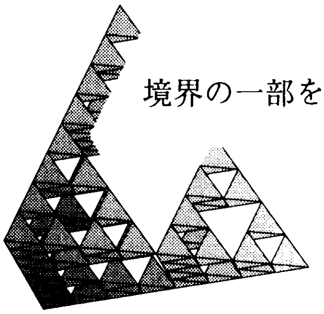


図 2: F の任意の閉部分集合 F' に対し $\widetilde{D} = B \setminus F'$ は有界一様領域.

参考文献

[1] H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan (to appear).

[2] Z. Balogh and A. Volberg, *Geometric localization, uniformly John property and separated semihyperbolic dynamics*, Ark. Mat. **34** (1996), 21–49.

[3] ———, *Boundary Harnack principle for separated semihyperbolic repellers, harmonic measure applications*, Revista Mat. Iberoamericana **12** (1996), 299–336.

[4] T. Lindstrøm, *Brownian motion on nested fractals*, Mem. Amer. Math. Soc. **83** (1990), no. 420, iv+128.

9 一様領域, 一様JOHN領域の直積

水谷 友彦　　広島大学大学院理学研究科

$\mathbb{R}^n$ 内の領域 D_1 と $\mathbb{R}^m$ 内の領域 D_2 に対して, その直積領域 $D_1 \times D_2$ の Martin 境界について考察する.

定義. 領域 D のみに依存する定数 $A_1, A_2 > 0$ が存在して, 任意の二点 $x, y \in D$ に対して x と y を結ぶ次のような D 内の曲線 γ が取れるとき, D は一様領域 ([8], [9]) であるという.

(i) $\ell(\gamma) \leq A_1|x-y|$,

(ii) 任意の $z \in \gamma$ に対して, $\delta_D(z) \geq A_2 \min\{\ell(\gamma(x,z)), \ell(\gamma(z,y))\}$.

ただし $\ell(\gamma)$ は曲線 γ の長さを, $\delta_D(z)$ は z と境界 ∂D との距離を, $\gamma(x,z)$ は x と z を結ぶ曲線 γ の部分曲線を表す.

条件 (i) で $|x-y|$ を $\rho_D(x,y)$ に換えたものは一様 John 領域と呼ばれる. ただし $\rho_D(x,y) = \inf\{\mathrm{diam}(\gamma) : \gamma \subset D$ は x と y を結ぶ曲線 $\}$ は内部距離を表す.

一様 John 領域のオリジナルの定義 ([4]) は上のものとは若干異なるが, [8, Lemma 2.7] 及び [9, Theorem 2.18] から同値な定義付けであることがわかる.

有界な一様領域の Martin 境界は Euclid 境界に同相であり ([2]), 有界な一様 John 領域の Martin 境界は内部距離 ρ_D に関するコンパクト化に同相である ([3]).

命題. $D_1 \subset \mathbb{R}^n$, $D_2 \subset \mathbb{R}^m$ を有界な一様 (John) 領域とする. このとき $D_1 \times D_2$ はまた一様 (John) 領域である.

系. D_1, D_2 を有界な一様 (John) 領域とすると, 直積 $D_1 \times D_2$ の Martin コンパクト化は, それぞれの Martin コンパクト化の直積 $\overline{D_1}^M \times \overline{D_2}^M$ に同相である.

また一方が全空間である直積領域 $\mathbb{R}^n \times D$ を帯状領域という. 帯状領域に関しては, D が区間 $(0,1)$ のときを Brawn [5] が, 有界な Lipshitz

領域のときを Aikawa [1] が, 有界な NTA 領域 ([7]) のときを Gardiner [6] がそれぞれ考察してきた.

D が有界な一様 (John) 領域のとき, 命題から特に $\mathbb{R}^n$ 内の球 B^n に対して, $B^n \times D$ は一様 (John) 領域となることがわかる. そこで境界 Harnack 原理 ([2], [3]) を用いると, Gardiner [6] と同様な手法により次を得ることができる.

定理. D を一様 (John) 領域とする. このとき $\mathbb{R}^n \times D$ の Martin コンパクト化は $\mathbb{R}^n \times \overline{D}^M \cup \{M_\alpha : \alpha \in S^{n-1}\}$ に同相である. またその境界 $\mathbb{R}^n \times \partial^M D \cup \{M_\alpha : \alpha \in S^{n-1}\}$ の各点は minimal である. ただし M_α は $\mathbb{R}^n$ の単位球面 S^{n-1} 上の点 α と同一視される無限遠点を表す.

参考文献

[1] H. Aikawa, On the Martin boundary of Lipschitz strips, J. Math. Soc. Japan 38 (1986) 527–541.

[2] H. Aikawa, Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain, J. Math. Soc. Japan (to appear).

[3] H. Aikawa, T. Lundh and T. Mizutani, Martin boundary of a fractal domain, preprint.

[4] Z. Balogh and A. Volberg, Boundary Harnack principle for separated semihyperbolic repellers, harmonic measure applications, Revista Mat. Iberoamericana 12 (1996), 299–336.

[5] F. T. Brawn, The Martin boundary of $\mathbb{R}^n \times]0,1[$, J. London Math. Soc. (2), 5 (1972), 59–66.

[6] S. J. Gardiner, The Martin boundary of NTA strips, Bull. London Math. Soc. 22 (1990), 163–166.

[7] D. S. Jerison and C. E. Kenig, Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentilly accessible domains, Adv. in Math. 46 (1982), 80–147.

[8] O. Martio and J. Sarvas, Injectivety theorems in plane and space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 4 (1978/1979), 383–401.

[9] J. Väisälä, Uniform domains, Tôhoku Math. J. 40 (1988), 101–118.

E-mail address: `mizutani@mis.hiroshima-u.ac.jp`

10　ピカール群，８の字結び目群と ヨルゲンセン群

佐藤　宏樹
静岡大学・理学部

定理 A. ピカール群はヨルゲンセン群である．

定理 B. ８の字結び目群はヨルゲンセン群である．

定理 A については Jørgensen-Lascurain-Pignataro [1], Sato-Yamada [3], Sato [2] で、定理 B については Sato [2] で既にコメントされているが、詳細については述べられていないし，今までに発表もされていない．これらの結果に興味を持ち、問い合わせをされる方もみえるのでここにおいて放物型ヨルゲンセン群との関係において簡単な説明を与えたい．

定義１． 非初等的２元生成離散群（クライン群）は

$$|\mathrm{tr}^2(A)-4|+|\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})-2|=1$$

を満たす生成元 A,B をもつとき ヨルゲンセン群 という

定義２．

$$G_p=\left\{ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\ b,\ c,\ d\in \mathbf{Z}+i\mathbf{Z},\ ad-bc=1 \right\}$$

を ピカール群 という．

我々の考える放物型の群は次の $A, B_{k,\theta}$ で生成される２元生成群 $G_{k,\theta}$ ($k\in\mathbf{R}$, $0\le\theta\le 2\pi$) である：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} ke^{i\theta} & i(k^2e^{i\theta}-e^{-i\theta}) \\ -ie^{i\theta} & ke^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

定理１ (S [2]). この型の非初等的離散群 $G_{k,\theta}$ はヨルゲンセン群である（この群を 放物型ヨルゲンセン群 という）．

定理 2 (J-L-P [1], S-Y [3]). $k = 1/2$, $\theta = \pi/2$ のとき $G_{k,\theta}$ はピカール群である.

定理 3 (S [2]). $k = \sqrt{3}/2$, $\theta = \pi/6$ のとき $G_{k,\theta}$ は 8 の字結び目群である.

上記以外の体積有限な放物型ヨルゲンセン群についても言及したい.

参考文献

[1] T. Jørgensen, A. Lascurain and T. Pignataro, *Translation extentions of the classical modular group*, Complex Variable **19** (1992), 205-209.

[2] H. Sato, *One-parameter families of extreme groups for Jørgensen's inequality*, Contemporary Math. 256, Proc. of the First Ahlfors - Bers Colloquium, edited by I. Kra and B. Maskit, (2000), 271-287.

[3] H. Sato and R. Yamada, *Some extreme Kleinian groups for Jørgensen's inequality*, Rep. Fac. Sci. Shizuoka Univ. **27** (1993), 1-8.

11 ふたつの周期軌道をもつ周期的不定点は安定多様体のカントール花束をもつ

山岸 義和 (龍谷大学 理工学部 数理情報学科)*

2000.9.24–27 (京都大学総合人間学部)
(日本数学会秋季総合分科会)

これは局所的な力学系の話です。

$\mathbf{C}^2$ の原点 $0 = (0,0)$ の近傍 K_0 と、二点 $q_i = (0, \alpha_i)$ $(i = 1, 2)$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ の近傍 K_i があって、双正則写像 $g_i : K_0 \to K_i$, $g_i(0) = q_i$ が与えられているとします。写像 $\pi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $\pi(x, y) = (x, xy)$ を 'Blow-down 写像' とし、$K = \pi^{-1}(K_0)$ とします。そして写像

$$f : K_1 \cup K_2 \to K, \quad f|_{K_i} = \pi^{-1} \circ g_i^{-1}$$

を考えます。これはちょうど、二粒の花見だんごを竹串で刺し通すような写像です。写像 g_i の線形部分を $S_i(x, y) = (a_i x + b_i y, \alpha_i + c_i x + d_i y)$ とし、

$$|a_i + b_i \alpha_j| > 1, \quad i, j = 1, 2$$

を仮定します。

$M > 0$ を大きく $\rho, r > 0$ を小さく選んで $\mathbf{L}_i = \mathrm{Lip}_M(\overline{\mathbf{D}}(0, \rho), \overline{\mathbf{D}}(\alpha_i, r))$ を円板 $\overline{\mathbf{D}}(0, \rho)$ から $\overline{\mathbf{D}}(\alpha_i, r)$ への Lipschitz 定数 $\leq M$ の関数の集合とし、その部分集合 $\mathbf{H}_i = \{\tau_i \in \mathbf{L}_i \mid 制限 \tau_i|\mathbf{D}(0, \rho) は holomorphic\}$ とすれば、グラフ変換

$$\Gamma_{g_i} : \mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H}_i$$

$$\Gamma_{g_i}(\tau_j) = p_2 g_i \pi(\mathrm{id}, \tau_j)[p_1 g_i \pi(\mathrm{id}, \tau_j)]^{-1}, \quad \tau_j \in \mathbf{H}_j$$

を定義することができ、さらに Γ_{g_i} は一様位相で縮小写像です (ただし $p_1(x, y) = x$, $p_2(x, y) = y$ とします)。縮小写像ふたつから Cantor 集合が作られます。つ

*yg@rins.st.ryukoku.ac.jp, http://dyn.math.ryukoku.ac.jp/~yg/

まり、$\Sigma(2) = \{1,2\}^{\mathbf{N}} \ni w = w_0 w_1 \cdots (w_k \in \{1,2\})$ をカントール集合とすれば $\sigma(w) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_{g_{w_0}} \cdots \Gamma_{g_{w_{n-1}}}(\mathbf{H}_{w_n})$ と定義することで埋め込み (像への同相)

$$\sigma : \Sigma(2) \to \mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2$$

が存在し、$G(\sigma) = \bigcup_{w \in \Sigma(2)} \mathrm{graph}(\sigma(w))$ をそのグラフとするとき以下が成り立ちます：

1. $w_0 = w'_0$ なる $w, w' \in \Sigma(2)$ に対して $\mathrm{graph}(\sigma(w)) \cap \mathrm{graph}(\sigma(w')) = \{q_{w_0}\}$
2. σ は f- 不変である。つまり $\mathrm{graph}(\sigma(w)) = \mathbf{B}_{w_0} \cap f^{-1}(\mathrm{graph}(\sigma(s(w))))$, $w \in \Sigma(2)$. $(\mathbf{B}_i = \overline{\mathbf{D}}(0,\rho) \times \overline{\mathbf{D}}(\alpha_i, r))$
3. $G(\sigma)$ は $\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$ における f の 'maximal local invariant set' である。つまり、$G(\sigma) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2)$.
4. $G(\sigma)$ は $\{q_1, q_2\}$ の 'local stable set', $W^s_{\mathrm{loc}}(\{q_1, q_2\})$, である。つまり、各 $z \in G(\sigma) \setminus \{q_1, q_2\}$ に対して $f^n(z) \to \{q_1, q_2\}$ as $n \to \infty$ である。

(証明は教科書 [1] における固定点の不安定多様体の構成と同様です。) このような σ を Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds と呼びます。

簡単な例としては、写像 $(x,y) \mapsto (x/2, (y^2-1)/x)$ は二点 $(0, \pm 1)$ が安定多様体のカントール花束を持ちます。ほかには、写像 $(x,y) \mapsto (y^2 + x^3/2 - 6x^2y + 18xy^2 - 33y^3/2)/x^2, (xy + xy^2 - 3y^3)/x^2)$ においては原点の像は放物線 $x = y^2$ で、点 $(4,2)$ がまた原点に移りますので、二点 $(0,0)$, $(4,2)$ の近傍で安定多様体のカントール花束を得ます。 また、このような写像の係数を少しだけ動かしたときには、性質 1, 4 は充たしませんが性質 2, 3 を充たすような σ が存在します。

References

[1] Michael Shub, Global Stability of Dynamical Systems, Springer (1987).

[2] Yamagishi Yoshikazu, Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point, preprint.

12

※印は本会で記入

※番号	題	$\mathbb{C}^3$の2次多項式自己同型の力学系

氏名	前川 和俊	所属	京都大学大学院人間・環境学研究科

$\mathbb{C}^3$の2次多項式自己同型は次のいずれかに、多項式自己同型で、共役であることをみる。

(i) アフィン写像

(ii) 半直積

(iii) Shift-like写像

次に、(iii)の場合について、力学系的グリーン関数G^+を構成し、$\{G^+=0\}$の多重複素グリーン関数とG^+との比較をする。また、$\{G^+=0\}$が滞留点集合より真に大きいことがあることをみる。

日本数学会 25×16=400

13

Entropy of fibered rational maps

Hiroki Sumi
Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology,
2-12-1, Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, Japan
e-mail; sumi@math.titech.ac.jp

Let (π, Y, X) be a "$\overline{\mathbb{C}}$-bundle", that is, Y and X are compact metric spaces, $\pi : Y \to X$ is a continuous surjective map, Y has a structure of bundle of which fiberes are $\overline{\mathbb{C}}$, Y has the local triviality with the transition groups being included in Aut $(\overline{\mathbb{C}})$. Let $f : Y \to Y$ be a rational map fibered over $g : X \to X$, that is, f and g are continuous maps satifying that the restriction of f to any fiber Y_x is holomorphic. We consider the topological and measure theoretical relative entropies of f with respect to g.

Theorem 0.1. *Let (π, Y, X) be a $\overline{\mathbb{C}}$-bundle. Let $f : Y \to Y$ be a rational map fibered over $g : X \to X$. Then the following holds.*

1. $h(f, Y_x) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \log d(x_n)$ *for any* $x \in X$.

2. *If μ is an f-invariant probability measure on Y, then we have*
$$h_\mu(f|g) \leq \int_X \log d(x) \ d(\pi_*\mu)(x).$$

3. $h(f) \leq \sup\{h_{\pi_*\mu}(g) + \int_X \log d(x) \ d(\pi_*\mu)(x))\}$, *where the supremum is taken over all f-invariant probability measures μ on Y.*

Theorem 0.2. *Let (π, Y, X) be a $\overline{\mathbb{C}}$-bundle. Suppose for each $x \in X$ there exists a positive and smooth $(1,1)$-form $(\omega_x)_{x\in X}$ such that $x \mapsto \omega_x$ is continuous. Let $f : Y \to Y$ be a rational map fibered over $g : X \to X$. Assume that $d(x) \geq 2$ for any $x \in X$. Then there exists a family of probability measures $\{\mu_x\}_{x\in X}$ in Y such that $f_x^*\mu_{g(x)} = \deg(f_{g(x)}) \cdot \mu_x$, $x \mapsto \mu_x$ is continuous and supp$(\mu_x) = J_x$. Moreover, let μ' be a g-invariant Borel probability measure on X. Define the measure μ on Y by: $\mu = \int_X \mu_x d\mu'(x)$ Then we have the following.*

1. *μ is f-invariant.*

2. *if μ' is ergodic, then so is μ.*

3. *if μ' is (strongly)mixing, then so is μ.*

4. $h_\mu(f|g) = \sup_\nu h_\nu(f|g) = \int_X \log d(x) \ d\mu'(x)$, *where the supremum is taken over all f-invariant probability measures ν satisfying $\pi_*\nu = \mu'$.*

References

[J] M.Jonsson, *Ergodic properties of fibered rational maps* , to appear in Ark.Mat.

[S1] H.Sumi, *Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products*, to appear in Ergod. Th. and Dynam. Sys.

[S2] H.Sumi, *Skew product maps related to finitely generated rational semigroups,* to appear in Nonlinearity.

[S3] H.Sumi, *Semihyperbolic dynamics on $\overline{\mathbb{C}}$-bundles,* to appear in RIMS Kokyuuroku.

14 Stretching rays for the family of real biquadratic maps

中根静男　　　　東京工芸大学

Biquadratic maps の族 $P(z) = P_{a,b}(z) = (z^2 + a)^2 + b, a, b \in \mathbf{R}$ の力学系を考える。特にそのパラメータ空間における stretching rays について考察する。この写像族は実3次多項式族の力学系のある側面を表すモデルとして Milnor [M] によって導入された。以下の結果は実3次多項式の場合とほとんど同じであるが，1点だけ異なるところがある。

P の危点は $z = 0$ と $z = \pm\sqrt{-a}$ で、$a < 0$ では虚数になるが，危値は $P(0) = a^2 + b$ と $P(\pm\sqrt{-a}) = b$ で、これらは常に実数である。従って、この族の connectedness locus M を求めるためには実軸上で危値の軌道を考えればよい。P の最大の実不動点が存在するとき、それを $\beta = \beta_P$ と書く。

補題 0.1 M の境界上の点は次のどれかを満たす。

$$\begin{aligned} Per_1^+(1) &: \; P'(\beta) = 1, \\ Preper_{(1)1} &: \; P(0) = \beta, \\ Preper_{(2)1} &: \; P(b) = \beta = -b. \end{aligned}$$

固有値1の放物的不動点を持つような P の locus $Per_1(1)$ は、簡単な計算により

$$a^2b^2 + a^3 + b^3 + \frac{9ab}{8} - \frac{27}{256} = 0$$

と表される。この集合は2個の連結成分から成る。そのうちの一つが $Per_1^+(1)$ であり、(a, b)-平面において $Per_1^+(1)$ の上方では P は実の不動点を持たず、全危点は escape する。もう一つの成分 $Per_1^-(1)$ は P の別の不動点 $\beta'_P < 0$ が存在して $P'(\beta'_P) = 1$ を満たすような点からなる。

定理 0.1 M の境界は次の3本の弧から成る。

$$\begin{aligned} Per_1^+(1) &: \; -\frac{\sqrt[3]{2}}{4} < a < \frac{7\sqrt[3]{4}}{16}, \\ Preper_{(1)1} &: \; b = -a^2 + \sqrt{-2a}, \; -2 \leq a \leq -\frac{\sqrt[3]{2}}{4}, \\ Preper_{(2)1} &: \; a = -b^2 + \sqrt{-2b}, \; -2 \leq b \leq -\frac{\sqrt[3]{2}}{4}. \end{aligned}$$

次に stretching rays の $Per_1^+(1)$ への着地性について考える。我々の族はstretching に関して閉じているので stretching rays を考えることができる。$P \in Per_1^+(1)$ に対し、その不動点 β_P の attracting Fatou coordinate を $\phi_{P,-}$ として、P の Fatou vector を $\tau(P) = \phi_{P,-}(P(0)) - \phi_{P,-}(b)$ と定義する。

補題 0.2 *Fatou vector は $Per_1^+(1)$ の実解析的な parametrization を与える*

更に $Per_1^+(1)$ の上方の P の Böttcher vector を$\eta(P) = \zeta_P(P(0)) - \zeta_P(b)$ とおく ここで $\zeta_P(z) = \dfrac{\log h_P(P(0)) - \log h_P(b)}{\log 4}$, $h_P(z)$ は P の Green 関数とする

補題 0.3 *Böttcher vector は shift locus (全ての危点が escape する領域) 内の stretching ray 上の不変量である*

従って shift locus 内では stretching rays は Böttcher vector map $P \mapsto \eta(P)$ の level sets となっている。特に $Per_1^+(1)$ の上方の 各 stretching ray は $R(\eta) : \eta(P) = \eta$ と表される。

定理 0.2 *$Per_1^+(1)$ の上方にある stretching ray $R(\eta)$ は $\eta \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ ならば $Per_1^+(1)$ のどの点にも着地しない つまり、その集積点集合 $I(\eta) = \overline{R(\eta)} - R(\eta)$ は $Per_1^+(1)$ 上の非自明な弧を成す。$k \in \mathbf{Z}$ ならば $R(k)$ は $Per_1^+(1)$ 上 $\tau(P) = k$ を満たす点に着地する。*

ここまでは実3次多項式族の場合と全く同じである。実3次多項式族の場合 $\eta \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$ のときは着地しないと予想している。Real biquadratic maps の場合もほとんどの場合着地しないと予想されるが，$R(1/2)$ だけは例外的である。それを示す次の結果は Milnor による

補題 0.4 *$R(1/2)$ は半直線 $b = a > 1/4$ であり $(1/4, 1/4) \in Per_1^+(1)$ に着地する*

参考文献

[M] J. Milnor: Remarks on iterated cubic maps. Experimental Math. 1 (1992), pp. 5–23.

15 ON SIEGEL CYCLES OF n-SUBHYPERBOLIC POLYNOMIALS

YÛSUKE OKUYAMA*
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY

In [2], we have studied this question:

Question. We suppose that a polynomial of degree $d \geq 2$ has a Siegel cycle whose multiplier is $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$. Then does α satisfies the Brjuno condition?

History. The converse of Question is true from the A. D. Brjuno Theorem in [1]. The Brjuno condition is defined in terms of the continued fraction expansion.

J.-C. Yoccoz proved in [4] that if a *quadratic* polynomial has a Siegel *fixed* point whose multiplier is λ, then α satisfies the Brjuno condition. In [3], R. Pérez-Marco proved Question for *structurally stable* polynomials with Siegel *fixed* points.

In this talk, I shall prove Question for *n-subhyperbolic* polynomials with Siegel *cycles*. As a corollary, we completely solve it for quadratic polynomials.

We shall define *n-subhyperbolic* polynomials. Let P be a polynomial of degree $d \geq 2$.

Notation. For a point $x \in \mathbb{C}$, we call $\{P^n(x)\}_{n \geq 0}$ the *orbit*. It is called a *cycle* if it is a finite set.

Let $\mathcal{Z} = \{z_\nu\}_{\nu=1}^m$ be an irrationally indifferent cycle. The *multiplier* of $\mathcal{Z}$ is defined by $(P^m)'(z_\nu)$. If P^m is linearizable at each point of $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$ is called a *Siegel cycle*. Otherwise $\mathcal{Z}$ is a *Cremer cycle*.

Definition. For an irrationally indifferent cycle $\mathcal{Z} = \{z_\nu\}_{\nu=1}^m$ of P, the *singular set* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{Z})$ is defined by $\bigcup_{\nu=1}^m \overline{S_\nu}$ (S_ν is the Siegel disk at z_ν) if $\mathcal{Z}$ is a Siegel cycle, and by $\mathcal{Z}$ itself if $\mathcal{Z}$ is a Cremer cycle.

Theorem 1 (Mañé). *For each singular set $\mathcal{S}$ of P, there exists a recurrent critical point c such that $\omega(c) \supset \partial\mathcal{S}$, where $\omega(c)$ is the omega limit set of c.*

Definition. A recurrent critical point c *corresponds to* an irrationally indifferent cycle $\mathcal{Z}$ if $\omega(c) \supset \partial\mathcal{S}(\mathcal{Z})$.

Key words and phrases. non-linearizability, n-subhyperbolic polynomial, quadratic polynomial, irrationally indifferent cycle, Brjuno condition.

* Partially supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

We write the Fatou set and Julia set by $F(P)$ and $J(P)$ respectively. We always count the number of critical points *with multiplicity.*

Definition (n-subhyperbolicity). For a non-negative integer n, a polynomial P is *n-subhyperbolic* if

(a) there exist exactly n recurrent critical points corresponding to irrationally indifferent cycles,
(b) every critical point in $J(P)$ other than the ones in (a) is preperiodic, and
(c) no critical orbit in $F(P)$ accumulates to $J(P)$.

By definition, a quadratic polynomial with an irrationally indifferent cycle is 1-subhyperbolic. A 0-subhyperbolic polynomial is subhyperbolic in a classical sense.

For simplicity, we treat only the class of 1-subhyperbolic polynomials in this talk.

Main Theorem 1. *If a* 1*-subhyperbolic polynomial has a Siegel cycle whose multiplier is* $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$*, then* α *satisfies the Brjuno condition.*

Corollary 1. *If a quadratic polynomial has a Siegel cycle whose multiplier is* $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$*, then* α *satisfies the Brjuno condition.*

By studying concrete examples of n-subhyperbolic polynomials, we also have:

Main Theorem 2 (Scaling invariance of the Brjuno condition). *If* α *satisfies the Brjuno condition, then* $m\alpha$ ($m \in \mathbb{N}$) *also satisfies the Brjuno condition.*

References

[1] Brjuno, A. D. Analytical form of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **25** (1971), 199–239.
[2] Okuyama, Y. Non-linearizability of n-subhyperbolic polynomials at irrationally indifferent fixed points, preprint.
[3] Pérez-Marco, R. Sur les dynamique holomorphes non linéarisables et une conjecture de V. I. Arnold, *Ann. Scient. Éc Norm Sup., 4^e série*, **26** (1993), 565–644.
[4] Yoccoz, J.-C. Théorèm de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques, *Astérisque*, **231** (1996), 3–88.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Current Address: Mathematics Research Centre, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK
E-mail address: okuyama@kusm.kyoto-u.ac.jp

特別講演

On the Dynamics of Exponential Maps and the Dimension Paradox

Dierk Schleicher, LMU München

Kyoto, 24. September 2000

In our talk, we will discuss some aspects on the dynamics of the iterated exponential family

$$z \mapsto \lambda \exp(z) \qquad \text{for } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

We start with the theory of iterated polynomials which by now is quite well-developed, starting from the work of Douady and Hubbard in the 1980's. Let p be a polynomial which we may as well suppose to be monic, and let $d \geq 2$ be its degree. The set $I(p)$ is the set of *escaping points*:

$$z \in I(p) \quad \text{iff} \quad p^{\circ n}(z) \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty .$$

The set $I(p)$ is a connected component of the Fatou set; the dynamics on $I(p)$ is easy to understand. The most interesting dynamics happens on the *Julia set* J. It equals the boundary of the escaping set, i.e. $J = \partial I(p)$ (and $J \cap I(p) = \emptyset$); therefore, the topology and dynamics on J are often discussed in terms of $I(p)$. To be explicit, suppose that $I(p)$ contains no critical point. Then there is a preferred conformal isomorphism $\varphi \colon I(p) \to (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ conjugating p to $w \mapsto w^d$: every $z \in I(p)$ is described uniquely by an *external angle* $\vartheta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and a *potential* $t > 0$ such that $\varphi(z) = \exp(t + 2\pi i \vartheta)$, and the dynamics is such that $p(z)$ is the unique point with external angle $d\vartheta$ and potential dt. The description of the Julia set can start in terms of sequences $(z_n) \in I(p)$ converging to $z \in J$ with $\varphi(z_n) = (t_n, \vartheta_n)$ and saying which sequences converge to the same point. This leads to the *pinched disk model* of the Julia set developed by Douady, Hubbard, Thurston and others;

it is a homeomorphic model if the Julia set is locally connected. The external coordinates (t, ϑ) are at the base of most results on polynomial dynamics.

Our goal is to extend this theory to iterated entire maps of *finite type:* these are the maps with only finitely many singular values (critical values or asymptotic values); we discuss only the easiest case of exponential maps $E_\lambda: z \mapsto \lambda \exp(z)$ with a unique singular (asymptotic) value at 0. Again, we start with the set of escaping points $I(E_\lambda)$. For polynomials, the set I is a connected open neighborhood of ∞ and in the Fatou set; for finite type entire maps, it is known from the work of Eremenko and Lyubich that I is a subset of the Julia set J, that I has no interior points (even if $J = \mathbb{C}$) and that the closure of I is J: all this is in contrast to the polynomial situation (another difference is that the orbit of a point $z \notin I$ may be bounded or unbounded). Our first result is a confirmation of the following conjecture of Eremenko (which however was stated for arbitrary entire maps):

for E_λ, every $z \in I$ can be connected to ∞ by a curve within I.

In fact, these curves are unique, and every connected component of I is a simple curve ending at ∞. Viana has shown that these curves are C^∞.

We give a complete description of the escaping set I: the various (uncountably many) curves are distinguished by their *external addresses*, and points on every single curve are distinguished by their *potentials*. The external address of a point $z \in I$ generalizes external angles of polynomials and is related to the imaginary parts of the points on the orbit of z; the potential measures the rate of escape to ∞. To be precise, introduce the map $F: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ given by $F(t) = e^t - 1$ (we think of F as the exponential map for large t, modified so that every $t > 0$ has an infinite backwards orbit). We say that $z \in I$ *escapes at potential* $t > 0$ if

$$|\mathrm{Re}(E_\lambda^{\circ n}(z)) - F^{\circ n}(t)| \quad \text{is bounded .}$$

If I_* is a connected component of I, then there is a unique $t_* \geq 0$ and a homeomorphism g_* from either (t_*, ∞) or $[t_*, \infty)$ onto I_* such that for $t > t_*$, the point $g_*(t)$ escapes at potential t (if t_* is in the domain of definition of g_*, then $g_*(t_*)$ escapes slower than at any potential $t > t_*$, but we make no claims on how slowly; if $t > t_*$, then it turns out that $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(E_\lambda^{\circ n}(z)) - F^{\circ n}(t) = \log|\lambda|$). We will call the set $g_*((t_*, \infty))$ a *dynamic ray*, and $g_*(t_*)$ is the *endpoint of the ray* (if it exists).

This gives two new differences to the polynomial theory:
(1) it may be that points on a given ray cannot escape slowly, but only with a minimal escape rate $t_* > 0$; and
(2) it may happen that the endpoint of a ray is itself an escaping point.

In order to describe exactly when this happens, we need to distinguish the rays; this will be done in terms of external addresses: an *external address* is a sequence $\underline{s} = s_1 s_2 \ldots$ of integers, and a ray is associated to external address $\underline{s}$ if for every point z on the ray,

$$\operatorname{Im}(E_\lambda^{\circ n}(z)) = 2\pi s_{n+1} - \operatorname{Im}(\log \lambda) + r_n(z)$$

with $r_n(z) \to 0$ as $n \to \infty$, and $r_n(z) \to 0$ for every fixed n as the potential of z becomes large on the ray.

To simplify the discussion, suppose that the singular value 0 is not contained in I. To every external address $\underline{s} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, there is at most one associated connected component $I_{\underline{s}}$ of I (a single ray with external address $\underline{s}$); denoting the minimal potential by $t_{\underline{s}}$, then exactly one of the following four cases happens:

1. $t_{\underline{s}} = 0$, and $I_{\underline{s}}$ is homeomorphic to $(0, \infty)$ (like in the polynomial case)

2. $t_{\underline{s}} = 0$, and $I_{\underline{s}}$ is homeomorphic to $[0, \infty)$ (the ray lands at an escaping point)

3. $t_{\underline{s}} > 0$, and $I_{\underline{s}}$ is homeomorphic to $[t_{\underline{s}}, \infty)$ (the ray lands at an escaping point, and the minimal escape rate is positive)

4. $t_{\underline{s}} = \infty$, and $I_{\underline{s}}$ is empty.

These four cases can completely be distinguished in terms of the external address $\underline{s}$ only; it is completely independent of λ (with a well-understood exception if $0 \in I$). Moreover, the exact value of $t_{\underline{s}}$ can also be determined in terms of $\underline{s}$: bounded sequences $\underline{s}$ are always of the first type; informally speaking, the faster the sequence $\underline{s}$ grows, the larger $t_{\underline{s}}$ becomes.

THE DIMENSION PARADOX. A corollary of this classification is the following dimension paradox: let E be the set of endpoints of the rays in the second and third case in the list above (when the ray lands at an escaping point). This set E is totally disconnected. Let R be the union of all rays (that is, the first three cases, without the endpoints). Then every point in E can be connected to ∞ by a unique ray in R, different points in E are connected to ∞ by disjoint rays, and the Hausdorff-dimensions are as follows:

$$\dim(E) = 2 \qquad \dim(R) = 1 ;$$

that is, a two-dimensional set of points is connected to ∞ by curves, each point by its own curve, so that the union of all the curves has dimension one (and the rays of the first type, which have no associated endpoints in the escaping set, are not even counted)! This phenomenon was first observed by Karpińska for positive real values of λ less than $1/e$; it turns out to be true for every $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

It should be added that many rays even of the first type will "land" (in the sense that $\lim_{t\to 0} g_{\underline{s}}(t)$ exists), but the landing point is not an escaping point, like for polynomials. There are cases, however, when the ray fails to land, and the closure of the ray is an inseparable continuum (such cases exist even if the orbit of the singular value 0 is finite and the external address of the ray is bounded).

All these results are only a beginning in the understanding of the topology and dynamics of the Julia set. In many cases, they should allow to give a complete description of topology and dynamics of the Julia set: in particular, this should be so if the dynamics is "hyperbolic" (there is an attracting orbit and the Julia set has measure zero; it is *not* locally connected), or if the singular value escapes or is strictly preperiodic (in the latter two cases, the Julia set is the entire complex plane, which describes the topology but not the dynamics). It turns out that local connectivity is no longer the relevant concept for the topology of Julia set: if $J = \mathbb{C}$, then the Julia set is locally connected but this means nothing for the dynamics; in the hyperbolic case, the Julia set is not locally connected but its topology and dynamics can be described anyway. We have rephrased this concept in terms of *fibers*: the "good" case is when fibers are trivial; this is a slightly stronger reformulation of local connectivity in all those cases where local connectivity has been useful, and it applies more generally.

There is a parallel theory of rays and potentials in parameter space (the λ-plane), leading to a description of all those parameters (called "exceptional" above) for which the singular value escapes. It helps to describe the bifurcation locus of exponential maps in a similar way as the Mandelbrot set is described in terms of the Douady-Hubbard theory: for example, density of hyperbolic dynamics for quadratic polynomials would follow from local connectivity of the quadratic bifurcation locus (the boundary of the Mandelbrot set); we rephrase this as saying that density of hyperbolicity would follow from the fact that all fibers of the Mandelbrot set are trivial.

For exponential maps, hyperbolic dynamics is completely classified, and it is conjectured that it is dense in the λ-plane. Density of hyperbolic dynamics would follow from triviality of all fibers in the exponential bifurcation locus.

We understand our results only as a beginning towards a more general theory including a larger class of entire maps; the fact that the entire complete classification of escaping points in exponential dynamics does not depend on the parameter λ might be taken as an indication that it could have analogues in greater generality, similarly to the fact that there is a uniform classification for all polynomials (as long as no critical point escapes).

REFERENCES:

D. Schleicher: *Attracting Dynamics of Exponential Maps.* Preprint, to appear.

D. Schleicher: *On Fibers and Local Connectivity of Compact Sets in* $\mathbb{C}$. Preprint, SUNY Stony Brook, **12** (1998), submitted for publication.

D. Schleicher and J. Zimmer: *Escaping Points of Exponential Maps.* Preprint, submitted for publication.

16

On the Prime Numbers (I)
(The Structure of Prime Numbers)

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press

Abstract

In this paper, some relationships of the prime numbers and polynomials are reported together with some illustrative examples.

References

[1] T. Kitamura ; Introduction to the number theory (1965), Maki -shoten, Japan.
[2] S. J. Patterson ; An introduction to the theory of the Riemann Zeta -Function (1988), Cambridge.

17

N - method to nearly simple harmonic vibration equations (Continued)

Katsuyuki Nishimoto Descartes Press Co.

and

Susana S. de Romero Universidad del Zulia
(Maracaibo, Venesuela)

Abstract

In the previous paper, some particular solutions to nearly simple harmonic vibration equations are reported. In this paper the general solution to the equations are discussed by means of N- fractional calculus again.

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.
[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.
[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, (1994), 1 - 14.
[5] K. Nishimoto ; N -method to nearly simple harmonic vibration equations, J. Frac. Calc. Vol. 15, May (1999), 67 - 72.

18 On N-fractional and partial differintegral equations

Katsuyuki Nishimoto   Descartes Press

Abstract

In this article, the unification of the partial differential equation of Cauchy - Riemann and the one of Laplace is discussed through th N (Nishimoto's)-fractional and partial differintegral equations.

Theorem 1. *Let*

$$\varphi = \varphi(z) = \varphi(x,y) \in \wp^{\circ} = \{\varphi(x,y)\ ; 0 \neq |\varphi_{\alpha(x)}| < \infty\ , 0 \neq |\varphi_{\beta(y)}| < \infty\ .\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\},$$

$$u = \mathrm{Re}\,\varphi \quad \text{and} \quad v = \mathrm{Im}\,\varphi\ .$$

We have then the following N -fractional and partial differintegral equations (NF -P DI E)

$$\text{(i)} \qquad u_{\alpha(x)} - u_{\alpha(y)} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\right)\alpha - v_{\alpha(y)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\right)\alpha = 0\ , \qquad (1)$$

$$\text{(ii)} \qquad v_{\alpha(x)} + u_{\alpha(y)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\right)\alpha - v_{\alpha(y)} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\right)\alpha = 0\ , \qquad (2)$$

if

$$\varphi_{\alpha(x)}(z) - (-i)^{\alpha}\varphi_{\alpha(y)}(z) = 0\ , \qquad (3)$$

where $n \in \boldsymbol{Z}\ .\ (\alpha \in \boldsymbol{R})\ .$

References

[1] K. Nishimoto ; Fractional Calculus, Vol. 1 (1984), Vol. 2 (1987), Vol. 3 (1989), Vol. 4 (1991), Vol. 5, (1996), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[2] K. Nishimoto ; An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century); Integrals and Differentiations of Arbitrary Order (1991), Descartes Press, Koriyama, Japan.

[3] K. Nishimoto ; On Nishimoto's fractional calculus operator N^{ν} (On an action group), J. Frac. Calc. Vol. 4, Nov. (1993), 1 - 11.

[4] K. Nishimoto ; Unification of the integrals and derivatives (A serendipity in fractional calculus), J. Frac. Calc. Vol. 6, Nov. (1994), 1 - 14.

[5] K. Nishimoto ; N- fractional derivatives and some identities for Riemann's Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 43 - 47.

[6] K. Nishimoto ; N- fractional calculus and some identities for generalized Zeta function, J. Frac. Calc. Vol. 15, may (1999), 49 - 54.

[7] K. Nishimoto ; On the convergence of N- fractional calculus of Zeta functions, J. Frac. Calc. Vol.16, Nov. (1999), 51 - 54.

[8] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z)$ and $\zeta(-z)$, J. Frac. Calc. Vol. 16, Nov. (1999), 75 - 84.

[9] K. Nishimoto ; N- fractional calculus of $\zeta(z\,;a)$ and $\zeta(-z\,;a)$, J. Frac. Calc.Vol.17 , May (2000), 1 - 10.

19

CONDITIONAL STABILITY OF A REAL INVERSE FORMULA FOR THE LAPLACE TRANSFORM

S. SAITOH, VU KIM TUAN AND M. YAMAMOTO

We are concerned with the Laplace transform

$$(\mathcal{L}F)(x) = \int_0^\infty F(t)e^{-xt}dt, \qquad x > 0.$$

Our main purpose is to get some estimates of $F(t)$, $t > 0$, by means of $\sup_{x\geq 0} |(\mathcal{L}F)(x)|$. In particular, we are interested in such estimates of F, that are small when

$$\sup_{x\geq 0} |(\mathcal{L}F)(x)|$$

is small. This kind of estimates is called stability estimate for the inverse Laplace transform, and, in general, we cannot expect such stability estimates, because the Laplace transform $\mathcal{L}$ advances the regularity of F very much. For example, consider $F_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbb{N}$. Then $(\mathcal{L}F_n)(x) = \frac{n}{x^2+n^2}$, $x > 0$, and $\sup_{x>0} |(\mathcal{L}F_n)(x)| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ as $n \longrightarrow \infty$, but $\lim_{n\to\infty} \|F_n\|_{L^\infty(0,\infty)} \neq 0$.

The lack of stability implies the ill-posedness in taking the inverse of the Laplace transform if we choose L^∞-norms for functions under consideration. However it is possible to obtain some stability estimates provided that we restrict to some reasonable space of functions. They are called conditional stability estimates and there are many such estimates depending on the choice of norms and "reasonable" functions spaces. In this paper, we establish such a conditional stability estimate in L^∞-norm for a subclass of Hölder continuous functions. The image of this space under the Laplace transform turns out to be a Bergman-Selberg space.

For $q > 0$, we can define a norm equivalent to the Bergman-Selberg norm $\|\cdot\|_{H_q(\mathbb{R}^+)}$ by

$$\|f\|^2_{H_q(\mathbb{R}^+)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!\Gamma(n+2q+1)} \int_0^\infty |\partial_x^n(xf'(x))|^2 x^{2n+2q-1}dx. \tag{1.1}$$

It is known (e.g., Saitoh [4], Chapter 5) that

$$\|F\|_{L^2_q} \equiv \left(\int_0^\infty |F(t)|^2 t^{1-2q}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathcal{L}F\|_{H_q(\mathbb{R}^+)}. \tag{1.2}$$

The equality (1.2) means that the Laplace transform is an isometry between the norms $\|\cdot\|_{L^2_q}$ and $\|\cdot\|_{H_q(\mathbb{R}^+)}$ for any fixed $q > 0$. The norm $\|\cdot\|_{H_q(\mathbb{R}^+)}$ specifies our choice of an admissible set. We state our main results.

Theorem 1. *Let $\frac{1}{4} < q < 1, M > 0$, and*

$$\max\left\{\frac{1}{2}, 2q-1\right\} < \alpha < \min\{1, 2q\}. \tag{1.3}$$

Set

$$\mathcal{U} = \{f; \|f\|_{H_q(\mathbf{R}^+)} \le M,\ \|x^\alpha f(\cdot)\|_{H_{q-\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{R}^+)} \le M\}. \tag{1.4}$$

Then for $0 < t_0 < t_1 < \infty$, and for $0 < \gamma < \frac{2\alpha-1}{4}$, there exists a constant $C = C(\mathcal{U}, t_0, t_1, \gamma) > 0$ such that

$$\|F\|_{L^\infty(t_0,t_1)} \le C\left(\frac{-1}{\log \|\mathcal{L}F\|_{L^\infty(0,\infty)}}\right)^\gamma \tag{1.5}$$

if $\mathcal{L}F \in \mathcal{U}$.

The right hand side of (1.5) tends to 0 as $\|\mathcal{L}F\|_{L^\infty(0,\infty)} \longrightarrow 0$, but with the logarithmic rate. So the conditional stability estimate is worse than any Hölder continuity.

We can give another characterization of an admissible set $\mathcal{U}$, independently of the Bergman-Selberg space.

Theorem 2. *Let $\alpha, \gamma, q, t_0, t_1, M, C$ be defined as in Theorem 1. Set*

$$\mathcal{V} = \{F \in C^1[0,\infty); F(0) = 0,\ \|F\|_{L^2_q} \le M, \|F'\|_{L^2_{\frac{\alpha}{2}+q-1}} \le \frac{M\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}{\sqrt{\pi}}\}. \tag{1.6}$$

Then the estimate (1.5) holds for all $F \in \mathcal{V}$.

In addition, it is proved that the condition $\alpha < 1$ in Theorem 1 and in [2] is needed essentially.

References

1. ABRAMOWITZ, M., and STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972.
2. AMANO, K., SAITOH, S., and YAMAMOTO, M., *Error estimates of the real inversion formulas for the Laplace transform*, Integral Transforms and Special Functions (to appear).
3. BYUN, D. -W., and SAITOH, S., *A real inversion formula for the Laplace transform*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **12** (1993), 597-603.
4. SAITOH, S., *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **369**, Addison Wesley Longman, UK, 1997.
5. SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., and MARICHEV, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

Department of Mathematic, Faculty of Engineering, Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan,

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, Kuwait University, P. O. Box 5969, Safat 13060, Kuwait,

and

Department of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914

20

REPRESENTATIONS OF ANALYTIC FUNCTIONS IN TERMS OF LOCAL VALUES BY MEANS OF THE RIEMANN MAPPING FUNCTION

SABUROU SAITOH AND MASATAKE MORI

Our results and method are valid on any Riemann surface, but in order to simplify our statements we shall state our results on any domain S on the complex $Z = X + iY$ plane.

Without loss of generality, we fix a point as $0 \in S$ and we consider any analytic function $f(Z)$ on S. Then, in an ε-neighborhood of 0, we have the Taylor expansion

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n, \quad |Z| < \varepsilon, \tag{1.1}$$

where

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varepsilon'} f(\zeta)\zeta^{-n-1} d\zeta \\ &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{aligned} \tag{1.2}$$

for any $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Our purpose in this paper is to represent $f(Z)$ for any point Z of S in terms of $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ in some "good" way. One fundamental method representing $f(Z)$ in terms of $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ is the well-known method by K. Weierstrass which repeats Taylor's expansions by taking a chain by discs, connecting 0 and Z. However, this method is very involved in the sense of practice, because in the first Taylor expansion on the next disc of $\{|Z| < \varepsilon\}$ in the chain, each Taylor coefficient is represented, in general, by using infinitely many Taylor coefficients $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. The first author discussed this problem by considering the inversion formula of the Cauchy integral representation in ([6],[8]). However, in the method we must, in general, use the eigenvalues and eigenfunctions in the Mercer expansion theorem for positive-definite kernels. In this paper, we shall give a new and "good" representation formula, by using some Riemann mapping function. Anyhow, in our method we shall assume that the Riemann mapping function may be constructed and known. Of course, we know many concrete Riemann mapping functions for special domains.

References

[1] K. Amano, *A bidirectional method for numerical conformal mapping based on the charge simulation method,* Journal of Information Processing, **14**(1991), 473-482.

[2] _____. A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, *J. of Computational and Applied Mathematics,* **53**(1994), 353–370.

[3] _____. *A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains,* **19**(1998), 1169–1187.

[4] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis,* Vol. 1. John Wiley & Sons, New York, (1974).

[5] M. Mori, *Analytic continuation and accelerations of convergence of series,* RIMS Kokyuroku, Vol. **1155**(2000), (to appear). (in Japanese)

[6] S. Saitoh, *Some fundamental interpolation problems for analytic and harmonic functions of class* L_2, Applicable Analysis, **17**(1984), 87–106.

[7] _____, *Representations of inverse functions,* Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 3633-3639.

[8] _____, *Integral transforms, reproducing kernels and their applications,* Pitman Research Notes in Mathematics Series, **369**(1997), Addison Wesley Longman Limited, UK.

[9] M. Sugihara and M. Mori, *Analytic continuation of functions by using elliptic modular functions,* RIMS Kokyuroku, **717**(1990), 76–89. (in Japanese)

[10] H. Takahasi and M. Mori, *Accelerations of convergence of Taylor series by using variable transformations,* RIMS Kokyuroku, **172**(1973), 78–87. (in Japanese)

[11] H. Takahasi, *Complex function theory and numerical analysis,* RIMS Kokyuroku, **253**(1975), 24–37. (in Japanese)

Department of Mathmatics, Faculty of Engineering, Gunma University, Kiryu 376-8515, Japan

E-mail address: ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: mmori@kurims.kyoto-u.ac.jp

21 Two conditons for a meromorphic function to be normal in the unit disk

山下慎二 (Yamashita, Shinji)

(東京都立大学 (理))

Let a function f be meromorphic in the disk $D = \{|z| < 1\}$. The spherical derivative $f^{\#}(z)$ of f at $z \in D$ is defined by $f^{\#}(z) = |f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$, if $f(z) \neq \infty$, and $f^{\#}(z) = |(1/f)'(z)|$, if $f(z) = \infty$. Two necessary and sufficient conditions for f to be normal in D, or, equivalently, for $(1-|z|^2)f^{\#}(z)$ to be bounded in D, are given.

(**I**) There exists r, $0 < r \leq 1$, such that $f(w) \neq -1/\overline{f(z)}$, the antipodal point of $f(z)$, for all z, $w \in D$ satisfying $|w-z|/|1-\bar{z}w| < r$.

(**II**) The quotient $\delta^{\#}(z,f)/\rho_{au}(z,f)$ is bounded in D minus the points z where $f^{\#}(z) = 0$.

Here, $\delta^{\#}(z,f)$ is the maximum of $R > 0$ such that the Riemann image surface (over the Riemann sphere) of D by f contains the one-sheeted spherical cap $\{w; |w - f(z)|/\ |1+\overline{f(z)}w| < R\}$ of center $f(z)$, in other words, the single-valued branch F of the inverse of f with $F(f(z)) = z$ can be defined in the cap. We set $\delta^{\#}(z,f) = 0$ if $f^{\#}(z) = 0$. Let $\rho_a(z,f)$ be the maximum of r, $0 < r \leq 1$, such that $f(w) \neq -1/\overline{f(z)}$ for all w in the non-Euclidean disk $\Delta(z,r) = \{w; |(w-z)/(1-\bar{z}w)| < r\}$ of center $z \in D$ and the non-Euclidean radius $\operatorname{arctanh} r$. Let $\rho_{au}(z,f)$ be the maximum of r described in the above with the additional condition that f is univalent in $\Delta(z,r)$.

We can actually show much more in terms of $\nu(f) = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)f^{\#}(z)$, $\rho_a(f) = \inf_{z\in D}\rho_a(z,f)$, and $\rho_a^*(f) \equiv \inf_{z\in D}\rho_a^*(z,f) \leq \rho_a(f)$, where f is meromorphic in D. Here $\rho_a^*(z,f)$ is the maximum of r, $0 < r \leq 1$, such that $f(\zeta) \neq -1/\overline{f(\eta)}$ for all ζ, $\eta \in \Delta(z,r)$.

(**III**) For f meromorphic in D the following chain of inequalities holds:

$$\tanh\ (\pi/4\nu(f)) \leq \rho_a^*(f) \leq \rho_a(f) \leq 2\rho_a^*(f) \leq 2/(\nu(f)).$$

22　Painlevé 超越関数の位数は有限である

下村　俊　　　　慶應大，理工

Painlevé 方程式

(I)　$w'' = 6w^2 + z,$

(II)　$w'' = 2w^3 + zw + \alpha,$

(IV)　$ww'' = (w')^2/2 + 3w^4/2 + 4zw^3 + 2(z^2 - \alpha)w^2 + \beta$

のすべての解は $\mathbb{C}$ 上有理型である．次の結果が得られた．

定理 1．方程式 (I), (II), (IV) の任意の解 $w(z)$ に対し $T(r, w) = O(r^C)$ である．ここで C は方程式のみに依存する正数である．

例えば (I) の任意の解 $w(z)$ を考えよう．このとき

補題 2．$z = \infty$ までのびる曲線 Γ が存在し，その上で $1/w(z) = O(|z|^{1/2})$ が成立する．

補題 3．$|\sigma| \geq R_0$ (> 10) を満たす任意の極 σ に対し，σ をとおる閉曲線 Γ_σ で次のようなものが存在する．

(1) $\Gamma_\sigma \subset \{z \mid |\sigma| \leq |z| \leq |\sigma| + 1\}$.

(2) Γ_σ の長さは $O(|\sigma|)$.

(3) Γ_σ 上 $1/w(z) = O(|z|^{1/2})$.

以上 2 つの補題および補助関数

$$\Phi(z) = w'(z)^2 + \frac{w'(z)}{w(z)} - 4w(z)^3 - 2zw(z)$$

が微分方程式

$$\Phi'(z) + \frac{\Phi(z)}{w(z)^2} = -\frac{z}{w(z)} + \frac{w'(z)}{w(z)^3}$$

を満たすという事実をつかうと，

命題 4． $w(z)$ の任意の極 σ に対して，$0 < |z-\sigma| < c_0|\sigma|^{-C'}$ において $w(z)$ は解析的である．ここで c_0, C' は σ に無関係な正数である．

これより，$n(r,w) = O(r^{2+2C'})$ がいえて，$T(r,w) = O(r^C)$ が従う．(II), (IV) の解についても同様の考察により，定理 1 の結果を得る．上記方法の補題 2， 3 では，$w(z)$ の零点を迂回した道をとっているが，$w(z)$ の極を迂回する道をとるやりかたも可能である．そのときは $\Phi(z)$ に加えてさらに別の補助関数も使うことによりさらに詳しく次の結果を得る．

定理 5 ．(I), (II), (IV) の任意の解に対して，それぞれ順に $T(r,w) = O(r^{5/2})$, $T(r,w) = O(r^3)$, $T(r,w) = O(r^4)$ が成立する．

23 n 葉代数型 Riemann 面の構成と その Picard 定数について

澤田　一成　　　　　　都立工業高専

Riemann 面 $\boldsymbol{R}$ 上の非定数有理型函数の族を $\mathfrak{M}(\boldsymbol{R})$ と表し，f $(\in \mathfrak{M}(\boldsymbol{R}))$ によって取られない値（$\in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$）の個数を $p(f)$ と表すとき，

$$P(\boldsymbol{R}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{R})} p(f)$$

を $\boldsymbol{R}$ の**Picard 定数**という．

整函数 $S_i(z)$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を係数とする既約な n 次代数方程式

$$S_0(z)\ y^n - S_1(z)\ y^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} S_{n-1}(z)\ y + (-1)^n S_n(z) = 0$$

で定義される函数 y を $\boldsymbol{n}$ **価代数型函数**といい，函数 y の固有存在領域を $\boldsymbol{n}$ **葉代数型 (Riemann) 面**という．ただし，すべての $S_i(z)$ に共通の零点はないものとし，$S_i(z)/S_0(z) (i = 1, 2, \cdots, n)$ のうち少なくとも 1 つは超越函数であるとする．特に $S_0(z) \equiv 1$ である場合，函数 y を**整代数型函数**という．n 葉代数型面 $\boldsymbol{R}$ の Picard 定数については，一般に $2 \leqq P(\boldsymbol{R}) \leqq 2n$ が知られている．

$p(y) = 5$ なる 3 価整代数型函数によって定義される代数型面及び，$p(y) = 7$ なる 4 価整代数型函数で定義される代数型面の Picard 定数については既に調査されている（[1]，[2]，[3]，[5]，[6] 参照）．

ここでは n 価整代数型函数で定義される代数型面とその Picard 定数について報告する．

定理 1 ([4]). 方程式

$$F(z, y) = y^n - S_1(z) y^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} S_{n-1} y + (-1)^n S_n(z) = 0 \qquad (1)$$

で定義される n 価整代数型函数 y が有限な p 個の除外値を持つとする．

$p \geq n$（即ち $p(y) = p + 1 \geq n + 1$）ならば方程式（*1*）は次のように表現される；

$$F(z, y) = U(y) + Q_1(y) e^{H_1^*(z)} + \cdots + Q_\ell(y) e^{H_\ell^*(z)} = 0,$$

ただし，$H_j^*(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ は $H_j^*(0) = 0$ なる非定数整函数であり，$U(y)$, $Q_j (j = 1, 2, \cdots, \ell)$ は y の定数係数多項式で次のように表される；

$$
\begin{cases}
U(y) = \prod_{i=1}^{m} (y - b_i)^{n_i} \tilde{U}(y), \\
Q_j(y) = \prod_{k=1}^{p-m} (y - a_k)^{n_{j,k}} \dfrac{\prod_{i=1}^{m} (y - b_i)^{\ell_{j,i}}}{\prod_{i=m_1+\cdots+m_{j-1}+1}^{m_1+\cdots+m_j} (y - b_i)^{\ell_{j,i}}} \tilde{Q}_j(y)
\end{cases}
$$

ここで，$a_k(k = 1, 2, \cdots, p - m)$，$b_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ は相異なる定数，また，ℓ, m, n_i, $n_{j,k}$, $\ell_{j,i}$, m_j は正整数で

$$
\sum_{k=1}^{p-m} n_{j,k} + \sum_{i=1}^{m} \ell_{j,i} - \sum_{i=m_1+\cdots+m_{j-1}+1}^{m_1+\cdots+m_j} \ell_{j,i} \leq n - 1 \qquad (j = 1, \cdots, \ell),
$$

を満たす．さらに $\tilde{U}(y)$, $\tilde{Q}_j(y)(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ は y の定数係数多項式で，その如何なる ℓ 個も共通零点を持たない．

特に $p(y) > 3n/2$ である場合には $\ell = 1$ を得，従って方程式（*1*）には唯一つの指数函数が含まれる．

定理 2 ([4]). 方程式（*1*）に唯一つの指数函数が含まれる場合，その判別式の零点を与える *factor* は，その（唯一つの）指数函数の $p(y) - 2$ 次多項式となる．

定理 3 ([4]). 方程式（*1*）に唯一つの指数函数が含まれる場合，その判別式がある種の条件を満たせば，*Picard* 定数は $p(y)$ と一致する．

これら一連の結果は $p(y) = 5$, $p(y) = 7$ なる代数型面に関する結果を含んでいる．

参考文献

[1] K. Niino and K. Tohge, *Some functional equations and Picard constants of algebroid surfaces*, J. Math. Soc. Japan **48** (1996), no. 4, 649–665.

[2] M. Ozawa and K. Sawada, *Three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five*, Kodai Math. J. **17** (1994), no. 1, 101–124.

[3] ———, *Picard constants of four-sheeted algebroid surfaces, I*, Kodai Math. J. **18** (1995), no. 1, 99–141.

[4] K. Sawada, *Picard constants of n-sheeted algebroid surfaces*, preprint.

[5] ———, *Picard constants of three-sheeted algebroid surfaces with* $p(y) = 5$, Kodai Math. J., to appear.

[6] K. Sawada and K. Tohge, *A remark on three-sheeted algebroid surfaces whose Picard constants are five*, Kodai Math. J. **18** (1995), no. 1, 142–155.

24 On the Deficiency of Holomorphic Curves with Maximal Deficiency Sum, II

TODA Nobushige Nagoya Institute of Technology

1. Introduction. (a) Let $f = [f_1, \cdots, f_{n+1}]$ be a don-degenerate, transcendental holomorphic curve from $\boldsymbol{C}$ into $P^n(\boldsymbol{C})$ with a reduced representation

$$(f_1, \cdots, f_{n+1}) \ : \ \boldsymbol{C} \ \to \ \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\},$$

where n is a positive integer.

Let X be a subset of $\boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ in N-subgeneral position satisfying $\# X \geq 2N - n + 2$, where $N \geq n$.

We denote by $T(r, f)$ the characteristic function of f and by $\delta(\boldsymbol{a}, f)$ the deficiency of $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{n+1} - \{0\}$ with respect to f.

Defect Relation ([1]($N = n$), [2]($N > n$). See [3]).

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in X} \delta(\boldsymbol{a}, f) \leq 2N - n + 1.$$

(b) Let q be an integer satisfying $2N - n + 1 < q < \infty$ and we put $Q = \{1, 2, \cdots, q\}$. Let $\{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}$ be a family of vectors in X. For a non-empty subset P of Q, we denote

$$V(P) = \text{the vector space spanned by } \{\boldsymbol{a}_j \mid j \in Q\}, \quad d(P) = \dim V(P)$$

and we put

$$\mathcal{O} = \{P \subset Q \mid 0 < \# P \leq N + 1\}.$$

Definition([4]). We put

$$\lambda = \min_{P \in \mathcal{O}} \frac{d(P)}{\# P}.$$

Remark. $1/(N - n + 1) \leq \lambda \leq (n + 1)/(N + 1)$.

Lemma 1([4]). $\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) \leq \min\{2N - n + 1, (n + 1)/\lambda\}$.

Lemma 2([4]). Suppose that $N > n$. For $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_q \in X$ $(2N - n + 1 < q < \infty)$ the maximal deficiency sum

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1$$

holds if and only if the following two relations hold:

1) $(1 - \theta\omega(j))(1 - \delta(\boldsymbol{a}_j, f)) = 0$ $(j = 1, \cdots, q)$;

2) $\sum_{j=1}^{q} \omega(j)\delta(\boldsymbol{a}_j, f) = n + 1$,

where ω is a Nochka weight function and θ is a Nochka constant.

We put

$$D(1) = \{\boldsymbol{a} \in X \mid \delta(\boldsymbol{a}, f) = 1\}.$$

Theorem A([4]). Suppose that

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1.$$

If $N > n \geq 2$ and $(n+1, 2N-n+1) = 1$, then $\# D(1) \geq [(2N-n+1)/(n+1)] + 1$.

The purpose of this talk is to give a result containing Theorem A.

2. Result.

Theorem([5]). Suppose that $N > n = 2m$ $(m \in \boldsymbol{N})$ and that

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(\boldsymbol{a}_j, f) = 2N - n + 1.$$

Then, $\# D(1) \geq [(2N-n+1)/(n+1)] + 1$.

References

[1] H. Cartan: Sur les combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[2] E. I. Nochka: On the theory of holomorphic functions. Soviet Math. Dokl., 27-2(1983), 377-381.

[3] H. Fujimoto: Value distribution theory of the Gauss map of minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^m$. Aspects of Math. E21, Vieweg 1993.

[4] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum. NIT Sem. Rep. on Math., No.149(1999), 1-10.

[5] N. Toda: On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum, II. NIT Sem. Rep. on Math., No.150(2000), 1-15.

特別講演

NEVANLINNA THEORY AND ITS APPLICATIONS

石崎克也（日本工業大学）

1. Introduction

この講演では, Nevanlinna 理論周辺の話題で最近盛んに研究の対象となっているトピックスを取り上げて紹介させていただくことにする. トピックスの選び方は詳細な Nevanlinna 理論の知識を仮定せずとも問題意識が伝わる問題を取り上げることをできるだけ心がけた. 1節では有理型函数の一意化問題 (Unicity Problem), 2節では函数方程式の有理型解の存在, 超・超越性, 増大の正則性を, 3節では複素力学系と複素微分方程式の関連について取り扱うことにした. これらの問題を Nevanlinna 理論を用いて解決していく道筋とこれからの研究の方向付けを与えることができて, 少しでも多くの方に興味を持っていただければと考える. Nevanlinna 理論の解説書と思われる文献をいくつかあげておく [19, 20], [24] [1], [31], [33], [40].

2. Uniqueness theorem for small functions

有理函数は超越的有理型函数に比べて増大度がかなり小さいという表現は少し曖昧かもしれない. そこで, 有理函数 q と超越的有理型函数 f の Nevanlinna 特性函数を考えて, $T(r,q)$ と $T(r,f)$ を比較すると, $\lim_{r\to\infty} T(r,q)/T(r,f) = 0$ であるから, q は f に対して増大度がかなり小さいといえばはっきりしてくる. そこで, $S(r,f)$ は測度有限な除外区間の外で $r\to\infty$ とするときに $o(1)T(r,f)$ なる量を表すものとし, 有理型関数 a が f に対して "small" であるとは $T(r,a) = S(r,f)$ が満たされることであると定義する.

2つの超越的有理型函数 f と g が small 函数 a を共有 (share) するとは, $f(z)-a(z)$ の零点は $g(z)-a(z)$ の零点であってかつ $g(z)-a(z)$ の零点は $f(z)-a(z)$ の零点であることである. 勿論, $a(z)\equiv\infty$ の場合も考える. 全ての f の極が g の極であり, 全ての g の極が f の極であるとき f と g は ∞ を共有するということにする. 簡単のため, $f(z_0)-a(z_0)=0$ が成り立つときに z_0 は f の a 点と言うことにする. a 点の重複度は $f(z)-a(z)$ の零点の重複度で定義することとする. また, 重複度まで一致するときには "CM に共有する", 重複度の一致までは考慮しないときには "IM に共有する" という. ここでは, 特に断らない限り単に "共有" すると言うときには

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30D35, Secondary 34A20, 39B10.

Key words and phrases. Nevanlinna theory, Uniquness theorem, Complex functional equations, Complex differential equation, Complex dynamics .

The first author is supported in part by a Grant-in-Aid for General Scientific Research from the Ministry of Education, Science and Culture 11640164 (Toda).

[1] [24] は複素領域での微分方程式を扱った本であるが一つの章の中に Nevanlinna 理論が簡潔に纏められている

"IM"の意味で使うことにする．また，単に small 函数というときは与えられた 2 つの超越的有理型函数 f と g 両方に関して small である函数とする．

いわゆる Nevanlinna 5 values theorem, 即ち "5 つの異なる値を共有する超越的有理型函数 f と g は一致する" は有名であるが

$$\boxed{\text{5 values} \to \text{5 small functions}}$$

とできるかどうかは長年に渡り未解決であった，部分的な解答には [29], [34], [50], [51], [58] などがある．ところが，最近になってこの問題は Li and Qiao [36] によって解決された．

2.1. **Two meromorphic functions sharing 4 small functions.** Nevanlinna の 5 values theorem の証明を思い出すと，次の 2 つのことに気がつく：(I) ひとつは Nevanlinna の第 2 主要定理が small 函数に定数の場合と全く変わらずに拡張できるのであれば 5 つの small 函数を共有する 2 つの函数が一致することは定数の場合とほぼ同様に証明できる．(II) もうひとつは，2 つの函数 f, g が 4 つの値を共有し，第 5 の値 α_5 に関して $\overline{N}(r, f = \alpha_5 = g) \neq S(r, f)$ ならば f と g は一致する[2]．(I) については，それ自身難しい未解決問題として残されている．不足函数についての部分は Steinmetz [47] によって解決されたが，分岐の部分については知る限りにおいて Zhang [58] が最良と思われる．この他，関連論文に [13] などがある．Li and Qiao は第 2 主要定理を拡張するのではなく，5 つの small 函数を共有するという性質のみを巧みに組み合わせて問題を解決したのである．そのため，(II) が成立するかどうかは彼らの方法からはすぐにはわからないのである．今回は，(I) の解決はできないままであるが (II) については証明することができたので報告しておく [27].

Theorem 2.1. *超越的有理型函数 f と g が異なる 4 つの small 函数を共有し，第 5 の small 函数 $a_5(z)$ について $\overline{N}(r, f = a_5 = g) \neq S(r, f)$ を満すならば，f と g は一致する．*

このように，"超越的有理型函数 f と g が 4 つの small 函数を共有する" [3] という条件にある条件を付加することで f と g が一致することを示す研究は他の形でも考えられる．例えば，f や g が不足の函数を持つ場合などについては [29], [34] などがある．また，共有の仕方で条件を加えた研究は多くの論文を生み出しているがこの部分は次の小節にゆだねたい．実際，Nevanlinna [39] 自身が 4 つの値を CM に共有する 2 つの函数について調べている．

2.2. **Two meromorphic functions sharing 3 small functions CM.** Gundersen [15] に示された結果を紹介することからこの小節は始めることにする．"超越的有理型函数 f と g が 4 つの値を共有し，そのうち 2 つが CM に共有されていれば f と g は一致する（または一次分数変換で結ばれる）"．この結果は，Mues [38] によって改良された[4]．この Gundersen の結果は small 函数でも成立するかという問題も未解決と思われる．部分的な結果に，"3 つが CM に共有" されるという条件のもと

[2] 個数函数 $\overline{N}(r, f = \alpha = g)$ は，f と g が α を共有する点の位置のみを数えたものである．

[3] この条件だけでは，一般には f と g が一致するとは言えない．[15, 16], [38] [42] などに詳しい．

[4] Mues は 2 つ CM に共有という条件はもっと弱めることができることを指摘した．

では [25], [35] の結果がある．これらの証明は複雑なものであるが，Theorem 2.1 を証明する際に用いたアイデアを使うことで若干簡潔にできる [28].

3. Schröder equation and c-difference equation

この節では，ある函数方程式の超越的有理型函数解の性質を調べることを目的意識におく．ひとつは解の増大の正則性 (regularity) であり，もうひとつは解の超・超越性である．勿論，解の存在を仮定してからの話になるが存在定理に関しては，[4], [9], [17], [22], [26], [48] などを参照されたい．具体的には小節 3.1 で Schröder の方程式に関する Rubel の問題を，小節 3.2 では c-差分方程式についての Wittich の定理の拡張，Ramis の問題周辺の話題を取り上げたい．特に，こだわりたいテーマは自励系でない函数方程式の取り扱いと Nevanlinna 理論についての関わりである．

増大の正則性と超・超越性について若干の説明をしておく．多項式係数の線形 n 階同次方程式については，その超越整函数解 f について

$$\log M(r,f) = Kr^{\sigma}(1+o(1)), \quad \text{as } r \to \infty \tag{3.1}$$

なることが知られている [18], [23]. ここで，$K>0, \sigma>0$ [5] は定数である．この式から，

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r} \quad (=\sigma) \tag{3.2}$$

である[6]. 増大の正則性の定義はいろいろとあるようだが，函数方程式の解に関して(3.1) や(3.2) [7] を満たすかどうかを調べたい．勿論，有理型函数については(3.1) や(3.2) で $\log M(r,f)$ を Nevanlinna の特性函数 $T(r,f)$ に置き換えての話である．

複素平面上の有理型函数の全体を $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ と書き $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ を函数のなす体とする[8]. 有理型函数 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ が $\mathcal{L}$ 上 *differentially algebraic* とは，ある微分多項式 $\Omega(z,f,f',\ldots,f^{(n)})$ があって代数的常微分方程式

$$\Omega(z,f(z),f'(z),\ldots,f^{(n)}(z)) = 0, \tag{3.3}$$

を満たすことである．ここで，Ω の係数函数は全て $\mathcal{L}$ に属するものとする．$\mathcal{M}(\mathbb{C})$ 上 differentially algebraic なる函数の全体を $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ と書く．$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ が $f \notin \mathcal{A}(\mathcal{L})$ なるとき $\mathcal{L}$ 上 *transcendentally transcendental*（超・超越的），または $\mathcal{L}$ 上 *hyper-transcendental* と言う．定義・性質などは [7], [44, 45], [49], [54, 55] などを参照されたい．以降この節では，特に断りのない限り $\mathcal{L}$ として有理関数体 $\mathbb{C}(z)$ を取ることとする．

[5] 実際，σ は与えられた方程式の係数の次数から定まる有理数である．

[6] (3.2) の左辺を上位数（単に位数），右辺を下位数などという．

[7] (3.1), (3.2) は一般には成立しない．また，(3.2) から(3.1) も一般には導けない．

[8] 例えば，$\mathcal{L}$ としては $\varphi(r)$ を実数値連続関数として

$$(\mathcal{L}=)\mathcal{B}_{\varphi} = \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) | T(r,f) = O(\varphi(r))\}$$

などが考えられる．これは Nevanlinna の特性関数の満たす性質から導かれる．特に $\varphi(r) = \log r$ ならば $\mathcal{B}_{\varphi}$ は有理函数の全体 $\mathbb{C}(z)$ である．

Hölderの定理として有名な“Γ-函数は超・超越的である”ことはΓ-函数の満たす差分方程式 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ から導かれる.

3.1. **Generalized Schröder equation.** Rは次数2以上の有理函数で, cは$|c|>1$なる定数とする. Ritt [43] はSchröderの方程式

$$f(cz)=R(f(z)), \tag{3.4}$$

がdifferentially algebraicな超越的有理型函数解は指数関数, 三角関数, $\wp$-函数のそれぞれの族に限ることを示した[9]. また, (3.4)の解の正則性に関しては(3.1)の評価が得られることが知られている, 例えば[4]を参照. このとき, 解の位数σは

$$\sigma=\frac{\log\deg R}{\log|c|} \tag{3.5}$$

である. Rubelは[44, 45]の中で, (3.4)の$R(f(z))$を$R(z,f(z))$ (zと$f(z)$の有理函数)に変えたときどうなるであろうかという問題を出題している. (3.4)の右辺を$R(z,f(z))$に置き換えた方程式をここではgeneralized Schröder方程式と呼ぶことにする. 小生の知る限り, generalized Schröder方程式については超・超越性, 正則性とも一般には未解決と思われる. 複素力学系の研究でもしばしば登場する, Schröderの方程式はその繰り返しを試みることによって新たな評価式を導き出すことができる. 古典的な解法のひとつのアイデアはそこにあるのだが, generalized Schröder方程式では都合良く機能してくれない. 最近得られた(3.2)の形の評価を紹介しておく[17].

Theorem 3.1. *Generalized Schröder* 方程式が超越的有理型函数解を持つとすると, その位数と下位数は等しく, ともに(3.5)で与えられる. ただし, (3.5)の右辺の分子はfについての次数$\deg_f R(z,f)$を表すものとする.

証明の主たる道具は, Nevanlinnaの特性函数を評価するValiron–Mokhon'koの定理である[33], [37].

3.2. **c-difference equation.** この小節は先ず, Wittich [53]の一階のc-差分方程式

$$f(cz)=a(z)f(z)+b(z), \tag{3.6}$$

に対する結果から始めることにする. ここで, $a(z)$, $b(z)$は多項式である.

Theorem 3.2. 方程式(3.6)が超越的整函数解を持てばその解は超・超越的であり, 増大に関して

$$\log M(r,f)=C(\log r)^2(1+o(1)) \tag{3.7}$$

である. ここで, Cは方程式から決まる定数である.

[9]例えば, $\wp(z)$はその定義微分方程式を$(\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$として

$$f(2z)=\frac{16f(z)^4+8g_2f(z)^2+32g_3f(z)+g_2^2}{16(4f(z)^3-g_2f(z)-g_3)}$$

を満たす. また, Schröder函数が$\wp$-函数の族でない場合には, Rは$\pm M_d$, $\pm T_d$, ここで, $M_d=z^d$, $\cos(dz)=T_d(\cos z)$, Chevychev多項式に限る. 例えば, $\cos z$は$f(2z)=2f(z)^2-1$を満たす.

Ramis は増大に関する性質を n 差分の方程式

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(z) f(c^j z) = Q(z), \tag{3.8}$$

に関して調べている．ここで, Q, a_j, $j = 0, \ldots, n$ は共通零点を持たない多項式で $a_n(z)a_0(z) \neq 0$ である．Ramis [41] [10]は全ての(3.8), $Q(z) \equiv 0$ の超越的整函数解 f に対して,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{(\log r)^2} = \frac{\sigma_k}{2\log|c|} \tag{3.9}$$

ここで, σ_k は(3.8) の係数の次数から作られる Newton-Polygon の傾きのひとつである．我々は, [9], [10] を通して(3.8) の正則性に関して Wittich, Ramis の結果を改良した結果を得たので紹介しておく．

Theorem 3.3. 方程式(3.8) が超越的有理型函数解 f [11] を持てば, 増大に関して

$$T(r,f) = O(\log r)^2 \quad and \quad (\log r)^2 = O(T(r,f)). \tag{3.10}$$

特に,

$$m(r,f) = C(\log r)^2(1 + o(1)) \tag{3.11}$$

である．ここで, C は方程式から決まる定数である．特に, (3.8) で $Q(z) \equiv 0$ ならば $C = \sigma_k/2\log|c|$ である．

Ramis [41] は論文の最後の節で $|c| = 1$ の場合について, また c-差分方程式, 差分方程式, 微分方程式との相互関係についてについての問題を出している．超・超越性をもっと厳しくしたかたちでの出題である．小生の知る限り未解決のものもあると記憶している．

(3.8) の超・超越性については一般には未解決である．(3.6) で $a(z)$, $b(z)$ を有理函数に変えると一般に解は無限個の極を持ってくる．Wittich と同じ方法ではうまくいかないが, 1 階の c-差分方程式の解の超・超越性は証明することができた [26].

4. Complex dynamics and Complex differential equations

ある種の複素微分方程式の解となりうる有理型函数の複素力学的性質を調べた Bergweiler and Terglane [11] の結果からこの節は始めることにする．集合 $\mathcal{R}$ を以下の形の方程式の解となりうる有理型函数とする

$$f' = q(z)(f - z), \tag{4.1}$$

$$f' = q(z)(f - z)^2, \tag{4.2}$$

$$f' = q(z)(f - \tau)(f - z), \tag{4.3}$$

$$(f')^2 = q(z)(f - \tau)(f - z)^2, \tag{4.4}$$

$$(f')^2 = q(z)(f - \tau)(f - \delta)(f - z)^2, \tag{4.5}$$

[10] Ramis の方法は Nevanlinna 理論ではなく函数解析的手法である

[11] 整函数ならば $m(r,f) = T(r,f) + O(1)$ である．

ここで, τ, δ $(\tau \neq \delta)$ は定数, $q(z)$ は有理函数.

Bergweiler and Terglane は

(**A**) 全ての $\mathcal{R}$ に属する函数は遊走領域を持たない

を示した. この定理は Wang [53] によって方程式

$$(f')^n = q(z)P(f)P_0(f')(f-z)^m, \tag{4.6}$$

$$(f')^n = q(z)e^{P_1(z)}P(f)(f-z)^m, \tag{4.7}$$

を満たす有理型函数についても同様の結果 (**A**) が成立することが示された. ここで, $q(z)$ は有理函数, $P(z)$, $P_0(z)$, $P_0(0) \neq 0$, $P_1(z)$ は多項式 m, n は自然数である. 複素力学系の解説書としては例えば, 有理函数を扱ったものに [3], [47], 超越整函数を扱ったものに [6] などがあげられる. また複素微分方程式の解となりうる有理型函数の複素力学的性質を扱った論文には例えば [5], [11, 12], [32], [52] などがある. 一方, 複素微分方程式の解説書としては [24], [31], [33] などがある. 主張 (**A**) はもし(4.1)–(4.5) が有理型解を持てばそれらは遊走領域を持たないということを述べている. Bergweiler and Terglane は彼らの論文の中で (**A**) が空論と成らないように(4.1)–(4.5) の有理型解の存在について文献 [2], [31] をあげて説明をしている. 実際, [1] にあるように Riccati 方程式の解の存在は $q(z)$ によって変わってくるのである. そこで当然のことながら, (4.6), (4.7) が有理型函数解を解に持つときはどのようなときかを調べる必要性が生じる. 実際に得られた結果 [30] は以下の通り：

Theorem 4.1. 方程式 (4.6) が超越的有理型函数解を持ったとすると, (4.6) は (4.1)-(4.5) のいずれかの形である.

Theorem 4.2. 方程式 (4.7) が超越的有理型函数解を持ったとすると, (4.7) は以下の方程式のいずれかの形である

$$\begin{aligned}
f' &= q(z)e^{P_1(z)}(f-z), && (4.8)\\
f' &= q(z)e^{P_1(z)}(f-z)^2, && (4.9)\\
f' &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-z), && (4.10)\\
(f')^2 &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-z)^2, && (4.11)\\
(f')^2 &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-\tau_2)(f-z)^2, && (4.12)
\end{aligned}$$

ここで, τ_1, τ_2 $(\tau_1 \neq \tau_2)$ は定数.

Theorem 4.1 が主張していることは, (4.6) について調べることは Bergweiler and Terglane の調べた方程式を調べることと実は同じであったということである. Theorem 4.2 の結果についても, 未知関数とその導関数との関係は Bergweiler and Terglane の調べた方程式を調べること同じである. （一般にはどうなのであろうか）

4.1. **Malmquist–Yosida–Steinmetz type theorems.** Nevanlinna 理論は複素微分方程式と密接な関わりを持ち, 時には既知の定理の別解を与えてくれることが知られている. おそらく最も有名なものは, Malmquist の定理を吉田耕作先生が Nevanlinna 理論を用いて別解を与えたことであろう [57]. その後, この方法は

Wittich のグループに引き継がれ Steinmetz [46] によって大きな飛躍を見せた．また, Bank, Kaufman, He, Laine 達も Nevanlinna 理論を中心に Malmquist–Yosida の定理周辺の発展に大きな貢献を見せた [2], [21]. この方面の研究は未知関数とその導関数（または高階導関数）に関して代数的な方程式でその係数達の属する有理関数体 $\mathcal{M}$ に対して "超越的" である解が存在する方程式を決めるというものである．特に, 解の特性関数が $\mathcal{M}$ の特性関数よりも増大度がかなり大きいときこれを許容解[12](admissible solution) という．我々の方程式(4.6) が超越解を持つとするとその解は許容解となる．つまり, (4.6) を扱うに関してはこれまである Nevanlinna 理論で複素微分方程式を取り扱う既知の方法を適用することで証明は終了する．実際, Theorem 4.1 は既に Yang [56] によって一般の admissible case に拡張された.

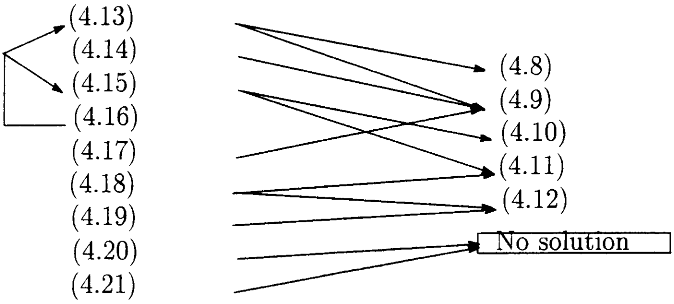
これは本編とはあまり関係がないが, 最近では Bergweiler [8] などによって 1 階の代数的方程式に対する Gol'dberg の定理 [14] の別証明が与えられた．Zalcman の rescaling lemma を用いるのもであるがこの方法は複素微分方程式に残された位数に関する問題の解くことの一つの方向付けを与えたように思われる.

4.2. **Non-admissible solutions.** 方程式(4.6) と(4.7) の大きな違いは(4.7) の係数には $e^{P_1(z)}$ が含まれていることである．このことは, (4.7) の超越解は必ずしも許容解とはなりえず既知の証明法だけではすぐには証明できない．そこで, 先ず既知の方法で(4.7) を以下の 9 つの方程式に絞る.

$$
\begin{aligned}
&(4.13) & f' &= q(z)e^{P_1(z)}(f-z)^s, \\
&(4.14) & (f')^n &= q(z)e^{P_1(z)}(f-z)^{n+1}, \\
&(4.15) & (f')^n &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-z)^n, \\
&(4.16) & (f')^n &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)^{n-1}(f-z)^{sn}, \\
&(4.17) & (f')^n &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)^{n-1}(f-z)^{n+1}, \\
&(4.18) & (f')^n &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-\tau_2)^{n-1}(f-z)^n, \\
&(4.19) & (f')^2 &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-\tau_2)(f-z)^{2s}, \\
&(4.20) & (f')^2 &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-\tau_2)(f-z), \\
&(4.21) & (f')^2 &= q(z)e^{P_1(z)}(f-\tau_1)(f-\tau_2)(f-\tau_3)(f-z),
\end{aligned}
$$

ここで, τ_j, $j=1, 2, 3$ は互いに異なる定数で, s は自然数．その後は, 箇々の方程式に関して別々の議論をして定理を証明することになる．その際, 一つの助けとなる補題は Zhu[59] によるものである.

[12]厳密な定義は [21], [33] などを参照



References

[1] Bank, S. B., G. G. Gundersen and I. Laine, *Meromorphic solutions of the Riccati differential equation*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **6** (1981), 369–398.

[2] Bank, S. B. and R. P. Kaufman, *On the growth of meromorphic solutions of the differential equation* $(y')^m = R(z, y)$, Acta Math., **144** (1980), 223–248.

[3] Beardon, A., Iteration of rational functions, Springer Verlag, New York–Berlin, 1991.

[4] Becker, P.-G. and W. Bergweiler, *Hypertranscendency of conjugacies in complex dynamics*, Math. Ann. **301** (1995), 463-468.

[5] Bergweiler, W., *Newton's method and a class of meromorphic functions without wandering domains*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, **13** (1993), 23–247.

[6] ———, *Iteration of meromorphic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **29**(1993), 151–188.

[7] ———, *Solution of a problem of Rubel concerning iteration and algebraic differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 257–267.

[8] ———, *On a theorem of Gol'dberg concerning meromorphic solutions of algebraic differential equations*, Complex Variables Theory Appl, **37** (1998), 93–96.

[9] Bergweiler, W., K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Meromorphic solutions of some functional equations* Methods Appl. Anal. **5**(3) (1998), 248–258. Correction Methods Appl. Anal. **6** (4) (1999), 617.

[10] ———, *Growth of meromorphic solutions of some functional equations I*, to appear in Aequationes Math.

[11] Bergweiler, W. and N. Terglane, *Weakly repelling fixpoints and the connectivity of wandering domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 1–12.

[12] ———, *On the zeros of solutions of linear differential equations of the second order*, J. London Math. Soc. (2) **58** (1998), 311–330.

[13] Frank, G. and G. Weissenborn, *On the zeros of linear differential polynomials of meromorphic functions*. Complex Variables Theory Appl, **12** (1989), 77–81.

[14] Gol'dberg, A. A. *On single-valued solutions of first order differential equations' (Russian)*, Ukrain. Math. Zh. **8** (1956), 254–261.

[15] Gundersen, G. G., *Meromorphic functions that share four values*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 545–567. Correction: 304 (1987), 847–850.

[16] ———, *Meromorphic functions that share three values IM and a fourth value CM*, Complex Variables Theory Appl. **20** (1992), 99–106.

[17] Gundersen G. G., J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo and D. Yang, *Meromorphic solutions of generalized Schröder l equations*, to appear in Aequationes Math.

[18] Gundersen, G. G., E. M. Steinbart and S. P. Wang, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 3, 1225–1247.

[19] Hayman, H. K., Meromorphic functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[20] ______, *The local growth of power series: a survey of the Wiman–Valiron method*, Can. Math. Bull. (3) **17** (1974), 317–358.

[21] He, Y. and I. Laine, *The Hayman-miles theorem and the differential equation* $(y')^n = R(z, y)$, Analysis **10** (1990), 387–396.

[22] Heittokangas, J., I. Laine, J. Rieppo and D. Yang, *Meromorphic solutions of some linear functional equations*, to appear in Aequationes Math.

[23] Helmrath, W. and J. Nikolaus, *Ein elementarer Beweis bei der Anwendung der Zentralindexmethode auf Differentialgleichungen.* Complex Variables Theory Appl. **3** (1984), 253–262.

[24] Hille, E., Ordinary differential equation in the complex domain, Wiley and Sons, New York–London–Sydney–Toronto, 1976.

[25] Hua, X.-H. and M.-L. Fang, *Meromorphic functions that share four small functions*, Indian J. Pure Appl. Math. **28** (1997), 797–811.

[26] Ishizaki, K., *Hypertranscendency of meromorphic solutions of a linear functional equation*, Aequationes Math. **56** (1998), 271–283.

[27] ______, *Meromorphic functions sharing small functions*, to appear in Arch. Math (Basel).

[28] ______, *Uniqueness problems on meromorphic functions that share four small functions*, to appear in ISAAC Conference Proceedings.

[29] Ishizaki, K. and N. Toda, *Unicity theorems for meromorphic functions sharing four small functions*, Kodai Math. J. 21 (1998), 350–371.

[30] Ishizaki, K. and Y-F. Wang, *Non-linear differential equations with transcendental meromorphic solutions*, to appear in J. Austral. Math. Soc.

[31] Jank, G. and L. Volkmann, Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen, Birkhäuser-Verlag, Basel–Boston–Stuttgart, 1985.

[32] Jankowski, M., *Newton's method for solutions of quasi-Bessel differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **22** (1997), 187- 204.

[33] Laine, I., Nevanlinna theory and complex differential equations, W. Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[34] Li, B.-Q., *Uniqueness of entire functions sharing four small functions*, Amer. J. Math., **119** (1997), 841-858.

[35] Li, P. and C.-C. Yang, *On two meromorphic functions that share pairs of small functions*, Complex Variables Theory Appl. **32** (1997), 177–190.

[36] Li, Y.-H. and J.Y. Qiao, *On the uniqueness of meromorphic functions concerning small functions* (Chinese), Preprint 1998.

[37] Mokhon'ko, A. Z. and V. D. Mokhon'ko, *Estimates for the Nevanlinna characteristic of some classes of meromorphic functions and their applications to differential equations*, Sib. Math. J. **15** (1974), 921–934.

[38] Mues. E., *Meromorphic functions sharing four values*, Complex Variables Theory Appl. **12** (1989), 169–179.

[39] Nevanlinna, R., *Einige Eindueutigkeitssätze in der Theorie der mermorphen Funktionen*, Acta Math. **48** (1926), 367–391.

[40] ______, Analytic Functions, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[41] Ramis, J. P., *About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 1 (1992), 53–94.

[42] Reinders, M., *A new characterization of Gundersen's example of two meromorphic functions sharing four values*, Results Math. **24** (1/2) (1993), 174–179.
[43] Ritt, J. F., *Transcendental transcendency of certain functions of Poincaré*, Math. Ann. **95** (1925/26), 671–682.
[44] Rubel L. A., *Some research problems about algebraic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 43–52.
[45] ———, *Some research problems about algebraic differential equations* II, Illinois J. Math. **36** (1992), 659–680.
[46] Steinmetz, N., Eigenschaften eindeutiger Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen im Komplexen Doctoral Dissertation, Karlsruhe, 1978.
[47] ———, *Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 134–141.
[48] ———, Rational iteration, W. Gruyter, Berlin–New York, 1993.
[49] Takano, K., *On the hypertranscendency of solutions of a difference equation of Kimura*, Funkcial. Ekvac. **16** (1993), 241–254.
[50] Toda, N., *Some generalizations of the unicity theorem of Nevanlinna*, Proc. Japan Acad., **69**, Ser. A (1993), 61-65.
[51] ———, *Uniqueness theorems for meromorphic functions sharing five small meromorphic functions*, Nevanlinna theory and its application II (NIT) 1998.
[52] Wang, Y., *Wandering domains in the dynamics of certain meromorphic functions*, Bull. Austral. Math. Soc. **59** (1999), 99–106.
[53] Wittich, H., *Bemerkung zu einer Funktionalgleichung von H. Poincaré*, Arch. Math. (Basel) **2** (1949/1950), 90–95.
[54] Yanagihara, N., *Hypertranscendency of solutions of some difference equations*, Japan. J. Math. **17** (1981), 109–168.
[55] ———, *Meromorphic solutions of some functional equations*, Bull. Sc. math., 2e série **107** (1983), 289–300.
[56] Yang, D., *Classification of some differential equations* Preprint.
[57] Yosida, K., *A generalization of Malmquist's theorem*, Japan J. Math. **9** (1933), 253–256.
[58] Zhang Q.-D., *A uniqueness theorem for meromorphic functions with respect to slowly growing functions* (Chinese), Acta Math. Sinica **36**(1993), 826-833.
[59] Zhu, J. H., *The general form of Hayman's inequality and the fixed points of meromorphic functions*, Chinese Science Bulletin (Kexue Tongbao, English Edition) **33** (4) (1988), 265-269.

Department of Mathematics, Nippon Institute of Technology, 4-1 Gakuendai Miyashiro, Minamisaitama Saitama 345-8501, Japan
E-mail address: ishi@nit.ac.jp

25　多調和関数に対する Bôcher 型定理について

二村　俊英　広島大・理学研究科
岸　恭子　広島大・理学研究科
水田　義弘　広島大・総合科学部

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の実数値関数 $u \in C^{2m}$ が, $\Delta^m u = 0$ となるとき m **調和**であるといい, $u \in H^m(\mathbf{R}^n)$ と表す. また, n 次元単位球 $B(0,1)$ を $\mathbf{B}$ で, 原点を除いた単位球 $\mathbf{B} - \{0\}$ を $\mathbf{B}_0$ で表す. さらに, K_m は Δ^m の基本解を表す.

調和関数に対して次の定理が示されている ([3]).

調和関数に対する Bôcher の定理. $\mathbf{B}_0$ 上の非負調和関数 u に対して,

$$u = CK_1 + h$$

となる定数 $C \geq 0$ と $h \in H^1(\mathbf{B})$ が存在する.

この定理は, 次のように拡張される.

Bôcher の定理の拡張. $u \in H^1(\mathbf{B}_0)$ は

$$\limsup_{x \to 0} u(x)\,|x|^{n-1} \leq 0$$

を満たすならば,

$$u = cK_1 + h$$

となる定数 c と $h \in H^1(\mathbf{B})$ が存在する.

この講演では, これらを多調和関数に対して拡張したものを報告する.

主定理. $u \in H^m(\mathbf{B}_0)$ が, 非負の整数 s に対して

$$\int_{\mathbf{B}_0} u(x)^+ |x|^s \, dx < \infty \tag{1}$$

を満足するならば,

$$u = \sum_{|\mu| \leq s+2m-1} c(\mu)\, D^\mu K_m + h$$

となる定数 $c(\mu)$ と $h \in H^m(\mathbf{B})$ が存在する.

この定理の証明を与えるために, 次の補題を用いる.

補題. $u \in H^m(\mathbf{B}_0)$ と多重指数 λ に対して,

$$B_k r^{2(m+1+|\lambda|-k)-m} + C_k r^{2(m+|\lambda|-k)}$$

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{r\mathbf{S}} u x^\lambda \, dS = \sum_{k=1}^{m+|\lambda|} A_k \, r^{2(1+|\lambda|-k)} K_m(r) + \cancel{r^{2-n} P_{2(m+|\lambda|-1)}(r)}$$

$$k > m+|\lambda|+1-\frac{n}{2} \Rightarrow A_k = 0$$

となる定数 A_k と多項式 $P_{2(m+|\lambda|-1)}$ が存在する. ただし $k > m+1-\dfrac{n}{2}$ のとき $A_k = 0$ である.

これを用いると, 条件 :

$$\int_{\mathbf{B}_0} |u(x)||x|^s \, dx < \infty \tag{2}$$

を満たす $u \in H^m(\mathbf{B}_0)$ に対して

$$\langle T_u, v \rangle = \lim_{r \to 0} \int_{\mathbf{B}-r\mathbf{B}} u(x) v(x) \, dx, \qquad v \in C_0^\infty(\mathbf{B})$$

で定めた汎関数 T_u は, $\mathbf{B}$ 上の超関数となることがわかる. このとき, u と T_u とを同一視すれば

$$u - \sum_{|\mu| \le s+2m-1} c(\mu) D^\mu K_m \in H^m(\mathbf{B})$$

となる定数 $c(\mu)$ が定まることがいえる. さらに, (1) を満たす u は (2) をも満たしていることが示される.

参考文献

[1] D. H. Armitage, On polyharmonic functions in $R^n - \{0\}$, J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 561-569.

[2] N. Aronszajn, T. M. Creese, and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon Press, 1983.

[3] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, 1992.

[4] Y. Ishikawa, M. Nakai and T. Tada, A form of classical Picard principle, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996), 6-7.

[5] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosho, Tokyo, 1996.

[6] M. Nicolesco, Recherches sur les fonctions polyharmoniques, Ann. Sci. École Norm Sup. **52** (1935), 183-220.

26 多様体上の caloric morphism の特徴付け

西尾昌治　大阪市立大学理学部

下村勝孝　茨城大学理学部

1. 定義

多様体の場合に caloric morphism を定義し，ユークリッド空間の場合と対応した特徴付けを与えることができる．ここでは (M, g), (N, h) をそれぞれ m-次元，n-次元 の C^∞級多様体で，Riemann 計量又は semi-Riemann 計量(非退化)が入っているものとする．M, N の Laplacian をそれぞれ Δ_g, Δ_h で表わし，M, N 上の熱作用素

$$\boldsymbol{H}_g = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_g, \quad \boldsymbol{H}_h = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_h$$

を考える．$\mathbb{R} \times M$ (resp. $\mathbb{R} \times N$) の領域上で熱方程式 $\boldsymbol{H}_g u = 0$ (resp. $\boldsymbol{H}_h u = 0$) を満たす函数 u を caloric function と呼ぶ．

D を $\mathbb{R} \times M$ の領域とする．$(\tau, y) = f(t, x)$ を D から $\mathbb{R} \times N$ への C^∞級写像，$\varphi > 0$ を D 上の caloric function とし，任意の $f(D)$ 上の caloric function $u(\tau, y)$ に対して，$\varphi(t, x)(u \circ f)(t, x)$ が再び D 上の caloric function になるとき，(f, φ) を caloric morphism と呼ぶ．

2. Riemann 多様体の場合

定理 1. M, N を Riemann 多様体とする．領域 $D \subset \mathbb{R} \times M$ から $\mathbb{R} \times N$ の中への C^∞級写像 $(\tau, y) = f(t, x)$ と，D 上の C^∞級関数 $\varphi > 0$ について，以下は同値．

(1) (f, φ) は caloric morphism.

(2) M, N の勝手な局所座標に関して (f, φ) は，以下の (E-1) – (E-4) を満たす．

(E-1) $\quad \boldsymbol{H}_g \varphi = 0,$

(E-2) $$\boldsymbol{H}_g f^\alpha = 2g(\nabla_g \log \varphi, \nabla_g f^\alpha) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g(\nabla_g f^\beta, \nabla_g f^\gamma)({}^h\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \circ f), \qquad \alpha = 1, \ldots, n,$$

(E-3) $\quad \nabla_g f^0 = 0,$

(E-4) $$g(\nabla_g f^\alpha, \nabla_g f^\beta) = (h^{\alpha\beta} \circ f)\frac{df_0}{dt}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n$$

ただしここで $\nabla_g u$ は u の gradient，${}^h\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は N のクリストッフェル記号である．

(3) D 上の C^∞級関数 $\lambda(t) \geqq 0$ が存在し，$f(D)$ 上の任意の C^2級関数 u に対して

$$\boldsymbol{H}_g(\varphi \cdot u \circ f)(t,x) = \lambda(t)\varphi(t,x)((\boldsymbol{H}_h u) \circ f)(t,x),$$

が成り立つ.

3. semi-Riemann 多様体の場合

定理 2. M, N を semi-Riemann 多様体とする．領域 $D \subset \mathbb{R} \times M$ から $\mathbb{R} \times N$ の中への C^∞級写像 $(\tau, y) = f(t,x)$ と，D 上の C^∞級関数 $\varphi > 0$ について，以下は同値.

(1) (f, φ) は caloric morphism.

(2) D 上の C^∞級関数 λ が存在し，M, N の勝手な局所座標に関して (f, φ) は，(E-1), (E-2) と以下の (E-5) – (E-7) を満たす.

(E-5) $$g(\nabla_g f^0, \nabla_g f^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, \dots, n$$

(E-6) $$g(\nabla_g f^\alpha, \nabla_g f^\beta) = (h^{\alpha\beta} \circ f)\lambda, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n$$

(E-7) $$\boldsymbol{H}_g f^0 = 2g(\nabla_g \log \varphi, \nabla_g f^0) + \lambda$$

(3) D 上の C^∞級関数 $\lambda(t,x)$ が存在し，$f(D)$ 上の任意の C^2級関数 u に対して

$$\boldsymbol{H}_g(\varphi \cdot u \circ f)(t,x) = \lambda(t,x)\varphi(t,x)((\boldsymbol{H}_h u) \circ f)(t,x),$$

が成り立つ.

27 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の回転不変な計量に関するcaloric morphism

下村勝孝

茨城大学理学部

ここでは，$M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(n \geqq 2)$ 上に回転不変な計量を入れた空間で caloric morphism を考える．$\mathbb{R}^n$ の座標を $(x_1, \dots, x_n)$ とする．

ρ を $(0, \infty)$ 上の正値 C^∞ 級関数とする．$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の各点 x に対して，$ds^2 = \rho(|x|)(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$ を回転不変な Riemann 計量 とする．この計量に関する gradient を ∇_ρ で，Laplacian を Δ_ρ で表す．$\mathbb{R} \times M$ 内のある領域でこの計量に関する熱方程式

$$\boldsymbol{H}_\rho u := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_\rho u = 0$$

を満たす関数 u を caloric function と呼ぶ．ρ を用いて $\boldsymbol{H}_\rho u$ を書き下せば次の様になる：

$$\boldsymbol{H}_\rho u = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\rho(|x|)} \Delta_x u + \frac{n-2}{2} \frac{\rho'(|x|)}{\rho(|x|)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

D を $\mathbb{R} \times M$ 内の領域とし，$f(t,x) = (f_0(t,x), f_1(t,x), \dots, f_n(t,x))$ を D から $\mathbb{R} \times M$ への C^∞ 級写像，φ を D 上の正値 C^∞ 級関数とする．$f(D)$ 上の任意の caloric function $u(\tau, y)$ に対して，$\varphi(t,x)(u \circ f)(t,x)$ が再び D 上の caloric function になるとき，(f, φ) を caloric morphism と呼ぶ．

一般論により，(f, φ) が caloric morphism であることと，次の (1) - (4) は同値である．

(1) $\quad \boldsymbol{H}_\rho \varphi = 0,$

(2) $\quad \boldsymbol{H}_\rho f_\alpha = 2g(\nabla_\rho \log \varphi, \nabla_\rho f_\alpha) - [(\Delta_\rho x_\alpha) \circ f] \dfrac{df_0}{dt}, \quad \alpha = 1, \dots, n$

(3) $\quad \nabla_\rho f_0 = 0,$

(4) $\quad g(\nabla_\rho f_\alpha, \nabla_\rho f_\beta) = (g^{\alpha\beta} \circ f) \dfrac{df_0}{dt}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n$

計量 が回転不変であるから，$\mathbb{R}$ の平行移動及び $\mathbb{R}^n$ の回転

$$f(t,x) = (t + a, Rx), \quad \varphi(t,x) = C$$

$(a \in \mathbb{R}$, R は直交行列, $C > 0)$ は，任意の ρ に対して caloric morphism になる．

それ以外の，言わば自明でないものには以下のものがある．何れも 計量 ρ に強い制限が付く．

1. (Appell 型変換) $p > 0$, $k \in \mathbb{R}$ $(k \neq -2)$, $\rho(r) = pr^k$ とする．その時

$$f(t,x) = \left(\frac{at+b}{ct+d}, \frac{Rx}{|ct+d|^{2/(k+2)}}\right),$$

$$\varphi(t,x) = \frac{C}{|ct+d|^{n/2}} \exp\left[\frac{-p|x|^{k+2}}{(k+2)^2|ct+d|}\right]$$

(但し $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ s.t. $ad-bc=1$, $C>0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$k=-2$ の場合は，この形の変換は存在しない．一方，$k=-2$ の場合には Euclid 計量の場合には無かった型の変換(下記 4 と 5)が存在する．

2. (Kelvin 型変換) $\nu>0$，$\rho(r)$ は $\rho(\frac{\nu^2}{r})=\frac{r^4}{\nu^2}\rho(r)$ を満たす (例えば $\rho(r)=\frac{\nu^2}{r^2}$) 正値 C^∞級関数とする．その時

$$f(t,x)=(t+a,\frac{\nu Rx}{|x|^2}),\quad \varphi(t,x)=C$$

(但し $C>0$, R は直交行列) は caloric morphism.

3. (拡大縮小) $\nu>0$，$\rho(r)$ は $\rho(\nu r)=\nu^k\rho(r)$ を満たす (例えば $\rho(r)=r^k$) 正値 C^∞級関数とする．その時

$$f(t,x)=(\nu^{k+2}t+a,\nu Rx),\quad \varphi(t,x)=C$$

(但し $a\in\mathbb{R}$, $C>0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$k=-2$ の場合は t の係数が 1 になる．

4. $p>0$，$\rho(r)=pr^{-2}$ とする．その時

$$f(t,x)=(t+a,e^{\alpha t+\beta}Rx),\quad \varphi(t,x)=C|x|^{\alpha p/2}e^{\alpha^2pt/4},$$

$$f(t,x)=(t+a,e^{\alpha t+\beta}\frac{Rx}{|x|^2}),\quad \varphi(t,x)=C\frac{1}{|x|^{\alpha p/2}}e^{\alpha^2pt/4}$$

(但し $a,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $(\alpha\neq 0)$, $C>0$, R は直交行列) は caloric morphism.

$n=2$ の場合は更に特別で，t につれて回転する型の変換が存在する．

5. $n=2$，$p>0$，$\rho(r)=pr^{-2}$ とする．その時

$$f(t,x)=(t+a,\nu e^{\alpha t}R(bt+c)x),\quad \varphi(t,r,\theta)=Cr^{\alpha p/2}e^{(\alpha^2pt+2b\theta)/4}$$

$$f(t,x)=(t+a,\nu e^{\alpha t}\frac{R(bt+c)x}{|x|^2}),\quad \varphi(t,r,\theta)=C\frac{1}{r^{\alpha p/2}}e^{(\alpha^2pt+2b\theta)/4}$$

(但し $a,b,c,\alpha,\in\mathbb{R}$ $(\alpha\neq 0)$, $\nu,C>0$, $R(s)=\begin{pmatrix}\cos s & -\sin s\\ \sin s & \cos s\end{pmatrix}$, (r,θ) は $\mathbb{R}^2$ の極座標) は caloric morphism.

(MSJ 2000 autumn)

28 シリンダー内の minimally thin sets と rarefied sets のウィナー型判定条件

宮本　育子　千葉大・理

D を $\mathbf{R}^{n-1}(n \geq 2)$ のなめらかな境界をもつ領域とし、$\mathbf{R}^n$ 内の集合

$$\Gamma_n(D) = \{P = (X, y) \in \mathbf{R}^n; X \in D, -\infty < y < +\infty\}$$

をシリンダーとよぶ。$\Gamma_n(D)$ のマルチン境界は、$\partial\Gamma_n(D) \cup \{+\infty, -\infty\}$ で、$+\infty$ のマルチン関数は

$$K(P, +\infty) = e^{\sqrt{\lambda_D} y} f_D(X) \quad (P = (X, y) \in \Gamma_n(D))$$

である。ただし λ_D, $f_D(X)$ は D でのディリクレ問題

$$\begin{aligned} (\Delta_n + \lambda)f &= 0 \quad on\ D \\ f &= 0 \quad on\ \partial D \end{aligned}$$

の最小な正の固有値と正規化した固有関数とする。

$\Gamma_n(D)$ の部分集合 E に対して

$$E_k = E \cap \{P = (X, y) \in \Gamma_n(D) : k \leq y < k+1\}.$$

とおく。$K(P, +\infty)$ の E_k への掃散 (balayage) を $\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot, +\infty)}(P)$, $\Gamma_n(D)$ のグリーン関数を $G(P, Q)$ で表わす時、

$$\hat{R}^{E_k}_{K(\cdot, +\infty)}(P) = \int_{\Gamma_n(D)} G(P, Q) d\lambda_{E_k}(Q) \quad (P \in \Gamma_n(D))$$

なる $\Gamma_n(D)$ 上の測度 λ_{E_k} の全測度 $\lambda_{E_k}(\Gamma_n(D))$ を $\lambda(E_k)$、λ_{E_k} の (グリーン) エネルギーを $\gamma(E_k)$ で表わす。

$\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $+\infty$ で minimally thin であるとは

$$\hat{R}^{E}_{K(\cdot, +\infty)}(P) \neq K(P, +\infty),$$

となる $P \in \Gamma_n(D)$ が存在するときをいい、$\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $+\infty$ で rarefied であるとは、$\Gamma_n(D)$ 上の正値優調和関数 $v(P)$ で

$$\inf_{P \in \Gamma_n(D)} \frac{v(P)}{K(P, +\infty)} = 0$$

かつ

$$E \subset \{P = (X, y) \in \Gamma_n(D);\ v(P) \geq e^{\sqrt{\lambda_D} y}\}$$

なるものが存在するときをいう。

$\mathbf{R}^n$ 内のコーンに対して得られた [3] と類似な結果が、シリンダーに対しても得られたことを報告する。

定理 1. $\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $+\infty$ で minimally thin であるための必要十分条件は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma(E_k) e^{-2\sqrt{\lambda_D}k} < +\infty.$$

定理 2. $\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $+\infty$ で rarefied であるための必要十分条件は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(E_k) e^{-\sqrt{\lambda_D}k} < +\infty.$$

定理 3. $v(P)$ を $\Gamma_n(D)$ での正値優調和関数とする。

$$\inf_{P\in\Gamma_n(D)} \frac{v(P)}{K(P,+\infty)} = c$$

とおくとき、$+\infty$ で rarefied な集合 E で、$\Gamma_n(D) - E$ 上では $y \to +\infty$ につれて $v(P)e^{-\sqrt{\lambda_D}y}$ が $cf_D(X)$ に一様収束する、ものが存在する。

定理 4. $\Gamma_n(D)$ の部分集合 E が $+\infty$ で rarefied ならば、E は $+\infty$ で minimally thin である。とくに、$E \subset \Gamma_n(D')$ (D' の閉包 $\overline{D'} \subset D$) のときは、E が $+\infty$ で minimally thin であるならば、E は $+\infty$ で rarefied である。

参考文献

[1] J. Lelong-Ferrand: Étude des fonctions surharmoniques positives dans un cylindre ou dans un cône, C. R. Acad. Sci. Paris **229**(1949), 340-341.

[2] J. Lelong-Ferrand: Extension du théorème de Phragmén-Lindelöf-Heins aux fonctions sous-harmoniques dans un cône ou dans un cylindre, C. R. Acad. Sci. Paris **229**(1949),411-413.

[3] I. Miyamoto, H. Yoshida:Two criterions of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cone, preprint.

29　Kato 測度の Picard 次元による分類

中 井 三 留
多 田 俊 政　　大同工業大学

$\int_K N(x-y)\,d|\mu|(y)$ が連続

$\mathcal{K}$ を穴空き Euclid 空間 $\mathbb{R}_0^d := \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上の **Kato** 測度 μ, 即ち各コムパクト集合 $K \subset \mathbb{R}_0^d$ に対し, μ の全変分測度 $|\mu|$ の K への制限 $|\mu||K$ の対数 ($d=2$) 又は Newton ($d \geq 3$) ポテンシャルが連続となる一般符号 Radon 測度 μ, の全体とし, つぎに $\mathcal{D}$ を $\mathbb{R}_0^d$ の**許容領域** D, 即ち $D \cup \{0\}$ が $\mathbb{R}^d$ 内相対コムパクトな 0 の近傍となる領域 $D \subset \mathbb{R}_0^d$, の全体とする. 以下 D についての位相概念は $\mathbb{R}_0^d$ に相対的に考える. D 上の $\boldsymbol{\mu}$ **調和関数** u, 即ち定常 Schrödinger 方程式 $(-\Delta + \mu)u = 0$ の D 上の連続超関数解 u, の全体を ${}^{\mu}H(D)$ とし, 更にその関数 u が ∂D で零境界値をもつ, 即ち $\limsup_{x \to y} |u(x)|$ が, $y \in \partial D$ が非正則点のときは有限, 正則点のときは 0 となる, ものゝ全体を ${}^{\mu}H(D; \partial D)$ と記す. この元 u で D 上正値かつある固定点 $z \in D$ で $u(z) = 1$ となるものゝ全体の作る凸集合 ${}^{\mu}H(D; \partial D)_z^+$ の端点集合の濃度 $\dim(\mu, D)$ を μ の 0 に於ける D に関しての (相対)**Picard** 次元と呼ぶ:

$$\dim(\mu, D) := \text{card.}\left(\text{ex.}\left({}^{\mu}H(D; \partial D)_z^+\right)\right).$$

濃度の集合 $\Xi := \{\dim(\mu, D) : \mu \in \mathcal{K},\ D \in \mathcal{D}\}$ はすべての有限及び無限加算濃度と連続体濃度を含む (e.g. [2]). そこで $\mu \in \mathcal{K}$ を固定するとき, $\mathcal{R}(\mu) := \{\dim(\mu, D) : D \in \mathcal{D}\}$ とおく.

問題. 各固定した $\mu \in \mathcal{K}$ に対し, $\mathcal{R}(\mu)$ はどんな集合か?

を論ずる. 基本的知見として次の二つがある: D が十分小さい, 即ち $D \cup \{0\}$ が $\mathbb{R}^d$ の 0 のある一定近傍に入る, ならば $\dim(\mu, D)$ は一定値 $\dim \mu$, これを μ の 0 に於ける (絶対)**Picard** 次元と呼ぶ, となる (e.g. [3]); $\mathbb{R}_0^d$ 上 $\mu \geq 0$ ならば, すべての $D \in \mathcal{D}$ で $\dim(\mu, D)$ は一定値 $\dim \mu$ となる (e.g. [1]). 一般の $\mu \in \mathcal{K}$ に対しては, $\mathcal{R}(\mu)$ はかなり複雑な集合になり得るのではないかと思っていたが, 予想に反して結

果は次の如く極度に簡明である. $\mathcal{R}(\mu)$ が一元集合 $\{\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) となるとき μ は **type I**, 二元集合 $\{0,1\}$ となるとき μ は **type II**, 三元集合 $\{0,1,\xi\}$ ($\xi \in \Xi$, $\xi \geq 2$) となるとき μ は **type III** と言うことにする. そのとき次の結果を報告する:

定理. どの $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ も **type I, II, III** のいずれかであり, **3** タイプのいずれも起こる. 更に **type I** の $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}$, **type III** の $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}$ $(\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{2})$ を任意に与えて, そうなる $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ がみつかる.

証明の為に, 又それ自身の興味の為に, 特別の領域 $\Omega_a := \{0 < |x| < a\} \in \mathcal{D}$ $(0 < a < \infty)$ をとり, 写像 $a \mapsto \dim(\mu, \Omega_a)$ を研究する.

命題. 任意の $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ をとるとき, 次の **3** つの場合のいずれかが起る: $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega_a}) \equiv \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}$ $(\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{\infty})$ であるか; ある $\boldsymbol{a_0} \in (\mathbf{0}, \boldsymbol{\infty})$ が定まって $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega_a}) \equiv \mathbf{1}$ $(\mathbf{0} < \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{a_0})$, $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega_a}) \equiv \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{a_0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{\infty})$ となるか; ある $\boldsymbol{a_0}$ と $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}$ $(\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{2})$ が定まって, $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega_a}) \equiv \boldsymbol{\xi}$ $(\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{a_0})$, $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega_{a_0}}) = \mathbf{1}$, $\mathbf{dim}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega_a}) \equiv \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{a_0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{\infty})$ となるか, のいずれか **1** つである. 更に第一の場合の $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}$, 第二の場合の $\boldsymbol{a_0} \in (\mathbf{0}, \boldsymbol{\infty})$, 第三の場合の $\boldsymbol{a_0} \in (\mathbf{0}, \boldsymbol{\infty})$ と $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}$ $(\boldsymbol{\xi} \geq \mathbf{2})$ を任意に指定した $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ がみつかる.

参 照 文 献

[1] M. Nakai: *Picard principle for finite densities*, Nagoya Math. J., **70**(1978), 7–24.

[2] M. Nakai and T. Tada: *The distribution of Picard dimensions*, Kodai Math. J., **7**(1984), 1–15.

[3] M. Nakai and T. Tada: *Monotoneity and homogeneity of Picard dimensions for signed radial densities*, Hokkaido Math. J., **26**(1997), 253–296.

30

ホドグラフ変換とチューブ領域の境界上のチャーン・モーザー不変量

小泉 英介　　東北大学大学院
理学研究科

R^{n+1} 内の領域 Ω に対し, C^{n+1} 内の領域

$$T_\Omega := \{z = x + iy \in C^{n+1} |\ x \in \Omega,\ y \in R^{n+1}\}$$

を Ω 上のチューブ領域 (tube domain) という. 以下では, チューブ領域の境界上の Chern-Moser 不変量について考察する.

Yang はチューブ領域の境界について, 次の定理を得ている.

定理 1 ([4]) Ω を R^{n+1} 内の領域, T_Ω を Ω 上のチューブ領域とする. このとき, T_Ω の境界 ∂T_Ω の点 $w = u + iv$ で ∂T_Ω が球面状 (spherical, 局所的に球面と正則同値) であるための必要十分条件は, Ω の境界 $\partial\Omega$ が適当な affine 変換による座標変換の後, u の十分小さい近傍において $\partial\Omega = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{n+1} |\ x_0 - F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ により与えられることである. ここで F は,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = (\lambda_\alpha + \lambda_\beta)\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\frac{\partial F}{\partial x_\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n} C^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial x_\gamma} + \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n$$

をみたす C^ω 級関数であり, λ_α, λ_β, $C^\gamma_{\alpha\beta}$ は定数, また $C^\gamma_{\alpha\beta}$ はすべての添字について対称である.

Yang は, チューブ領域の境界上の Chern-Moser 不変量を直接計算することにより, この定理を示した.

Chern-Moser 不変量 ([1]) は, C^{n+1} 内の実超曲面のみならず, 一般の CR 多様体上の不変量として, 局所的な CR 同値問題に広く利用されている. しかし, 具体的に与えられた曲面に対し不変量を計算したという例は, 今までにほとんどない. これは, 不変量が定義関数の高階導関数を含む, 非常に複雑な式になるからであると思われる.

今回私は, 次に述べるホドグラフ変換を利用してチューブ領域の境界上の Chern-Moser 不変量を計算した.

U を R^n 内の開集合, $F : U \to \mathrm{R}$ を C^k 級関数 (k は ∞ または ω) とし, C^k 級写像

$$\phi_F : U \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto v = (v_1, \ldots, v_n) = \phi_F(x) \in \mathrm{R}^n$$

を

$$\phi_F(x) := \mathrm{grad}\, F(x)$$

により定義する. もし, $u_0 \in U$ において ϕ_F の Jacobian(F の Hessian) が 0 でなければ, 逆関数定理により u_0 の近傍において ϕ_F は C^k 級座標変換とみることができる. この $x \mapsto \phi_F(x)$ という変換を, ホドグラフ変換と呼ぶ.

中澤は, この変換を $n = 1$ の場合に,「$F''(x)$ を x の関数としてとらえるかわりに, $v = \phi_F(x)$ の関数 $p(v) = F''(x)$ としてとらえる」という設定の下に利用した. $\phi_F(x)$ は全単射かつ C^k 級だから, p は関数として well-defined でかつ C^k 級である. 中澤は [3] において, C^2 内の強擬凸な完全 Reinhardt 領域の Bergman 核の漸近展開について, この p を用いることで計算量を軽減し, 漸近展開をわかりやすく表示した.

私は [2] において, 2 次元の場合は [3] の方法をそのまま用いて, 3 次元以上の場合はこの方法を自然に拡張することにより, Chern-Moser 不変量を計算した. そして, 計算した不変量を解析することにより, 定理 1 の別証明を得た.

参考文献

[1] S. S. Chern and J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. 133 (1974), 219–271.

[2] E. Koizumi, *Hodograph transformation and Chern-Moser invariant on the boundary of tube domains*, in preparation.

[3] N. Nakazawa, *Asymtotic expansion of the Bergman kernel for strictly pseudoconvex complete Reinhardt domains in* C^2, Osaka. J. Math. 31 (1994), 291–329.

[4] P. Yang, *Automorphism of tube domains*, Amer. J. Math. 104 (1982), 1005–1024.

31

複雑な境界挙動をもつ単位球上の有界正則関数

松島 敏夫　石川工業高専

n 次元複素単位球 B_n 上の関数 $f(z)$ にたいして、半径にそって考えた収積値集合

$$\bigcap_{T<1} \overline{\{f(t\zeta) : T<t<1\}} \quad (\zeta \in \partial B_n)$$

を、ζ における radial cluster set という.

Th. $n \geqq 1$

$\forall \{\zeta_k\}_{k=1}^{m} \subset \partial B_n$, $m \leqq +\infty$,

$\zeta_j \neq \zeta_k \quad (j \neq k)$

にたいして、各 ζ_k における radial cluster set が（半径が正の）閉円板をふくむような B_n 上の有界正則関数が存在する.

M, K, L を正の定数とする. $z \in B_n$.

$$f_k(z) = \frac{M}{e^{\pi^2 K} + e^{\pi^2 L}} \Big[e^{-2\pi i K \log(1-\langle z,\zeta_k\rangle)} + e^{-2\pi i L \log(1-\langle z,\zeta_k\rangle)} \Big]$$ とする.

Lemma $K/L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ であるとき

(1) $f_k(z) \in H^\infty(B_n)$ $(\|f_k(z)\| \leqq M)$

(2) $f_k(z)$ の ζ_k における radial cluster set は、閉円板

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leqq \frac{2M}{e^{\pi^2 K} + e^{\pi^2 L}} \right\}$$

である。

これを用いると、

$m < +\infty$ の場合 $\displaystyle \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f_k(z)$

$m = +\infty$ の場合 $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} a_k f_k(z)$

($\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ は、正数列であって $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$ をみたすもの)

が定理に述べられている関数であることが示される。

32 複素 Lie 群上の強 q-擬凸な多重劣調和関数の積分平均

風間英明　九州大学数理学研究院
Dea Kyu Kim　Chonbuk National University
Chunyoung Oh　Yosu National University

次の定理が成り立つことを証明しようと試みてきた(1998 年えびの高原でのサマ-セミナ-での講演等)。以前の証明方法では最終的な詰めの段階で証明に欠陥があり、完成出来なかったが、ICU の森本光生先生と 九大数理の幸崎秀樹先生より、証明のための重要なアイデアをいただき、完全な証明を得たので報告する。これは、以前の結果 [1], [2] や、竹内 茂氏の結果 [3] を拡張した定理となる。

Theorem (Nagoya Math. J. 157(2000), 47-57) *Let G be a complex Lie group, K a maximal compact subgroup of G. Put $q := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{k}$. Then there exists a C^∞ function $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ such that*

1. *φ is plurisubharmonic and strongly $(q+1)$ -pseudoconvex on G in the sense of Andreotti and Grauert,*
2. *φ is an exhaustion function on G, i.e., for any $c \in \mathbb{R}$,*
$$\{x \in G | \varphi(x) < c\} \subset\subset G,$$
3. *φ is K-invariant, that is,*
$$\varphi(x) = \varphi(yxz)$$
for any $x \in G, y, z \in K$.

[1] H. Kazama, On pseudoconvexity of complex abelian Lie groups, J. Math. Soc. Japan 25(1973), 329-333.
[2] H. Kazama, On pseudoconvexity of complex Lie groups, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 27(1973), 241-247.
[3] S. Takeuchi, On completeness of holomorphic principal bundles, Nagoya Math. J., 57(1974), 121-138.

33 A_p補間多様体の定義関数の個数について

大内　重樹　　（東京工業大学理工学研究科）

p を $\mathbb{C}^n$ 上の非負値多重劣調和関数とするとき,

(1) $\log(1+|z|^2) = O(p(z))$

(2) 正定数 C_0, D_0が存在し,

$$|z-\zeta| \le 1 \Rightarrow p(z) \le C_0 \exp(D_0 p(\zeta))$$

が成立する.

をみたすものを, **weight** と呼ぶ. 以降, p は weight であると仮定する.

$V \subset \mathbb{C}^n$を解析的部分集合あるいは開部分集合とする. 正定数 A, B が任意の $z \in V$に対し

$$|f(z)| \le A \exp(Bp(z))$$

をみたすようにとれるような V上の正則関数 fのなす空間を $A_p(V)$ とかく. $\mathcal{O}(V)$ を V上の正則関数のなす環とすると, $A_p(V)$ が $\mathcal{O}(V)$ の部分環になるのは明らか. そこで, $A_p(\mathbb{C}^n)$ を **Hörmander algebra** と呼ぶことがある.

$X \subset \mathbb{C}^n$を解析的部分集合とする. このとき, 制限写像 $\rho_X : A(\mathbb{C}^n) \to A(X)$ を$\rho_X(f) = f|_X$により定義すると, ρ_Xは全射になる. また, 定義より明らかに$\rho_X(A_p(\mathbb{C}^n)) \subset A_p(X)$ となる. そこで, $\rho_X(A_p(\mathbb{C}^n)) = A_p(X)$ をみたすとき, Xは $A_p(\mathbb{C}^n)$ **に関する補間多様体**であるという. A_p**補間問題**とは, 与えられた解析的部分集合 $X \subset \mathbb{C}^n$が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関する補間多様体となるための条件を見つける問題である.

2 年半前のこの場で Xが「可算個の複素アフィン部分空間の非交和」の場合[O] についての結果を発表した. X_νを $\mathbb{C}^n$内の余次元 k_νの複素アフィン部分空間とし, $\nu \neq \nu'$ならば, $X_\nu \cap X_{\nu'} = \emptyset$ とする. このとき, $\nu \in \mathbb{N}$ に対し $N_\nu = \{v \in \mathbb{C}^n : \langle v, x-y\rangle = 0 \ (\forall x, y \in X_\nu)\}$ とおき, $S_\nu = N_\nu \cap S^{2n-1}$とおく. ただし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は$\mathbb{C}^n$上の標準内積である. また, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, $u \in S^{2n-1}$に対し

$$D_u f = \frac{\partial f}{\partial z_1}\cdot u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\cdot u_n$$

は, f の u 方向に沿った方向微分である.

定理 ([O]). $X=\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}}X_\nu$ が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的であるための必要十分条件は, m 個の整関数 $f_1,\ldots,f_m\in A_p$ $(m\geq\sup_{\nu\in\mathbb{N}}k_\nu)$ と正定数 ε, C が存在して

(1) $X\subset\{z\in\mathbb{C}^n:f_1(z)=\cdots=f_m(z)=0\}$
(2) 任意の $\nu\in\mathbb{N}$, $\zeta\in X_\nu$, $u\in S_\nu$ に対し

$$\sum_{j=1}^{m}|D_uf_j(\zeta)|\geq\varepsilon\exp(-Cp(\zeta))$$

が成立することである.

特に, X が $A_p(\mathbb{C}^n)$ に関して補間的であるとき, $\sup_{\nu\in\mathbb{N}}k_\nu$ 個の $A_p(\mathbb{C}^n)$ 関数で (1), (2) を実現させることができることも証明される.

そこで今回は, $\boxed{\sup_{\nu\in\mathbb{N}}k_\nu+1}$ 個の $A_p(\mathbb{C}^n)$ 関数を, <u>(1) が等号で成立し</u>, (2) も同時に成立するようにとれることを示す. 最後に, この $\boxed{\sup_{\nu\in\mathbb{N}}k_\nu+1}$ が最良であることを例を用いて示す.

References

[O] S. Oh'uchi, *Disjoint unions of complex affine subspaces interpolating for A_p*, Forum Math. **11** (1999), 369–384.

34 Algebraic Dependence of Holomorphic Mappings into Smooth Elliptic Curves

YOSHIHIRO AIHARA

Numazu College of Technology
3600 Ooka, Numazu, Sizuoka 410-8501, Japan
E-mail address:aihara@la.numazu-ct.ac.jp

Let $\pi : X \to \mathbb{C}^m$ be a finite analytic covering space and denote by s_0 its sheet number. Let D be an effective divisor on X. If $D = \sum_j \nu_j D'_j$ for distinct irreducible hypersurfaces D'_j in X and for nonnegative integers ν_j, then we define the support of D with order at most k by

$$\operatorname{Supp}_k D = \bigcup_{0<\nu_j\leq k} D'_j.$$

Let E be a smooth elliptic curve. We denote by $[p]$ the point bundle determined by $p \in E$. Let $F_1 = F_2 = [p]$. Let $f,\ g : X \to E$ be nonconstant holomorphic mappings. We denote by $\operatorname{End}(E)$ the ring of endomorphisms of E. If E has no complex multiplication, it is well-known that $\operatorname{End}(E) \cong \mathbb{Z}$. Hence $\varphi(x) = nx$ for some integer n.

Now, we give conditions which yield $g = \varphi(f)$ for some $\varphi \in \operatorname{End}(E)$. To this end, we first remark that the number of the totally ramified value for nonconstant holomorphic mappings $f : X \to E$ is at most $8s_0 - 8$. Let $\varphi \in \operatorname{End}(E)$ and consider a curve

$$\tilde{S} = \{(x,\ y) \in E \times E;\ y = \varphi(x)\}$$

in $E \times E$. Let $[\tilde{S}]$ be the line bundle determined by $\tilde{S}$. Let $\tilde{\gamma}$ be the infimum of rational numbers such that $\gamma\tilde{F} \otimes [\tilde{S}]^{-1}$ is ample. Then we have the following theorem proved by T. Katsura: $\gamma \in \mathbb{Q}$

Theorem (Katsura). *Let $\tilde{\gamma}$ be as above. Then $\tilde{\gamma} = \deg\varphi + 1$. In particular, if $\varphi \in \operatorname{End}(E)$ is an endomorphism defined by $\varphi(x) = nx$ for an integer n, then $\tilde{\gamma} = n^2 + 1$.*

Note that, if E has no complex multiplication, we can give the value of $\tilde{\gamma}$ by direct calculation of Chern forms. This method is based on the existence of valence of correspondence and hence does not work in the case where E has complex multiplication.

Theorem 1. *Let* f, g *and* φ *be as above. Let* $D_1 = \{a_1, \cdots, a_d\}$ *be a set of* d *points and* φ *a endomorphism of* E. *Set* $D_2 = \varphi(D_1)$. *Assume that the number of points in* D_2 *is also d. Suppose that* $\mathrm{Supp}_k\, f^*D_1 = \mathrm{Supp}_k\, g^*D_2$ *for some* k. *If* $d > 2(\deg\varphi + 1) + 8(s_0 - 1)(1 + k^{-1})$, *then* $g = \varphi(f)$.

Note that $\mathrm{Supp}_1\, f^*D_1$ is not empty under the condition in Theorem 1. In the above theorem, we assume that the cardinality $\sharp D_2$ of the point set D_2 equals d. However, it may happen that $\sharp D_2 < d$. For example, if $\varphi(x) = nx$ $(n \in \mathbb{Z})$ and there exists at least one pair (i, j) such that $a_i - a_j$ is n-torsion point, then $\sharp D_2 < d$.

Theorem 2. *Let* f, $g : \mathbb{C}^m \to E$ *be nonconstant holomorphic mappings. Let* $D_1 = \{a_1, \cdots, a_d\}$ *be a set of* d *points and* $\varphi \in \mathrm{End}(E)$. *Set* $D_2 = \varphi(D_1)$. *Assume that the number of points in* D_2 *is* d'. *Suppose that* $\mathrm{Supp}_1\, f^*D_1 = \mathrm{Supp}_1\, g^*D_2$. *If* $dd' > (d + d')(\deg\varphi + 1)$, *then* $g = \varphi(f)$.

Corollary 3. *Let* f, g *and* X *be as in Theorem* 5.1. *Let* $D_1 = \{a_1, \cdots, a_d\}$ *be a set of* d *points and set* $D_2 = \{na_1, \cdots, na_d\}$ *for some integer* n. *Assume that the number of points in* D_2 *is* d'. *Suppose that* $\mathrm{Supp}_1\, f^*D_1 = \mathrm{Supp}_1\, g^*D_2$. *If* $dd' > (d+d')(n^2+1)$, *then* $g = nf$.

In the case where $X = \mathbb{C}$, $\mathrm{Supp}\, f^*D_1 = \mathrm{Supp}\, g^*D_2$ and E has no complex multiplication, we have Drouilhet's theorem (Illinois J. Math. **26** (1982)). ~~He gave an example showing his result is sharp.~~

Theorem 4. *Let* $a_1, \cdots, a_d$ *be distinct points in* E. *Let* f, $g : X \to E$ *be nonconstant holomorphic mappings. Suppose that* $\mathrm{Supp}_k\, f^*a_j = \mathrm{Supp}_k\, g^*a_j$ *for all* j *and for some* k. *If* $d > 8s_0 - 4 + 8k^{-1}(s_0 - 1)$, *then* f *and* g *are identical.*

In the case of $X = \mathbb{C}^m$, we have the following:

Theorem 5. *Let* $a_1, \cdots, a_d$ *be distinct points in* E. *Let* f, $g : \mathbb{C}^m \to E$ *be nonconstant holomorphic mappings. Suppose that* $\mathrm{Supp}_1\, f^*a_j = \mathrm{Supp}_1\, g^*a_j$ *for all* j. *If* $d \geq 5$, *then* f *and* g *are identical.*

Theorem 5 improves the unicity theorem due to E. M. Schmid (Math. Z. **120** (1971)).

Remark. If we choose special points of E, we obtain an example which yields that Theorem 5 is sharp. Indeed, let $a_1, \cdots, a_4$ be two-torsion points in E and let $\wp$ be the Weierstrass $\wp$ function. If $f_1^*a_j = f_2^*a_j$ for $j = 1, \cdots, 4$, it is easy to see that $\wp \circ f_1 = \wp \circ f_2$ by Nevanlinna's four points theorem. Hence $f_1 = f_2$ or $f_1 = -f_2$. Since $p \mapsto -p$ $(p \in E)$ is an automorphism of E, it is acceptable that f_1 and f_2 are essentially identical. In the case of meromorphic mappings $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, the following unicity theorem is well-known: Let f, $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ be nonconstant holomorphic mappings. Suppose that $\mathrm{Supp}_1\, f^*a_j = \mathrm{Supp}_1\, g^*a_j$ for all j. If $d \geq 7$, then f and g are identical. Note that this result is sharp.

35　準アーベル多様体の周期行列について

梅野高司　九州産業大学工学部

Γ を $\boldsymbol{C}^n$ の離散加群で $\boldsymbol{R}$ 上一次独立な $n+q$ 個の元 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+q}\}$ $(1 \leq q < n)$ で生成されているとする. 複素リー群 $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ が $H^0(\boldsymbol{C}^n/\Gamma, \mathcal{O}) = \boldsymbol{C}$ となるときトロイダル群という. 行列 $\Omega = [\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+q}]$ を $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ の周期行列という. $\boldsymbol{R}_\Gamma$ を Γ で生成された $\boldsymbol{C}^n$ の実部分空間とし, $\boldsymbol{C}_\Gamma := \boldsymbol{R}_\Gamma \cap \sqrt{-1}\boldsymbol{R}_\Gamma$ を $\boldsymbol{R}_\Gamma$ の最大複素部分空間とする. 適当な座標変換によって $\Omega = [e_1, \ldots, e_n, v_1, \ldots, v_q]$ という形にしておく. ここで $e_1, \cdots, e_n$ は $\boldsymbol{C}^n$ の複素基底であり, $\mathrm{Im} v_1, \ldots, \mathrm{Im} v_q$ は $\boldsymbol{R}$ 上一次独立である.

定義. トロイダル群 $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ が準アーベル多様体とは次の性質を満たす $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^n$ 上の Hermitian form H が存在することである.

(1)　$H > 0$ on $\boldsymbol{C}_\Gamma \times \boldsymbol{C}_\Gamma$ であり

(2)　$E = \mathrm{Im} H|\Gamma \times \Gamma$ は整数値交代形式である.

すると, 次の定理を得る.

定理 1.　周期行列を $\Omega = [e_1, \ldots, e_n, v_1, \ldots, v_q]$ とするトロイダル群 $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ が準アーベル多様体となるための必要十分条件は, 次の性質を持つ $\Gamma \times \Gamma$ 上の整数値交代形式 E が存在することである:

(1)　${}^tVE_1V + {}^tE_2V - {}^tVE_2 + E_3 = 0$　および

(2)　$\dfrac{\sqrt{-1}}{2}({}^t\overline{V}E_1V + {}^tE_2V - {}^t\overline{V}E_2 + E_3) > 0$,

ここで $V = [v_1, \cdots, v_q]$ であり, $E = [E_{ij}] = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ -{}^tE_2 & E_3 \end{bmatrix}$,

$E_1 = [E(e_i, e_j)] \in \boldsymbol{Z}^{n \times n}$, $E_2 = [E(e_i, v_j)] \in \boldsymbol{Z}^{n \times q}$, $E_3 = [E(v_i, v_j)] \in \boldsymbol{Z}^{q \times q}$ である.

定義より $E = \mathrm{Im} H|\Gamma \times \Gamma$ の rank は少なくとも $2q$ である. このとき次の定理を得る.

ここまで 午前

定理 2. $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ を準アーベル多様体, H を Hermitian form , $E = \mathrm{Im}H|\Gamma\times\Gamma$ とする. $\mathrm{rank}E = 2q$ とすると次を満足する $\boldsymbol{C}^n$ の複素基底 $e_1, \cdots, e_n$ と Γ の基底 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+q}$ が存在する.

(1) $\lambda_i = \delta_i e_i$ となる正整数 δ_i $(1 \leq i \leq q)$ があり,

$\lambda_j = e_j$ $(q+1 \leq j \leq n)$ である.

(2) $V := \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{n+q}]$, $V_1 \in \boldsymbol{C}^{q\times q}$ とするとき V_1 は正則な対称行列であり $\mathrm{Im}V_1$ は正定値対称行列である.

これから次の定理 ([1]) を得る.

定理 3. $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ を準アーベル多様体, H を Hermitian form , $E = \mathrm{Im}H|\Gamma\times\Gamma$ とする. $\mathrm{rank}E = 2m$ とすると $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ は m 次元アーベル多様体上の $\boldsymbol{C}^s \times \boldsymbol{C}^{*n-q}$ をファイバーとするファイバーバンドルと正則同型である.

−2λ

References

[1] A. Andreotti and F.Gherardelli: Some remarks on quasi-abelian manifolds, Global analysis and its applications, Intern. Atomic. Energy Agency, Vienna, vol. II, pp.203–206 (1974)

[2] T.Umeno: De Rham cohomology of toroidal groups and Chern classes of the complex line bundles, Pusan Kyŏngnam Math.J. **9**, pp. 295–311 (1993)

14:15〜

36

複素3次元超曲面上の純楕円型特異点の定義多項式について

筑波大学 数学研究科　藤澤 敦子

0. 導入

非退化な多項式により定義された複素３次元超曲面上の純楕円型特異点を扱う．複素3次元超曲面上の純楕円型特異点には，$(0,0)$ タイプ，$(0,1)$ タイプ，$(0,2)$ タイプがある事が知られている．ここでは，複素３次元超曲面上の純楕円型特異点を与える定義多項式を明らかにすることが目的である．そこで，同じタイプの純楕円型特異点を与える定義多項式の間に”ウエイト同値”という同値関係を導入した．これは，$(0,2)$ タイプにおける９５通りへの分類の際に使われた概念の一般化にもなっている [Y]．この同値関係を使って得られた結果を報告する．

1. 定義多項式の基本多項式

多項式 $f(z) := \sum_m a_m z^m \in \boldsymbol{C}[z_0,\ldots,z_n]$，ただし，$z := z_0\cdots z_n$，$m := (m_0,\cdots,m_n) \in \boldsymbol{Z}^{n+1}_{\geq 0}$，$z^m := z_0^{m_0}\cdots z_n^{m_n}$ とおく．$\Gamma(f)$ を f のニュートン境界とする．$\Gamma(f)$ の面 Δ に対し，$f_\Delta(z) := \sum_{m\in\Delta} a_m z^m$ とする． 多項式 f が非退化であるとは，$\Gamma(f)$ の任意の面 Δ に対し，f_Δ が $(\boldsymbol{C}-\{0\})^{n+1}$ に特異点を持たないこととする． また，$\delta := (1,\cdots,1) \in \boldsymbol{C}^{n+1}$ とする． このとき一般に，非退化な多項式で定義された超曲面上の純楕円型特異点は，次のようにニュートン図形の言葉で表わすことができる．

定理 [W]． f を非退化な多項式とする．$X = \{f=0\}$ は原点 $x = 0 \in \boldsymbol{C}^{n+1}$ において孤立特異点を持つとする．そのとき，

(i) (X,x) が純楕円型である． $\Longleftrightarrow \delta \in \Gamma(f)$.

また，Δ_0 は δ を相対内部に含む $\Gamma(f)$ のコンパクト面とし，Δ_0 の次元を s とする．そのとき，

(ii) (X,x) は，もし $s>0$ ならば $(0,s-1)$ タイプであり，もし $s=0$ ならば $(0,0)$ タイプである．

ここでは，上のコンパクト面 Δ_0 に対応する多項式 f_{Δ_0} を”定義多項式 f の基本多項式”と呼ぶことにする．この基本多項式は，定義多項式のなかでも特異点を特徴づける項からなる荷重斉次多項式である．ところで，$(0,0)$ タイプの純楕円型特異点を与える定義多項式の基本多項式は，上の定理から適当な座標変換により一種類であることがわかる．従って，他のタイプに注目する．

2. ウエイト同値類

次にウエイト同値関係を定義する．$\mathcal{S}_{n+1}$ を $(n+1)$ 次対称群とする．$\mathcal{S}_{n+1}$ の元 σ に対し，$f(z)=\sum_m a_m z^m$ への σ の作用を次のように定義する．$\sigma(f(z)) := \sum_m a_m z^{\sigma(m)}$，但し $\sigma(m) := (\sigma(m_0),\cdots,\sigma(m_n))$．さらに，$f$ と g は $\boldsymbol{C}[z_0,\ldots,z_n]$ の元で次の条件を満たすとする：(i) ニュートン境界のコンパクト面でその相対内部に δ を含むものが存在する．(ii)(i) を満たすコンパクト面を各々 $\Delta_0(f)$, $\Delta_0(g)$ とおくと，$dim\Delta_0(f)=dim\Delta_0(g)=s$，$(2\leq s\leq n)$ ．

定義．f と g がウエイト同値であるとは，ある $\sigma\in\mathcal{S}_{n+1}$ が存在して $\Delta_0(f)$ と $\Delta_0(\sigma(g))$ が同じ s 次元空間上にあることである．

これは同値関係になるので，そのクラスを"ウエイト同値類"を呼ぶ．特に $(0,0)$ タイプ以外の純楕円型特異点を与える定義多項式とその基本多項式は上の条件を満たす．このとき，f と g がウエイト同値である"ことと"各々の対応する基本多項式がウエイト同値である"ことは同値になる．従って，定義多項式のウエイト同値類を求めるには，その基本多項式のウエイト同値類を求めればよい．このウエイト同値関係のもと次のことが示される．

3. 結果

定理１．複素３次元超曲面上の $(0,1)$ タイプの純楕円型特異点を与える非退化な定義多項式のウエイト同値類は２３個である．

定理２．複素３次元超曲面上の $(0,2)$ タイプの純楕円型特異点を与える非退化な定義多項式のウエイト同値類は９５個である．

また，複素２次元の場合にウエイト同値関係を応用すると，次のことが示される．

定理３．複素２次元超曲面上の $(0,1)$ タイプの純楕円型特異点を与える非退化な定義多項式のウエイト同値類は３個である．

本公演では，これらの基本多項式のウエイト同値類を具体的に紹介する．

参考文献

[W] K. Watanabe, On plurigenera of normal isolated singularities II, *Advanced Studies in Pure Math.* **8**, Complex Analytic Singularities (1986), 671–685.

[Y] T. Yonemura, Hypersurface simple K3 singularities, *Tohoku Math. J.*, **42** (1990), 351–380.

37 ON PLURIGENERA OF HYPERSURFACE PURELY ELLIPTIC SINGULARITIES

NAOHIRO KANESAKA
KIMIO WATANABE (UNIVERSITY OF TSUKUBA)

We will discuss the plurigenera $\{\gamma_m(X,x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ of nondegenerate hypersurface isolated singularities of dimension greater than or equal to two.

Proposition and Definition 1 (Knöller [3]). For a normal isolated Gorenstein singularity (X,x) and a positive integer m, $(\omega_X^{\otimes m})_x/(\pi_*\omega_{\widetilde{X}}^{\otimes m})_x$ is a finite dimensional vector space over $\mathbb{C}$, where $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ is a good resolution of the singularity (X,x) and ω_X (resp. $\omega_{\widetilde{X}}$) is the canonical sheaf on X (resp. $\widetilde{X}$).

The dimension of this vector space is independent of the choice of a resolution π and is denoted by $\gamma_m(X,x)$, that is

$$\gamma_m(X,x) := \dim_{\mathbb{C}}(\omega_X^{\otimes m})_x/(\pi_*\omega_{\widetilde{X}}^{\otimes m})_x.$$

On the other hand, we have another set of plurigenera $\{\delta_m(X,x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ for a normal Gorenstein isolated singularity (X,x) (see [5] for the definition). These give a different characterization of a singularity. A normal isolated singularity (X,x) with $\delta_m(X,x)=1$ for every m is called a *purely elliptic singularity.*

Our main results are as follows:

Let $(X,x) = (\mathbf{V}(f),O)$ be an r-dimensional hypersurface isolated singularity defined by a nondegenerate polynomial $f\in\mathbb{C}[z_0,z_1,\dots,z_r]$, where O is the origin of $\mathbb{C}^{r+1}$.

We regard the collection of the exponents of a monomial in $\mathbb{C}[z_0,z_1,\dots,z_r]$ as an element of $N=\mathbb{Z}^{r+1}$. Let $\{\ \mathbf{e}_i \mid i=0,1,\dots,r\ \}$ be the canonical basis of N and Σ be the fan consisting of all the faces of the cone $\sum_{i=0}^r \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_i$, and let $M=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z})$. Let $\Gamma_+(f)$ be the Newton diagram of f, $\Sigma(f)$ the dual fan in N of $\Gamma_+(f)$ and $\widehat{\Sigma}(f)$ be a nonsingular subdivision of $\Sigma(f)$. Denote by $\Sigma[1]$ (resp. $\widehat{\Sigma}(f)[1]$) the set of the primitive integral generators of the one-dimensional cones in Σ (resp. $\widehat{\Sigma}(f)$).

Definition 2. For each $m\in\mathbb{N}$, we define a subset $m\Delta_+(\widehat{\Sigma}(f))$ of $M\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ to be the set:

$$\{\ \mathbf{m}\in(\mathbb{R}_{\geq 0})^{r+1} \mid \langle\frac{1}{m}\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle \geq l(\mathbf{n}) - \langle\mathbf{1},\mathbf{n}\rangle + 1 \ for\ any\ \mathbf{n}\in\widehat{\Sigma}(f)[1]\setminus\Sigma[1]\ \},$$

where $\langle *,*\rangle$ denotes the canonical bilinear form on $M\times N$ and $l(\mathbf{n}) := \min\{\ \langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle \mid \mathbf{m}\in\Gamma_+(f)\ \}$, and define $m\Delta_-(\widehat{\Sigma}(f)) := (\mathbb{R}_{\geq 0})^{r+1}\setminus m\Delta_+(\widehat{\Sigma}(f))$.

1

Theorem 1. *Let (X, x) be a nondegenerate hypersurface isolated singularity of dimension greater than or equal to two. Then $\gamma_m(X, x)$ equals to the number:*

$$\sharp(m\Delta_-(\widehat{\Sigma}(f)) \cap M) - \sharp\{ \lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{r+1} \subset M \mid (\lambda + \Gamma_+(f)) \cap m\Delta_-(\widehat{\Sigma}(f)) \neq \emptyset \},$$

where $\sharp A$ denotes the cardinality of a set A

In [5], a formula to calculate $\delta_m(X, x)$ for a nondegenerate hypersurface isolated singularity (X, O) is already given. The above formula is inspired by this formula.

Definition 3 (Ishii [2]). For a polynomial $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_r]$, the set

$$C_1(f) := \{ \mathbf{n} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{r=1} \subset N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid l(\mathbf{n}) \geq \langle \mathbf{1}, \mathbf{n} \rangle \}$$

is a cone in $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ and called the *essential cone.*

In the following, let $(X, x) = (\mathbf{V}(f), O)$ be a purely elliptic singularity defined by a nondegenerate polynomial $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \dots, z_r]$. A criterion for judging whether (X, x) is a purely elliptic singularity can be presented as a condition of $\Gamma_+(f)$. See [5] for details.

In this case, $\widehat{\Sigma}(f)$ induces a nonsingular subdivision $\widehat{C}_1(f)$ of $C_1(f)$.

Proposition 2.

$$m\Delta_+(\widehat{\Sigma}(f)) = \{ \mathbf{m} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{r+1} \subset M \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle \geq m \text{ } for \text{ } any \text{ } \mathbf{n} \in \widehat{C}_1(f)[1] \}$$

holds, where $\widehat{C}_1(f)[1]$ is the set of the primitive integral generators of the one-dimensional cones in $\widehat{C}_1(f)$.

A primitive integral vector $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ in $C_1(f)$ is said to be *absolutely minimal* if for any element $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_r) \in C_1(f) \cap N$, $p_i \leq q_i$ holds for $i = 0, 1, \dots, r$.

Theorem 3. *If $C_1(f)$ has the absolutely minimal vector $\mathbf{p} \in N$, then we have*

$$\gamma_m(X, x) = \sharp(m\Delta_-(\mathbf{p}) \cap M) - \sharp((m - \deg \mathbf{p})\Delta_-(\mathbf{p}) \cap M),$$

where $k\Delta_-(\mathbf{p}) := \{ \mathbf{m} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{r+1} \mid \langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle < k \}$ for $k = m$ or $(m - \deg \mathbf{p})$, and $\deg \mathbf{p} := p_0 + p_1 + \cdots + p_r$.

References

[1] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[2] S. Ishii. The canonical modifications by weighted blowups. *J. Algebraic Geom.*, 5:783–799, 1996.

[3] F. W. Knöller. 2-dimensionale Singularitäten und Differentialformen. *Math. Ann.*, 206:205–213, 1973.

[4] T. Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry.* Number 3. Folge , Band 15 in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin , Heidelberg , New York , London , Paris , Tokyo, 1988.

[5] K. Watanabe. On plurigenera of normal isolated singularities II. In T.Suwa and P.Wagreich, editors, *Complex Analytic Singularities*, number 8 in Advanced Studies in Pure Math., pages 671– 685. Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986.

38 擬斉次孤立特異点に関する双対基底の計算

田島 慎一 (新潟大学工学部)　中村 弥生 (お茶の水女子大学大学院)

$X=\mathbb{C}^n$ に対し, $\mathcal{O}_X$ を X 上の正則関数の層とする. 与えられた擬斉次多項式 $f(z)$ に対して, $I=\langle f_1,\dots,f_n\rangle$, $f_j:=\partial f/\partial z_j$ とおく. 本講演では, グロタンディックの双対性によって与えられる局所環 $\mathcal{O}_X/I$ の双対基底を微分作用素を用いて具体的に計算する方法を与える.

key word: 擬斉次孤立特異点, 代数的局所コホモロジー類, グロタンディックの双対性

擬斉次多項式と代数的局所コホモロジー類

$f(z)$ を重み $w_1,\dots,w_n$, 擬次数 d_w の擬斉次多項式とする. $f(z)$ が次の微分方程式を満たすことはよく知られている.

$$\left(\sum_{j=1}^n w_j z_j\partial_j - d_w\right)f(z)=0,\ \partial_j:=\partial/\partial z_j.$$

$f_j:=\partial f/\partial z_j$ に対して, $[1/f_1\cdots f_n]\in\mathcal{H}^n_{[0]}(\mathcal{O}_X)$ を, 原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類とする. 微分作用素 P を $P=\sum_{j=1}^n w_jz_j\partial_j+(nd_w-\sum_{j=1}^n w_j)$ とおくと, 代数的局所コホモロジー類 $[1/f_1\cdots f_n]$ は次を満たす.

Lemma 1 $P[1/f_1\cdots f_n]=0$.

注: 微分作用素 ∂_j の重みを $-w_j$ とおくと, 微分作用素 P の擬次数は 0 となり, また, 代数的局所コホモロジー類の擬次数は $nd_w-\sum_{j=1}^n w_j$ となる.

$\mathcal{D}_X$ を微分作用素の層とする. $\mathcal{A}nn$ を $[1/f_1\cdots f_n]$ の annihilator からなる $\mathcal{D}_X$ のイデアルとする. n 次コホモロジー類について, 次が成り立つ.

Proposition 1 ([4])

$$\{\eta\in\mathcal{H}^n_{[0]}(\mathcal{O}_X)\mid R\eta=0,{}^\forall R\in\mathcal{A}nn\}=\left\{c\left[\frac{1}{f_1\cdots f_n}\right]\mid c\in\mathbb{C}\right\}.$$

さらに次が成り立つ.

Proposition 2 $\mathcal{A}nn=\langle P,f_1,\dots,f_n\rangle$.

これらの性質により, 次のようにしてコホモロジー類の表現を求めることができる.

Theorem 1 $\sigma\in\mathcal{H}^n_{[0]}(\mathcal{O}_X)$ を次を満たすコホモロジー類とする.

- $P\sigma=0,\ f_j\sigma=0,\ j=1,\dots,n,$
- $\dfrac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\sigma=\mu\left[\dfrac{1}{z_1\cdots z_n}\right]$, 但し, $\mu=\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X/I)$ はミルナー数.

このとき, $\sigma=[1/f_1\cdots f_n]$ である.

グロタンディックの双対性

$\{b_1,\dots,b_\mu\}$ を, 局所環 $\mathcal{O}_X/I$ の単項基底とする. $\{\eta_1,\dots,\eta_\mu\}$ を次で与えられるグロタンディックの双対性による $\{b_1,\dots,b_\mu\}$ の双対基底とする.

$$\mathcal{O}_X/I\times\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I,\mathcal{O}_X)\to\mathbb{C}.$$

このとき, 対応する b_i と η_i の擬次数について, 次が成り立つ.

Theorem 2 $\deg b_i + \deg \eta_i = nd_w - 2\sum_{j=1}^n w_j$, $i = 1, \ldots, \mu$.

計算アルゴリズム：次のようにして, 双対基底 $\{\eta_1, \ldots, \eta_\mu\}$ の表現を求めることができる.

- $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ を不定元とし, 各 $f_j(z)$ の Hefer 分解 $f_j(z) - f_j(\zeta) = \sum_{k=1}^n q_{jk}(z,\zeta)(z_k - \zeta_k)$ を計算する.
- $q(z,\zeta) = det(q_{jk}(z,\zeta))_{1\leq j,k\leq n}$ とおく.
- $\mathcal{O}_X/I$ の単項基底 $\{b_1(z), \ldots, b_\mu(z)\}$ を用いて, q を $q(z,\zeta) = \sum_{i=1}^\mu h_i(\zeta)b_i(z)$ mod I の形に書きなおす.
- $\eta_i = [h_i(z)/\prod_{j=1}^n f_j]$ とおく.

このとき $\{\eta_1, \ldots, \eta_\mu\}$ は $\{b_1, \ldots, b_\mu\}$ の双対基底となる. Theorem 1 により, 各 η_j の具体的表現を得ることができる.

注: この方法は半擬擬斉次多項式に対しても有効であり, 適当な微分作用素を与えることにより, 具体的表現を計算することができる.

Example 1 $f(z) = z_1^4 + z_1 z_2^2 + z_2 z_3^2$ は重み 4, 6, 5 に対して擬次数 16 をもつ擬斉次多項式であり, S_{11} 型特異点と呼ばれるものである. (添え字はミルナー数を表している.) イデアル $I = \langle 4z_1^3 + z_2^2, 2z_1z_2 + z_3^2, 2z_2z_3\rangle$ に対する辞書式順序 $z_1 \succ z_2 \succ z_3$ によるグレブナ基底を計算することにより, 局所環 $\mathcal{O}_X/I$ の単項基底は $b_1 = z_1^2 z_3$, $b_2 = z_1^2$, $b_3 = z_1 z_3^2$, $b_4 = z_1 z_3$, $b_5 = z_1$, $b_6 = z_2^3$, $b_7 = z_2^2$, $b_8 = z_2$, $b_9 = z_3^2$, $b_{10} = z_3$, $b_{11} = 1$ で与えられ, 擬次数は 13, 8, 14, 9, 4, 18, 12, 6, 10, 5, 0 となる. $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ を不定元とし, $f(z)$ の *Hefer* 分解を計算することにより, $q = (-8\zeta_1 z_1 - 8\zeta_1^2)z_3^2 + (-8\zeta_3 z_1^2 - 8\zeta_3\zeta_1 z_1 - 8\zeta_3\zeta_1^2)z_3 - 4z_2^3 - 4\zeta_2 z_2^2 - 4\zeta_2^2 z_2 - 8\zeta_3^2 z_1^2 - 8\zeta_3^2\zeta_1 z_1 - 4\zeta_2^3$ を得る. よって $h_1 = -8\zeta_3$, $h_2 = -8\zeta_3^2$, $h_3 = -8\zeta_1$, $h_4 = -8\zeta_3\zeta_1$, $h_5 = -8\zeta_3^2\zeta_1$, $h_6 = -4$, $h_7 = -4\zeta_2$, $h_8 = -4\zeta_2^2$, $h_9 = -8\zeta_1^2$, $h_{10} = -8\zeta_3\zeta_1^2$, $h_{11} = -4\zeta_2^3$ となる. 今, $P = 4z_1\partial_1 + 6z_2\partial_2 + 5z_3\partial_3 + 33$ とおくと, $[1/(4z_1^3 + z_2^2)(2z_1z_2 + z_3^2)(2z_2z_3)]$ の *annihilator* イデアルは, $\mathcal{A}nn = \langle P, 4z_1^3 + z_2^2, 2z_1z_2 + z_3^2, 2z_2z_3\rangle$ で与えられるから, 定理 1 により $\{b_1, \ldots, b_{11}\}$ に対する双対基底は

$$
\begin{aligned}
&\eta_1 = [\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^2}], && \eta_2 = [\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3}], && \eta_3 = [-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2^2 z_3} + \frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^3}],\\
&\eta_4 = [\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3^2}], && \eta_5 = [\frac{1}{z_1^2 z_2 z_3}], && \eta_6 = [-\frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2^2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2^4 z_3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1^3 z_2 z_3^3}],\\
&\eta_7 = [-\frac{1}{4}\frac{1}{z_1^4 z_2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2^3 z_3}], && \eta_8 = [\frac{1}{z_1 z_2^2 z_3}], && \eta_9 = [-\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^2 z_2^2 z_3} + \frac{1}{z_1 z_2 z_3^3}],\\
&\eta_{10} = [\frac{1}{z_1 z_2 z_3^2}], && \eta_{11} = [\frac{1}{z_1 z_2 z_3}]
\end{aligned}
$$

で与えられる.

References

[1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, Singularities of Differentiable Maps Volume *I*, Monographs in Mathematics Vol. 82, Birkhäuser, Boston, 1985.

[2] K. Saito, *Einfach-elliptische Singularitäten*, Invent. Math. **23** (1974), 289–325.

[3] S. Tajima and Y. Nakamura, *Residue calculus with differential operator*, Kyushu J. of Math. **54** (2000), 127–138.

[4] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional local residues and holonomic D-modules*, Sûrikaiseki Kenkyûshokôyûroku, RIMS Kyoto Univ. **1033** (1998), 59–70.

39　因子の外の整正則曲線と整数点集合の分布について

野口潤次郎　　東大・数理
Jörg Winkelmann　　Basel 大学

藤本 [Tohoku Math. J. '72], M. Green [Trans. A.M.S. '72] は，$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 内の整正則曲線 f が一般の位置にある $q > n$ 個の超平面 $\{H_j\}$ の外にあれば，その像は高々 $[n/(k - n)]$(Gauss) 次元の線形部分空間に含まれる事を証明した．従って，$q > 2n$ ならば，f は定写像となる．特にこのときは，$\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \cup_j H_j$ が $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ に双曲的に埋め込まれていることが知られている．

一方，代数体 K と全てのアルキメデス付値を含む付値の有限集合 S をとる．M. Ru-P.M. Wong [Invent. Math. '91] は，K 上で定義された $\{H_j\}_{j=1}^q$ をとり，$D = \sum H_j$ と置くとき，$\mathbf{P}_K^n \setminus D$ 内の (D, S)-整数点集合 (D を無限へ持っていった時の S-整数点集合) は高々$(2n + 1 - q)^+$ 次元の線形部分空間の有限和に含まれることを示した．従って，$q > 2n$ ならば，かかる任意の整数点集合は有限集合しかないことになる．これは，上述の藤本・Green の定理の Arithmetic(Diophantus) 版といえる．

ここでは，以前第一講演者 ([Hiroshima Math. J. '77, Nagoya Math. J. '81]) によて得られていた対数的 Bloch・落合の定理をケーラーの場合に拡張することを報告し，次に藤本・Green の定理とその Arithmetic(Diophantus) 版を一般の射影代数的多様体の場合に拡張する．

定理 1． M をコンパクトケーラー多様体，D をその超曲面とする．対数的不正則指数 $q(M \setminus D) > \dim M$ とする．このとき，任意の整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to M \setminus D$ は必ずザリスキー退化する．

証明は，飯高による準アルバネーゼ写像により準トーラス内 T に $M \setminus D$ を写し，そのザリスキー閉包を X とする．$\mathrm{St}(X) = \{a \in T; a + X = X\}^0$ とおくとき，T 及び X を $\mathrm{St}(X)$ で "割る" ことができるということを示し，代数的な場合に帰着する．

$D_i, 1 \leqq i \leqq l$, を M の超曲面とし，$\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\{c_1(D_i)\}_{i=1}^l$ で $\{c_1(D_i)\}_{i=1}^l$ が生成する Neron-Severi 群 $\mathrm{NS}(M)$ 内での部分群の $\mathbf{Z}$-階数とする．

定理 2． $W \subset M$ を部分空間で，ザリスキー非退化整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to W \setminus \bigcup_{D_i \not\supset W} D_i$ があるものとする．このとき，次が成立する．

(i) $\#\{W \cap D_i \neq W\} + q(W) \leqq \dim W + \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\{c_1(D_i)\}_{i=1}^l$:
(ii) 全ての D_i が豊 (ample) ならば.

$$l \leqq \dim M \left(1 + \frac{(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\{c_1(D_i)\}_{i=1}^l - q(W))^+}{\dim W}\right).$$

系 3.

(i) 全ての D_i が豊で，$l > m(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\, \mathrm{NS}(M) + 1)$ とする．すると，$M \setminus \bigcup_{i=1}^l D_i$ は完備双曲的で M に双曲的に埋め込まれている．
(ii) $f : \mathbf{C} \to M$ が，一般の位置にある l 個の豊超曲面を除くとする．$f(\mathbf{C})$ のザリスキー閉包を W とし，$l > m$ とすると，

$$\dim W \leqq \frac{m}{l-m} \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\, \mathrm{NS}(M).$$

特に，$M = \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ ならば，$\dim W \leqq \frac{m}{l-m}$.

整数点集合については，上述の M や D_i が全て，ある代数体 K 上定義されている射影的代数的多様体する．以下 $\{D_i\}_{i=1}^l$ は一般の位置にあり，豊とする．K の全てのアルキメデス付値を含む付値の有限集合 S をとる．

定理 4. $W \subset M$ を代数部分多様体でザリスキー稠密な $(\sum_{D_i \not\supset W} D_i \cap W, S)$-整数点集合を含むとする．すると，

$$l \leqq \dim V \left(1 + \frac{(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\{c_1(D_i)\}_{i=1}^l - q(W))^+}{\dim W}\right).$$

系 5.

(i) $l > m(\mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\, \mathrm{NS}(V) + 1)$ ならば，任意の $(\sum_{i=1}^l D_i, S)$-整数点集合は，有限である．
(ii) $l > m$ とする．任意の (D, S)-整数点集合は，代数的部分集合 W に含まれ，その次元は

$$\dim W \leqq \frac{m}{l-m} \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}}\, \mathrm{NS}(V).$$

特に，$M = \mathbf{P}_K^m$ ならば，$\dim W \leqq \frac{m}{l-m}$.

証明では，対数的 Bloch-落合の定理の数論版である，Faltings の定理を準アーベル多様体に拡張した P. Vojta [Amer. Math. J. '99] による定理を使う．

Junjiro Noguchi and Jörg Winkelmann, Holomorphic curves and integral points off divisors, pp. 18, preprint UTMS 99-6, math/9902014, 1999.

40

準アーベル多様体内の整正則曲線の第二主要定理

野口潤次郎 東大・数理
Jörg Winkelmann Basel 大学
山ノ井克俊 京大・数理研

S. Lang ('66) による，アーベル多様体 A 内の（解析的）1-パラメーター部分群 ϕ は，必ず豊因子 D と交わか?，という問いに J. Ax [Amer. J. Math. '72] は，肯定的解決を与え，さらにその交点数の増大度が，

$$n(r, \phi^* D) \sim r^2 \quad (\Leftrightarrow N(r, \phi^* D) \sim r^2) \tag{1}$$

であることを証明した．

P.A. Griffiths [Bull. A.M.S. '72] は，更に問題を一般化し整正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A \setminus D$ は定写像に限ることを予想した．これは，Y.-T. Siu-S.-K. Yeung [Math. Ann. '96] により解決され，少々異なる方法で第一講演者 [Math. Z. '88] により準アーベル多様体の場合も含めて解決された：すなわち，準アーベル部分多様体の平行移動 Z で，$Z \supset f(\mathbf{C})$ かつ $Z \cap D = \emptyset$ となるものが存在する．

ここでは，このような $f : \mathbf{C} \to A$ と D の交点について Nevanlinna の第二主要定理が証明できたことを報告する．以下，M を準トーラスとする：$0 \to (\mathbf{C}^*)^p \to M \xrightarrow{\eta} M_0 \to 0$，ここで，$M_0$ は普通のコンパクト複素トーラスである．M_0 がアーベル多様体の時，M は準アーベル多様体と呼ばれる．ファイバーのコンパクト化 $(\mathbf{C}^*)^p \subset (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^p$ を使って，M のコンパクト化 $\bar{M}$ を考え，境界 $\partial M = \cup_{j=1}^{p} B_j$ を丁度 j 個の境界成分が交わる点の集合 B_j に分解する．M 内の因子 D で，位相閉包 $\bar{D}$ が $\bar{M}$ の因子になるものを考える．次の境界条件 (BC) を考える．

(BC) $\bar{D}$ は，B_p のいかなる既約成分も含まない．

主定理． $f : \mathbf{C} \to M$ をザリスキー非退化な整正則曲線とする．D は，境界条件 (BC) を充たす因子とすると，次が成立する．

(i) f が有限位数 $\rho_f < \infty$ のとき，ある番号 $k_0 = k_0(\rho_f, D)$ が存在して，

$$T_f(r; c_1(\bar{D})) = N_{k_0}(r; f^* D) + O(\log r).$$

(ii) 無限位数 $\rho_f = \infty$ のとき，ある番号 $k_0 = k_0(f, D)$ が存在して

$$T_f(r; c_1(\bar{D})) = N_{k_0}(r; f^*D) + O(\log T_f(r; c_1(\bar{D}))) + O(\log r)||_E.$$

特に，欠如指数は，消える：$\delta(f; \bar{D}) = \delta_{k_0}(f; \bar{D}) = 0$.

証明は，まず $\mathrm{St}(D)$ で割れることを示し，$\mathrm{St}(D) = \{0\}$ の場合に帰着する．$J_k(\bar{A}; \log \partial A)$ を対数的 k-階ジェット空間とする ([N'86])．A の平坦構造から，$J_k(\bar{A}; \log \partial A) \cong \bar{A} \times \mathbf{C}^{nk} \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{C}^{nk}$. f のジェット持ち上げ像 $J_k f(\mathbf{C})$ のザリスキー閉包を X_k とし，$W_k = \pi_2(X_k)$ とおく．次の補題が本質的である．

補題 1． (i) $\rho_f < \infty$ ならば，$\exists k_0 = k_0(\rho_f, D)$，次が成立：

$$\pi_2(J_k(\bar{D}; \log \partial A)) \cap W_k = \emptyset, \quad k \geqq k_0.$$

(ii) $\rho_f = \infty$ ならば，$\exists k_0 = k_0(f, D)$, 次が成立：

$$\pi_2(J_k(\bar{D}; \log \partial A)) \cap W_k \neq W_k, \quad k \geqq k_0.$$

これと対数 1-型式に関する対数微分の補題 ([N'77]) を使うと，

補題 2． $m_f(r; D) = O(\log r) + O(\log T_f(r))||$.

これとその証明から，主定理が従う．条件 (BC) は，必須である：

注． (1) D が (BC) を充たさなければ，常に $\delta(f; \bar{D}) > 0$ となる，f が存在する．

(2) ある A と D の例で，ザリスキー非退化な $f_\nu : \mathbf{C} \to A$ の列で，$\delta(f_\nu; D) \to 1$ となるものがある．

応用として，次の定理を得る．

定理 1． A をアーベル多様体とし，双曲的超曲面 D をとる．d_0 で，D と 1-パラメーター部分群の平行移動が接する位数の最大を表す．$X \to A$ を分岐被覆空間で，D 上の分岐位数が $d_0 + 1$ 以上とする．このとき，X は双曲的である．

定理 2． A をアーベル多様体とする．$\phi : \mathbf{C} \to A$ を 1-パラメーター部分群とし，$D \not\supset \phi(\mathbf{C})$ を A 上の非負因子で，そのリーマン型式を $H(\cdot, \cdot)$ とする．このとき，次が成立する (cf. 1):

$$N(r; \phi^* D) = H(\phi'(0), \phi'(0))\pi r^2 + O(\log r).$$

J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, preprint UTMS 99-??, math/9912086, 1999.

特別講演

NEVANLINNA の対数微分の補題の代数幾何的定式化とその応用

山ノ井 克俊（京都大学数理解析研究所）

1節　本講演では高次元 Nevanlinna 理論について“対数微分の補題の代数幾何的定式化”という視点からお話しする予定です。対数微分の補題というのは R.Nevanlinna がこの理論を始めた頃から、値分布論において非常に重要な役割を果たしてきたもので、もともとは複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に関する評価式として始まりました。それはごく大雑把に言うと「$\mathbb{C}$ 上の有理型関数の対数微分に関するある量（接近関数と呼ばれる量）は非常に小さい」という主張です。この結果はその後、A.L.Vitter によって $\mathbb{C}^m$ 上の有理型関数、野口潤次郎先生によって $\mathbb{C}^m$ の有限分岐被覆空間上の有理型関数に関する結果として定義域の高次元化、一般化が行なわれています。それに対して表題の“対数微分の補題の代数幾何的定式化”では値域の高次元化を行ないます。有理型関数というのは値域として射影直線 $\mathbb{P}^1$ を考えたときの有理型写像なので、より一般の射影多様体への有理型写像に対する対数微分の補題にあたるものを考えたいわけです。その際、どのような定式化をすればよいか？ あるいはどのような定式化が可能なのか？ は非自明な問題ですが、この講演で考えるのは小林亮一先生によって積分幾何的な手法で導かれた評価式です。（他にも例えば野口先生による対数的極を持つ微分形式を使うものもあります。）

Nevanlinna 理論において一つの重要な問題はいわゆる第二主要定理を高次元化することとです。実際、古典的な一変数 Nevanlinna 理論においては（あるいはもっと広く一変数関数論においても？）第二主要定理の果たす役割は重大で、また高次元版として考えられている予想も射影代数多様体の関数論的性質（例えば種々の双曲性）を考える上で重要な役割を果たすと考え

られます。
ところで、射影代数多様体のこのような関数論的性質は実際にはその多様体の代数幾何的性質によって制限されていると期待されています。従って関数論的性質を代数幾何的に取り扱う枠組が欲しくなります。そのようなものとしてはすでに Green-Griffiths らによる“負曲率ジェット計量の方法”と呼ばれているものがあります。本講演では“対数微分の補題の代数幾何的定式化”を使って、“負曲率ジェット計量の方法”の枠組を一般化する枠組を考察して、その枠組がうまく既存の第二主要定理を導くこと、また新しい欠如指数関係式が得られる場合もあること、などをお話しする予定です。

2節　この講演では Nevanlinna 理論の知識は仮定しないつもりですが、せっかくなのでこの場を借りてごく簡単な紹介をします。おそらく Nevanlinna 理論の源流は例えば「$\mathbb{C}$ 上の非定値な整関数は二つの値を除外出来ない」という有名な Picard の定理にあると言えると思います。Nevanlinna 理論ではより定量的な方法論でこのような正則写像の値分布の問題を研究し、上記 Picard の定理の定量的精密化として $\mathbb{C}$ 上の有理型関数の第二主要定理があります。

ここでは、より現代的な視点で次のような設定を考えます。まず、$Y \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^m$ をアフィン空間 $\mathbb{C}^m$ の有限分岐被覆解析空間とします（複雑な設定が嫌な方は以後、Y は複素平面 $\mathbb{C}$ と考えても差し支えありません）。X を滑らかな射影代数多様体で $D \subset X$ をその因子とします。いま、問題にしたいのは Y から X への有理型写像 $f : Y \dashrightarrow X$ の値分布で、f の像と D の交わりなどです。ここでは Y や f が超越的な場合が主な関心の対象なので代数幾何的な交差理論では扱えない問題になっています。
まず f と D の交差の大きさを測るために、三種類の基本関数 $N_{f,D}(r)$、$m_{f,D}(r)$、$T_{f,D}(r)$ を考えます。それぞれ個数関数、接近関数、高さ関数と呼ばれる正の実数 r の関数です。（講演ではこれらの定義もする予定ですが、多少複雑になるのでここでは省略します。）これらの関数について一言補足すると、$N_{f,D}(r)$ は半径 r の超球（の Y への引き戻し）の f によ

る像と D の位相的な交差から決まる量でそれらが「たくさん」交わっていれば $r \to \infty$ で $N_{f,D}(r)$ も大きな増大度をもちます（f の像と D が交わっていなければ $N_{f,D}(r) = 0$）。$m_{f,D}(r)$ は半径 r の超球面（の Y への引き戻し）の f による像と D の接近度から決まる量で、それらが大きく接近していれば $r \to \infty$ で $m_{f,D}(r)$ は大きな増大度をもちます。接近関数の役割を非コンパクトな交差理論、という観点から説明すると、$f(Y)$ は非コンパクトなため $f(Y)$ と D の位相的な交差を考えるだけでは正しく交差数を数えたことになりません。そこで $f(Y)$ をコンパクト化するために、接近度というものを考える必要が出てきます。いまそれを加えて高さ関数を $T_{f,D}(r) = N_{f,D}(r) + m_{f,D}(r)$ で定義すると正しい交差理論が得られる、というのが第一主要定理で Nevanlinna に始まり Stoll、Griffiths らの研究を経て確立されました。

<u>第一主要定理</u>. X の因子 D と D' が線形同値ならば $T_{f,D}(r) = T_{f,D'}(r) + O(1)$ となる。ここで $O(1)$ は r の関数として有界な項を表す。

一方、Nevanlinna 理論においては第二主要定理が有理型写像の値分布に関する深い情報を含んでいると思われます。これに関しては、まだ十分な高次元化は行なわれていませんが、次のような形が予想されていて、いくつかの重要な場合には実際証明されています。

<u>第二主要定理（予想）</u>. f が適当な意味で非退化ならば

$$m_{f,D}(r) + T_{f,K_X}(r) \leq O(N_{\mathrm{Ram}\,Y/\mathbb{C}^m}(r)) + (Small\ term)$$

ここで K_X は X の標準因子。（項 $N_{\mathrm{Ram}\,Y/\mathbb{C}^m}(r)$ は Y の分岐の大きさを測る関数で、例えば $Y = \mathbb{C}^m$ なら $N_{\mathrm{Ram}\,Y/\mathbb{C}^m}(r) = 0$ 。）

この予想は非常に強い予想で、例えば標準因子 K_X が豊富だったりすると、非退化な f が存在するためには Y が非常に激しく分岐していなければならないことが従います。また、非退化な f が存在する場合には接近関数 $m_{f,D}(r)$ を上から評価することで、第一主要定理により個数関数 $N_{f,D}(r)$

3

を下から評価します。つまり、ある種の（解析関数 $=0$）という方程式に解がある程度存在することを主張します。この辺の状況を上記の Picard の定理を使って説明します。いま考えたいのは $\mathbb{C}$ 上の非定値な有理型関数 f に対して、方程式 $f(z)(f(z)-1)(f(z)-\infty)=0$ には解があるか？ということです。（その存在を主張するのが Picard の定理です。）もしこの方程式に解がなければ、個数関数に対して

$$N_{f,0}(r)=N_{f,1}(r)=N_{f,\infty}(r)=0$$

となり、従って第一主要定理から

$$m_{f,0}(r)=m_{f,1}(r)=m_{f,\infty}(r)=T_{f,\mathcal{O}(1)}(r)$$

となります。（$\mathcal{O}(1)$ は一点に対応する $\mathbb{P}^1$ の直線束。）ところで、$\mathbb{P}^1$ の標準因子が $\mathcal{O}(-2)$ であることに注意して因子 $(0)+(1)+(\infty)$ に対して第二主要定理を適用すると

$$T_{f,\mathcal{O}(1)}(r)\leq(Small\ term)$$

となります。ところがこの評価式から実は f は有理関数であることが従い、方程式 $f(z)(f(z)-1)(f(z)-\infty)=0$ に解がないという仮定に矛盾します。

第二主要定理（予想）が定理として確立している場合を多少不正確な表現を交えて列記しておきます。

(a) $\dim X\leq\dim Y$ の場合（Nevanlinna, Ahlfors, Selberg, $\cdots$,Griffiths, Carlson, King, Shiffman, Noguchi）。

(b) X が射影空間 $\mathbb{P}^n$ で D が（一般の位置にある）超平面たちの合併である場合（Cartan）。この場合にはさらに詳しく f の導来曲線に対する第二主要定理もある（H and J.Weyl, Ahlfors, Stoll, Fujimoto,$\cdots$）。

(c) X が準アーベル多様体の場合
($\cdots$,Kobayashi,Noguchi-Winkelmann-Yamanoi,McQuillan）。

(d) X が準アーベル多様体の部分多様体の場合（Bloch,Ochiai, Noguchi,Green,Griffiths）。

(e) X が射影空間 $\mathbb{P}^3$ の次数＞２０ くらいの一般の滑らかな超曲面のとき （McQuillan,Demailly-El Goul)。

さて値分布においては、しばしば次の対数微分の補題が重要な役割をします。これは Nevanlinna に始まり、 Vitter を経て、一般的な形は野口先生によって確立しました。

<u>対数微分の補題</u>. Y 上の有理型関数 f に対して次が成立。

$$m_{\frac{\partial_{z_i} f}{f},\infty}(r) \leq O(\log^+ rT_f(r))// = (Small\ term)$$

ここで、$\partial_{z_i} f$ は $\mathbb{C}^m$ の座標 $(z_1, \cdots, z_m)$ の i 番目に関する偏微分を表す。

<u>３節</u> ごく大雑把に結果を述べます。講演では正確な定式化をする予定ですがここでは詳しいことは省略します。次が対数微分の補題の代数幾何的定式化で、小林先生によってラドン変換の議論を通じて導かれたものです。実は対数微分の補題を使うことで、形式的な議論（解析を使わないという意味）を通じて導くことも出来ます。

まず $f : Y \dashrightarrow X$ を有理型写像、$\mathcal{J}(X)$ をジェット束（正則曲線の芽の全体をある同値関係で割ったもの）やその直積とします。$\mathcal{J}(X)$ は X 上の代数的ファイバー空間です。このとき f は自然に持ち上がって Y から $\mathcal{J}(X)$ への有理型写像 $f^{(lift)}$ を定めます。また、Z を X の閉部分スキームとしたとき、Z も自然に $\mathcal{J}(X)$ に持ち上がり、$\mathcal{J}(X)$ の閉部分スキーム $Z^{(lift)}$ を定めます。$\mathcal{J}(X)$ はコンパクトでないのですがコンパクト化することが出来て、その境界を $\partial\mathcal{J}(X)$ とします。このとき次が成立します。

<u>対数微分の補題の代数幾何的定式化</u>.

(1) $$m_{f,Z}(r) \leq m_{f^{(lift)},Z^{(lift)}}(r) + O(\log^+ rT_f(r))//$$

(2) $$m_{f^{(lift)},\partial\mathcal{J}(X)} \leq O(\log^+ rT_f(r))//$$

この (1), (2) の式を $X=\mathbb{P}^1$ として使うと対数微分の補題と同値な評価式を導きます。

この (1), (2) の式を使って次のことが示せます。

<u>応用</u>. D を滑らかな射影代数多様体 X の因子とする。L を X 上の直線束、 $L^\vee$ をその双対束とする。X 上の代数的ファイバー空間の間の写像 $\psi:\mathcal{J}(X)\to L^\vee$ があって、 $L^\vee$ のゼロセクションの ψ による引き戻しが $D^{(lift)}$ を含むとする。このとき、有理型写像 $f:Y \dashrightarrow X$ に対して $\psi\circ f^{(lift)}$ がゼロセクションに含まれなければ次が成立する。

$$m_{f,D}(r)+T_{f,L}(r)\leq O(N_{\mathrm{Ram}\,Y/\mathbb{C}^m}(r))+O(\log^+ rT_f(r))//$$

この応用を使うと、うまく ψ が見つかる時には第二主要定理を導くことが出来ます。実際、2節の例 (a)-(e) はそのようにして示せることが分かります。(例えば (a) の場合には $\mathcal{J}(X)$ として X の接束の X の次元個の直積を考え、ψ として行列式をとれます。)

さて上記の2節の例の最後の二つ (d)、(e) は Green-Griffiths らによる"負曲率ジェット計量の方法" によって得られます。上記 <u>応用</u> は実は "負曲率ジェット計量の方法" の枠組の一般化を与えています。$\mathcal{J}(X)$ としてジェット束をとり、L として豊富な直線束をとると、<u>応用</u> の評価式から $Y=\mathbb{C}$ なら $\psi\circ f^{(lift)}$ がゼロセクションに含まれることが示せるのですが、それが "負曲率ジェット計量の方法" で基本的な事実に他なりません。

残念ながら現段階では <u>応用</u> の状況がどのくらい一般的に第二主要定理を導くのかは不明です。しかし、例えば X が射影平面の場合などには新しい欠如指数関係式が得られます。その辺りのことにもふれたいと思います。

函数論メーリングリスト

1) １９９６年３月に函数論メーリングリストを開設して以来２００名以上の登録者がいて、順調に運営されています．このメーリングリストは電子メールを用いて函数論の研究者どうしの連絡をとりあうことが主な目的です．現在では研究集会、シンポジウム、セミナーなどの連絡も主に函数論メーリングリストを通じておこなわれています．函数論メーリングリストへの登録や登録の解除はどなたでも自由におこなえます．

2) **メーリングリストへの登録方法**

メーリングリストへ登録するためには次のメールアドレス

majordomo@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp

に本文の内容を

subscribe ca-ml

end

と書いたメールを送ってください．自動的に登録されます．ご不明な点がございましたら下記の問合せ先へお尋ねください。

函数論メーリングリストへのメールの投稿方法などの詳しい情報はメーリングリストへ登録をおこなった方へ、登録されたことの報告とともにメールで送られます．

3) 冒頭に書きましたように現在の登録者数は２００名をこえています．ですがこの数字は現在電子メールを使用している函数論研究者の一部であると推測されます．どうか、近隣の方で未登録の方がおられましたら登録をお勧めください．

4) 函数論ホームページが京都大学の須川さんにより開設されています．ホームページのURL は

http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/complex/

です．是非ご利用ください．

問合せ先：郷間知巳

gouma@math.sci.yamaguchi-u.ac.jp