日本数学会

2010年度　年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2010年　3月

於　慶応大学

第1日　3月24日 (水)

9:20〜12:00

1	S.-D. Lin	(Chung Yuan 基督教大)	♯	Elliptic integrals by means of fractional calculus	10
	P.-Y. Wang	(Nan-Ya 工大)			
	西本　勝之	(デカルト出版)			
2	西本　勝之	(デカルト出版)	*	N-fractional calculus of the logarithmic function $\log((\sqrt{z-b}-c)^2-d)$	10
	P.-Y. Wang	(Nan-Ya 工大)			
	S.-D. Lin	(Chung Yuan 基督教大)			
3	早味　俊夫	(近畿大総合理工)		Second Hankel determinant $H_2(n)$ for odd starlike and convex functions	10
	尾和　重義	(近畿大理工)			
4	黒木　和雄	(近畿大総合理工)		Subordination relations for certain analytic functions missing some coefficients	10
	尾和　重義	(近畿大理工)			
5	白石　將	(近畿大総合理工)		Properties of certain analytic functions associated with two boundary points	10
	尾和　重義	(近畿大理工)			
6	濱井　健成	(近畿大総合理工)		Coefficient estimates of functions in the class concerning with spirallike functions	10
	早味　俊夫	(近畿大総合理工)			
	黒木　和雄	(近畿大総合理工)			
	尾和　重義	(近畿大理工)			
7	堀田　一敬	(東北大情報)	♯	On strongly starlike and convex functions of order α and type β	10
	布川　護	(群馬大*)			
8	堀田　一敬	(東北大情報)	♯	Löwner chains with complex leading coefficient	10
9	小森　洋平	(阪市大理)	*	ある種数2のリーマン面の正則族の正則切断について	10
	能城　敏博	(阪大理)			
10	糸　健太郎	(名大多元数理)	♯	Linear slices close to a Maskit slice	10
11	奥山　裕介	(京都工繊大工芸)		ポテンシャルの収束とリヤプノフ指数の近似について	10
12	奥山　裕介	(京都工繊大工芸)		複素力学系のエネルギーおよびリヤプノフ指数公式の一証明	10
13	藤川　英華	(千葉大理)	*	The Nielsen realization problem for asymptotic Teichmüller modular groups	10
	松崎　克彦	(岡山大自然)			
14	志賀　啓成	(東工大理工)	*	Plemelj の定理の一般化について	10

14:30〜15:45

15	濱田　英隆	(九州産大工)	♯	Subordination chains in several complex variables	10
16	P. Duren	(Univ. of Michigan)	♯	The Loewner differential equation in several complex variables	10
	I. Graham	(Univ. of Toronto)			
	濱田　英隆	(九州産大工)			
	G. Kohr	(Babeş-Bolyai Univ.)			
17	鈴木　紀明	(名城大理工)		放物型 Bergman 空間上の Schatten–Herz 族 Toeplitz 作用素について	10
	西尾　昌治	(阪市大理)			
	山田　雅博	(岐阜大教育)			
18	菱川　洋介	(岐阜大工)	*	Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type	10
	西尾　昌治	(阪市大理)			
	山田　雅博	(岐阜大教育)			

19 中井 三留 (名工大*) * ディリクレ有限性が有界性を導くリーマン面 ……… 10

20 二村 俊英 (大同大教養) * Orlicz–Sobolev capacity of balls ……… 10
水田 義弘 (広島大理)
大野 貴雄 (広島商船高専)
下村 哲 (広島大教育)

16:00～17:00 特別講演 **2009年度（第8回）解析学賞受賞特別講演**

相川 弘明 (北大理) ♯ 複雑領域上のポテンシャル論—解析的性質と幾何的性質—

第2日 3月25日 (木)

9:20～12:00

21 濱田 英隆 (九州産大工) ♯ Bohr's theorem on power series ……… 10
本田 竜広 (広島工大工)
G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)

22 山盛 厚伺 (名大多元数理) * ある Hartogs 領域のベルグマン核の多重対数関数による明示公式 ……… 10

23 松島 敏夫 (石川工高専) * 有界正則写像の集積値集合 ……… 10

24 松本 和子 (阪府大総合教育) * $\mathbf{C}^n$ の実超曲面への距離の Levi form の大域的な表示と非退化条件 ……… 10

25 林本 厚志 (長野工高専) * スライス保存の CR 写像について ……… 10

26 相原 義弘 (福島大人間発達文化) ♯ A defect relation for holomorphic curves in algebraic varieties ……… 10

27 相原 義弘 (福島大人間発達文化) ♯ Deficiencies of holomorphic curves in algebraic varieties ……… 10

28 松村 慎一 (東大数理) * Expression of restricted volumes with current integration ……… 10

29 久本 智之 (東大数理) * 部分多様体に沿っての直線束の Bergman 核の漸近挙動について ……… 10

30 鍋島 克輔 (阪大情報・JST CREST) ♯ 代数的局所コホモロジーを利用したパラメータ付スタンダード基底計算について ……… 10
中村 弥生 (近畿大理工)
田島 慎一 (新潟大工)

31 田島 慎一 (新潟大工) * レゾルベントの留数解析と行列の exact な固有ベクトル計算 ……… 10
樋口 水紀 (国立情報開発(株))

32 大沢 健夫 (名大多元数理) A tower of Riemann surfaces whose Bergman kernels jump at the roof ……… 10

33 P. Corvaja (Udine 大) A new unicity theorem and Erdös' problem for polarized semi-abelian varieties ……… 10
野口 潤次郎 (東大数理)

34 P. Corvaja (Udine 大) On a problem of S. Lang on theta functions ……… 10
野口 潤次郎 (東大数理)

13:00～14:00 特別講演

赤堀 隆夫 (兵庫県立大理) 孤立特異点の境界の contact structure

Elliptic Integrals by Means of Fractional Calculus

Shy-Der Lin, Chung Yuan Christian University, Taiwan
Pin-Yu Wang, Nan-Ya Institute of Technology, Taiwan
and
Katsuyuki Nishimoto, Descartes Press Co.

Abstract

In a remarkably large number of recent works, one can find the emphasis upon (and demonstrations of) the usefulness of fractional-calculus operators in the derivation and integration to obtain (explicit) particular solution. The main object of this presentation is to calculus the elliptic integral by means of fractional calculus. The ellipse has the equation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, eccentricity $k=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ and can be parametrised by $x=a\cos\theta$ and $y=b\sin\theta$.
To find the arc length of an ellipse from $\theta=0$ to ϕ, we take the integral

$$\int_0^{\phi}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\,d\theta=a\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

Let $z=\cos\theta$, then $dz=-\sin\theta\,d\theta$. Thus $d\theta=-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz$, we have

$$\text{the arc length}=a\int_0^{\cos\phi}\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

The circumference of an ellipse is $4aE(k)$, where

$$E(k)=\int_0^1\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

We want to show

$$E(k)=\int_0^1\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz=\frac{\pi}{2}{}_2F_1(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;k^2)$$

by fractional calculus. We use the formula in Journal of Fractional Calculus, Vol.30, Nov., 2006 pp54:

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\prod_{j=1}^{r}\{(1-a_jz^{\mu_j})^{-\alpha_j}\}\right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F_{1:0;\cdots;0}^{1:1;\cdots;1}\left[\begin{array}{lllll}(\lambda;\mu_1,\cdots,\mu_r): & (\alpha_1,1); & \cdots; & (\alpha_r,1); & a_1z,\cdots,a_rz\\ (\mu;\mu_1,\cdots,\mu_r): & -; & \cdots; & -; & \end{array}\right]$$

$$R(\lambda)>0;\mu_j>0(j=1,\cdots,r);max\{|a_1z|,\cdots,|a_rz|\}<1 \tag{1}$$

or

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\prod_{j=1}^{r}\{(1-a_jz^{\mu_j})^{-a_j}\}\right\}$$

$$= e^{-i\pi(\lambda-\mu)}\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\lambda)}z^{\mu-1}$$

$$\times F_{1:0;\cdots;0}^{1:1;\cdots;1}\left[\begin{array}{lllll}(\lambda;\mu_1,\cdots,\mu_r): & (\alpha_1,1); & \cdots; & (\alpha_r,1); & a_1z^{\mu_1},\cdots,a_rz^{\mu_r}\\ (\mu;\mu_1,\cdots,\mu_r): & -; & \cdots; & -; & \end{array}\right] \tag{2}$$

$$R(\lambda)>0;\mu_j>0(j=1,\cdots,r);max\{|a_1z|,\cdots,|a_rz|\}<1$$

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\prod_{j=1}^{r}\{(1-a_jz^{\mu_j})^{-a_j}\}\right\}$$

$$(\lambda=1,\mu=2)$$

$$=D_z^{-1}\{z^{1-1}(1-k^2z^2)^{1/2}(1-z^2)^{-1/2}\}$$

$$=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2)}zF_{1:0;0}^{1:1;1}\left[\begin{array}{llll}(1;2,2): & (-\frac{1}{2},1), & (\frac{1}{2},1); & k^2z,\quad z\\ (2;2,2): & -, & -; & \end{array}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[1]_{2i+2j}[-\frac{1}{2}]_i[\frac{1}{2}]_j(k^2z)^iz^{j+1}}{[2]_{2i+2j}i!j!}.$$

Since the variable z is integral form 0 to 1, we have

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_{i+j}(-\frac{1}{2})_i(\frac{1}{2})_j}{(\frac{3}{2})_{i+j}}\frac{(k^2)^i}{i!}\frac{(1)^j}{j!}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_i(-\frac{1}{2})_i}{(\frac{3}{2})_i}{}_2F_1\left[\begin{array}{lll}\frac{1}{2}+i, & \frac{1}{2}; & 1\\ \frac{3}{2}+i & ; & \end{array}\right]\frac{(k^2)^i}{i!}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_i(-\frac{1}{2})_i}{(\frac{3}{2})_i}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+i)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1+i)\Gamma(1)}\frac{(k^2)^i}{i!}$$

$$=\frac{\pi}{2}{}_2F_1(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1;k^2).$$

N- Fractional Calculus of The Logarithmic Function $\log((\sqrt{z-b}-c)^2-d)$

Katsuyuki Nishimoto (Descartes Press Co.)
Pin-Yu Wang (Nanya Institute of Tech. Taiwan)
and
Shy-Der Lin (Chung-Yuan Christian Univ., Taiwan)

Abstract

In this article, N-fractional calculus of the logarithmic function in title is discussed.

A theorem is presented as follows for example.

Theorem 1. Let $f = f(z) = (\sqrt{z-b}-c)^2 - d \neq 0, 1.$

We have then:

(i)

$$(\log f)_\gamma = -e^{-i\pi\gamma}(z-b)^{-\gamma}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}k+\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)}S^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}T^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[2k]_m\Gamma(\frac{1}{2}m+k+\gamma)}{m!\Gamma(\frac{1}{2}m+k)}S^m\right\}$$

$$(|\Gamma(\frac{1}{2}k+\gamma)|, |\Gamma(\frac{1}{2}m+k+\gamma)| < \infty)$$

and

(ii)

$$(\log f)_n = (-1)^{n+1}(z-b)^{-n}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2}k+1]_{n-1}S^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}T^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[2k]_m[\frac{1}{2}m+k]_n}{m!}S^m\right\}(n \in Z^+)(n\text{-th derivatives })$$

where $S = \dfrac{c}{(z-b)^{1/2}}, T = \dfrac{d}{z-b}, |S| < 1, |T| < 1,$

and$[\lambda]_k (k \in Z_0^+)$; Notation of Pochhammer.

Second Hankel determinant $H_2(n)$ for odd starlike and convex functions

Toshio Hayami (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Let $\mathcal{S}^*(\alpha)$ denote the subclassof $\mathcal{A}$ consisting of functions $f(z)$ which satisfy the following inequality

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$. A function $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ is said to be starlike of order α in $\mathbb{U}$. Similarly, let $\mathcal{K}(\alpha)$ denote the subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all functions $f(z)$ which satisfy following inequality

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some α $(0 \leqq \alpha < 1)$.

Also, let $\mathcal{A}_{\mathrm{odd}} \subset \mathcal{A}$ be the class of odd functions $f(z)$ normalized by

$$f(z) = z + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1} z^{2m+1} \qquad (a_{2m} = 0)$$

which are analytic in $\mathbb{U}$. Moreover, we define the subclasses of $\mathcal{A}_{\mathrm{odd}}$ as follows:

$$\mathcal{S}^*_{\mathrm{odd}}(\alpha) = \mathcal{A}_{\mathrm{odd}} \cap \mathcal{S}^*(\alpha) \quad \text{and} \quad \mathcal{K}_{\mathrm{odd}}(\alpha) = \mathcal{A}_{\mathrm{odd}} \cap \mathcal{K}(\alpha).$$

Then, $f(z) \in \mathcal{S}^*_{\mathrm{odd}}(\alpha)$ or $\mathcal{K}_{\mathrm{odd}}(\alpha)$ is called odd starlike or convex function of order α, respectively. We note that

$$f(z) \in \mathcal{K}_{\mathrm{odd}}(\alpha) \quad \text{if and only if} \quad zf'(z) \in \mathcal{S}^*_{\mathrm{odd}}(\alpha)$$

and

$$f(z) \in \mathcal{S}^*_{\mathrm{odd}}(\alpha) \quad \text{if and only if} \quad \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \in \mathcal{K}_{\mathrm{odd}}(\alpha).$$

In the present talk, we discuss the upper bounds of the functional $|a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2|$ for all n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ and functions $f(z) \in \mathcal{S}^*_{\mathrm{odd}}(\alpha)$ or $\mathcal{K}_{\mathrm{odd}}(\alpha)$, respectively.

The following theorems are enumerated as the results.

Theorem 1 *If a function $f(z) \in S^*_{\mathrm{odd}}(\alpha)$, then*

$$|H_2(n)| = |a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2| \leqq \begin{cases} 1-\alpha & (n=1) \\ \dfrac{\prod_{j=1}^{m}(j-\alpha)^2}{(m!)^2} & (n=2m) \\ \dfrac{\left(\prod_{j=1}^{m}(j-\alpha)^2\right)(m+1-\alpha)}{m!\,(m+1)!} & (n=2m+1) \end{cases}$$

where $m = 1, 2, 3, \cdots$. Equality is attained for

$$f(z) = \frac{z}{(1-z^2)^{1-\alpha}} = z + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m}(j-\alpha)}{m!} z^{2m+1}.$$

Theorem 2 *If a function $f(z) \in \mathcal{K}_{\mathrm{odd}}(\alpha)$, then*

$$|H_2(n)| = |a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2| \leqq \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{3} & (n=1) \\ \dfrac{\prod_{j=1}^{m}(j-\alpha)^2}{(2m+1)^2(m!)^2} & (n=2m) \\ \dfrac{\left(\prod_{j=1}^{m}(j-\alpha)^2\right)(m+1-\alpha)}{(2m+1)(2m+3)m!\,(m+1)!} & (n=2m+1) \end{cases}$$

where $m = 1, 2, 3, \cdots$. Equality is attained for

$$f(z) = z\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha; \frac{3}{2}; z^2\right) = z + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m}(j-\alpha)}{(2m+1)\,m!} z^{2m+1}.$$

Furthermore, we would like to discuss the properties of functions $g(z)$ defined by

$$g(z) = \mathcal{H}f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}\right) z^n.$$

for a function $f(z) \in \mathcal{A}$.

Subordination relations for certain analytic functions missing some coefficients

Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{H}$ denote the class of functions $f(z)$ which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ and } |z| < 1\}$. For a positive integer n and a complex number a, let $\mathcal{H}[a, n]$ be the class of functions $f(z) \in \mathcal{H}$ of the form

$$f(z) = a + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k.$$

Also, let $\mathcal{A}$ denote the class of functions $f(z) \in \mathcal{H}$ normalized by $f(0) = 0$ and $f'(0) = 1$. The subclass of $\mathcal{A}$ consisting of all univalent functions $f(z)$ in $\mathbb{U}$ is denoted by $\mathcal{S}$.

A function $f(z) \in \mathcal{H}$ is said to be convex in $\mathbb{U}$ if it is univalent in $\mathbb{U}$ and $f(\mathbb{U})$ is a convex domain. It is well known that $f(z)$ is convex in $\mathbb{U}$ if and only if $f'(0) \neq 0$ and

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

The normalized class of convex functions denoted by $\mathcal{K}$ consists of the set of all functions $f(z) \in \mathcal{S}$ for which $f(\mathbb{U})$ is convex. Furthermore, a function $f(z) \in \mathcal{H}$ is said to be starlike in $\mathbb{U}$ if it is univalent in $\mathbb{U}$ and $f(\mathbb{U})$ is a starlike domain. It is well known that $f(z)$ is starlike in $\mathbb{U}$ if and only if $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ and

$$\text{(1.2)} \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

The class of starlike functions denoted by $\mathcal{S}^*$ consists of the set of all functions $f(z) \in \mathcal{S}$ for which $f(\mathbb{U})$ is starlike. The equivalent analytic descriptions of $\mathcal{K}$ and $\mathcal{S}^*$ are given respectively as follows.

Remark 1 A necessary and sufficient condition for $f(z) \in \mathcal{K}$ is that $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality (1.1). Also, $f(z) \in \mathcal{S}^*$ if and only if $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies the inequality (1.2).

From the definitions of $\mathcal{K}$ and $\mathcal{S}^*$, we know that $f(z) \in \mathcal{K}$ if and only if $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$.

We next introduce the familiar principle of differential subordinations between analytic functions. Let $f(z)$ and $g(z)$ be members of the class $\mathcal{H}$. Then the function $g(z)$ is said to be subordinate to $f(z)$ in $\mathbb{U}$, written by

$$g(z) \prec f(z) \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

if there exists an analytic function $w(z) \in \mathcal{H}$ with $w(0) = 0$ and $|w(z)| < 1 \quad (z \in \mathbb{U})$, and such that $g(z) = f(w(z)) \quad (z \in \mathbb{U})$. In particular, if $f(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$, then $g(z) \prec f(z) \quad (z \in \mathbb{U})$ if and only if $g(0) = f(0)$ and $g(\mathbb{U}) \subset f(\mathbb{U})$.

Suffridge [4] independently discovered some particular case of the lemma which is well-known as the Jack's lemma [1] proven by Miller and Mocanu [3] (see also [2]), and deduced the following subordination relation for convex functions by making use of it.

Lemma 2 *Let $f(z) \in \mathcal{K}$ and $g(z) \in \mathcal{H}[0,1]$. If $zg'(z) \prec zf'(z) \quad (z \in \mathbb{U})$, then $g(z) \prec f(z) \quad (z \in \mathbb{U})$.*

In the present talk, applying the Schwarz's lemma related to analytic functions $w(z) \in \mathcal{H}[0,n]$, we discuss the following subordination properties concerning with the subordination $g(z) \prec f(z) \quad (z \in \mathbb{U})$ for $f(z) \in \mathcal{H}[a,1]$ and $g(z) \in \mathcal{H}[a,n]$.

Theorem 3 *Let $f(z) = a + a_1 z + \cdots \in \mathcal{H}[a,1]$ and $g(z) = a + b_n z^n + \cdots \in \mathcal{H}[a,n]$. If $g(z) \prec f(z) \quad (z \in \mathbb{U})$, then $|b_n| \leqq |a_1|$, and equality occurs if and only if $g(z) = f(xz^n)$ for some complex number x with $|x| = 1$.*

Theorem 4 *Let $f(z) \in \mathcal{H}[a,1]$ and $g(z) \in \mathcal{H}[a,n]$, and suppose that $f(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$. If $g(z) \prec f(z) \quad (z \in \mathbb{U})$, then*

$$g(\mathbb{U}_r) \subset f(\mathbb{U}_{r^n})$$

for each r with $0 < r < 1$. Further, if $g(z_0)$ is on the boundary of $f(\mathbb{U}_{r^n})$ for one point $z_0 \in \partial\mathbb{U}_r$, then there is a complex number x with $|x| = 1$ such that $g(z) = f(xz^n)$, and $g(z)$ is on the boundary of $f(\mathbb{U}_{r^n})$ for every point $z \in \partial\mathbb{U}_r$.

Moreover, by making use of these properties and the Jack's lemma, we deduce a subordination relation as follows.

Theorem 5 *Let $f(z) \in \mathcal{H}[a,1]$ and $g(z) \in \mathcal{H}[a,n]$, and suppose that $f(z)$ is convex in $\mathbb{U}$. If $zg'(z) \prec nzf'(z) \quad (z \in \mathbb{U})$, then $g(z) \prec f(z) \quad (z \in \mathbb{U})$.*

In addition, we will observe some examples of these results.

References

[1] I. S. Jack, *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math. Soc. **3** (1971), 469 - 474.

[2] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. **65** (1978), 289 - 305.

[3] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations*, Pure and Applied Mathematics **225**, Marcel Dekker, 2000.

[4] T. J. Suffridge, *Some remarks on convex maps of the unit disk*, Duke Math. J. **37** (1970), 775 - 777.

Properties of certain analytic functions associated with two boundary points

Hitoshi Shiraishi (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}_n$ denote the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

that are analytic in the closed unit disk $\bar{\mathbb{U}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqq 1\}$ and $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Also, the open unit disk is denoted by $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. In the present talk, we consider two boundary points z_1 and z_2 such that $\alpha = \dfrac{f'(z_1) + f'(z_2)}{2} \in f'(\mathbb{U})$ and $\alpha \neq 1$. With such points z_1 and z_2, we discuss some properties of certain analytic functions $f(z)$ in $\mathcal{A}_n$.

Theorem 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{|1-\alpha|n\rho}{1+|1-\alpha|\rho} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number $\alpha = \dfrac{f'(z_1) + f'(z_2)}{2} \in f'(\mathbb{U})$ and $\alpha \neq 1$ such that $z_1 \in \partial\mathbb{U}$ and $z_2 \in \partial\mathbb{U}$, and for some real $\rho > 1$, then

$$|f'(z) - 1| < \rho|1-\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

If we consider M such that

$$\max_{z \in \mathbb{U}} |f'(z) - \alpha| = M,$$

then we have

$$|f'(z) - 1| < \rho|1-\alpha| = \rho|f'(0) - \alpha| \leqq \rho M \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Therefore, we have

Corollary 1. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{|1-\alpha|n\rho}{1+|1-\alpha|\rho} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number $\alpha = \dfrac{f'(z_1) + f'(z_2)}{2} \in f'(\mathbb{U})$ and $\alpha \neq 1$ such that $z_1 \in \partial\mathbb{U}$ and $z_2 \in \partial\mathbb{U}$, and for some real $\rho > \dfrac{|1-\alpha|}{M}$, then

$$|f'(z) - 1| < \rho M \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\left| zf''(z) - \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{|1-\alpha|^2 n\rho^2}{1+|1-\alpha|\rho} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number $\alpha = \dfrac{f'(z_1)+f'(z_2)}{2} \in f'(\mathbb{U})$ *and* $\alpha \neq 1$ *such that* $z_1 \in \partial\mathbb{U}$ *and* $z_2 \in \partial\mathbb{U}$*, and for some real* $\rho > 1$*, then*

$$|f'(z)-1| < \rho|1-\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Corollary 2. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\left| zf''(z) - \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{|1-\alpha|^2 n\rho^2}{1+|1-\alpha|\rho} \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number $\alpha = \dfrac{f'(z_1)+f'(z_2)}{2} \in f'(\mathbb{U})$ *and* $\alpha \neq 1$ *such that* $z_1 \in \partial\mathbb{U}$ *and* $z_2 \in \partial\mathbb{U}$*, and for some real* $\rho > \dfrac{|1-\alpha|}{M}$*, then*

$$|f'(z)-1| < \rho M \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Theorem 3. *If $f(z) \in \mathcal{A}_n$ satisfies*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z(zf''(z))'}{f'(z)-1}\right) < n^2 \qquad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number $\alpha = \dfrac{f'(z_1)+f'(z_2)}{2} \in f'(\mathbb{U})$ *and* $\alpha \neq 1$ *such that* $z_1 \in \partial\mathbb{U}$ *and* $z_2 \in \partial\mathbb{U}$*, then*

$$|f'(z)-1| < \rho|1-\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

where $\rho > 1$.

References

[1] I. S. Jack, *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math. Soc. **3**(1971), 469-474.

[2] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Second-order differential inequalities in the complex plane,* J. Math. Anal. Appl. **65**(1978), 289-305.

[3] H. Shiraishi and S. Owa, *Some sufficient problems for certain univalent functions,* Far East J. Math. Sci. **30**(2008), 147-155.

Coefficient estimates of functions in the class concerning with spirallike functions

Kensei Hamai (Kinki University)
Toshio Hayami (Kinki University)
Kazuo Kuroki (Kinki University)
Shigeyoshi Owa (Kinki University)

Let $\mathcal{A}$ be the class of functions $f(z)$ of the form

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

which are analytic in the open unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. If $f(z) \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 1 \quad (z \in \mathbb{U})$$

for some complex number α such that $|\alpha - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, then we say that $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$. If we write $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, then the condition for $\mathcal{S}_\alpha$ becomes

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > |\alpha| \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Therefore, a function $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$ is spirallike in $\mathbb{U}$ which implies that $f(z)$ is univalent in $\mathbb{U}$.

Theorem 1 *Extremal function for the class $\mathcal{S}_\alpha$ is $f(z)$ defined by*

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2\alpha(\mathrm{Re}(\frac{1}{\alpha})-1)}}.$$

Theorem 2 *If a function $f(z) \in \mathcal{S}_\alpha$, then*

$$|a_n| \leqq \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}(2(\cos(\arg(\alpha)) - |\alpha|) + (k-1)) \qquad (n = 2, 3, 4 \cdots).$$

Equality holds true for $f(z)$ given in Theorem 1.

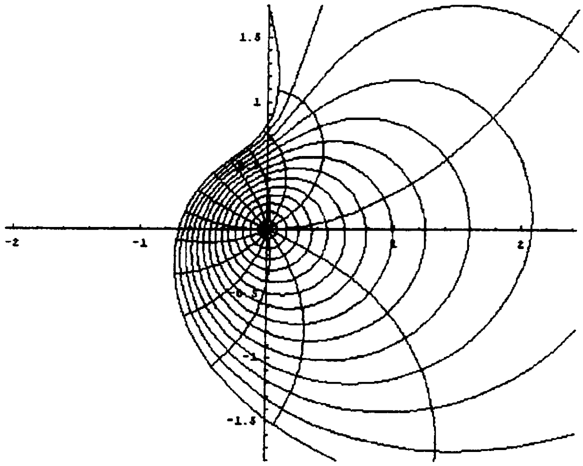
Example 1 Let us consider the extremal function

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2\alpha(\mathrm{Re}(\frac{1}{\alpha})-1)}}.$$

If we take $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$, then

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\frac{6-3i}{10}}}.$$

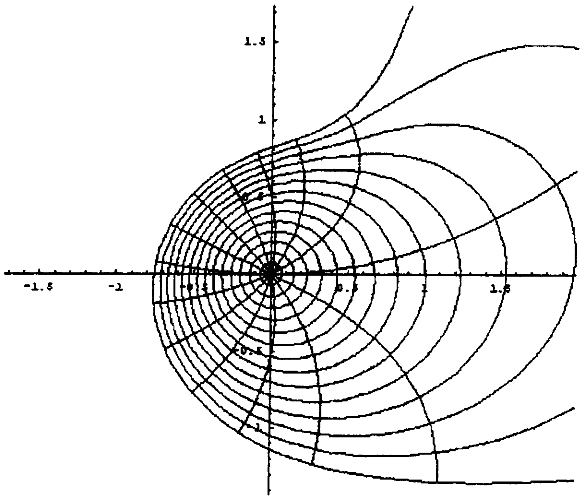
This function $f(z)$ maps the open unit disk $\mathbb{U}$ onto the following domain.



Example 2 If we take $\alpha = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$ for the extremal function $f(z)$ of $\mathcal{S}_\alpha$, then we have

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\frac{184+69i}{438}}}.$$

This function $f(z)$ maps the open unit disk $\mathbb{U}$ onto the following domain.



On strongly starlike and convex functions of order α and β

堀田　一敬（東北大・情報）
布川　護（群馬大）

$\mathcal{A}$を単位円板$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$上定義された解析関数$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$の族とする．

実定数$\alpha \in (0,1]$に対し，$f \in \mathcal{A}$が全ての$z \in \mathbb{D}$に対して

$$\left|\arg\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\right| < \frac{\pi}{2}\alpha$$

を満たすときfは<u>strongly starlike of order α</u>であるといい，その全体を$\mathcal{S}^*(\alpha)$で記す．同様に全ての$z \in \mathbb{D}$に対し

$$\left|\arg\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\right| < \frac{\pi}{2}\alpha$$

を満たすときfは<u>strongly convex of order α</u>であるといい，その全体を$\mathcal{K}(\alpha)$で記す．定義より，$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \le 1$のとき$\mathcal{S}^*(\alpha_1) \subset \mathcal{S}^*(\alpha_2)$また$\mathcal{K}(\alpha_1) \subset \mathcal{K}(\alpha_2)$である．$\alpha = 1$の場合，$\mathcal{S}^*(1)$と$\mathcal{K}(1)$はよく知られているstarlike functionsまたはconvex functionsの族であり，故に$\mathcal{S}^*(\alpha)$または$\mathcal{K}(\alpha)$に含まれる全ての関数は$\mathbb{D}$上単葉である．$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(1)$また$\mathcal{K} = \mathcal{K}(1)$と記す．

$\mathcal{K}(\alpha)$と$\mathcal{S}^*(\alpha)$との包含関係について，次のMocanu[3]による結果が知られている（[4]も参照）．ここで

$$\gamma(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right]}{1+\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right]} \tag{1}$$

と定義する．$\gamma(\alpha)$は$\alpha \in (0,1]$に対して狭義単調増加また連続である．

Theorem A. 各々の$\alpha \in (0,1]$に対し．$\mathcal{K}(\gamma(\alpha)) \subset \mathcal{S}^*(\alpha)$.

ここでこの結果はsharpでないこと（[2]）を注意しておく．

さらに$\alpha \in (0,1]$と$\beta \in [0,1)$に対し，関数族$\mathcal{S}^*(\alpha,\beta)$と$\mathcal{K}(\alpha,\beta)$を導入する．$f \in \mathcal{A}$が全ての$z \in \mathbb{D}$に対し

$$\left|\arg\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \beta\right\}\right| < \frac{\pi}{2}\alpha,$$

を満たすとき f は <u>strongly starlike of order α and type β</u> であるといい，$f \in \mathcal{S}^*(\alpha,\beta)$ と記す．また $f \in \mathcal{A}$ が全ての $z \in \mathbb{D}$ に対し

$$\left|\arg\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\beta\right\}\right| < \frac{\pi}{2}\alpha.$$

を満たすとき f は <u>strongly convex of order α and type β</u> であるといい，$f \in \mathcal{K}(\alpha,\beta)$ と記す．定義より $\mathcal{S}^*(\alpha,0)=\mathcal{S}^*(\alpha)$ また $\mathcal{K}(\alpha,0)=\mathcal{K}(\alpha)$ であり，さらに $0<\alpha_1<\alpha_2\leq 1$ また $0\leq\beta_1<\beta_2<1$ に対し次の関係式を満たす;

i) $\mathcal{S}^*(\alpha_1,\beta)\subset\mathcal{S}^*(\alpha_2,\beta)$,
ii) $\mathcal{K}(\alpha_1,\beta)\subset\mathcal{K}(\alpha_2,\beta)$,
iii) $\mathcal{S}^*(\alpha,\beta_1)\supset\mathcal{S}^*(\alpha,\beta_2)$,
iv) $\mathcal{K}(\alpha,\beta_1)\supset\mathcal{K}(\alpha,\beta_2)$.

これより $\mathcal{S}^*(\alpha,\beta)$ また $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ に属する全ての関数は $\mathbb{D}$ 上単葉であることがわかる．

本講演では $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ と $\mathcal{S}^*(\alpha,\beta)$ との包含関係について次の結果が得られたことを報告する．また本定理から得られる応用をいくつか紹介する;

Theorem 1 ([1])**.** 各々の $\alpha\in(0,1]$ *and* $\beta\in[0,1)$ に対し，$\mathcal{K}(\gamma(\alpha),\beta)\subset\mathcal{S}^*(\alpha,\beta)$.

上記の定理は $\beta=0$ の場合として Theorem A を含む．

References

1. I. Hotta and M. Nunokawa, *On strongly starlike and convex functions of order α and type β*, preprint (arxiv:0911.2354).
2. S. Kanas and T. Sugawa, *Strong starlikeness for a class of convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), no. 2, 1005–1017.
3. P. T. Mocanu, *Alpha-convex integral operator and strongly-starlike functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. **34** (1989), no. 2, 18–24.
4. M. Nunokawa, *On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **69** (1993), no. 7, 234–237.

Löwner chains with complex leading coefficient

堀田　一敬（東北大・情報）

$\mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ とし，特に $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$ とする．$\mathcal{A}$ を正規化条件 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たす $\mathbb{D}$ 上の解析関数族とし，さらに $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ を $\mathbb{D}$ 上単葉な関数全体とする．

$f_t(z) = f(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)z^n$, $a_1(t) \neq 0$, を $\mathbb{D} \times [0,\infty)$ 上定義された関数とする．ここで $a_1(t)$ は $t \in [0,\infty)$ に関して局所絶対連続な複素数値関数である．$f_t(z)$ が以下の性質を満たすとき，レブナー鎖であるという;

1. 各々の $t \in [0,\infty)$ に対し，$f_t(z)/a_1(t) \in \mathcal{S}$,
2. $0 \leq s < t < \infty$ に対し，$f_s(\mathbb{D}) \subsetneq f_t(\mathbb{D})$,
3. 原点に関する核収束の意味で $t_n \to t_0 \in [0,\infty)$ のとき $f_{t_n}(\mathbb{D}) \to f_{t_0}(\mathbb{D})$，また $t_n \to \infty$ のとき $f_{t_n}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ である．

$a_1(t) = e^t$ のとき，$f_t(z)$ は標準レブナー鎖であると呼ぶ．その場合は上記の条件 3 は他の条件から導かれるため省略される ([4, Chapter 6.1]).

Löwner のもともとのアイデアは $\mathbb{D}$ から複素平面上のパラメトライズされた単一截線領域への写像を考えるものであったが，これを Pommerenke が一般の単連結領域の場合へと拡張し，次のような標準レブナー鎖の特徴付けを与えた;

Theorem A ([3],[4]). $0 < r_0 \leq 1$ とし，$h(z,t) = e^t z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(t)z^n$ を $\mathbb{D} \times [0,\infty)$ 上定義された関数とする．そのとき $h(z,t)$ が標準レブナー鎖であるための必要十分条件は次の 2 条件が満たされることである;

i) $h(z,t)$ は各々の $t \in [0,\infty)$ に対して $z \in \mathbb{D}_{r_0}$ について解析的，各々の $z \in \mathbb{D}_{r_0}$ に関して $t \in [0,\infty)$ について絶対連続であり，ある定数 K_0 が存在して

$$|h(z,t)| \leq K_0 e^t \quad (z \in \mathbb{D}_{r_0},\ t \in [0,\infty))$$

が成り立つ．

ii) 関数 $p(z,t)$ が存在し，各々の $t \in [0,\infty)$ に関して $z \in \mathbb{D}$ について解析的，各々の $z \in \mathbb{D}$ に関して $t \in [0,\infty)$ 上可測であり

$$\mathrm{Re}\, p(z,t) > 0 \quad (z \in \mathbb{D},\ t \in [0,\infty)), \quad p(0,1) = 1$$

を満たし，

$$\dot{h}(z,t) = zh'(z,t)p(z,t) \qquad (z \in \mathbb{D}_{r_0},\ \text{a.e. } t \in [0,\infty)) \tag{1}$$

が成立する．ここで $\dot{h} = \partial h/\partial t$, $h' = \partial h/\partial z$ である．

また，次の定理が Becker により知られている;

Theorem B ([1]). $h_t(z) = h(z,t)$ を標準レブナー鎖とし，それに対応する (1) の $p(z,t)$ が全ての $z \in \mathbb{D}$ と全ての $t \in [0,\infty)$ に対して;

$$p(z,t) \in U(k) \ := \ \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| \frac{w-1}{w+1} \right| \le k \right\}$$

を満たすと仮定する．そのとき各々の $t \in [0,\infty)$ に対し $h(z,t)$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上へと連続的に拡張され，さらに $\hat{h}(z)$,

$$\hat{h}(z) = \begin{cases} h(z,0), & \text{if} \ \ |z| < 1, \\ h(\frac{z}{|z|}, \log|z|), & \text{if} \ \ |z| \ge 1, \end{cases}$$

は h_0 の $\mathbb{C}$ への k-擬等角拡張となる．

上記の定理が（標準的とは限らない）レブナー鎖に対して一般化される事を確認する．具体的には，Theorem A はパラメーター z, t の変換，すなわち像領域の拡張スピードと原像 $\mathbb{D}$ の回転で調整することにより $a_1(t)$ の動きへ対応する．Theorem B に関してはパラメーターを変換すると双曲円 $U(k)$ が動いてしまうので，一般のレブナー鎖に対して同様の証明を繰り返す必要がある．

以上の考察により，レブナー鎖を用いて単葉性判定条件及び擬等角拡張可能条件を考える際に第 1 係数の正規化の足枷が外れ，より多様な条件へと対応する事ができる．具体的には，複素第 1 係数をもつレブナー鎖は複素定数倍が絡む条件を導くのに非常に適している．例えば次のような定理が導かれる;

Theorem 1 ([2]). α を $|2\alpha - 1| \le 1$ を満たすような複素定数とする．もし $f \in \mathcal{A}$ が凸関数ならば，関数

$$\alpha f(z) + (1-\alpha) z f'(z)$$

は $\mathbb{D}$ 上単葉である．

Theorem 2 ([2]). $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ とし，また $k \in [\,|\tan(\alpha/2)|, 1)$ とする．$f \in \mathcal{A}$ に対し，もし任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{f(z)} \in U(k)$$

ならば f は $\mathbb{C}$ への k-擬等角拡張を持つ．

References

1. J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.
2. I. Hotta, *Löwner chains with complex leading coefficient*, preprint (arxiv:0910.4850).
3. Ch. Pommerenke, *Über die Subordination analytischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **218** (1965), 159–173.
4. ———, *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

ある種数２のリーマン面の正則族の正則切断について

小森洋平（阪市大理）
能城敏博（阪大理）

カットの入った種数１のリーマン面（トーラス）のコピーを２つ用意して、カットに沿って張り合せると種数２のリーマン面ができる。トーラスの平行移動の作用によってカットの端点の一方を固定しておく。するとカットの残りの端点をパラメータと思うことにより、トーラスの上に種数２のリーマン面の正則族が構成できる。論文 [1] ではこの正則族の正則切断の個数評価を行った。今回の講演では正則切断を決定し、その幾何学的意味を明らかにする。ポイントは、トーラス上の次数２の正則直線束およびその平方根である次数１の正則直線束を用いて、この種数２のリーマン面の正則族を実現することにある。

参考文献

[1] Y. Imayoshi, Y. Komori and T. Nogi, *Holomorphic Sections of a Holomorphic Family of Riemann Surfaces induced by a Certain Kodaira Surface*, Kodai Math. J. 32(2009) 450-470.

Linear slices close to a Maskit slice

糸 健太郎　(名古屋大学多元数理科学研究科)

アブストラクト 1点穴あきトーラスの基本群と同型なクライン群の変形空間は，2つの生成元のトレースが大域的な座標を与える．ここで1つの生成元のトレースを固定したときの変形空間の切り口を linear slice という．ここでは固定するトレースの値を2に近づけたとき，対応する linear slice の Hausdorff 極限が Maskit slice に一致するかどうかを考える．

Sを1点穴あきトーラスとし，基本群$\pi_1(S)$の生成元の組a, bを固定する．任意の$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$に対して$\alpha = \mathrm{tr}(\rho(a))$, $\beta = \mathrm{tr}(\rho(b))$を満たす表現$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$の共役類が（本質的に）一意的に定まり，それを$[\rho_{\alpha,\beta}]$と書く．複素数$\alpha \in \mathbb{C}$に対して

$$\mathcal{L}(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{C} : \rho_{\alpha,\beta} \text{ is descrete faithful}\}$$

を linear slice という．特に$\alpha = 2$のとき$\mathcal{L}(2)$は Maskit slice と呼ばれ

$$\mathcal{L}(2) = \{\beta \in \mathbb{C} : \langle z+2, \frac{1}{z} + i\beta \rangle \text{ is descrete faithful}\}$$

という具体的表示を持つ.（通常は$\mathcal{L}(2)$の90°回転を Maskit slice という.）

ここではαが2に近づくとき，$\mathbb{C}$の部分集合として$\mathcal{L}(\alpha)$が$\mathcal{L}(2)$に近づくかどうかを考えたい．($\alpha \in \mathbb{R}$の場合は Parker-Parkkonen や Komori-Yamashita らによって調べられている.) 実際には収束$\alpha \to 2$の仕方によって$\mathcal{L}(\alpha)$が$\mathcal{L}(2)$に近い場合と$\mathcal{L}(2)$の真部分集合に近い場合があることを示す．そのために複素数$\xi \in \mathbb{C}$に対して$\mathcal{L}(2)$の真部分集合$\mathcal{L}(2, \xi)$を次のように定義する：

$$\mathcal{L}(2, \xi) = \{\beta \in \mathbb{C} : \langle z+2, z+2\xi, \frac{1}{z} + i\beta \rangle \text{ is descrete faithful}\}.$$

さて$\rho(a)$が loxodromic のとき，その complex translation length を右半平面$\mathbb{C}_+$の中から取りλと書くことにすると，$\alpha = \mathrm{tr}(\rho(a)) = 2\cosh(\lambda/2)$という関係が成り立つ．特に$\alpha \to 2 \Leftrightarrow \lambda \to 0$であることに注意する．以下では$\alpha$を$\lambda$の関数として$\alpha(\lambda) = 2\cosh(\lambda/2)$と表す．収束$\lambda \to 0$は次の2種類に本質的に類別される．

Definition. いま$\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, $\lambda_n \to 0$とする．収束$\lambda_n \to 0$が **horocyclic** であるとは任意の$\epsilon > 0$に対して$|\lambda_n - \epsilon| < \epsilon$が十分大きな全ての$n$で成り立つときをいう．また，収束$\lambda_n \to 0$が **tangential** であるとはある$\epsilon_0 > 0$に対して$|\lambda_n - \epsilon_0| \geq \epsilon_0$が十分大きな全ての$n$で成り立つときをいう．

ここで$\lambda_n \to 0$が horocyclic (tangential) である必要十分条件は$\mathrm{Im}\,(2\pi i/\lambda_n)$が発散する（有界である）ことに注意する．特に tangeitial の場合，部分列を取れば$2\pi i/\lambda_n$は平行移動$z \mapsto z+1$の作用を modulo にしてある$\xi \in \mathbb{C}$に収束する．このことを$[2\pi i/\lambda_n] \to [\xi]$と書くことにする．以上の用語の準備のもとで，予想を述べることが出来る：

Conjecture. $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$ に対して，$\lambda_n \to 0$ が *horocyclic* であれば $\mathcal{L}(\alpha(\lambda_n))$ は $\mathcal{L}(2)$ に *Hausdorff* 収束し，$\lambda_n \to 0$ が *tangential* でかつ $[2\pi i/\lambda_n] \to [\xi]$ である場合，$\mathcal{L}(\alpha(\lambda_n))$ は $\mathcal{L}(2,\xi)$ に *Hausdorff* 収束する．

ここでは，予想より弱いが次のような主張を得たので報告する．

Theorem 1 (horocyclic convergence). 点列 $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$ が 0 に *horocyclic* に収束するとき，任意の点列 $\beta_n \in \mathcal{L}(\alpha(\lambda_n))$ の任意の集積点は $\mathcal{L}(2)$ に含まれる．逆に，任意の $\beta \in \mathcal{L}(2)$ に対して，0 に *horocyclic* に収束する点列 $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$ が存在して，β に収束する点列 $\beta_n \in \mathcal{L}(\alpha(\lambda_n))$ が取れる．

Theorem 2 (tangential convergence). 点列 $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$ が $\lambda_n \to 0$ かつ $[2\pi i/\lambda_n] \to [\xi]$ を満たすとき，任意の点列 $\beta_n \in \mathcal{L}(\alpha(\lambda_n))$ の任意の集積点は $\mathcal{L}(2,\xi)$ に含まれる．逆に，任意の $\xi \in \mathbb{C}$ と $\beta \in \mathcal{L}(2,\xi)$ に対して，$\lambda_n \to 0$ かつ $[2\pi i/\lambda_n] \to [\xi]$ を満たす点列 $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$ が存在して，β に収束する点列 $\beta_n \in \mathcal{L}(\alpha(\lambda_n))$ が取れる．

証明には Hodgson-Kerckhoff による filling theorem と Brock-Bromberg による drilling theorem を本質的に用いる．

さて，linear slice $\mathcal{L}(\alpha)$ とは $\alpha = \mathrm{tr}(\rho(a))$ を固定したときの変形空間の切り口を，パラメータ $\beta = \mathrm{tr}(\rho(b))$ の空間で見たものがであった．一方で，同じ切り口をパラメータ $\omega := \frac{\mathrm{tr}(\rho(ab))}{\mathrm{tr}(\rho(a))\mathrm{tr}(\rho(b))}$ の空間で見る方がより自然で理解しやすい（下図参照）．実際，a に関する Dehn twist の作用は，この ω 空間では一次分数変換 $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ s.t. $\mathrm{tr}A = \alpha$ に対応する．時間が許せばこのことも説明したい．

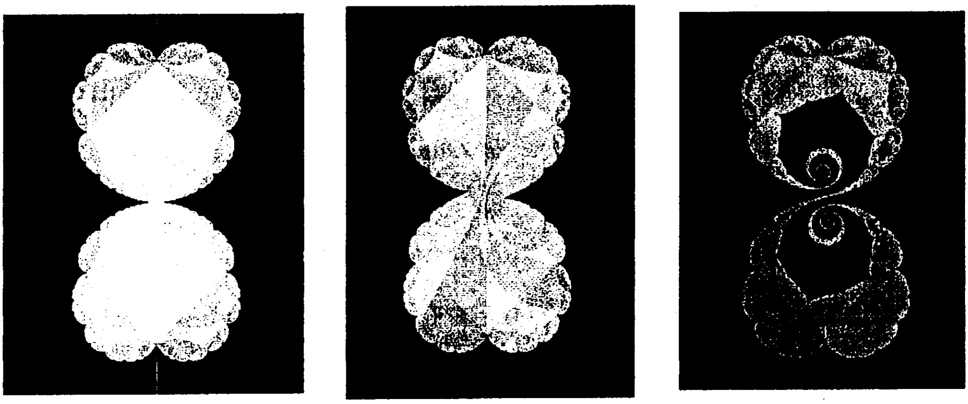


図 1: linear slice $\mathcal{L}(\alpha)$ を ω 空間で見たもの．左から順に $\alpha = 2$ の場合，α が "horocyclic に"2 に近い場合，α が "tangential に"2 に近い場合．これらの画像は和田昌昭氏（阪大）が作成したソフトウェア OPTi を用いて作成した．

ポテンシャルの収束とリヤプノフ指数の近似について

奥山裕介
京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科

Let f be a rational function on $\mathbb{P}^1$ of degree $d \geq 2$. The exceptional set $E(f)$ is the maximal f-backward invariant finite subset of $\mathbb{P}^1$, which is possibly empty and consists of at most two points. The following equidistribution theorem for moving targets is fundamental in complex dynamics.

Theorem 0.1 (Lyubich [4, Theorem 3]). *There is a probability measure μ_f on $\mathbb{P}^1$ such that for every rational function a, which does not identically equal a value in $E(f)$, we have as $k \to \infty$,*

$$\nu_k^a := \frac{1}{d^k + \deg a} \sum_{f^k(w)=a(w)} \delta_w \to \mu_f \quad \textit{weakly.} \tag{0.2}$$

For (Radon) measure μ on $\mathbb{P}^1$, the spherical logarithmic potential is

$$U_\mu(z) := \int_{\mathbb{P}^1} \log[z, w] \mathrm{d}\mu(w),$$

where $[z, w]$ is the chordal distance on $\mathbb{P}^1$. One of main facts from axiomatic potential theory (cf. Brelot [3]) is that if probability measures μ_k tends to μ weakly as $k \to \infty$, then nearly everywhere on $\mathbb{P}^1$,

$$\limsup_k U_{\mu_k} = U_\mu. \tag{0.3}$$

Our principal result is a characterization of convergence (0.3) for $\mu_k = \nu_k^a$ and $\mu = \mu_f$ in dynamical and value distribution context.

Theorem 1. *Let f and a be as in Theorem* 0.1. *At a point $z = z_0 \in \mathbb{P}^1$, we have a convergence of potentials*

$$\lim_{k\to\infty} U_{\nu_k^a}(z_0) = U_{\mu_f}(z_0)$$

of the measures ν_k^a if and only if

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{d^k + \deg a} \log[f^k(z_0), a(z_0)] = 0.$$

Let $f^\#$ be the derivative of f with respect to chordal distance. Theorem 1 allows us to deduce an approximation of the Lyapunov exponent

$$L(f) := \int_{\mathbb{P}^1} \log f^\# \mathrm{d}\mu_f$$

from the equidistribution theorem for moving targets.

Theorem 2. *Let f and a be as in Theorem* 0.1. *Then we have an approximation of the Lyapunov exponent*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{P}^1}\log f^{\#}\mathrm{d}\nu_k^a = L(f)$$

if and only if every critical point c of f satisfies

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{d^k+\deg a}\log[f^k(c),a(c)] = 0.$$

Theorem 2 is a variant of Berteloot, Dupont and Molino approximation of $L(f)$, in one dimension (cf. Szpiro and Tucker [5]): a similar approximation for polynomial automorphisms on $\mathbb{C}^2$ is obtained by Bedford, Lyubich and Smillie [1]. Consider the repelling periodic points of f, and put

$$R_k := \{p\in\mathbb{P}^1; f^k(p)=p, |(f^k)'(p)|>1\},\quad \nu_k := \frac{1}{d^k+1}\sum_{w\in R_k}\delta_w,$$

$$R_k^* := \{p\in R_k; 1\le \forall j<k, f^j(p)\neq p\},\quad \nu_k^* := \frac{1}{d^k+1}\sum_{w\in R_k^*}\delta_w.$$

By Fatou finiteness theorem, the set $\mathrm{NR}(f)$ of non-repelling periodic points of f is finite (counted with multiplicity), and hence we have from Lyubich theorem,

$$\lim_{k\to\infty}\nu_k = \lim_{k\to\infty}\nu_k^{\mathrm{Id}} = \mu_f \quad \text{weakly}.$$

An argument similar to the proof of Theorem 2 proves

Theorem 0.4 (Berteloot, Dupont and Molino [2, Theorem 1.5]). *Let f be a rational function on $\mathbb{P}^1$ of degree $d\ge 2$. Then*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{P}^1}\log f^{\#}\mathrm{d}\nu_k = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{P}^1}\log f^{\#}\mathrm{d}\nu_k^* = L(f). \tag{0.5}$$

Our proof is potential-theoretic, and independent of ergodic theory.

References

[1] Bedford, E., Lyubich, M. and Smillie, J. Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$, *Invent. Math.*, **114**, 2 (1993), 277–288.

[2] Berteloot, F., Dupont, C. and Molino, L. Normalization of bundle holomorphic contractions and applications to dynamics, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **58**, 6 (2008), 2137–2168.

[3] Brelot, M. *Lectures on potential theory*, Notes by K. N. Gowrisankaran and M. K. Venkatesha Murthy. Second edition, revised and enlarged with the help of S. Ramaswamy. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 19, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967).

[4] Ljubich, M. J. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **3**, 3 (1983), 351–385.

[5] Szpiro, L. and Tucker, T. J. Equidistribution and generalized Mahler measures (2005), arXiv: math.NT/0510404.

複素力学系のエネルギーおよびリヤプノフ指数公式の一証明

奥山裕介
京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科

Let f be a rational function on $\mathbb{P}^1$ of $d = \deg f \geq 2$. The exceptional set $E(f) := \{a \in \mathbb{P}^1; f^2(a) = a, \deg_a f^2 = d^2\}$ consists of at most two points. The equidistribution theorem for moving targets is

Theorem 0.1 (Lyubich [7, Theorem 3]). *There is a probability measure μ_f on $\mathbb{P}^1$ such that for every rational function a, which does not identically equal a value in $E(f)$, we have as $k \to \infty$,*

$$(0.2) \qquad \nu_k^a := \frac{1}{d^k + \deg a} \sum_{f^k(w)=a(w)} \delta_w \to \mu_f \quad \textit{weakly.}$$

In the case that f is a polynomial, this fundamental theorem in complex dynamics is due to Brolin [4] and Tortrat [9], and their proofs are potential-theoretic, or more concretely, *electrostatic*. Lyubich's proof in general case is based on a shadowing argument from ergodic theory.

We may give an electrostatic proof of Theorem 0.1 in general case and complete Brolin's and Tortrat's strategy by introducing a *weighted potential theory* on $\mathbb{P}^1$: the Green function G^F of a (homogeneous) lift F of f on $\mathbb{C}^2$ canonically induces a weighted kernel $\Phi(z, w) = \Phi_F(z, w)$

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \ni (p, q) \mapsto \log|p \wedge q| - G^F(p) - G^F(q) \in [-\infty, \exists M]$$

on $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $(p \in \pi^{-1}(z), q \in \pi^{-1}(w))$.

The equilibrium measure μ_f of f in (0.2) is characterized as the (unique) weighted F-equilibrium measure on $\mathbb{P}^1$, that is,

$$V_F = \iint \Phi \mathrm{d}\mu_f \mathrm{d}\mu_f.$$

Using weighted potential theory, we may also give a short proof of formulas on the weighted F-equilibrium energy on $\mathbb{P}^1$ and the Lyapunov exponent $L(f) := \int \log f^{\#} \mu_f$, both of which recently play an important role in studying bifurcation of dynamics of f.

Theorem 0.3 (DeMarco [5, Theorem 1.5], Bassanelli-Berteloot [2, Proposition 4.9], DeMarco [5, Corollary 1.6], respectively).

$$V_F = -\frac{1}{d(d-1)} \log |\operatorname{Res} F|, \tag{0.4}$$

$$\int_{\mathbb{P}^1} (G^F(\cdot) - \log \|\cdot\|) d(\mu_f + \omega) = \frac{1}{d(d-1)} \log |\operatorname{Res} F| - \frac{1}{2}, \tag{0.5}$$

$$L(f) = -\log d - \frac{2}{d} \log |\operatorname{Res} F| + \sum_{i=1}^{2d-2} G^F(C_i^F). \tag{0.6}$$

Here the resultant of F is denoted by $\operatorname{Res} F$, *and* $\{C_i^F ; i = 1, \ldots, 2d-2\} \subset \mathbb{C}^2$ *is a lift of the critical set of f normalized so that* $\det DF(p) = \prod_{i=1}^{2d-2} p \wedge C_i^F$.

For thorough generalization of these formulas in higher dimensions, see [2], [3]. We hope our proof has its own advantage in studying possibly non-archimedean dynamics: our computation indeed yields a non-archimedean version of Theorem 0.3 on Berkovich projective line (cf. [8], [6]). In this setting, (0.4) is due to Baker-Rumely [1, Theorem 3.16], where the proof relied on a sophisticated intersection theory.

Notation 0.7. We denote the origin of $\mathbb{C}^2$ as 0. Let $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \ni (z_0, z_1) \mapsto (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}^1$, $\|\cdot\|$ the Euclidean norm on $\mathbb{C}^2$, and ω the Fubini-Study area element on $\mathbb{P}^1$ normalized as $\omega(\mathbb{P}^1) = 1$. Put $(z_0, z_1) \wedge (w_0, w_1) := z_0 w_1 - z_1 w_0$ on $(\mathbb{C}^2)^2$. The normalized chordal distance on $\mathbb{P}^1$ is

$$[z, w] := |p \wedge q| / (\|p\| \cdot \|q\|) (\leq 1)$$

$(p \in \pi^{-1}(z), q \in \pi^{-1}(w))$.

References

[1] Baker, M. H. and Rumely, R. Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **56**, 3 (2006), 625–688.

[2] Bassanelli, G. and Berteloot, F. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on $\mathbb{P}^k$, *J. Reine Angew. Math.*, **608** (2007), 201–235.

[3] Berman, R. and Boucksom, S. Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium (2008, arXiv.org:0803.1950).

[4] Brolin, H. Invariant sets under iteration of rational functions, *Ark. Mat.*, **6** (1965), 103–144 (1965).

[5] DeMarco, L. Dynamics of rational maps: Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity, *Math. Ann.*, **326**, 1 (2003), 43–73.

[6] Favre, C. and Rivera-Letelier, J. Theorie ergodique des fractions rationnelles sur un corps ultrametrique, *Proc. London Math. Soc.* (to appear, arXiv.org:0709.0092).

[7] Ljubich, M. J. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **3**, 3 (1983), 351–385.

[8] Rumely, R. and Baker, M. Analysis and dynamics on the Berkovich projective line (2004), arXiv.org:math/0407433.

[9] Tortrat, P. Aspects potentialistes de l'itération des polynômes, Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, No. 8, Vol. 1235 of *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin (1987), 195–209.

The Nielsen realization problem for asymptotic Teichmüller modular groups

Ege Fujikawa (Chiba University)
Katsuhiko Matsuzaki (Okayama University)

For a Riemann surface R, let $\mathrm{QC}(R)$ be the group of all quasiconformal automorphisms of R. A quasiconformal mapping class is the homotopy equivalence class $[g]$ of quasiconformal automorphisms $g \in \mathrm{QC}(R)$, and the *quasiconformal mapping class group* $\mathrm{MCG}(R)$ of R is the group of all quasiconformal mapping classes of R. Here the homotopy is considered to be relative to the ideal boundary at infinity. Then we have a surjective homomorphism $q : \mathrm{QC}(R) \to \mathrm{MCG}(R)$. The *realization problem* for the quasiconformal mapping class group $\mathrm{MCG}(R)$ is asking whether there exists a homomorphism $\mathcal{E}|_\Gamma : \Gamma \to \mathrm{QC}(R)$ such that $q \circ \mathcal{E}|_\Gamma = \mathrm{id}|_\Gamma$ for a given subgroup Γ of $\mathrm{MCG}(R)$.

The quasiconformal mapping class group $\mathrm{MCG}(R)$ acts on the Teichmüller space $T(R)$ biholomorphically, and we have a representation $\iota_T : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(T(R))$ in the group $\mathrm{Aut}(T(R))$ of all biholomorphic automorphisms of $T(R)$. The *Teichmüller modular group* $\mathrm{Mod}(R)$ is defined to be the image of ι_T, which is isomorphic to $\mathrm{MCG}(R)$ and coincident with $\mathrm{Aut}(T(R))$ for all Riemann surfaces R of non-exceptional type.

The *Nielsen realization problem* is the realization problem for a finite subgroup of $\mathrm{MCG}(R)$, namely, it is asking whether there exists a homomorphism $\mathcal{E}|_\Gamma : \Gamma \to \mathrm{QC}(R)$ such that $q \circ \mathcal{E}|_\Gamma = \mathrm{id}|_\Gamma$ for a finite subgroup Γ of $\mathrm{MCG}(R)$. For a compact Riemann surface R, Nielsen himself proved that a finite cyclic subgroup Γ can be always realized, and after several partial solutions by Fenchel and Zieschang, Kerckhoff [2] finally proved the following fixed point theorem.

Proposition 1. *Let R be an analytically finite Riemann surface. Then a subgroup Γ of $\mathrm{Mod}(R)$ is finite if and only if it has a common fixed point in $T(R)$.*

Since a Teichmüller modular transformation having a fixed point p in $T(R)$ is realized as a conformal automorphism of the Riemann surface R_p corresponding to p, Proposition 1 is equivalent to the statement that every finite subgroup of $\mathrm{Mod}(R)$ can be realized as a group of conformal automorphisms of the Riemann surface R_p quasiconformally equivalent to R. This gives an affirmative answer to the Nielsen realization problem, namely, there exists a homomorphism $\mathcal{E}|_\Gamma : \Gamma \to \mathrm{QC}(R)$ such that $q \circ \mathcal{E}|_\Gamma = \mathrm{id}|_\Gamma$ for every finite group Γ.

A generalization of Proposition 1 to analytically infinite Riemann surfaces has been given by Markovic [3]. This proves the Nielsen realization problem also for analytically infinite Riemann surfaces.

Proposition 2. *Let R be a Riemann surface in general. For a subgroup Γ of $\mathrm{Mod}(R)$, the orbit $\Gamma(q)$ is bounded for some $q \in T(R)$ if and only if Γ has a common fixed point in $T(R)$. In particular, every finite subgroup Γ of $\mathrm{Mod}(R)$ has a common fixed point p in $T(R)$ and it can be realized as a group of conformal automorphisms of the Riemann surface R_p quasiconformally equivalent to R.*

In this talk, we consider an asymptotic version of the Nielsen realization problem. We say that a quasiconformal homeomorphism f of R is *asymptotically conformal* if, for every $\epsilon > 0$, there exists a compact subset V of R such that the maximal dilatation $K(f|_{R-V})$ of the restriction of f to $R - V$ is less than $1 + \epsilon$. The *asymptotic Teichmüller space* $AT(R)$ is defined in a similar manner to the Teichmüller space by replacing conformal equivalence with asymptotically conformal equivalence. It is of interest only when R is analytically infinite; otherwise trivial.

Every element of $\mathrm{MCG}(R)$ induces a biholomorphic automorphism of $AT(R)$. Then we have a representation $\iota_{AT} : \mathrm{MCG}(R) \to \mathrm{Aut}(AT(R))$ in the group $\mathrm{Aut}(AT(R))$ of all biholomorphic automorphisms of $AT(R)$. The *asymptotic Teichmüller modular group* $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ is defined to be the image of ι_{AT}. Note that the homomorphism ι_{AT} is not injective unless R is either the unit disc or the once-punctured disc.

In [1], we have considered the fixed point problem for asymptotic Teichmüller modular transformations of finite order. By extending its proof, we have our theorem in this talk.

Theorem 3. *Let R be an analytically infinite Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then every finite subgroup of* $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ *has a common fixed point $\hat{p}$ on $AT(R)$.*

Theorem 3 can be regarded as the answer to the Nielsen realization problem for the asymptotic Teichmüller modular group as in Theorem 4 below. For its statement, we use the following notation.

Definition. We say that two quasiconformal automorphisms of a Riemann surface R are *end equivalent* if they are coincident outside some topologically finite subsurface of R. The *end quasiconformal automorphism group* $\mathrm{QC}_e(R)$ is the group of all end equivalence classes of quasiconformal automorphisms of R. Furthermore, the *end conformal automorphism group* $\mathrm{Conf}_e(R)$ is the subgroup of $\mathrm{QC}_e(R)$ consisting of all end equivalence classes that have representatives conformal outside some topologically finite subsurfaces of R.

Let $e : \mathrm{QC}(R) \to \mathrm{QC}_e(R)$ be the natural projection. Also we have a surjective homomorphism $q_e : \mathrm{QC}_e(R) \to \mathrm{Mod}_{AT}(R)$. Then the following commutative diagram is satisfied:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{QC}(R) & \xrightarrow{e} & \mathrm{QC}_e(R) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_e} \\
\mathrm{MCG}(R) \cong \mathrm{Mod}(R) & \xrightarrow{\iota_{AT}} & \mathrm{Mod}_{AT}(R)
\end{array}$$

Theorem 4. *Let R be an analytically infinite Riemann surface satisfying the bounded geometry condition. Then every finite subgroup $\hat{\Gamma}$ of* $\mathrm{Mod}_{AT}(R)$ *can be realized in the end conformal automorphism group* $\mathrm{Conf}_e(R_p)$ *of some Riemann surface R_p quasiconformally equivalent to R. In particular, there exists a homomorphism $\mathcal{E}_e|_{\hat{\Gamma}} : \hat{\Gamma} \to \mathrm{QC}_e(R)$ such that $q_e \circ \mathcal{E}_e|_{\hat{\Gamma}} = \mathrm{id}|_{\hat{\Gamma}}$.*

References

[1] E. Fujikawa and K. Matsuzaki, *Stable quasiconformal mapping class groups and asymptotic Teichmüller spaces*, Amer. J. Math., to appear.

[2] S. P. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. Math. **117** (1983), 235–265.

[3] V. Markovic, *Quasisymmetric groups*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 673–715.

Plemelj の定理の一般化について

志賀　啓成（東工大理工学研究科）

1 Introduction

Plemelj の定理とは，複素平面上の滑らかな曲線 Γ における Cauchy 積分の境界値に関する古典的な定理で，以下のようなものである．

定理 1 Γ を複素平面上の滑らかな単純閉曲線とし，$\mathbb{C}\setminus\Gamma$ の有界な成分を D_+，非有界成分を D_- とする．このとき，Γ 上の次数 α $(0<\alpha<1)$ のヘルダー連続関数 φ の *Cauchy* 積分

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{1}$$

に関して以下が成り立つ．

1. F は各 $\zeta_0 \in \Gamma$ において D_+ および D_- から境界値 $F_+(\zeta_0), F_-(\zeta_0)$ を持ち，

$$F_\pm(\zeta_0) = \pm\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i}P.V.\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta \tag{2}$$

となる．ここに $P.V.$ は主値積分である．特に，Γ 上

$$F_+ - F_- = \varphi \tag{3}$$

である．

2. $F_\pm$ は Γ 上で次数 α のヘルダー連続関数になる．

この結果は，いくつかの形で拡張されている．たとえば Zygmond [2] は，φ がいわゆる Zygmond class に属する時に同様の結果が成り立つことを示している．また Walsh [1] は L^2 関数の Cauchy 積分に対して，Γ 上ほとんどいたるところ (3) が成り立つことを示している．本講演では，ヘルダー連続よりもさらに一般的な関数族に対してこの定理を拡張する．

定義 1 $[0,\infty)$ 上の連続関数 ω で，次の以下の条件を満たすもの全体を $\mathcal{D}$ と書く．

1. ω は単調増加関数で $\omega(0)=0$．また，任意の $\alpha\in(0,1)$ が存在して，$|t|^\alpha\le\omega(t)$ が成り立つ．

2. ω は *doubling* である．すなわち，ある定数 $A>0$ が存在して，$0<t<s\le 2t$ ならば $\omega(t)\le\omega(s)\le A\omega(t)$ が成り立つ．

2 Results

定理 2 Γ，$D_\pm$ は定理 1 と同じものとする．Γ 上の連続関数 φ に対して，ある $\omega\in\mathcal{D}$ と定数 $A>0$ が存在して，$\zeta_1,\zeta_2\in\Gamma$ に対し

$$|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)|\le A\omega(|\zeta_1-\zeta_2|) \tag{4}$$

であるとする．このとき任意の $\sigma\in(0,1)$ に対して，φ の *Cauchy* 積分 $F(z)$ は

$$|F^{(n)}(z)|\delta(z)^n=O(\omega(\delta(z)^\sigma))$$

を満たす．ここに $\delta(z)$ は z と Γ の距離で，$z\in D_-$ のときは z は Γ のある近傍で考える．

定理 3 Γ，$D_\pm,\varphi,\omega$ は定理 1 と同じものとする．さらに，ある $\sigma\in(0,1)$ が存在して

$$\int_0^1\omega(t^\sigma)t^{-1}dt<\infty.$$

であるとする．このとき，φ の *Cauchy* 積分 $F(z)$ に対して *(2)* が成り立つ．また，$\Omega(t):=\max\{\omega(t^\sigma),\int_0^t\omega(s^\sigma)s^{-1}ds\}$ とおくとき

$$|F_\pm(\zeta_1)-F_\pm(\zeta_2)|\le A\Omega(|\zeta_1-\zeta_2|). \tag{5}$$

が成り立つ．

時間が許せばこれらの結果の応用例などを述べたい．また，Walsh の結果を compact bordered Riemann 面に拡張した結果なども述べたい．

参考文献

[1] J. L. Walsh, Polynomial expansions of functions defined by Cauchy's integral, J. Math. Pures Appl. **31** (1952), 221–244.

[2] A. Zygmund, Smooth functions, Duke Math. J. **12** (1945), 47–76.

Subordination chains in several complex variables

濱田 英隆（九州産大工）

Subordination chains in several complex variables were first studied by Pfaltzgraff [22], [23]. He generalized to higher dimensions the univalence criteria and quasiconformal extension results of Becker ([1], [2], [3]). Applications of subordination chains have been given to the characterization of subclasses of biholomorphic maps, univalence criteria, growth theorems and coefficient bounds and quasiconformal extensions ([4–25]).

In one complex variable, every normalized univalent function on the unit disc U can be embedded in a Loewner chain, and has parametric representation, i.e. $f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t v(z,t)$, where $v(z,t)$ is the unique Lipschitz continuous solution on $[0,\infty)$ of

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -vp(v,t) \text{ a.e. } t \geq 0, \quad v(z,0) = z,$$

for some $p = p(z,t)$ such that $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$ for a.e. $t \in [0,\infty)$ and $p(z,\cdot)$ is measurable on $[0,\infty)$ for $z \in U$. In several complex variables, the class $S^0(B^n)$ of normalized biholomorphic maps of B^n which have parametric representation, is a proper subclass of $S(B^n)$ (the class of normalized biholomorphic maps on B^n) (see [5]). We remark that $S^0(B^n)$ may be characterized as the subclass of $S(B^n)$ which consists of those maps f that can be embedded in Loewner chains $f(z,t)$ such that $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on B^n ([12]).

What happens if we allow the subordination chains to be non-normalized? If $a : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ is a function of class C^1 such that $a(0) = 1$ and $|a(\cdot)|$ is strictly increasing on $[0,\infty)$, and if $f(z,t) = a(t)z + \cdots$ is a non-normalized univalent subordination chain on U, then $f_*(z,t^*) = f(e^{-i\theta(t)}z,t)$ is a normalized univalent subordination chain, where $t^* = \log(|a(t)|)$ and $\theta(t) = \arg(a(t))$. That is, there is a normalized univalent subordination chain with essentially the same geometric properties as the original one. In dimension $n \geq 2$, there exist non-normalized subordination chains $f(z,t) = e^{tA}z + \cdots$ which cannot be normalized by an analogous change of variable. Also, there exist maps $f \in S(B^n) \setminus S^0(B^n)$ which have useful embeddings in non-normalized subordination chains. For example, if $A \in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ is such that $m(A) > 0$ and if f is a spirallike map with respect to A, then $f(z,t) = e^{tA}f(z)$ is a univalent subordination chain. However, there exist spirallike maps $f \notin S^0(B^n)$ (see [16]). In connection with this observation, we [8] introduced the class $S^0_A(B^n)$ of maps which have A-parametric representation, i.e. the subclass of $S(B^n)$ which consists of those maps f that can be embedded in univalent subordination chains $f(z,t) = e^{tA}z + \cdots$ such that $\{e^{-tA}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on B^n. We prove that certain results which hold for the class S (growth, embedding, compactness) can be generalized to the above class. It is therefore of interest to consider non-normalized subordination chains in the study of univalent maps on B^n for $n \geq 2$.

References

[1] Becker, J.: Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen, J. Reine Angew. Math., **255**, 23-43 (1972).

[2] Becker, J.: Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien, Math. Annalen, **202**, 321-335 (1973).

[3] Becker, J.: Über die Lösungsstruktur einer Differentialgleichung in der konformen Abbildung, J. Reine Angew. Math., **285**, 66-74 (1976).

[4] Chuaqui, M.: Applications of subordination chains to starlike mappings in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. Math., **168**, 33-48 (1995).

[5] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: Parametric representation of univalent mappings in several complex variables, Canadian J. Math., **54**, 324-351 (2002).

[6] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: Radius problems for holomorphic mappings on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, Math. Nachr., **279**, 1474-1490 (2006).

[7] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Parametric representation and asymptotic starlikeness in $\mathbb{C}^n$, Proc. Amer. Math. Soc., **136**, 3963-3973 (2008).

[8] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Asymptotically spirallike mappings in several complex variables, J. Anal. Math., **105**, 267-302 (2008).

[9] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Spirallike mappings and univalent subordination chains in $\mathbb{C}^n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa-Cl. Sci., **7**, 717-740 (2008).

[10] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Pfaltzgraff, J.A.: Convex subordination chains in several complex variables, Canadian J. Math., **61**, 566-582 (2009).

[11] Graham, I., Hamada, H., Kohr, G., Suffridge, T.J.: Extension operators for locally univalent mappings, Michigan Math. J., **50**, 37-55 (2002).

[12] Graham, I., Kohr, G., Kohr, M.: Loewner chains and parametric representation in several complex variables, J. Math. Anal. Appl., **281**, 425-438 (2003).

[13] Hamada,H., Honda, T.: Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables, Chin. Ann. Math. Ser.B, **29**, 353-368 (2008).

[14] Hamada,H., Honda, T., Kohr, G.: Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation, J. Math. Anal. Appl., **317**, 302-319 (2006).

[15] Hamada,H., Honda, T., Kohr, G.: Parabolic starlike mappings in several complex variables, Manuscripta Math., **123**, 301-324 (2007).

[16] Hamada, H., Kohr, G.: An estimate of the growth of spirallike mappings relative to a diagonal matrix, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A, **55**, 53-59 (2001).

[17] Hamada, H., Kohr, G.: Quasiconformal extension of biholomorphic mappings in several complex variables, J. Anal. Math., **96**, 269-282 (2005).

[18] Hamada, H., Kohr, G.: k-fold symmetrical mappings and Loewner chains, Demonstratio Mathematica, **40** (2007), 85–94.

[19] Hamada, H., Kohr, G., Kohr, M.: Parametric representation and extension operators for biholomorphic mappings on some Reinhardt domains, Complex Variables, **50** (2005), 507–519.

[20] Hamada, H., Kohr, G., Mocanu, P.T., Şerb, I.: Convex subordination chains and injective mappings in $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., to appear.

[21] Kubicka, E., Poreda, T.: On the parametric representation of starlike maps of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ into $\mathbb{C}^n$, Demonstratio Math., **21**, 345-355 (1988).

[22] Pfaltzgraff, J.A.: Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., **210**, 55-68 (1974).

[23] Pfaltzgraff, J.A.: Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in $\mathbb{C}^n$, Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. A I Math., **1**, 13-25 (1975).

[24] Poreda, T.: On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, I - the geometrical properties, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A, **41**, 105-113 (1987).

[25] Poreda, T.: On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, II - the necessary conditions and the sufficient conditions, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A, **41**, 115-121 (1987).

The Loewner differential equation in several complex variables

Peter Duren (Univ. of Michigan), Ian Graham (Univ. of Toronto)
濱田 英隆 (九州産大工), Gabriela Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)

Becker ([1], [2]; see also [3]) studied the general form of solutions to the Loewner differential equation in one complex variable, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t) \text{ a.e. } t \geq 0, \quad \forall z \in U, \tag{1}$$

where $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$ (the well known Carathéodory class of holomorphic functions q on U with $q(0) = 1$ and $\Re q(z) > 0$ for $z \in U$) for any fixed $t \in [0,\infty)$, and $p(z,\cdot)$ is measurable on $[0,\infty)$ for $z \in U$. In one complex variable there exists a unique univalent solution $f(z,t) = e^t z + \cdots$ of (1) (called the canonical solution) given by

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t)$$

locally uniformly on U, for each $s \geq 0$, where the transition function $v = v(z,s,t)$ is the unique Lipschitz continuous solution on $[s,\infty)$ of the initial value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -vp(v,t) \text{ a.e. } t \geq s, \quad v(z,s,s) = z.$$

Becker proved that any other solution $g(z,t)$ of (1) that is holomorphic on U and locally absolutely continuous on $[0,\infty)$ locally uniformly with respect to $z \in U$, has the form $g(z,t) = \Phi(f(z,t))$, where $f(z,t)$ is the canonical solution and Φ is an entire function (compare also [7]). In particular, if $g(\cdot,t)$ is univalent on U and $g(0,t) = g'(0,t) - e^t = 0$ for $t \geq 0$, then $g(z,t) \equiv f(z,t)$. Becker actually considered more general situations, e.g. where $f(z,t)$ has a point singularity at zero, or when the solution is initially defined only on a (punctured) disc of variable radius $r(t)$. However, in several complex variables point singularities are removable, and for simplicity we will restrict our attention to the case where the solution is defined on the full ball.

In this talk, we study the general form of solutions to the Loewner differential equation which have the normalization $f(z,t) = e^{tA}z + \cdots$, where $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ and $k_+(A) < 2m(A)$ [4]. The case in which $A = I_n$ was considered by Graham, Kohr, and Pfaltzgraff [5]. We prove that any solution $g(z,t)$ with $g(0,t) = 0$ for $t \geq 0$, which is holomorphic on B^n and locally absolutely continuous on $[0,\infty)$ locally uniformly with respect to $z \in B^n$, has the form $g(z,t) = \Phi(f(z,t))$, where $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ is a holomorphic mapping with $\Phi(0) = 0$ and $f(z,t)$ is a uniquely determined univalent subordination chain such that $f(0,t) = 0$, $Df(0,t) = e^{tA}$

and $\{e^{-tA}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ is a normal family on B^n. We also observe that univalent solutions are not unique. The proof of the main result requires a generalization to higher dimensions of the well known Carathéodory kernel convergence result for univalent functions. We do not present here the most general form of the kernel convergence theorem for biholomorphic mappings on B^n. Another version of this result with slightly different hypotheses can be found in [6].

References

[1] Becker, J.: Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien, Math. Annalen, **202**, 321-335 (1973).

[2] Becker, J.: Über die Lösungsstruktur einer Differentialgleichung in der konformen Abbildung, J. Reine Angew. Math., **285**, 66-74 (1976).

[3] Becker, J.: Conformal mappings with quasiconformal extensions, in: Aspects of Contemporary Complex Analysis, Academic Press, London-New York, pp. 37-77 (1980).

[4] Duren, P., Graham, I., Hamada, H., Kohr, G.: Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables, Math. Ann., to appear.

[5] Graham, I., Kohr, G., Pfaltzgraff, J.A.: The general solution of the Loewner differential equation on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, Contemporary Mathematics, **382**, 191-203 (2005).

[6] Kohr, G.: Kernel convergence and biholomorphic mappings in several complex variables, Int. J. Math. Math. Sci., **67**, 4229-4239 (2003).

[7] Pommerenke, Ch.: Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1975).

放物型 Bergman 空間上の Schatten-Herz 族 Toeplitz 作用素について

鈴木 紀明 (名城大・理工)
西尾 昌治 (大阪市大・理)
山田 雅博 (岐阜大・教育)

上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}=\boldsymbol{R}^n\times(0,\infty)$ 上の放物型作用素

$$L^{(\alpha)}:=\frac{\partial}{\partial t}+(-\Delta_x)^\alpha \qquad (0<\alpha\le 1)$$

に関する Bergman 空間

$$\boldsymbol{b}_\alpha^2:=\{u\in L^2(\boldsymbol{R}_+^{n+1},V);\ u \text{ は} \boldsymbol{R}_+^{n+1} \text{上 } L^{(\alpha)}\text{-調和}\}$$

を考える. ここで, V は 上半空間 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上の $(n+1)$-次元 Lebesgue 測度である. そのとき, $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ は再生核を持つ Hilbert 空間となる [3]. ある $\gamma\in\boldsymbol{R}$ に対し

$$\int(1+t+|x|^{2\alpha})^\gamma\,d\mu(x,t)<\infty \tag{1}$$

をみたす上半空間上の正測度 μ に対し, 再生核 R_α を用いて,

$$(T_\mu u)(X):=\int R_\alpha(X,Y)\,u(Y)\,d\mu(Y)$$

とおき, Toeplitz 作用素とよぶ. ここでは, コンパクトな Toeplitz 作用素を考察する. そのためには次の補助関数 (δ-averaging function) が有用である:

$$\hat\mu_\delta^{(\alpha)}(Y):=\mu(Q_\delta^{(\alpha)}(Y))\Big/V(Q_\delta^{(\alpha)}(Y)).$$

ここで $\delta>0$ に対し, $Q_\delta^{(\alpha)}(Y)$ は次で定義される α-parabolic δ-Carleson box である:

$$Q_\delta^{(\alpha)}(y_1,\cdots,y_n,s):=\{(x_1,\cdots,x_n,t);\ s\le t\le(1+\delta)s, |x_j-y_j|\le 2^{-1}(\delta s)^{1/2\alpha}\}.$$

実際, $\mathcal{A}$ を上半空間の 1 点コンパクト化における無限遠点として次が成り立つ [4]:

$$T_\mu \text{ is compact on } \boldsymbol{b}_\alpha^2 \Longleftrightarrow \lim_{Y\to\mathcal{A}}\hat\mu_\delta^{(\alpha)}(Y)=0 \tag{2}$$

Hilbert 空間上のコンパクト作用素 T に対し, $|T|:=\sqrt{T^*T}$ の固有値を重複度を考慮して並べた列を $(\lambda_j)_j$ とする.

定義 1. $0<\sigma<\infty$ とする. Hilbert 空間上のコンパクト作用素 T が Schatten σ-族に属するとは $(\lambda_j)_j\in l^\sigma$ となることをいう. また, このとき, $T\in\mathcal{S}^\sigma$ と表す.

次の結果をこれまでの学会 (2008 年度秋, 2009 年度春) で報告した.

定理 A. **(cf. [5, Theorem 1])** $dV^*(X) := t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}dV(X)$, $0 < \sigma < \infty$ とする. (1) をみたす上半空間上の正測度 μ に対し, 次が成り立つ:

$$T_\mu \in \mathcal{S}^\sigma \Longleftrightarrow \hat{\mu}_\delta^{(\alpha)} \in L^\sigma(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*). \tag{3}$$

定義 2. **(Herz 空間)** 正測度 μ は (1) をみたすとし, f は可測とする. また, $0 < \sigma, p, \delta < \infty$ とし, 上半空間の δ-分割を $(Q_\kappa)_{\kappa=(m_1,\cdots,m_n,k)\in \boldsymbol{Z}^{n+1}}$ とする:

$$Q_\kappa := Q_\delta^{(\alpha)}(X_\kappa), X_\kappa = (x_\kappa, t_\kappa) := (m_1\delta^{\frac{1}{2\alpha}}(1+\delta)^{\frac{k}{2\alpha}}, \ldots, m_n\delta^{\frac{1}{2\alpha}}(1+\delta)^{\frac{k}{2\alpha}}, (1+\delta)^k).$$

(i) $T_\mu \in \mathcal{S}_\delta^{\sigma,p} \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|T_\mu\|_{\mathcal{S}_\delta^{\sigma,p}} := \left(\sum_\kappa \|T_{\mu|Q_\kappa}\|_{\mathcal{S}^\sigma}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$ (Schatten-Herz 族)

(ii) $f \in L_\delta^{\sigma,p}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*, (Q_\kappa)_\kappa) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|f\|_{L_\delta^{\sigma,p}} := \left(\sum_\kappa \|f\|_{L^\sigma(Q_\kappa,V^*)}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$

定理 1. $0 < \sigma < \infty$ とする. (1) をみたす上半空間上の正測度 μ に対し, $T_\mu \in \mathcal{S}_\delta^{\sigma,p}$ となるための必要十分条件は $\hat{\mu}_\delta^{(\alpha)} \in L_\delta^{\sigma,p}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*, (Q_\kappa)_\kappa)$ となることである.

関連する先行研究としては上半空間上の調和ベルグマン空間の設定で [1], [2] があるが, 我々は, それらとは異なり, 上半空間をコンパクト集合で分割する. その結果, 次が成り立つことを注意する.

注意 1. $0 < \sigma < \infty$ とする. (1) をみたす上半空間上の正測度 μ に対し, $T_\mu \in \mathcal{S}_\delta^{\sigma,p}$ ならば, T_μ はコンパクトである. また, 条件 $T_\mu \in \mathcal{S}_\delta^{\sigma,p}$ は δ, σ に依らない.

最後に Orlicz 型空間への拡張を試みる.

定理 2. ψ_1, ψ_2 を $[0,\infty)$ 上の狭義単調増加全単射で ψ_1 は凸とする. そのとき, (1) をみたす上半空間上の正測度 μ に対し, 次が成り立つ:

$$T_\mu \in \mathcal{S}_\delta^{\psi_1,\psi_2} \Longleftrightarrow \hat{\mu}_\delta^{(\alpha)} \in L_\delta^{\psi_1,\psi_2}(\boldsymbol{R}_+^{n+1}, V^*, (Q_\kappa)_\kappa).$$

References

[1] B. R. Choe, H. Koo and Y. J. Lee, Positive Schatten (-Herz) class Toeplitz operators on the half space, Potential Analysis, 27 (2007), 73–100.

[2] B. R. Choe and K. Nam, Toeplitz operators and Herz spaces on the half-space, Integral Equations Operator Theory 59 (2007), no. 4, 501–521.

[3] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., 42 (2005), 133–162.

[4] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Hiroshima Math. J., 38 (2008), 177–192.

[5] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Weighted Berezin transformations with application to the Schatten class Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, to appear in Kodai Math. J..

Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type

菱川　洋介 (岐阜大・工)
西尾　昌治 (大阪市大・理)
山田　雅博 (岐阜大・教育)

H を $n+1$ 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}(n \geq 1)$ の上半空間とする。すなわち $H := \{(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ とする。$0 < \alpha \leq 1$ に対し, $L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ とする。ここで, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ $\Delta_x = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ は x に関するラプラシアンである。また, H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$-調和であるとは, 超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となるときをいう。

$m(\alpha) := \min\{1, \frac{1}{2\alpha}\}$, $\sigma > -m(\alpha)$ に対し, 放物型 Bloch type 空間 $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ および $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{B}_\alpha(\sigma) := \{u \in C^1(H) \mid u \text{ は } L^{(\alpha)}\text{-調和}, \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} < \infty\}$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) := \{u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma) \mid u(0,1) = 0\}$$

ここで,

$$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} := |u(0,1)| + \sup_{(x,t)\in H} t^\sigma \left\{ t^{\frac{1}{2\alpha}} |\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)| \right\}$$

および $\nabla_x = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$ である。特に, $\alpha = 1/2$ かつ $\sigma = 0$ のとき, $\mathcal{B}_{1/2}(0)$ および $\widetilde{\mathcal{B}}_{1/2}(0)$ は, 調和 Bloch 空間になることがわかる。放物型 Bloch type 空間 $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ および $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ は, [2] において導入され, この論文でこれらの空間の基本的な性質について研究された。

論文 [1] では, 放物型 Bergman 空間において α–放物型共役関数を定義し, その存在性及び一意性を示した。また, それらを用いて放物型 Bergman 関数の tangential derivative norm の評価を与えた。

我々は, 放物型 Bergman 空間において定義された α–放物型共役関数の概念を, 放物型 Bloch type 空間にも導入し, それらの性質について研究した。本講演では, これらの結果を述べる。放物型 Bergman 空間における α–放物型共役関数は, 全ての $0 < \alpha \leq 1$ に対して, 同様の定義がなされた。しかし, 放物型 Bloch type 空間においては $0 < \alpha < 1$ と $\alpha = 1$ との場合に異なる定義を行うことが適切であることが明らかになった。まず, $0 < \alpha < 1$ の場合の定義について以下で述べるが, これは放物型 Bergman 空間における定義と全く同じである。

定義 (α–放物型共役関数, ただし $0 < \alpha < 1$)

$0 < \alpha < 1$ とする。$u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ に対して, H 上のベクトル値関数 $V = (v_1, \cdots, v_n)$ (各 v_j が H 上の実数値関数) が u の α–放物型共役関数であるとは, 次の条件を満たすときをいう。

(C.1) $\quad \partial_j u = \partial_t v_j, \quad \partial_k v_j = \partial_j v_k,$

(C.2) $\quad \mathcal{D}_t^{\frac{1}{\alpha}-1} u = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j,$

ここで, $\mathcal{D}_t = -\partial_t$ であり, $\mathcal{D}_t^{\frac{1}{\alpha}-1} u$ は, u の $\frac{1}{\alpha} - 1$ 次分数ベキ微分を表す。

$\alpha = 1/2$ の場合を考える。上で述べたように $\alpha = 1/2$ かつ $\sigma = 0$ のとき，$\widetilde{\mathcal{B}}_{1/2}(0)$ は，調和 Bloch 空間になる。また, $\alpha = 1/2$ の場合, 等式 (C.1) および (C.2) は，以下の調和関数に対する一般化されたコーシー・リーマンの関係式になる。

$$\partial_j u = \partial_t v_j, \quad \partial_k v_j = \partial_j v_k,$$
$$-\partial_t u = \textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j v_j,$$

次の定理は，$0 < \alpha < 1$ の場合の，放物型 Bloch type 空間における α–放物型共役関数の存在性及び一意性を示している。

定理 1. $0 < \alpha < 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ とする。α, σ が $\eta := \frac{1}{2\alpha} - 1 + \sigma > -\frac{1}{2\alpha}$ を満たすならば，u の α–放物型共役関数 $V = (v_1, \cdots, v_n)$ が唯一存在して，全ての v_j が $v_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\eta)$ となる。さらに，u によらないある定数 $C = C(n, \alpha, \sigma) > 0$ が存在して，

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq \sum_{j=1}^n \|v_j\|_{\mathcal{B}_\alpha(\eta)} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}$$

注意として，定理 1 の η に関する条件は $0 < \alpha \leq 1/2$ のとき常に満たされ，また $\alpha = 1/2$ のとき $\eta = \sigma$ であることに触れておく。

$\alpha = 1$ のときの結果を以下で述べる。

定理 2. $\eta := -\frac{1}{2} + \sigma > -\frac{1}{2}$ （すなわち，$\sigma > 0$），$u \in \widetilde{\mathcal{B}}_1(\sigma)$ とする。このとき，等式 (C.1) および以下の (C.2)' を満たす $V = (v_1, \cdots, v_n)$, $v_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_1(\eta)$ が唯一存在する。

(C.2)' $$u - \lim_{r \to \infty} u(0, r) = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j$$

さらに，u によらないある定数 $C = C(n, \sigma) > 0$ が存在して，

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_1(\sigma)} \leq \sum_{j=1}^n \|v_j\|_{\mathcal{B}_1(\eta)} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_1(\sigma)}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ とする。注意として，u が放物型 Bergman 関数ならば $\lim_{r \to \infty} u(x, r) = 0$ であり，また $0 < \alpha \leq 1$ および $\sigma > 0$ のとき $u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ に対して $\lim_{r \to \infty} u(x, r)$ が存在して $\lim_{r \to \infty} u(x, r) = \lim_{r \to \infty} u(0, r)$ であることに触れておく。

References

[1] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[2] Y. Hishikawa and M. Yamada, Function spaces of parabolic Bloch type, preprint.

[3] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math. **42**(2005), 133–162.

ディリクレ有限性が有界性を導くリーマン面

中井 三留（名工大・名誉教授）

開 Riemann 面 R 上の調和関数論に於いて最も基本的な有限性を与える規数に Dirichlet 積分 $\int_R du \wedge *du =: D(u;R)$ に依る Dirichlet セミノルム $D(u;R)^{1/2}$ と上限ノルム $\|u;R\|_\infty := \sup_{z\in R}|u(z)|$ がある. 例え調和関数 u に限定しても $D(u;R) < \infty$ と $\|u;R\|_\infty < \infty$ の間には, 一般には, 何の関係も無い. しかし R の理想境界のあり方に何等かの退化が見られると, 前者（又は後者）が後者（又は前者）を必然的に誘導すると言う現象が起こることがある. 今回は, 調和関数 u に対して常に $D(u;R) < \infty$ が $\|u;R\|_\infty < \infty$ を保証すると言う性質を持つ開 Riemann 面 R を論ずる. R 上の調和関数 u 全体の作る線形空間を $H(R)$, その中で $D(u;R) < \infty$（又は $\|u;R\|_\infty < \infty$）を満たすものの作る線形部分空間を $HD(R)$(又は $HB(R)$）と記し, 更にそれらの共通部分である部分空間 $HBD(R) := HB(R) \cap HD(R)$ も考える. $H(R)$ の部分空間 X の線形次元を $\dim X$ と記し $\dim X \in \mathbb{N}$ の時 X は有限次元, そうでない時無限次元と言い $\dim X = \infty$ と記す. 包含関係 $HD(R) \subset HB(R)$ は等式 $HD(R) = HBD(R)$ と同値であることに注意すると, 何時でも成り立つ自然な包含 $HD(R) \supset HBD(R)$ に対し, その逆包含関係である $HD(R) \subset HBD(R)$ は

$$HD(R) = HBD(R) \tag{1}$$

と表される. よって上に述べた所を再言すれば, 目的は (1) を満たす面 R の研究である. 特に問いたい所は (1) ならば必然的に $\dim HD(R) < \infty$ となるか否かである. Sario-Tôki 円板 $\hat{\mathbb{D}} := \mathbb{D}/Q$（$Q$ は $\mathbb{D}$ の点の間の或る同値関係）(cf. [1],[6]) を使って作る有限植林面又は有限連鎖面で例示することにより $\{\dim HD(R) : (1) \text{ を満たす } R\} \supset \mathbb{N}$ は良く知られた所なので, 更に上の左辺の集合が ∞ を含むか否かが問題である. 先ず, 正誤はともかく, (1) ならば常に $\dim HD(R) < \infty$ ではないかと疑う根拠を述べる. δ を R の Royden 調和境界とし δ の完閉部分集合 K の（2位の変分）容量を $\mathrm{cap}(K)$ と記すとき (cf. [5]), 次の (1) の特徴付けが成り立つ (cf. [3]):

定理 1: (1) となる必要十分条件は $\inf_{\zeta\in\delta}\mathrm{cap}(\{\zeta\}) > 0$ である.

従って $\dim HD(R) = \#\delta$（有限個又は無限個）だから $\dim HD(R) < \infty$ に賛同したくなる. 他方, (1) であっても $\dim HD(R) = \infty$ となる R があるのではと疑う根拠も述べる. R 上の局所一様収束と Dirichelet 収束の同時収束に依る位相で $HBD(R)$ は $HD(R)$ の稠密部分空間である (cf. e.g. [6]) から (1) はさほどの退化現象とも思えず, 常に $\dim HD(R) < \infty$ 等と言う強烈な病理現象を惹起するほどの毒性は無く, $\dim HD(R) = \infty$ となる R はあっても不思議でない. 2 年あまりのこの二つの

想いの葛藤（本当の所は娯楽）の末やっと得た答えは:

定理 2: **(1) でありながら $\dim HD(R) = \infty$ となる R が存在する**：

$$\{\dim HD(R) : (1) \text{ を満たす } R\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

存在証明には, やはり $\hat{\mathbb{D}}$ のコピーを可算無限個用意して, それらを順次適当に反等角的に接合して行って得られる連鎖面が求める物となる. 植林面として構成しようとした何度もの試みはすべて失敗であった. 鍵となる着想は, 次の観察にある. $\hat{\mathbb{D}}$ 内の $Q = id.$ となる部分に含まれる同心円環内に取った円弧

$$\gamma : |z| = \rho \in (0,1), |\arg z| < \theta \in (0,\pi)$$

に対して γ の $\hat{\mathbb{D}}$ 内での Green 容量を $\mathrm{cap}(\gamma)$, γ の $\hat{\mathbb{D}}$ 内 $z = 0$ で測る調和測度を $\mathrm{hm}(\gamma)$ とすると次の関係式が成立する：

$$\mathrm{cap}(\gamma)\log(1/\rho) = \mathrm{hm}(\gamma) \geqq \theta/\pi. \tag{2}$$

因みに今一つの方向 $HB(R) \subset HD(R)$, 即ち

$$HB(R) = HBD(R) \tag{3}$$

となる Riemann 面 R については既に研究済で, (3) の或る特徴付けも得られ, 又定理 2 と同様の結論 $\{\dim HB(R) : (3) \text{ を満たす } R\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ も得られている (cf. [4]). (1) と (3) が同時に成立する時, 即ち $HD(R) = HB(R)$ の時には $\dim HD(R) = \dim HB(R) < \infty$ が成立する (正岡の定理 [2]; [3] も参照).

参照文献

[1] L. V. AHLFORS AND L. SARIO: *Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.

[2] H. MASAOKA: *The class of bounded harmonic harmonic functions and harmonic functions with finite Dirichlet integral on hyperbolic Riemann surface*, Lecture Notes of Kyoto Institute of Mathematical Analysis, **1553**(2007), 132-136.

[3] M. NAKAI: *Extremal functions for capacities*, Proceedings of the Workshop on Potential Theory in Hiroshima 2007, 83-102.

[4] M. NAKAI: *Spectral resolutions of bounded harmonic functions*, Proceedings of the Workshop on Potential Theory in Akita 2008, 81-104.

[5] M. NAKAI: *Extremal functions for capacities*, J. Math. Soc. Japan, **61**(2009), 418-446.

[6] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1970.

Orlicz-Sobolev capacity of balls

二村 俊英　大同大学・教養部
水田 義弘　広島大学大学院・理学研究科
大野 貴雄　広島商船高等専門学校・一般教科
下村 哲　広島大学大学院・教育学研究科

本講演では，Adams, Hurri-Syrjänen [1]，Joensuu [3, 4]，Mizuta [6], Mizuta, Shimomura [7] の研究に関連して，球の Orlicz-Sobolev 容量について報告する．

α $(0 < \alpha < n)$ 次のリースポテンシャル

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

を考える．ここに，f は非負可測関数で $I_\alpha f \not\equiv \infty$ と仮定する．

条件

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_p(f(y))\, dy < \infty$$

を考える．ここに，$\varphi_p(r) = r^p\varphi(r)$, $1 < p < \infty$ であり，φ は開区間 $(0,\infty)$ 上の正値の単調関数で

$$c_1^{-1}\varphi(r) \le \varphi(r^2) \le c_1\varphi(r) \quad (r > 0).$$

$\lim_{r\to 0+} r^p\varphi(r) = 0$ に注意して，$\varphi_p(0) = 0$ とおく．

開集合 $G \subset \mathbf{R}^n$ に対して,

$$\int_G \varphi_p(|g(x)|)\, dx < \infty$$

を満たす G 上の可測関数 g からなる関数空間を $L^{\varphi_p}(G)$ とし,

$$\|g\|_{\varphi_p,G} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_G \varphi_p(|g(x)|/\lambda)\, dx \le 1\right\}$$

とする．

集合 $E \subset G$ に対して, (α,φ_p)-容量は

$$C_{\alpha,\varphi_p}(E;G) = \inf \|f\|_{\varphi_p,G}$$

と定義する．ここに，下限は G^c 上で $f=0$, $x \in E$ に対して $I_\alpha f(x) \ge 1$ であるような可測関数 f のすべてに渡ってとられる (cf. Meyers [5], Mizuta [6], Ziemer [8])．

$R>0$に対して,

$$\tilde{\varphi}_p(r)=\int_r^R [t^{n-\alpha p}\varphi(t^{-1})]^{-1/(p-1)}\,dt/t$$

を考える.

定理. $p>1$, $\tilde{\varphi}_p(0)=\infty$とする. このとき, $R>0$に対して, 定数$A>0$が存在して

$$A^{-1}\tilde{\varphi}_p(r)^{-(p-1)/p}\le C_{\alpha,\varphi_p}(B(0,r);B(0,R))\le A\tilde{\varphi}_p(r)^{-(p-1)/p}\qquad(0<r<R/2)$$

Adams, Hurri-Syrjänen [1] は, $\varphi(t)=(\log(e+t))^{\beta}, p=n/\alpha>1, 0\le\beta\le p-1$のときについて論じている. Joensuu [4] は, φが非減少の場合を, 若干の条件をつけて示した.

参考文献

[1] D. R. Adams and R. Hurri-Syrjänen, Capacity estimates, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1159-1167.

[2] T. Futamura, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Orlicz-Sobolev capacity of balls, preprint.

[3] J. Joensuu, Orlicz-Sobolev capacities and their null sets, to appear in Rev. Mat. Complut.

[4] J. Joensuu, Estimates for certain Orlicz-Sobolev capacities of an Euclidean ball, preprint.

[5] N. G. Meyers, A theory of capacities for potentials in Lebesgue classes, Math. Scand. **8** (1970), 255-292.

[6] Y. Mizuta, Continuity properties of potentials and Beppo-Levi-Deny functions, Hiroshima Math. J. **23** (1993), 79-153.

[7] Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties of Riesz potentials of Orlicz functions, Tohoku Math. J. **61** (2009), 225-240.

[8] W. P. Ziemer, Weakly differentiable functions, Springer-Verlag, New York, 1989.

Bohr's theorem on power series

TATSUHIRO HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)
HIDETAKA HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)
GABRIELA KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)

Let U be the unit disc in $\mathbb{C}$ and let $f : U \to U$ be a holomorphic function with Taylor expansion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Then

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k| < 1 \quad \text{for } |z| < \frac{1}{3}.$$

This result, known as Bohr's theorem, was originally obtained in [2] for $|z| < 1/6$. The fact that the inequality is actually true for $|z| < 1/3$ and that the constant $1/3$ is best possible was obtained independently by Riesz, Schur and Wiener.

Dineen and Timoney [3] considered the generalization to multidimensional polydiscs and gave some partial solutions. In recent years, a lot of attention has been paid to multidimensional generalizations of Bohr's theorem. Such generalizations were obtained by studying the power series of a holomorphic function defined in bounded complete Reinhardt domains in $\mathbb{C}^n$. For functions defined in

$$B_{\ell_p^n} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p \right)^{1/p} < 1 \right\}$$

with modulus less than 1, these results can be summarized as follows:

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{3\sqrt[3]{e}} < K \le \frac{1}{3} \quad \text{if } 0 < p \le 1,$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{3\sqrt[3]{e}} \frac{1}{n^{1-1/p}} \le K < 3 \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1-1/p} \quad \text{if } 1 \le p \le 2,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{n}} \le K < 2\sqrt{\frac{\log n}{n}} \quad \text{if } 2 \le p \le \infty,$$

where K is the supremum of $r \in [0,1]$ such that $\sum_{\alpha \ge 0} |c_\alpha z^\alpha| < 1$ for $z \in rB_{\ell_p^n}$ whenever $|\sum_{\alpha \ge 0} c_\alpha z^\alpha| < 1$ for $z \in B_{\ell_p^n}$. Here, the sum is taken over multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, where α_j are nonnegative integers. However, the above results do not give a complete generalization of Bohr's theorem to several complex variables. Also, when $p > 1$, the above results cannot be generalized to infinite dimensional spaces. These can be verified by putting $n = 1$ or letting $n \to \infty$ in the equations (2) and (3). On the other hand, Aizenberg [1, Theorem 8], Liu and Wang [6] gave another generalization of Bohr's theorem using homogeneous expansions of holomorphic functions.

In this talk, we will generalize Bohr's theorem to holomorphic mappings $f : G \to B_Y$, where G is a bounded balanced domain in a complex Banach space X and B_Y is the unit ball in a complex Banach space Y. We also assume that B_Y is homogeneous. Moreover, we show that the constant $1/3$ is best possible, if B_Y is the unit ball of a J*-algebra.

References

[1] L. Aizenberg, *Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series*, Proceedings of the American Mathematical Society **128** (2000), 1147–1155.

[2] H. Bohr, *A theorem concerning power series*, Proceedings of the London Mathematical Society(2) **13** (1914), 1–5.

[3] S. Dineen and R. M. Timoney, *Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr*, Studia Mathematica **94** (1989), 227–234.

[4] H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, *Bohr's theorem for holomorphic mappings with values in homogeneous balls*, Israel J. Math. **173** (2009), to appear.

[5] L. A. Harris, *Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces*, in Infinite Dimensional Holomorphy, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 364, 13-40, Springer Verlag, Berlin, 1974.

[6] T. Liu and J. Wang, *An absolute estimate of the homogeneous expansions of holomorphic mappings*, Pacific Journal of Mathematics **231** (2007), 155–166.

あるHartogs領域のベルグマン核の多重対数関数による明示公式

山盛厚伺(名大多元数理)

1 準備

一般に複素領域のベルグマン核の明示公式を得ることは難しい問題である. 従って,明示公式が得られるような領域を見出すことは意味のある問題であるといえる. 正の実数定数 $\mu > 0$ を固定し, $D_{n,m} := \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m; ||\zeta||^2 < e^{-\mu||z||^2}\}$ と定義する. この領域のベルグマン核が多重対数関数を用いて表されることを報告する. 多重対数関数 $Li_s(t)$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}t^k$ で定義される関数で $|t| < 1, \forall s \in \mathbb{C}$ なる条件の下で収束する. 特に s が負整数ならば($s = -r$と置く), 次の表示を持つ:

$$Li_{-r}(t) = \sum_{j=0}^{r} A(r,j)t^{r-j}(1-t)^{-r-1}, \tag{1}$$

ここで, $A(r,j) = \sum_{\ell=0}^{j+1}(-1)^{\ell}\binom{r+1}{\ell}(j-\ell+1)^r$.

Fock-Bargmann空間とその再生核(Fock-Bargmann核とよばれる)について復習しておく. Fock-Bargmann空間とは $\mathbb{C}^n$上の重み関数 $e^{-\mu||z||^2}$ に関する重み付きベルグマン空間のことをいう. この空間の再生核 $K_{n,\mu}$ は具体的に

$$K_{n,\mu}(z,z') = \frac{\mu^n e^{\mu\langle z,z'\rangle}}{\pi^n} \quad (z,z' \in \mathbb{C}^n),$$

と表される. 我々の主結果の証明において中心的な役割を果たすLigockaの定理についても触れておこう. Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の複素領域(有界である必要はない)とし, p を Ω 上の正定値, 連続な関数とする. このとき, $\mathbb{C}^{n+m}$ 内の領域 $\Omega_{m,p}$ を $\Omega_{m,p} := \{(z,\zeta) \in \Omega \times \mathbb{C}^m; ||\zeta||^2 < p(z)\}$ によって定義する. 領域 $\Omega_{m,p}$ のベルグマン核と Ω 上の重み付きベルグマン核との間に次のような関係があることをLigockaは証明した.

定理 1 ([3]). *K_m を $\Omega_{m,p}$ のベルグマン核とし, K_{Ω,p^k} を Ω 上の重み関数 p^k に関する重み付きベルグマン核とする. このとき, K_m は K_{Ω,p^k} を用いて次のように表される:*

$$K_m((z,\zeta),(z',\zeta')) = \frac{m!}{\pi^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+1)_k}{k!}K_{\Omega,p^{k+m}}(z,z')\langle\zeta,\zeta'\rangle^k,$$

ここで, $(a)_k$ は Pochhammer symbol $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ を表す.

2 主結果

上記のFock-Bargmann核の具体的表示及びLigockaの定理を用いることで次の結果が得られた.

定理 2. 領域 $D_{n,m}$ のベルグマン核 $K_{D_{n,m}}$ は具体的に次で与えられる:

$$K_{D_{n,m}}((z,\zeta),(z',\zeta')) = \frac{\mu^n e^{m\mu\langle z,z'\rangle}}{\pi^{n+m}} \frac{d^m}{dt^m} Li_{-n}(t)|_{t=e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle} \tag{2}$$

$$= \frac{\mu^n}{\pi^{n+m}} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \frac{Li_{-(n+1)}(e^{\mu\langle z,z'\rangle}t)}{t}|_{t=\langle\zeta,\zeta'\rangle}. \tag{3}$$

注意 1. $|e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle| < 1$ であり, いま, $-n$ が負整数であるから, 式(*1*)より $\frac{d^m}{dt^m} Li_{-n}(t)|_{t=e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle}$ は $e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle$ に関する有理関数である. また, $\frac{d^m}{dt^m} Li_{-n}(t)$ は第二種スターリング数とLerchの超越関数による表示がある.

3 応用

我々の主結果の応用として領域 $D_{n,1}$ に対するLu Qi-Keng問題を解くことができる.
ここで, Lu Qi-Keng問題とは

"複素領域 Ω のベルグマン核が($\Omega \times \Omega$上で)零点を持つか判定せよ"

という問題である. この問題の動機, 既知の結果については[1], [2], [4]などが詳しい.
次の補題を用意する.

補題 1. 関数 $Li_{-n}(t)/t$ は任意の $n \geq 3$ に対し$|z_0| < 1$ なる零点 z_0 を持つ.

補題 2. 任意の $|t| < 1$ に関して $t = e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle$ となる $(z,\zeta),(z',\zeta') \in D_{n,m}$ が存在する.

上記補題と我々の主定理を使うことで次が得られる.

定理 3. ベルグマン核 $K_{D_{n,1}}$ は $n = 1$ のとき零点を持たず, $n \geq 2$ のとき零点を持つ.

注意 2. ベルグマン核 $K_{D_{n,m}}$ に関しては零点の有無は μ の値に依存していないが. 一般に Ω_{m,p^μ} という形の領域のベルグマン核の零点の有無は μ にも依存する[5].

参考文献

[1] H.P. Boas. Lu Qi-Keng's problem. *J. Korean Math. Soc*, 37(2):253--267, 2000.

[2] H.P. Boas, S. Fu, and E.J. Straube. The Bergman kernel function: explicit formulas and zeroes. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(3):805-811, 1999.

[3] E. Ligocka. Forelli-Rudin Constructions and weighted Bergman projections. *Studia Math*, 94:257-272, 1989.

[4] Yin WeiPing. Lu Qi-Keng conjectue and Hua domain. *Science in China Series A: Mathematics*, 51 (4):803-818, 2008.

[5] F.Z. Demmad-Abdessameud. Polynômes de Hua, noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs et problème de Lu Qikeng Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol. 67, 1 (2009), 55 – 89

有界正則写像の集積値集合

松島 敏夫（石川工業高専）

n 次元複素単位球 B_n （$n \geq 1$）で定義される有界正則関数 f の境界挙動について、「f は B_n の境界 ∂B_n のほとんどすべての点において admissible limit （$n=1$ の場合 nontangential limit）を持つ」という Fatou 型の定理がよく知られている。有界正則写像についても同様の結果が成立するが、加えて次の結果が得られている [2]。

定理0. $\{\zeta_k\}_{k=1}^{m}$, $1 \leq m \leq +\infty$ を ∂B_n の任意の点列とし、g は任意の正整数とする。各 ζ_k に対して $1 \leq s(\zeta_k) \leq g$ をみたす任意の整数 $s(\zeta_k)$ と、$\sum_{j=1}^{s(\zeta_k)} k(j) \leq g$ をみたす正整数の組 $\left(k(1), k(2), \ldots, k\big(s(\zeta_k)\big)\right) \in \left(\mathbb{Z}_+\right)^{s(\zeta_k)}$ を任意に与える。このとき、B_n を $\mathbb{C}^g$ $(g < +\infty)$ にうつす有界正則写像 F で、各 ζ_k における半径にそった集積値集合が、次元がそれぞれ $k(1), k(2), \ldots, k\big(s(\zeta_k)\big)$ である $s(\zeta_k)$ 個の半径正の閉球の直積となるものが存在する。

今回この定理を複素単位球以外の領域に拡張することを試みた。以後 Ω を $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ 内の領域とする（以下の定義について、くわしくは [1]）。

定義1. ζ を Ω の境界上の点とする。
(1) ζ が Ω で直線接近可能であるとは、$\{z \in \mathbb{C}^n : z = \zeta + sv,\ 0 < s \leq 1\} \subset \Omega.$ が成り立つベクトル v が存在することをいう。$V(\zeta)$ でこのような v 全体の集合をあらわす。
(2) F を Ω から $\mathbb{C}^g$ への写像、$v \in V(\zeta)$ とする。F の ζ における v にそった直線集積値集合を下のように定義する。

$$\mathrm{CL}(F : \zeta, v) = \bigcap_{T<1} \overline{\{F((1-t)v + \zeta) : T < t < 1\}}$$

定義2.
(1) $\zeta \in \partial\Omega$ が C-point であるとは、ζ を含み Ω と交わらない $\mathbb{C}^n$ の複素超平面が存在することをいう。Ω が C-domain であるとは、Ω の任意の境界点が C-point であることをいう。$n=1$ のときは、$\{\zeta\}$ を上の超平面と考える。
(2) $\mathbb{C}$ の領域 D が L-connected であるとは、D が
  (a) D は単連結 (b) $0 \notin D$ (c) 任意の $z \in D$ に対して $\arg z \leq \Theta$ をみたす定数 Θ が存在する
の3条件が成立することをいう。

定義3. $\zeta \in \partial\Omega$ を C-point とする。

$$H = \{z = (z_1, \cdots z_n) \in \mathbb{C}^n : c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n + c_0 = 0\}$$

を ζ を含み Ω と交わらない複素超平面とする。さらに $\Pi_\zeta(z) = c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n + c_0$ とおく。ζ が H による CL-condition をみたすとは、$\Pi_\zeta(\Omega) = \{w \in \mathbb{C} : w = \Pi_\zeta(z), z \in \Omega\}$ が L-connected であることをいう。

主結果は次の通りである。

定理. $\{\zeta_k\}_{k=1}^m \subset \partial\Omega$, $1 \leq m \leq +\infty$ を直線接近可能な点列とする。各 k に対して ζ_k を含み Ω と交わらず、すべての ζ_k が H_k による CL-condition をみたすような複素超平面 H_k が存在すると仮定する。さらに $k \neq l$ のとき、$H_k \cap H_l \not\ni \zeta_k, \zeta_l$ または $H_k = H_l$ がなりたつとする。
各 ζ_k に任意の $v_k \in V(\zeta_k)$ を1つ与えて固定する。
このとき以下が成立する：
各 ζ_k に対して $1 \leq s(\zeta_k) \leq g$ をみたす任意の整数 $s(\zeta_k)$ と、$\sum_{j=1}^{s(\zeta_k)} k(j) \leq g$ をみたす正整数の組 $\Big(k(1), k(2), \ldots, k\big(s(\zeta_k)\big)\Big) \in \big(\mathbb{Z}_+\big)^{s(\zeta_k)}$ を任意に与える。このとき、Ω を $\mathbb{C}^g$ $(g < +\infty)$ にうつす有界正則写像 F で、$\mathrm{CL}(F : \zeta_k, v_k)$ が、次元がそれぞれ $k(1), k(2), \ldots, k\big(s(\zeta_k)\big)$ である $s(\zeta_k)$ 個の半径正の閉球の直積となるものが存在する。

定理の仮定をみたす Ω の例を挙げる。いずれの場合も $n \geq 1$、$\{\zeta_k\}_{k=1}^m \subset \partial\Omega$ は任意でよい。

例1. $\mathbb{C}^n$ の複素単位球 B_n

例2. $\mathbb{C}^n$ の凸領域

例3. $\Omega = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Im}\ z_1 > 0\}$

例4. $\Omega = \{z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Im}\ z_1 > -(\mathrm{Re} z_1)^2\}$

例1の場合、v_k として ζ_k を端点とする半径にそったベクトルをとれば、定理0を与える。例2では Ω に有界性を仮定していない。例4の Ω は有界でも凸でもない。

References

[1] T. Matsushima, Bounded holomorphic functions and maps with some boundary behavior, J. Math. Anal. Appl., **285** (2003) 691-707.

[2] T. Matsushima, Bounded holomorphic maps in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ with wild boundary behavior, preprint.

$\mathbb{C}^n$ の実超曲面へ距離の Levi form の 大域的な表示と非退化条件

松本 和子 (阪府大総合教育)

1. 複素多様体 D が Stein であるための必要十分条件は, D が「強」多重劣調和関数によって exhaust されることである (Grauert). D が別の複素多様体 X の部分領域のとき, D 上の強多重劣調和関数は, X の計量から決まる D の境界距離 $\delta_{\partial D}$ を用いて構成されることが多い. D が擬凸 (locally Stein) のとき,

(1) $X = \mathbb{C}^n$ の場合, $-\log \delta_{\partial D}$ は多重劣調和である (Oka).
(2) $X = \mathbb{P}^n$ の場合, $-\log \delta_{\partial D}$ は強多重劣調和である (Takeuchi).

(1) の場合, $\mathbb{C}^n$ には $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ という「強」多重劣調和関数が存在するので, $-\log \delta_{\partial D} + \|z\|^2$ が D の強多重劣調和な exhaustion function になる. さらに D の境界 $M := \partial D$ が C^2 級の実超曲面で, D (または M) が強擬凸なら, $-\log \delta_M$ 自身が複素接方向に強多重劣調和 (ゆえに $1/\delta_M$ は強多重劣調和) になるが, この逆は, M が Levi flat な場合でも成り立たない.

2. $D \subset \mathbb{C}^n$ 上に強多重劣調和関数が構成できるための D の境界 M の条件を調べることを目的として, $-\log \delta_M$ の Levi form と M の定義関数の 2 階までの微分との間の具体的な関係 (等式) を求め始めた. 以前に, $y_n = r(z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n)$ という形の M の定義関数と, 特別な座標系を用いて, 一通りの結果を得ている ([1], [2] 参照). しかし以前の結果は, 例えば $-\log_M$ の Levi form が複素接方向に大域的に (1 点でだけでなく 1 点の近傍で) 退化するための条件を求めるにも窮屈であった. また, このような問題を考え始めた大きな動機の 1 つに, 「$\mathbb{P}^n$ $(n \geq 2)$ には, C^2 級の Levi flat な実超曲面は存在しないか?」という問題の存在があり, 今後 $D \subset \mathbb{P}^n$ の場合に $-\log \delta_M$ の Levi form の表示を求めてみたいという思いもある.

今回, D が $\mathbb{C}^n$ の部分領域で, D の C^2 級の境界 M の定義関数

が $\rho(z_1,\ldots,z_n)=0$ の場合に, M までの符号付き距離 δ_M^* の Levi form の表示公式を得ることができたので, それを報告する.

3. M の C^2 級の定義関数 (実数値関数) ρ に対し

$$H=\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial\bar z_j}\right),\quad S=\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial z_j}\right)$$

とおく. $\delta^*(z)=\delta_M^*(z)$ を $z\in\mathbb{C}^n$ から M までの符号付き距離 (符号は ρ と同じで D で負) とし, $z\in\mathbb{C}^n$, $p\in M$ に対し

$$\Lambda(z,p)=H(p)-\delta^*(z)S(p)\big[E+\delta^*(z)\overline{H}(p)\big]^{-1}\overline{S}(p)$$

とおく. $\Lambda(z,p)$ は Hermite 行列であり, $H(p)$ が半正定値なら $\Lambda(z,p)$ $(z\in D)$ もそうである. C^2 級の実超曲面 M の近くの $z\in\mathbb{C}^n$ に対し, $\delta(z)=|\delta^*(z)|=\|z-p\|$ となる $p=w(z)\in M$ がただ 1 つ存在する. このとき, 次が成り立つ.

定理 M の近くで $\|\nabla\rho\|=1$ のとき

$$\left(\frac{\partial^2\delta^*}{\partial z_i\partial\bar z_j}\right)(z)=\frac{1}{2}\Lambda(z,w(z))\big[E+\delta^*(z)\Lambda(z,w(z))\big]^{-1}.$$

M 上 $\|\nabla\rho\|=1$ の場合にも, 複素接方向上の Herimite 形式として同様の結果が得られる. ここで, $\|\nabla\rho\|^2=\sum_{i=1}^n|\partial\rho/\partial z_i|^2$.

特に, 2 つの Hermite 行列 $(\partial^2\delta^*/\partial z_i\partial\bar z_j)$ と $\Lambda(z,w(z))$ の符号数は等しい (複素接方向に制限しても同様). M が Levi flat (すなわち $H(p)|_{T_p^{1,0}M}=O$, $p\in M$) のとき, $\operatorname{rank} S(p)|_{T_p^{1,0}M}=n-1$ ならば, 関数 $1/\delta$ は M の近くの D 内で強多重劣調和である.

参考文献

[1] K. Matsumoto, Representation and non-degeneracy condition for Levi form of distance to real hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$, Kyushu J. Math. **63** (2009), 291–300.

[2] 松本和子, Levi 平坦実超曲面への対数的距離の Levi form の表示と退化条件, 数理解析研究所講究録 **1661** (2009), 39–53.

スライス保存の CR 写像について

林本厚志　長野工業高等専門学校

2003年に S. Y. Kim と D. Zaitsev と共に次の定理を示した.

Theorem 0.1. [HKZ] (M,p) を, 稠密な集合上で有限的非退化かつ有限型の CR 多様体の芽とする. このとき (M,p) は

$$(M,p) \cong (M_1,p_1) \times \cdots \times (M_m,p_m)$$

のように一意的に分解される. ここで (M_j,p_j) は既約な CR 多様体である. さらに (M',p') を別の CR 多様体で $(M'_1,p'_1) \times \cdots \times (M'_{m'},p'_{m'})$ をそれに対応する既約な分解とする. f を (M,p) と (M',p') の間の CR 同型写像とする. このとき $m=m'$ であり, f は $f=f^1\times\cdots\times f^m$ という分解 (ただし $f^j:(M_j,p_j)\to(M'_j,p'_j)$ は局所 CR 同型写像) を持つ.

CR 多様体が有限的非退化とは, レビ形式の退化の度合いを数値的に表したときに, その度合いが有限であることを表す. この定理は, CR 同型写像が「直積成分を保つ性質を持つ」ことを示している.

次の定理は Theorem 0.1 のパラメーター版と思える.

$$W_h = \{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid |z-\exp ih(w,\overline{w})|^2-1=0,\ h \text{ は調和函数}\}$$

と定義する.

Theorem 0.2. [H] $(f,g):W_h\to W_{h'}$ を原点の近傍での CR 同型写像とする. このとき f,g は

$$f(z,w)=z,\ g(z,w)=\sum_{q\geq 1} b_q w^q$$

と展開される.

W_h を w 軸に垂直に切ると, 円周の一部が出てくるが, この定理は, W_h のスライスである円周の一部が, CR 同型写像によって保たれることを示している.

この講演では Theorem 0.2 の「スライスが保存される」という性質が, どの程度一般的な CR 多様体にまで拡張できるかを述べる.

Theorem 0.3. $M,N,M(p)$ を次で定義される *CR* 多様体とする:

$$\begin{aligned} M = \{(z',z_{m+1},w',w_{n+1}) \in \mathbb{C}^{m+1}\times\mathbb{C}^{n+1} \mid\ & \\ z_{m+1} = Q^1(z',w',\overline{z'},\overline{w'},\overline{z_{m+1}},\overline{w_{n+1}}),&\ w_{n+1}=Q^2(w',\overline{w'},\overline{w_{n+1}}), \\ Q^1(0,w',0,\overline{w'},0,\overline{w_{n+1}})=0\}&, \end{aligned}$$

$$N = \{(0,0,w',w_{n+1})\in\{0\}\times\mathbb{C}^{n+1} \mid w_{n+1}=Q^2(w',\overline{w'},\overline{w_{n+1}})\},$$

$p=(0,0,p',p_{n+1})\in N$ に対して

$$M(p)=\{(z',z_{m+1},p',p_{n+1})\in\mathbb{C}^{m+1}\times\{(p',p_{n+1})\}\mid z_{m+1}=Q^1(z',p',\overline{z'},\overline{p'},\overline{z_{m+1}},\overline{p_{n+1}})\},$$

ここで定義関数 Q^1 と Q^2 は原点の近傍で正規形で表され, N は原点で, $M(p)$ は p で, それぞれレビ形式が非退化とする. さらに $H:M\to\widetilde{M}$ と $H|_N:N\to H(N)$ は CR 同型写像で, $H|_N(N)\subset\widetilde{N}$ とする. このとき任意の $p\in N$ に対して, ある $\widetilde{p}\in\widetilde{N}$ が存在して $M(p)$ は $H|_{M(p)}$ によって $\widetilde{M}(\widetilde{p})$ と CR 同型である. もし $n=1$ なら $H|_N:N\to\widetilde{N}$ が CR 同型という条件は省ける.

CR 多様体 M は $M(p)$ をスライスとして持つが, そのスライスが H によって互いに移りあう, つまり H は「スライス保存の性質を持つ」ということが分かる.

証明にはセグレ多様体写像と呼ばれる, 考えている CR 多様体の複素化をパラメトライズする写像の性質を使う. 元々定理 0.1 は無限小 CR 自己同型群の性質や CR 構造の変形が剛性を持つ, という性質を使って証明していたが, セグレ多様体写像の手法を使うと, その証明は非常に簡単になることが分かっている.

References

[H] A. Hayashimoto, *One remark for CR equivalence problem*, J. Korean Math. Soc. 37 no.2, 245-251, (2000)

[HKZ] A. Hayashimoto, S. Y. Kim, and D. Zaitsev, *Decomposition of CR-Manifolds and Splitting of CR-maps*, Ann. Scuola Norm. Sup.Pisa Cl. Sci. (5) vol.II, 433-448, (2003)

A Defect Relation for Holomorphic Curves in Algebraic Varieties

YOSHIHIRO AIHARA

Let M be a smooth complex projective algebraic variety and $L \to M$ an ample line bundle. We let $\Gamma(M, L)$ denote the space of all holomorphic sections of $L \to M$ and $|L|$ the complete linear system defined by L. Let $W \subseteq \Gamma(M, L)$ be a linear subspace with $\ell_0 + 1 = \dim W \geq 2$. Denote by Λ the linear system determined by W, that is, $\Lambda = \mathbb{P}(W)$. The linear system Λ may have the non-empty base locus. Let $D_1, \cdots, D_q$ be divisors in Λ such that $D_j = (\sigma_j)$ for $\sigma_j \in W$. We first give a definition of *subgeneral position*. Set $Q = \{1, \cdots, q\}$ and take a basis $\psi_0, \cdots, \psi_l$ of W. We write

$$\sigma_j = \sum_{k=0}^{l} c_{jk}\psi_k$$

for each $j \in Q$. For a subset $R \subseteq Q$, we define a matrix A_R by $A_R = (c_{jk})_{j\in R, 0\leq k\leq l}$.

Definition. Let $N \geq \ell_0$ and $q \geq N+1$. We say that $D_1, \cdots, D_q$ are in N-subgeneral position in Λ if

$$\operatorname{rank} A_R = \ell_0 + 1 \quad \text{for every subset } R \subseteq Q \text{ with } \sharp R = N + 1.$$

If they are in ℓ_0-subgeneral position, we simply say that they are in general position.

The above definition is different from the usual one. The divisors $D_1, \cdots, D_q$ may have a common point when they are in N-general position in the sense of our definition.

Let $f : \mathbb{C} \to M$ be a transcendental holomorphic curve that is nondegenerate with respect to Λ, namely, the image of f is not contained in the support of any divisor in Λ. Let $\mathcal{I}_0$ be the coherent ideal sheaf of $\mathcal{O}_M$ that defines the base locus of Λ as a complex space. We denote by B_Λ the base locus as a complex space and by $\operatorname{Bs}\Lambda$ its support, that is, $B_\Lambda = (\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_0), \mathcal{O}_M/\mathcal{I}_0)$ and $\operatorname{Bs}\Lambda = \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_M/\mathcal{I}_0)$. We let $m_f(r, \mathcal{I}_0)$ denote the proximity function for $\mathcal{I}_0$. We have then the following second main theorem type inequality:

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{C} \to M$ be a transcendental holomorphic curve that is non-degenerate with respect to Λ and $D_1, \cdots, D_q \in \Lambda$ divisors in N-subgeneral position. Then*

$$(q - 2N + \ell_0 - 1)(T_f(r, L) - m_f(r, \mathcal{I}_0)) \leq \sum_{j=1}^{q} N(r, f^*D_j) + S_f(r),$$

where $S_f(r) = O(\log T_f(r,\ L)) + O(\log r)$ *as* $r \to +\infty$ *except on a Borel subset* $E \subseteq [1, +\infty)$ *with finite measure.*

If f is of finite type, then $E = \emptyset$. In the case where f is not of finite type, in general, the exceptional set E depends on Λ. Hence we cannot reduce a defect relation from Theorem 1 without a certain kind of condition on the growth of f. We will introduce a modification of deficiency and get a defect relation without growth condition. We let $E(f;N)$ denote the set of all $r \in [1,\ +\infty)$ with

$$T_f(r,\ L) + N \leq T_f\left(r + \frac{1}{(T_f(r,\ L) + N)^2},\ L\right),$$

where N is a positive integer. Then the Lebesgue measure $|E(f;N)|$ is finite, and $E(f;N_2) \subseteq E(f;N_1)$ if $N_1 < N_2$. We define N-th Nevanlinna's deficiency $\delta_f(D;N)$ by

$$\delta_f(D;N) = \liminf_{\substack{r \to +\infty \\ r \notin E(f;N)}} \frac{m_f(r,\ D)}{T_f(r,\ L)}.$$

It is clear that $\delta_f(D;N_2) \leq \delta_f(D;N_1)$ if $N_1 < N_2$. We define the modified deficiency of f in the sense of Nochka by

$$\tilde{\delta}_f(D) = \lim_{N \to +\infty} \delta_f(D;N).$$

We define a defect of f for B_Λ by

$$\delta_f(B_\Lambda) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m_f(r,\ \mathcal{I}_0)}{T_f(r,\ L)}.$$

We also define $\tilde{\delta}_f(B_\Lambda)$ as in the above. We see that $\tilde{\delta}_f(D) = \tilde{\delta}_f(B_\Lambda)$ for almost all $D \in \Lambda$ and $\tilde{\delta}_f(B_\Lambda) \leq \tilde{\delta}_f(D)$ for all $D \in \Lambda$. Now, we have the following defect relation:

Theorem 2. *Let* Λ, f *and* $D_1, \cdots, D_q$ *be as in Theorem* 1. *Then*

$$\sum_{j=1}^{q} (\tilde{\delta}_f(D) - \tilde{\delta}_f(B_\Lambda)) \leq (1 - \tilde{\delta}_f(B_\Lambda))(2N - \ell_0 + 1).$$

Fukushima University
Fukushima 960-1296
Japan
E-mail address: aihara@educ.fukushima-u.ac.jp

Deficiencies of Holomorphic Curves in Algebraic Varieties

YOSHIHIRO AIHARA

Let M be a smooth complex projective algebraic variety and $L \to M$ an ample line bundle. We let Λ denote a linear system included in $|L|$ with $\dim \Lambda = \ell_0$. Let $f : \mathbb{C} \to M$ be a transcendental holomorphic curve that is non-degenerate with respect to Λ. Let

$$\mathfrak{D}_f = \{D \in \Lambda : \ \delta_f(D) > \delta_f(B_\Lambda)\} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathfrak{D}}_f = \{D \in \Lambda : \ \tilde{\delta}_f(D) > \tilde{\delta}_f(B_\Lambda)\}.$$

We first give estimates for the size of those sets.

Definition. A subset S of Λ is said to be $\mathcal{P}$-polar in Λ provided that, for any coordinate chart (U, ϕ) in Λ, there exists a plurisubharmonic function v in $\phi(U) \subseteq \mathbb{C}^{\ell_0}$ with $v \not\equiv -\infty$ such that $\phi(S \cap U) = \{v = -\infty\}$.

By making use of Sadullaev's method, we have the following:.

Theorem 1. *The sets $\mathfrak{D}_f$ and $\tilde{\mathfrak{D}}_f$ are $\mathcal{P}$-polar in Λ. In particular, the Hausdorff dimensions of those sets are at most $2\ell_0 - 2$.*

In what follows, we consider points in Λ as zero dimensional linear systems included in Λ. For a sufficiently small positive number ϵ, set

$$\tilde{\mathfrak{D}}_\epsilon = \{D \in \Lambda : \ \tilde{\delta}_f(D) \geq \tilde{\delta}_f(B_\Lambda) + \epsilon\}.$$

Then it is clear that

$$\tilde{\mathfrak{D}}_f = \bigcup_{\epsilon > 0} \tilde{\mathfrak{D}}_\epsilon.$$

By making use of the defect relation for the modified deficiencies, we have a structure theorem for $\tilde{\mathfrak{D}}_f$.

Theorem 2. *The set $\tilde{\mathfrak{D}}_\epsilon$ is a union of finitely many linear systems included in Λ. In particular, the set $\tilde{\mathfrak{D}}_f$ is a union of at most countably many linear systems in Λ.*

We consider the set of values of the defect function $\tilde{\delta}_f : \Lambda \to [0, 1]$. By means of Theorem 2, we have the following:.

Theorem 3. *Let $f : \mathbb{C} \to M$ be a transcendental holomorphic curve that is non-degenerate with respect to Λ. Then the set of values of modified deficiency of f is an at most countable subset of* $[0, 1]$.

We next show that the set of values of $\tilde{\delta}_f$ corresponds to the family of linear systems in Λ. There exists a collection $\{\Lambda_j\}$ of at most countably many linear systems in Λ such that $\tilde{\mathfrak{D}}_f = \bigcup_j \Lambda_j$. Let $\mathfrak{L}_0 = \{\Lambda_j\} \cup \{\Lambda\}$. We may assume that the following: If Λ_j, $\Lambda_k \in \mathfrak{L}_0$, then $\Lambda_j \cap \Lambda_k \in \mathfrak{L}_0$. We call $\mathfrak{L}_0$ the fundamental family of linear systems for f. Then we have the following theorem:

Theorem 4. *Let $\mathfrak{L}_0$ be the fundamental family of linear systems for f. Then, for each $\alpha \in \tilde{\delta}_f(\Lambda)$, there exists a unique finite subfamily $\mathfrak{L}_\alpha$ of $\mathfrak{L}_0$ such that*

$$\alpha = \tilde{\delta}_f \left(B_{\Lambda_j^{(\alpha)}} \right) \quad \textit{for all} \;\; \Lambda_j^{(\alpha)} \in \mathfrak{L}_\alpha.$$

Furthermore, there exists a union $\mathfrak{E}_j$ of at most countably many linear systems in $\mathfrak{L}_0$ such that

$$\tilde{\delta}_f(D) = \tilde{\delta}_f \left(B_{\Lambda_j^{(\alpha)}} \right) \quad \textit{for all} \quad D \in \Lambda_j \setminus \mathfrak{E}_j.$$

In particular, the closure of the inverse image $\tilde{\delta}_f^{-1}(\alpha)$ is a union of finitely many linear systems in $\mathfrak{L}_0$.

Corollary 5. *If $\tilde{\delta}_f(D) > \tilde{\delta}_f(B_\Lambda)$ for a divisor D in Λ, then there exists a linear system Λ_D included in Λ such that $\tilde{\delta}_f(D) = \tilde{\delta}_f(B_{\Lambda_D})$.*

It is known that holomorphic curves without defect are dense in the space of holomorphic curves $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ with respect to a certain kind of topology. We can show the existence of holomorphic curves with $0 < \delta_f(B_\Lambda) < 1$. For instance, we have the following:

Theorem 6. *Let $\Lambda \subsetneq |L(H)|$ and suppose that $\mathrm{Bs}\,\Lambda \neq \emptyset$. Let e_0 be an arbitrary given positive number less than one. Then there exists an algebraically non-degenerate transcendental holomorphic curve $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ of finite type such that $e_0 = \delta_f(B_\Lambda)$.*

Fukushima University
Fukushima 960-1296
Japan
E-mail address: aihara@educ.fukushima-u.ac.jp

Expression of restricted volumes with current integration

松村 慎一（東京大学大学院数理科学研究科）

X を非特異射影多様体, D を X 上の巨大な因子 (big divisor) とする．まず, 主題となる restricted volume の定義を述べる．V を X 上の既約な次元 d の解析的部分集合とする．この時, D の V に沿った restricted volume は以下で定義される．

$$\mathrm{vol}_{X|V}(D)=\limsup_{k\to\infty}\frac{\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}\Big(H^0\big(X,\mathcal{O}_X(kD)\big)\longrightarrow H^0\big(V,\mathcal{O}_V(kD)\big)\Big)}{k^d/d!}.$$

荒く言えば, これは $\mathcal{O}_V(kD)$ の大域切断で X 上に拡張できる切断の数を漸近的に測った数である．restricted volume は様々な状況で現れ, [ELMNP] で詳しく性質が調べられている．V が X の時, restricted volume は通常の体積（volume）と一致する．この通常の体積が正の値をとる時, D を巨大な因子という．

Boucksom 氏は, 通常の体積が Chern 類 $c_1(D)$ のみに依存することに注目し, 通常の体積を $c_1(D)$ を代表するカレントによって積分表示した (参考：[Bou02])．
主結果． 定理 1 によって, [Bou02] の結果を restricted volume に対して一般化した．また, 定理 2 によって restricted volume とザリスキー分解の関係を与えた．

通常の体積の多くの性質は, V が D の non-Kähler locus $E_{nK}(D)$ に含まれないという条件の下で, restricted volume に対しても成立する．例えば, この条件の下では $\mathrm{vol}_{X|V}(D)$ の値は D の Chern 類 $c_1(D)$ のみで定まる．よって, $\mathrm{vol}_{X|V}(D)$ を $c_1(D)$ のみを用いて表すことができ, 以下の定理 1 を得る．ここで, D の non-Kähler locus とは, $E_{nK}(D):=\bigcap_{T\in c_1(D)}E_+(T)$ で定義される解析的部分集合である．ただし, T はケーラーカレントを動く．また, $E_+(T)$ は, T の Lelong 数 (Lelong number) が正である様な点の集合である．

定理 1. *V が $E_{nK}(D)$ に含まれないと仮定する．この時, D の V に沿った restricted volume は以下の等式を満たす．*

$$\mathrm{vol}_{X|V}(D)=\sup_{T\in c_1(D)}\int_{V_{\mathrm{reg}}}(T|_{V_{\mathrm{reg}}})^d_{ac}\ ,$$

ここで, T は解析的特異性 (analytic singularity) を持つ d-閉な正カレント (d-closed positive current) で, その極が V を含まないものを動く．

S_{ac} は, 正カレント S をルベーグ分解した時の絶対連続部分を表す．V_{reg} は, V の非特異集合を表す．

今, $\alpha\in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ を巨大な類とする．（即ち, ケーラーカレントを含む類とする.）定理 1 を用いることで, restricted volume の定義を超越的な類である $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ の元 α まで自然に拡張することができる．この拡張された定義に対して, 定理 2 が示される．定理 2 は restricted volume とザリスキー分解を関係付ける定理である．

定理 2. 以下の２つの条件は同値である.

（１） α がザリスキー分解を許す.

（２） $V \sim V'$ と $V, V' \not\subseteq E_{nK}(\alpha)$ を満たす任意の解析的部分集合に対して, $\mathrm{vol}_{X|V}(\alpha) = \mathrm{vol}_{X|V'}(\alpha)$ が成立する.

ここで $V \sim V'$ は V と V' が定めるコホモロジー類が等しいことを表す.

$\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ のザリスキー分解の定義について述べる. 分解:$\alpha = P + \{N\}$ を因子的ザリスキー分解とする (参考:[Bou04]). 即ち, N は $N := \sum_{F:\ \text{prime div}} \nu(T_{\min}, F)F$ によって定まる有効因子 (effective divisor), $\{N\}$ はその類である. P は, $P = \alpha - \{N\}$ で定まる類である. ここで, $T_{\min}$ は, α 内の最小特異カレント (minimal singular current), $\nu(T_{\min}, F)$ は $T_{\min}$ の F に沿った Lelong 数を表す. P が数値的に半正 (nef) の時, α をザリスキー分解可能という.

(定理 2の証明の概略): まず, $V \not\subseteq E_+(\alpha)$ の仮定の下で, $\mathrm{vol}_{X|V}(\alpha) = \mathrm{vol}_{X|V}(P)$ が成立することを示す.

α がザリスキー分解を許すとする. この時, P が数値的半正であることから, $\mathrm{vol}_{X|V}(P)$ が交点数 $(P^d \cdot V)$ と等しいことがわかる. V と V' の定めるコホモロジー類が等しい時, その交点数も等しいので, $\mathrm{vol}_{X|V}(D) = \mathrm{vol}_{X|V'}(D)$ を得る.

逆の方向を示すために, P の non-nef locus $E_{nn}(P)$ を考える. 今, P は巨大なのでその non-nef locus は $\{x \in X \mid \nu(S_{\min}, x) > 0\}$ と等しい. ここで, $S_{\min}$ は P 内の最小特異カレントである. P が数値的に半正であることと $E_{nn}(P)$ が空集合であることは同値である. ここで, $E_{nn}(P)$ が空集合でないとして矛盾を導くことを考える. X 上の非常に豊富な因子 (very ample divisor) を固定する. その完備一次系の完全交叉からできる非特異曲線 C, C' を以下の条件を満たすようにとる.

(1) C は, $E_{nn}(P)$ と点 x_0 交わる.

(2) C' は, $E_{nn}(P)$ とは交わらない.

(3) C と C' は, $E_{nK}(P)$ に含まれない

$E_{nn}(P)$ は, 余次元２以上の解析的部分集合の可算和なので条件 (2) を満たすように C' を取ることは可能である. この時, 性質 (2) から等式 $\mathrm{vol}_{X|C'}(D) = (P \cdot C')$ が, 性質 (1) から不等式 $\mathrm{vol}_{X|C}(D) \leq (P \cdot C) + \nu(S_{\min}, x_0) < (P \cdot C)$ が得られる. C と C' は, 同じ一次系から構成される完全交叉なので $C \sim C'$ が成立する. よって, 仮定と (3) から $\mathrm{vol}_{X|C'}(\alpha) = \mathrm{vol}_{X|C}(\alpha)$ を得る. しかし, これは上の不等式・等式と矛盾する.

References

[Bou02] Boucksom S. *On the volume of a line bundle.* Intern. J. Math. **13** (2002), no. 10, 1043–1063.

[Bou04] Boucksom S. *Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **37** (2004), no. 1, 45–76.

[ELMNP] Ein L. Lazarsfeld R. Mustaţă M. Nakamaye M. and Popa M. *Restricted volumes and base loci of linear series.* Amer.J.Math. **131** (2009), no.3, 607–651.

部分多様体に沿っての
直線束の Bergman 核の漸近挙動について

久本智之 (東京大学大学院数理科学研究科)

X を滑らかな射影多様体, L をその上の巨大 (big) な直線束とする. 部分多様体 $Z \subseteq X$ を与えたとき L の Z 上の切断で X まで拡張できるものがどのくらいあるかは重要である. L の restricted volume

$$\mathrm{Vol}_{X|Z}(L) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}\left[H^0(X,\mathcal{O}(L^m)) \to H^0(Z,\mathcal{O}(L^m))\right]}{m^p/p!}$$

はこれを漸近的に測る量である. 本講演ではこの局所化について話したい. そのために restrected Bergman kernel:

$$B_{X|Z}(m\varphi)(z) := |s_1(z)|^2_{h^m}\, e^{-m\varphi} + \cdots + \left|s_{N(m)}(z)\right|^2_{h^m} e^{-m\varphi}$$

を考える. ここで $\{s_i\}_{i=1}^{N(m)}$ は内積 $\|s\|^2_{m\varphi} := \displaystyle\int_Z |s(z)|^2_{h^m}\, e^{-m\varphi} d\mu$ に関する $\mathrm{Im}\left[H^0(X,\mathcal{O}(L^m)) \to H^0(Z,\mathcal{O}(L^m))\right]$ の正規直交基底である. ただし h は L の Hermite 計量, $\varphi \in C^\infty(X;\mathbb{R})$ はその weight で, $d\mu$ は Z の体積測度をひとつ固定して考える. 定義から容易に

$$\int_Z \frac{B_{X|Z}(m\varphi)(z)}{m^p/p!} d\mu = \frac{\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}\left[H^0(X,\mathcal{O}(L^m)) \to H^0(Z,\mathcal{O}(L^m))\right]}{m^p/p!}$$

が成り立ち, この restricted Bergman kernel が切断の空間を代表する函数であることが分かる.

$\mathrm{Vol}_{X|Z}(L)$ の局所化は次の equilibrium weight によって与えられる.

Definition 1. $\theta := -dd^c \log h \in c_1(L)$ とする.

$$P_{X|Z}\varphi(z) := \sup{}^* \left\{ \psi(z) \;\middle|\; \begin{array}{c} \psi \in \mathrm{PSH}(X,\theta) \\ \text{with } \psi \leqslant \varphi \ \text{ on } \ Z \end{array} \right\}$$

によって定義される Z 上の函数 $P_{X|Z}\varphi(z)$ を φ の Z に関する平衡化 (equilibrium weight) と呼ぶ. $\square$

Theorem 2. Z は滑らかで, $Z \not\subseteq \mathbb{B}_+(L)$ を満たすとする. このときカレントの意味で

$$\frac{B_{X|Z}(m\varphi)}{m^p/p!}d\mu \to \mathrm{MA}(P_{X|Z}\varphi)$$

が成り立つ. □

ここで $\mathbb{B}_+(L) \subsetneq X$ は augumented base locus と呼ばれる代数的集合で, L が豊富（ample）でないときに生じる。また $\mathrm{MA}(\psi) := \langle(\theta + dd^c\psi)^p\rangle$ は $\theta + dd^c\psi$ の non-pluripolar product, つまり pluripolar set 上で体積を持たないように定義された Monge-Ampère 積（[BEGZ08] 参照）である.

$Z = X$ の場合は [Ber07] において扱われ, 一般の Z の場合についても言及されているが証明はまだ無い. 部分多様体の場合では, 新たに L^2 拡張定理を用いる必要が出てくる. 今回は, 収束をカレントの意味に弱めることでより幾何学的に単純な証明を与えることができた.

副産物として, 次のように restricted volume の色々な積分表示式が得られた.

Theorem 3. Z が滑らかで, $Z \not\subseteq \mathbb{B}_+(L)$ のとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_{X|Z}(L) &= \int_Z \mathrm{MA}(P_{X|Z}\varphi)\\ &= \int_Z \mathrm{MA}((P_X\varphi)|_Z) = \int_Z \langle(T_{\min}|_Z)^p\rangle\\ &= \sup_T \int_Z \langle(T|_Z)^p\rangle\end{aligned}$$

ここで T は $c_1(L)$ に属する正カレントで, その *pluripolar set* が $\mathbb{B}_+(L)$ に含まれないものをはしる. $T_{\min}$ は $c_1(L)$ のカレントのうち最小の特異性を持つものとする. □

参考文献

[Ber07] R. Berman: *Bergman kernels and equilibrium measures for line bundles over projective manifolds.* Preprint (2007) arXiv:0710.4375.

[BEGZ08] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi: *Monge-Ampère equations in big cohomology classes.* Preprint (2008) arXiv:0812.3674.

代数的局所コホモロジーを利用したパラメータ付きスタンダード基底計算について

鍋島克輔 (阪大・情報/ JST CREST)
中村弥生 (近畿大学理工学部)
田島慎一 (新潟大学工学部)

特異点の性質を研究する際, ヤコビイデアルの収束冪級数環におけるスタンダード基底を求めることが必要になることが多い。論文 [2] において, 原点を孤立特異点として持つ超曲面に対しそのヤコビイデアルのスタンダード基底を求めるアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムでは, まず多変数留数に関するグロタンディーク双対性を用いることで, 原点に付随する代数的局所コホモロジーを計算し, これら代数的局所コホモロジーの情報からスタンダード基底を計算するという手法がとられている。この手法の利点としてモラのリダクションのような複雑な計算を必要とせず, 線形代数の手法のみで計算が実行可能であるという点と, アルゴリズムの停止条件の判定が容易である点, 計算が実際に速いということがあげられる。

特異点の定義多項式にはパラメータを持つものが多くあり, パラメータのとる値によって特異点の諸性質が異なることが多々ある。(ここでいうパラメータとは, 媒介変数はどのような値もとることができるという意味である。) 本研究では, そのようなパラメータを持つ定義多項式のヤコビイデアルに対するスタンダード基底計算の研究を行い, その計算アルゴリズムを確立した。また, 計算機代数システム Risa/Asir[1] にその計算アルゴリズムを実装した。本研究で得たパラメータ付きスタンダード基底計算アルゴリズムは, 論文 [2] で与えられたアルゴリズムをパラメータのある場合に一般化することで導出したものである。パラメータのとる値によって特異点の性質が異なることがあるように, スタンダード基底も一般にパラメータのとる値によって initial 項や生成元の個数等が変化し様々な形を持つ場合が多々ある。我々の構成したアルゴリズムを用いることにより, スタンダード基底の形による分類に対応したパラメータ空間の stratification (分割) とそれに対応するスタンダード基底を自動的に求めることが可能となる。

本講演では, パラメータ付きスタンダード基底がグロタンディーク双対性を使うことによって計算可能であることを述べると共に, アルゴリズムの概略を述べる。

パラメータ付きスタンダード基底の例として次を考える。原点に特異点を持つ多項式として $f = x^3 + ax^2y^3 + by^5 + xy^4 \in \mathbb{C}[x,y]$ を考える。(ここで, a, b はパラメータでどのような値もとることができる。) このとき, 我々のプログラムはヤコビイデアル $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ の $1 \succ y \succ x \succ y^2 \succ yx \succ x^2 \succ \cdots$ なる局所全次数辞書式項順序のスタンダード基底を次のように出力する。

```
[627] p_std(x^3+a*x^2*y^3+b*y^5+x*y^4,[a,b],[x,y],1);
non zero-dim.
[]
```

```
parametric standard bases
[[a,b],[1]]
[x^2+1/3*y^4,y^3*x,y^7]
[[a],[a,b]]
[b*x^2-4/15*y^3*x,4/5*y^3*x+b*y^4]
[[4*b*a-1],[1]]
[b*x^2+(2/3*b*a-4/15)*y^3*x,4/5*y^3*x+b*y^4]
[[b],[-a,b]]
[x^2+1/6*a^2*y^6+1/3*y^4,y^3*x-1/4*a*y^6,y^7]
[[0],[-20*b^3*a^3+13*b^2*a^2-2*b*a]]
[b*x^2+(2/3*b*a-4/15)*y^3*x,4/5*y^3*x+b*y^4]
[[-5*b*a+2],[1]]
[x^2,4/5*y^3*x+b*y^4]
```

この出力の意味は, 最初にパラメータの値によって零次元でない場合をまず出力する。この例の場合はなし。

- パラメータが $\mathbb{V}(a,b)$ に属する場合, すなわち $a=b=0$ のとき, スタンダード基底は $\{x^2+\frac{1}{3}y^4, y^3x, y^7\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(a)\setminus\mathbb{V}(a,b)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{bx^2-\frac{4}{15}y^3x, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(4ba-1)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{bx^2+(\frac{2}{3}ba-\frac{4}{15})y^3x, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(b)\setminus\mathbb{V}(-a,b)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{x^2+\frac{1}{6}a^2y^6+\frac{1}{3}y^4, y^3x-\frac{1}{4}ay^6, y^7\}$。
- パラメータが $\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{V}(-20b^3a^3+13b^2a^2-2ba)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{bx^2+(\frac{2}{3}ba-\frac{4}{15})y^3x, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。
- パラメータが $\mathbb{V}(-5ba+2)$ に属する場合, スタンダード基底は $\{x^2, \frac{4}{5}y^3x+by^4\}$。

ここで, $\mathbb{V}(g_1,\dots,g_s)$ は $g_1,\dots,g_s$ の共通零点集合 $\{(b_1,\dots,b_m)\in\mathbb{C}^m \,|\, g_i(b_1,\dots,b_m)=0 \text{ for all } 1\le i\le s\}$ を意味する。

この例が示すように, 実装したプログラムはパラメータに関する条件とそれに対するスタンダード基底の組を自動的に出力する。

参考文献

[1] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- A Computer Algebra System, *Proc. ISSAC 1992*, pp.387-396, ACM-Press, 1992.

[2] Tajima, S., Nakamura, Y. and Nabeshima, K. Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. 56, pp. 341–361, 2009

レゾルベントの留数解析と行列の exact な固有ベクトル計算

田島慎一　新潟大学情報工学科
樋口水紀　国土情報開発株式会社

1．序　スペクトル分解の理論に基づきレゾルベントの留数解析を行うことで, 行列の固有値問題を exact に扱う諸算法を構築することが可能である. 本稿では, 行列の特性多項式が重複因子を含まない場合に対し, 固有ベクトルを固有値の多項式として exact に表現する式を求める方法を与える.

2．記号と準備

A : 整数（または有理数）を成分とする $n \times n$ 正方行列

$\chi_A(\lambda)$: 行列 A の特性多項式

$\chi(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_q(\lambda)$: χ_A の（有理数係数多項式環における）因数分解

$\mathbf{e}_j$: j 番目の成分が 1, 他の成分は全て零からなる n 次元基本単位ベクトル

定義　与えられた j に対し, 条件 $f_1(A)^{r_1}f_2(A)^{r_2}\cdots f_q(A)^{r_q}\mathbf{e}_j = 0$ を満たす非負整数の組 $(r_1, r_2, ..., r_q)$ のうち最小のものを $(r_{j,1}, r_{j,2}, ..., , r_{j,q})$ とおき, 多項式 $\pi_{A,j}(\lambda)$ を, $\pi_{A,j}(\lambda) = f_1(\lambda)^{r_{j,1}}f_2(\lambda)^{r_{j,2}}\cdots f_q(\lambda)^{r_{j,q}}$ で定める. (注. $r_{j,p} = 0$ または $= 1$.) 更に, $P_j = \{p \mid r_{j,p} = 1\}$ とおく.

定義　特性多項式 $\chi(\lambda)$ の因子 $f_p(\lambda)$ に対し, J_p, K_p を次で定める

$$J_p = \{j \mid r_{j,p} \neq 0\},\ K_p = \{k \mid r_{k,p} = 0\}$$

因子 $f_p(\lambda)$ に対し, $\psi_p(x,y)$ を $\psi_p(x,y) = \dfrac{f_p(x) - f_p(y)}{x - y}$ とおき, 行列 $\Psi_p(\lambda)$ を $\Psi_p(\lambda) = \psi_p(A, \lambda E)$ で定める. (E は n 次単位行列)

3．固有ベクトル計算の基本形

レゾルベントの留数を考えることにより, $f_p(\lambda) = 0$ なる固有値 λ に対する固有ベクトルを exact に求めるアルゴリズムを導出した. 以下にそのアルゴリズムの基本形の概略を与える. (実際のアルゴリズムは, 計算効率を考慮し, 更に改良を加えてある)

Step1. J_p に属す j を求める（一つ求めれば十分)

Step2. Step1 で求めた列 j に対し, $\pi_{A,j}(\lambda)$ と P_j を求める

Step3. ホーナー法により, ベクトル $\gamma_p(\lambda) = \Psi_p(\lambda)\mathbf{e}_j$ を作る

Step4. ホーナー法により, ベクトル

$$\rho_p(\lambda) = \Pi_{k\in P_j\setminus\{j\}} f_k(A)\gamma_p(\lambda)$$

を求める

ベクトル $\rho_p(\lambda)$ は固有値 λ に対する固有ベクトルの（固有値の多項式としての）表現を与える.

注 このアルゴリズムは既存の方法に比べ, 計算効率が極めてよい.

注 $\pi_{A,j}(\lambda)$ の替わりに $\chi_A(\lambda)$ を利用して固有ベクトルを求めることも可能.

参考文献

・A. N. Krylov: On the numerical solution of the equation by which in technical questions frequencies of small oscillations of material systems are determined, Izvestija AN SSSR, Otdel. mat. i. estest, **7**, 491–539 (1931) (露語).

・小原功任, 田島慎一: 行列のスペクトル分解・固有ベクトルの分散計算, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定.

・田島慎一, 樋口水紀: レゾルベントの留数解析と固有ベクトル計算アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定.

・森継修一, 栗山和子: 行列の固有値・固有ベクトル・一般固有ベクトルの数式処理による記号計算法, 日本応用数理学会誌 **11**, No. 2, 103–120 (2001).

A tower of Riemann surfaces whose Bergman kernels jump at the roof

大沢健夫(名大多元数理)

Sを種数が２のコンパクトなリーマン面とする。ケーベの一意化定理より、Sの普遍被覆空間は上半平面$H=\{z\in\mathbf{C}\mid \mathrm{Im}z>0\}$に同型であり、従ってAut$H$(=PSL(2, $\mathbf{R}$))の離散部分群ΓがあってSはH/Γと同型になる。Γの部分群の減少列$\{\Gamma_n\}$　($\Gamma_1=\Gamma$)で$[\Gamma_n, \Gamma_{n+1}]<\infty$かつ$\cap\Gamma_n=\{id\}$をみたすものに対し、$S_n=H/\Gamma_n$とおき、$S_n$上のベルグマン計量の$H$への引き戻しを$ds_n^2$とする。ただしリーマン面上のベルグマン計量としては有限個の点で退化するものも含めて考える（超楕円的な場合）。

Kazhdan(=Kajdan)氏の論文[K]に示唆されたものとして、Mumford氏の講義録[M]の中で以下の形で提出された問題がある。

Mumfordの予想(1975)：　ある数列λ_nに対して　$\lim_{n\to\infty}\lambda_n ds_n^2=(\mathrm{Im}z)^{-2}dzd\bar{z}$.

以下の二つのどれか（または両方）がみたされればMumford予想は成立する（1993, A. Rhodes [R]）。

a)　Γ_nはすべてΓの正規部分群である。

b)　S_n上のポアンカレ計量に関するラプラス作用素の正固有値の下限をσ_nとしたとき、$\inf_n \sigma_n>0$.

条件a)の幾何学的意味は、S_nのポアンカレ計量に関する入射半径が$n\longrightarrow\infty$のとき発散することにある。(S.-K. Yeung [Y])。

Mumford予想の反例

上の条件a)およびb)について、Rhodes氏は「それらなしでは結論が成り立たないと考える理由はない」(There is no reason to think …)と述べている。慎重な言いまわしだが、「Mumford予想は無条件に成り立つはず」という含みが窺えるので、その点をはっきりさせておくことには意味があるだろう。

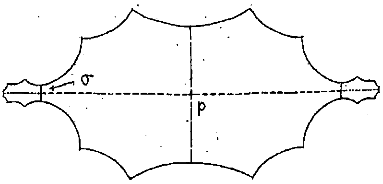
反例：　Sを超楕円的リーマン面とし、g(≥2)をSの種数とする。このときAutSの元τで位数が２でありS/{id, τ}がリーマン球面になるものが存在する。τの固定点はSのワイアシュトラス点に他ならず、そこでSのベルグマン計量は退化する。
τの固定点を一つ選び、それをpとする。S上のポアンカレ計量に関するτ不変な閉測地線を、便宜上不変ループと呼ぶ。不変ループでpを含まないものすべてに沿ってSを切り開けば、8g-4個の辺を持ち、内角がすべて直角のSの基本領域が得られる。この基本領域をD(S, p)で表す。pを通る２本の不変ループはD(S, p)の対称軸に対応する。D(S, p)を単位円板$\mathbf{D}$内の、

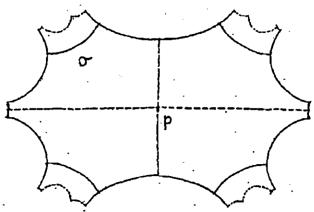
ワイヤストラス点を通る

ポアンカレ計量に関する多角形と同一視する。その際、pは原点に、対称軸はx軸とy軸に移す。これによって定まる**D**からSへの射影をπで表す。S上の不分岐被覆の基本領域Ωが、S上の不変ループのπによる逆像の一部を辺とし、かつD(S, p)を含むとき、ΩはSに同伴するという。このとき次が成り立つ。

補題.　Sが超楕円的ならば、Sの任意のワイアシュトラス点pとD(S, p)の任意の辺σに対し、超楕円的なリーマン面S'と不分岐２重被覆$\rho : S' \longrightarrow S$ があって、ρ(p')=pなるp'に対し、D(S', p')はSに同伴し、かつσを辺として含まない（σは両端を除けばD(S', p')の開核に含まれる）。

証明はσが軸と交わる時とそうでない時とに分けて行なう。（下図を参照）





補題より、超楕円的なリーマン面からなる多様体塔で、屋上が**D**であり、原点の像がすべての階でワイアシュトラス点であるものが存在する。よってこの塔に関してMumford予想は偽である。

反例の安定性　Sの種数が３以上なら、Sの非超楕円的な微小変形が存在する。このとき上の塔も変形を受けるが、屋上でのベルグマン核の不安定性はこの変形に関して安定な性質である。これはL^2拡張定理の一般型(cf. [O-1])を用いて示すことができる。従ってMumford予想はベルグマン計量がすべて正定値であるとしても偽である。

References

[K]　Kajdan(=Kazhdan), D.,　Arithmetic varieties and their fields of quasi-definition,　Actes du Congrès Internationale Mathématiciens, 1970, pp.321-325.

[M]　Mumford, D.,　Curves and their Jacobians,　University of Michgan Press, Ann Arbor,1975.

[O-1]　Ohsawa, T.,　On the extension of L^2 holomorphic functions V — Effects of generalization, Nagoya Math. J. 161 (2001), 1--21.

[O-2]　————,　A tower of Riemann surfaces whose Bergman kernels jump at the roof,　to appear in Publ. RIMS.

[R]　Rhodes, J.A.,　Sequences of metrics on compact Riemann surfaces,　Duke Math. J. **72** (1993), 725-738.

[Y]　Yeung, S.-K.,　Effective estimates on the very ampleness of the canonical bundle of locally Hermitian symmetric spaces,　Trans. AMS　**353** (2000), 1387-1401.

A new unicity theorem and Erdös' problem for polarized semi-abelian varieties

Pietro Corvaja　Udine 大学
野口潤次郎　　東大・数理科学

§1 序. 平成２１年（２００９年）春の学会（東京大学）で、準アーベル多様体 A への整正則曲線 $f:\mathbf{C}\to A$ と A の因子 D に対して打ち切りレベル１の個数関数によるネヴァンリンナの第二主要定理を報告した ([NWY08])。またその応用として対数的 Bloch・落合の定理を真に超える代数退化定理が得られたことについて報告した ([NWY07]). 今回は、同第二主要定理の別の応用について報告する ([CN09])。

1988 年 に P. Erdös は、次の問題を提示した：

Erdös の問題. $x\in\mathbf{Z}$ とする。任意の $n=1,2,\ldots$ に対し of x^n-1 に含まれる素数を知れば x を決められるか？

類似の問題として函数論では (Polya-)Nevanlinna の一致の定理が有名である。５点定理がよく知られているが、ここでは３点定理が関係深い。正則曲線 $f:\mathbf{C}\to\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ に対しては、藤本の $3n+2$ 定理、楕円曲線への正則写像 $f:\mathbf{C}\to E$ に対しては、E.M. Schmid の５点定理がある。

以上の一致の定理は全て写像の値域空間は同一なものとして固定されていた。山之井 ([Y04]) は、次のような値域空間も未知なものとしての一致の定理を証明した。

山之井の一致の定理. (A_i,D_i) $(i=1,2)$ を偏極アーベル多様体とし、因子 D_i は、簡単のため既約とする。代数的非退化整正則曲線 $f_i:\mathbf{C}\to A_i$ $(i=1,2)$ が、

$$\mathrm{Supp}\, f_1^*D_1=\mathrm{Supp}\, f_2^*D_2 \tag{1}$$

を満たすならば、ある同型 $\phi:A_1\to A_2$ が存在して、

$$f_2=\phi\circ f_1,\qquad D_2=\phi(D_1),$$

が成立する。

この定理は、偏極アーベル多様体 (A_i,D_i) が代数非退化正則曲線 f_i による因子の逆像 $f_i^{-1}D_i$ がわかれば f_i と共に特定できるという、これまでの発想にない新しい性質を持っていることに注目したい。

さて、上述の Erdös の問題は、Schinzel ([S75])、Corrales-Rodrigáñez-R. Schoof ([CRS95]) 等により肯定的に解決された。以下 $\mathcal{O}(K)$ で代数体 K の整数環を表す。

定理. $x,y\in\mathcal{O}(K)$ とする。$\mathcal{O}(K)$ の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し

$$x^n-1\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}\Longrightarrow y^n-1\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}\quad n=1,2,\ldots, \tag{2}$$

が成立するならば、ある $h\in N$ が存在して $y=x^h$ となる。

条件 (2) は、x^n-1 の定めるイデアルを $\mathcal{I}(x^n-1)$ とかけば、

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{I}(x^n-1)\subset\mathrm{Supp}\,\mathcal{I}(y^n-1),\quad n=1,2,\ldots \tag{3}$$

と書かれる。Erdös の問題は、$\mathcal{O}(K)=\mathbf{Z}$ で (3) で等号を仮定しているので、その意味で拡張されている。また山之井の一致の定理も複素射影空間への整正則曲線の場合を含めた形で成立することが望まれる。

§2 整正則曲線. ここでは、以上を踏まえ準アーベル多様体の場合で、かつ条件 (1) を (3) の様に包含関係の条件に拡張する。得られた結果は、次のものである。

定理 4. （主結果 [CN09]） $f_i: \mathbf{C} \to A_i$ $(i=1,2)$ を準アーベル多様体 A_i への代数非退化整正則曲線、D_i を A_i の既約因子（簡単の為）でその安定化部分群 $\mathrm{St}(D_i)=\{0\}$ とする（簡単の為)。

(i) 次を仮定する。

$$\underline{\mathrm{Supp}\, f_1^* D_1}_{\infty} \subset \underline{\mathrm{Supp}\, f_2^* D_2}_{\infty}. \tag{5}$$

ただし、$\underline{\mathrm{Supp}\, f_i^* D_i}_{\infty}$ は引き戻し因子 $f_i^* D_i$ の台が作る $\mathbf{C}$ の無限遠点 ∞ での集合の芽を表す。

$$N_1(r, f_1^* D_1) \sim N_1(r, f_2^* D_2)||. \tag{6}$$

このとき、ある有限不分岐射 $\phi: A_1 \to A_2$ が存在して $\phi \circ f_1 = f_2$ かつ $D_1 \subset \phi^* D_2$ が成立する。

(ii) もし (5) で等号成立ならば, 上述の $\phi: A_1 \to A_2$ は同型で、$D_1 = \phi^* D_2$ となる。

(iii) 上述 (i) で A_i $(i=1,2)$ がアーベル多様体、かつ D_2 が非特異またはその任意の点で局所既約ならば、ϕ は同型で $D_1 = \phi^* D_2$ が成立する。

注. 条件 (6) は、必要である（例がある)。

系 7. (i) E を楕円曲線とし、$f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$、$g: \mathbf{C} \to E$ を非定値かつ正則とする。このとき、必ず $\underline{f^{-1}\{1\}}_{\infty} \neq \underline{g^{-1}\{0\}}_{\infty}$.

(ii) 定理 4 でもし $\dim A_1 \neq \dim A_2$ ならば、いかなる代数非退化整正則曲線 $f_i: \mathbf{C} \to A_i$ に対しても、$\underline{f_1^{-1} D_1}_{\infty} \neq \underline{f_2^{-1} D_2}_{\infty}$.

§3 代数体上の類似. 上述のような結果の算術幾何学的性質に注目すれば、代数体上の類似を求めるのは、自然である。実際 Erdös の問題を拡張する形で次の定理が得られる。

定理 8. K を代数体とし、$\mathcal{O}_S(K)$ でその S-整数環を表す。$\mathbf{G}_i$ $(i=1,2)$ を線形トーラスとし、$g_i \in \mathbf{G}_i(\mathcal{O}_S)$ をザリスキー稠密な部分群を生成する元とする。D_i を K 上定義された被約因子とし、$\mathcal{I}(D_i)$ をその定義イデアルとする。D_i の各既約成分は有限な安定化部分群を持ち、かつ $\mathrm{St}(D_2)=\{0\}$ とする。このとき、もし無限個の $n \in \mathbf{N}$ に対し包含関係、

$$(g_1^n)^* \mathcal{I}(D_1) \supset (g_2^n)^* \mathcal{I}(D_2) \tag{9}$$

が成り立てば、ある K 上の不分岐射 $\phi: \mathbf{G}_1 \to \mathbf{G}_2$ と自然数 h が存在して、$\phi(g_1^h) = g_2^h$ かつ $D_1 \subset \phi^*(D_2)$ が成立する。

参考文献

[CRS97] Corrales-Rodrigáñez, C. and Schoof, R., The support problem and its elliptic analogue, J. Number Theory **64** (1997), 276-290.

[CN09] P. Corvaja and J. Noguchi, A new unicity theorem and Erdös' problem for polarized semi-abelian varieties, Preprint 2009.

[NWY07] Noguchi, J., Winkelmann, J. and Yamanoi, K., Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties, J. Math. Pures Appl. **88** Issue 3, (2007), 293–306.

[NWY08] Noguchi, J., Winkelmann, J. and Yamanoi, K., The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties II, Forum Math.**20** (2008), 469–503.

[S75] Schinzel, A., On power residues and exponential congruences, Acta Arith. **27** (1975), 397–420.

[Y04] Yamanoi, K., Holomorphic curves in abelian varieties and intersection with higher codimensional subvarieties, Forum Math. **16** (2004), 749–788.

On a problem of S. Lang on theta functions

Pietro Corvaja　Udine 大学
野口潤次郎　　東大・数理科学

S. Lang は、1966 年に出版した著書 [L66] の第 3 章末で次のような問題を提示した。

S. Lang の問題. A をアーベル多様体とし、D を A の豊富な因子とする。
(i) 任意の解析的な 1-パラメータ部分群 $\phi: \mathbf{C} \to A$ は、必ず D と交点を持つだろうか？
(ii) さらに、$\phi(\mathbf{C})$ がザリスキー稠密ならば、$\phi(\mathbf{C}) \cap D$ は無限であろうか？

問題の前半 (i) は、J. Ax ([A71], [A72] Theorem 3) により肯定的に解決された。θ を D から決まるテーター関数とすると、$\theta(\phi(z))$ は、定数かゼロをもつ整関数であることが示された。この部分は整正則曲線に対して拡張され、ラングの予想と呼ばれなかなか解決を見なかったが、Siu-Yeung [SY96]（アーベル多様体）及び N. [N98]（準アーベル）で解決された。

後半の (ii) については、J. Ax ([A71], [A72]) は明確には述べていないが、交点の個数関数の評価「$n(r, \phi^* D) \gtrsim r^2$」を示している ([A72] Theorem 4)。これより、$|\phi(\mathbf{C}) \cap D| = \infty$ を知ることができる。

ここでは、[NWY08] で得られた準アーベル多様体への整正則曲線に対する**第二主要定理**の応用として、これらの結果を準アーベル多様体に対して拡張し、交点の集合 $\phi(\mathbf{C}) \cap D$ のザリスキー稠密性を証明する。

定理 1. (**主結果** [CN09]) A を準アーベル多様体とし、D を A 上の被約因子で安定化部分群 $\mathrm{St}(D)$ は有限とする。$f: \mathbf{C} \to A$ を代数非退化な整正則曲線とする。このとき、D のある既約成分 D' が存在して、交点集合 $f(\mathbf{C}) \cap D'$ が D' 内でザリスキー稠密となる。特に、$\dim A \geq 2$ ならば $f(\mathbf{C}) \cap D$ は無限である。

証明は、[NWY08] で得られた次の二つの評価式による。

上の定理 1 の条件下で、A のある同変コンパクト化 $\bar{A}$ が存在して、次が成立する。

$$T_f(r, c_1(\bar{D})) = N_1(r, f^* D) + o(T_f(r, c_1(\bar{D})))||. \tag{2}$$

Z を A 上の代数的サイクルで $\operatorname{codim} Z \geq 2$ とすると、

$$N(r, f^* Z) = o(T_f(r, c_1(\bar{D})))||. \tag{3}$$

実際、定理 1 が成立しないとすると、ある代数的部分集合 $Z \subset D$ が存在して $\operatorname{codim}_A Z \geq 2$ かつ $Z \supset f(\mathbf{C}) \cap D$ が成立する。これと上述二つの評価式を合わせると、

$$T_f(r, c_1(\bar{D})) = o(T_f(r, c_1(\bar{D})))||,$$

となり、矛盾を得る。

注意. $\mathrm{St}(D)$ の有限性は必要である。例えば、$A = \mathbf{C}/\mathbf{Z}[i] \times \mathbf{C}/\mathbf{Z}[i]$、$D = \{0\} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z}[i]$ とし、$f: z \in \mathbf{C} \to ([z], [z^2]) \in A$ とおく。すると、f は代数非退化である。もし $f(z) \in D$ ならば $z \in \mathbf{Z}[i]$ となり、$z^2 \in \mathbf{Z}[i]$ でもある。従って、$f(z) = 0 \in A$ となる。これは、$f(\mathbf{C}) \cap D = \{0\}$ を意味する。

上の例では、f は 1-パラメーター群ではなかった。f を 1-パラメーター群、A をアーベル多様体と限れば、$|\mathrm{St}(D)| < \infty$ を仮定せず、$|f(\mathbf{C}) \cap D| = \infty$ が従う。

命題 4. D を複素トーラス M の被約因子、$\dim M \geq 2$ とする。$\phi : \mathbf{C} \to M$ を代数非退化な 1-パラメーター群とすると、$|\phi(\mathbf{C}) \cap D| = \infty$。

商 $q : M \to A = M/\mathrm{St}(D)^0$ をとれば、M はアーベル多様体 A で $|\mathrm{St}(D)| < \infty$ の場合に帰着される。後は、定理 1 を使えばよい。これは、上述 J. Ax の証明とは別の証明を与えている。

注意. 命題 4 は、準アーベル多様体に対しては成立しない。次の例を考える。

$$A = (\mathbf{C}/\mathbf{Z}) \times (\mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})) \cong \mathbf{C}^* \times E,$$
$$f(z) = ([z], [z]) \in A.$$

ここで、$\Im\tau > 0$、$E = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$ は楕円曲線である。$D = \{0\} \times E$ とおく。すると、$f(\mathbf{C}) \cap D = \{0\}$ で f は代数非退化な 1-パラメーター群である。

参考文献

[A71] J. Ax, Transcendence and differential algebraic geometry, Actes Congr. internat. Math. 1970, 1, 483-485 (1971).

[A72] —, Some topics in differential algebraic geometry, II: On the zeros of theta functions, Amer. J. Math. **94** (1972), 1205-1213.

[CN09] P. Corvaja and J. Noguchi, A new unicity theorem and Erdös' problem for polarized semi-abelian varieties, Preprint 2009.

[L66] S. Lang, Introduction to Transcendental Numbers, Addison-Wesley, Reading, 1966,

[N98] J. Noguchi, On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[NWY08] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties II, Forum Math.**20** (2008), 469–503.

[SY96] Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety. Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

複雑領域上のポテンシャル論

—解析的性質と幾何的性質—

相川 弘明

1. 調和関数と Martin 境界

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の領域 D 上で 2 回微分可能な関数 u が Laplace 方程式

$$\Delta u = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\Big)u = 0$$

を満たすとき，u を D 上の**調和関数**という．Laplace 方程式は最も簡単で重要な偏微分方程式である．ここから数多くの一般化，現代化が行われていった．しかし，ここではユークリッド空間内の領域上の調和関数について考察する．以下，$B(x,r)$ と $S(x,r)$ で中心が x，半径 r の開球と球面をそれぞれ表す．一般に曲面上の面積要素を $d\sigma$ で表す．また，$\delta_D(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ とする．

正調和関数を詳しく調べよう．まったく一般の領域に対してその上の正調和関数全体を **Martin 境界**という理想境界によってとらえることができる．そのために Green 関数 $G(x,y)$ を導入する．

定義 1.1 (Green (1828)). $G(x,y)$ が D の ***Green* 関数**とは $x \in D$ と $y \in D$ の関数であって，任意の $y \in D$ を固定したとき，次の条件をみたす時をいう．

(i) $G(\cdot, y)$ は $D \setminus \{y\}$ で調和.

(ii) $G(\cdot, y) - \phi_y(x)$ は D 上調和に拡張される．ただし ϕ_y は y を極にもつ基本調和関数：

$$\phi_y(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|x-y|} & (n=2), \\ |x-y|^{2-n} & (n \geq 3). \end{cases}$$

(iii) ∂D 上 $G(\cdot, y) = 0$.

領域 D が滑らかならば，D 上の調和関数で D の閉包まで連続なものは Green 関数の法線微分を用いた Poisson 積分で表される．

定理 1.2 (Poisson (1823, published 1827)). D を滑らかな有界領域とする．G を D の *Green* 関数とし，$x \in D$ と $y \in \partial D$ に対し $P(x,y) = -\dfrac{1}{e_n}\dfrac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)$ とおき，D の ***Poisson* 核**という．ただし，$e_2 = 2\pi$ で，$n \geq 3$ のとき $e_n = (n-2)\sigma_n$ である．ここに，σ_n は単位球面の表面積である．h を D 上の調和関数で $\overline{D}$ まで連続なものとすると

$$h(x) = \int_{\partial D} P(x,y)h(y)d\sigma(y) \quad (x \in D).$$

しかし，複雑な領域に対してはそう簡単ではない．角のあるようなLipschitz領域では法線方向が決まらない点が出てくるから，法線微分をどう考えるか問題であるし，フラクタル領域では境界が $n-1$ 次元でなくなってしまうから，面積分をどう理解するかも問題になる．

Martin (1941)は「Green関数が存在する」という条件だけをみたす全く一般の領域における積分表示を考え，**Martin境界**と呼ばれる理想境界を導入した．D が滑らかならば

$$-\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y) \approx \frac{G(x,y)}{G(x_0,y)}$$

に注意して，$G(x,\cdot)/G(x_0,\cdot)$ が連続に拡張できるような最小の理想境界 Δ と拡張 $K(x,\cdot)$ を考える．このとき積分表示：

$$h(x) = \int_\Delta K(x,y)d\mu_h(y)$$

が得られる．Δ を**Martin境界**，$K(x,y)$ を**Martin核**という．$K(\cdot,y)$ は D 上の正調和関数で $K(x_0,y)=1$ となるものである．このMartin核を境界点とみなす．しかしながら，この積分表示に現れる測度 μ_h は一意的でない．そこで，Martin境界の中で本質的な点，**極小Martin境界点**を考える必要がある．

一般に正調和関数 u が極小とは u 以下の正調和関数が必然的に u の定数倍になってしまうときをいう．Martin核 $K(\cdot,y)$ が極小であるとき y を極小Martin境界点といい，その全体を**極小Martin境界**と呼び，Δ_1 で表す．残りの境界を非極小Martin境界といい，Δ_0 で表す．

Poisson積分表示は次のように一般化される．

定理 1.3 (Martin (1941))**.** *D 上の正調和関数 h に対し，Δ_1 上の測度 μ_h が一意的に存在して*

$$h(x) = \int_{\Delta_1} K(x,y)d\mu_h(y).$$

Martinの定理は一般的で美しいが，具体的な領域のMartin境界はどうなっているかは別の問題である．

問題. *与えられた領域に対してMartin境界は位相境界と一致するか? $\Delta = \Delta_1 = \partial D$ となる条件は何か?*

D が滑らかであれば $G(x_0,y)$ は境界までの距離関数 $\delta_D(y) = \mathrm{dist}(y,\partial D)$ と比較可能であり，Martin核 $K(x,y)$ はGreen関数の内向き法線微分に適当な y の正関数をかけたものとなる．その関数を測度に組み込んでしまえば，Martinの積分表示とPoisson積分表示は同じものである．また y 以外の境界点で $K(\cdot,y)$ は連続的に0になるから，$K(\cdot,y)$ は極小であり，Martin境界は極小点だけからなることが分かる．

しかし，考察している領域が全く一般になると，Martin境界と位相境界が一致するかどうか分からないし，非極小Martin境界点が出てくる可能性がある．実は，一般領域と滑らかな領域の間には種々の興味深い領域のクラスがあってMartin境界の具体的な構造が分かっている．もちろん領域が一般になるにつれて得られる情報は粗くなっていく．

2. Carleson評価と境界Harnack原理

各境界点に対してそこで接する半径一定の球が領域の内側にとれるとき**内部球条件**をみたすという．また外側に取れるとき**外部球条件**をみたすという．内部球条件と外部球条

件の両方をみたすとき**球条件**をみたすという．領域が球条件をみたすとき，境界のある部分で $u=0$ となる正調和関数 u はその近くで $u(x)\approx\delta_D(x)$ となる．(球の Green 関数と球の外部の Green 関数との比較) これから $\Delta=\Delta_1=\partial D$ となることを容易に導くことができる．この方向では $C^{1,\alpha}$-領域まで同様の比較が可能である (Widman (1967))．

問題は領域が滑らかでなくなったときに起こってくる．局所的に境界が Lipschitz 連続関数のグラフで表される領域を **Lipschitz 領域**という．Lipschitz 領域に対しては境界で 0 になる正の調和関数は境界までの距離関数と比較可能とは限らない．例えば $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視すると，第 1 象限上の正調和関数 $h(z)=xy$ は原点の近くで距離の 2 乗のスピードで 0 に近づく．Lipschitz 領域では境界の各点で正調和関数の消え方が異なっている．

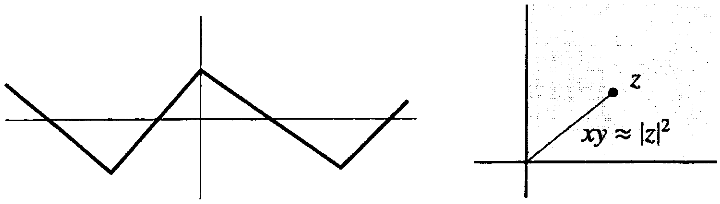


図 1. Lipschitz 領域．調和関数の消え方．

このような困難を乗り越えて，Carleson (1962) は（一様）**Carleson 評価**を導き，局所的 Fatou の定理を証明した．

定義 2.1 (Carleson 評価). $\xi\in\partial D$ かつ $r>0$ を小さい正の数とする．$\xi_r\in S(\xi,r)\cap D$ を $\delta_D(\xi_r)\approx r$ となる点とする．この ξ_r のように ξ からの距離と，境界 ∂D からの距離が比較可能な点を非接点という．このとき，u が D で正調和で，$\partial D\cap B(\xi,Cr)$ で $u=0$ ならば

$$u(x)\le Cu(\xi_r)\quad (x\in D\cap B(\xi,r)).$$

Carleson 評価は 1 つの正調和関数の境界増大度を非接点からコントロールするが，**境界 Harnack 原理**は 2 つの正調和関数を比較する．

定義 2.2 (一様境界 Harnack 原理). $\xi\in\partial D$ かつ $r>0$ を小さい正の数とする．u,v が領域 $D\cap B(\xi,Cr)$ で正調和で $\partial D\cap B(\xi,Cr)$ で $u=v=0$ ならば

$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)}\le C\quad (x,y\in D\cap B(\xi,r)).$$

ただし $C>1$ は $\xi,\ r,\ u,\ v$ によらない．

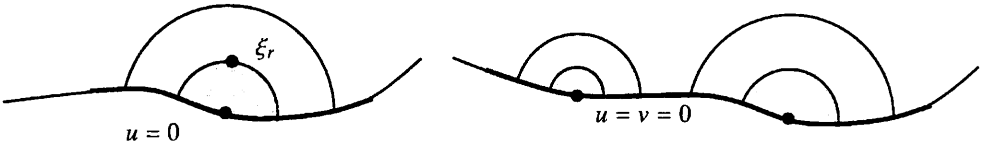


図 2. Carleson 評価と一様境界 Harnack 原理.

注意 2.3. Kemper (1972) は Lipschitz 領域に対する境界 Harnack 原理をはっきりと定式化した．しかし，惜しいことには彼の境界 Harnack 原理の証明にはギャップがあった．1970 年代の後半，Ancona (1978), Dahlberg (1977), Wu (1978) により別々の方法で Lipschitz 領域に対する境界 Harnack 原理が完成された．

注意 2.4. Carleson 評価と境界 Harnack 原理は非常に関係が深い．述語はしばしば混同されてきた．精密な定式化を行うと，Carleson 評価と境界 Harnack 原理の同値性が分かる (Aikawa (2008))．

Martin 境界の決定には一様境界 Harnack 原理が重要である．

定理 2.5. 一様境界 *Harnack* 原理が成立すれば $\Delta = \Delta_1 = \partial D$.

定義 2.6. 境界点 $\xi \in \partial D$ を一つ固定する．D 上の正調和関数 u が ξ における核関数であるとは $\partial D \setminus \{\xi\}$ で $u = 0$ であり，任意の $r > 0$ に対して $D \setminus B(\xi, r)$ で有界，さらに $u(x_0) = 1$ となるときを言う．境界点 ξ における核関数の全体を $\mathcal{H}_\xi$ で表す．

定理 2.5 の証明. 境界 Harnack 原理が成り立てば $y \to \xi$ のとき $G(x,y)/G(x_0,y)$ の極限は ξ における核関数になる．したがって，$\mathcal{H}_\xi$ がただ一点からなることを言えばよい．

一様境界 Harnack 原理から

$$C^{-1} \le \frac{u}{v} \le C \quad (u, v \in \mathcal{H}_\xi).$$

ここで

$$c = \sup_{\substack{u,v \in \mathcal{H}_\xi \\ x \in D}} \frac{u(x)}{v(x)}$$

とおくと $1 \le c \le C < \infty$ である．$c = 1$ を矛盾によって示す．$c > 1$ と仮定する．任意に $u,\ v \in \mathcal{H}_\xi$ をとると $v_1 = (cv - u)/(c - 1) \in \mathcal{H}_\xi$ となる．c の定義から u と v_1 を比較して $u \le cv_1 = c(cv - u)/(c - 1)$. よって，$(2c - 1)u \le c^2 v$ となるが，これは

$$c = \sup_{\substack{u,v \in \mathcal{H}_\xi \\ x \in D}} \frac{u(x)}{v(x)} \le \frac{c^2}{2c - 1} < c \quad \text{矛盾}.$$

よって，$c = 1$ であり $\mathcal{H}_\xi$ は 1 点からなる．また，$u \in \mathcal{H}_\xi$ は極小であることも容易である． □

注意 2.7. 境界で $u = 0$ であるという条件に注意しよう．まったく一般な領域は Dirichlet 問題に対して非正則かもしれない．したがって，連続的に境界で $u = 0$ と仮定することはできない．それより弱く，**u は有界であって,「境界上の極集合を除いて $u = 0$」**が一般の境界条件である．このことを $u = 0$ q.e. (quasi everywhere) と書く．ここで極集合とはその上で $+\infty$ となる優調和関数が存在するような小さな集合である．極集合の Hausdorff 次元は $n - 2$ であり (Armitage & Gardiner (2001, Theorem 5.9.6))，その $n - 1$ 次元 Hausdorff 測度や Lebesuge 測度は 0 である．この弱い境界条件であっても最大値の原理は通常と同様に成立する．Green 関数の境界条件 $G(\cdot, y) = 0$ も q.e. で成立と理解すれば，非定数な正調和関数が存在する領域は必ず Green 関数をもち，Martin 境界が定義できる．また，一様境界 Harnack 原理が成立すれば $\Delta = \Delta_1 = \partial D$ となる．

3. 様々な複雑領域

3.1. **NTA 領域.** 領域 D 内の球の列 $\{B(x_j, \frac{1}{2}\delta_D(x_j))\}_{j=1}^N$ が順番に共通部分を持ち，$x \in B(x_1, \frac{1}{2}\delta_D(x_1))$ かつ $y \in B(x_N, \frac{1}{2}\delta_D(x_N))$ となっているとき，x と y を結ぶ長さ N の Harnack 鎖という．次元にのみ依存する定数 $C > 1$ で以下をみたすものがある．h を D 内の正調和関数とする．2 点 x と y が長さ N の Harnack 鎖で結ばれるならば，$h(x)/h(y) \le C^N$ となる．

Jerison & Kenig (1982) は Lipschitz 領域を一般化して **NTA 領域** (Non-Tangentially Accessible domain) を定義した．すなわち，NTA 領域とは $C > 1$ と $r_0 > 0$ があって，以下の 3 条件をみたすものである．

(i) **Corkscrew 条件.** 任意の境界点 $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対し $D \cap B(\xi, r)$ は半径 r/C の球を含む．

(ii) **外部 corkscrew 条件.** 任意の境界点 $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対し $B(\xi, r) \setminus D$ は半径 r/C の球を含む．

(iii) **Harnack 鎖条件.** 領域内の任意の 2 点 x, y の距離がそれぞれの点から境界までの距離と比較可能であるとき，x と y は長さが一定の Harnack 鎖で結べる．

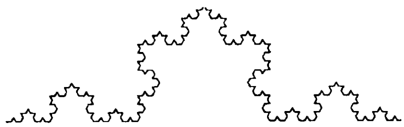


図 3. Snow flake (NTA 領域の例).

NTA の仮定の下では Carleson 以来の方法をほぼそのまま使える．

定理 3.1. *NTA 領域に対しては一様境界 Harnack 原理が成立し，* $\Delta = \Delta_1 = \partial D$ *である．*

$\omega(x; E, U)$ を集合 E の開集合 U に対する調和測度の x における値とする．

定義 3.2 (調和測度の 2 倍条件). 定数 $C_1 > 2$ が存在して $\xi \in \partial D$ かつ $R > 0$ が十分小ならば

$$\omega(x; B(\xi, 2R) \cap \partial D, D) \le C\omega(x; B(\xi, R) \cap \partial D, D) \quad \text{for } x \in D \setminus B(\xi, C_1 R) \tag{3.1}$$

となっているとき，調和測度は強 2 倍条件をみたすという．

さらに，(3.1) が固定した一点 $x = x_0$ についてのみ成立するとき調和測度は 2 倍条件をみたすという．

定理 3.3. *NTA 領域の調和測度は強 2 倍条件をみたす．*

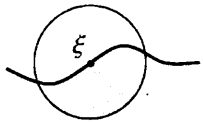
注意 3.4. NTA 領域は Lipschitz 領域に比べて遥かに複雑になりうる．境界の Hausdorff 次元は $n-1$ を越えることがあり，境界の面測度を考えることができない．したがって調和測度が境界の面測度に絶対連続とは限らない．NTA 領域上の調和解析は境界の面測度の代わりに調和測度に基づいて展開される．

NTA 領域の条件を見れば，(i) と (iii) は領域内部の条件であり，(ii) は外部の条件である．ここから領域の幾何学的条件は内部と外部に分かれてさらに発展していった．

3.2. **容量密度条件.** 外部条件は次のように一般化される．Green 関数を持つ開集合 U 上の Green 容量を $\mathrm{Cap}_U(E)$ で表す．

定義 3.5 (容量密度条件). D が**容量密度条件** ***(Capacity density condition)***，略して ***CDC***，を満たすとは，正の定数 λ と r_0 があって，すべての $\xi \in \partial D$ と $0 < r < r_0$ に対して

$$\frac{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r) \setminus D)}{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r))} \geq \lambda$$



となることと定義する．

注意 3.6. Cap を 2 次元の時は対数容量，3 次元以上の時は Newton 容量とすれば上の条件は $n = 2$ のとき，$\mathrm{Cap}(B(\xi,r) \setminus D) \geq Cr$，$n \geq 3$ のとき，$\mathrm{Cap}(B(\xi,r) \setminus D) \geq Cr^{n-2}$ と同値である．**体積密度条件**: $\dfrac{|B(\xi,r) \setminus D|}{|B(\xi,r)|} \geq C$ は CDC の十分条件となる．外部錐条件をみたす領域は明らかに CDC を満たす．特に，滑らかな領域や Lipschitz 領域は CDC をみたす．

3.3. **一様領域.** 次に内部条件の発展を見よう．NTA 領域の (i) と (iii) をみたすものを一様領域という．別の言葉では D が**一様領域**とは D 内の任意の 2 点 x, y に対して，x と y を結ぶ D 内の曲線 γ で

$$\ell(\gamma) \leq C|x-y|,$$
$$\min\{\ell(\gamma(x,z)), \ell(\gamma(z,y))\} \leq C\delta_D(z) \quad (z \in \gamma)$$

をみたすものが存在するときをいう．ただし $\ell(\gamma)$ は曲線 γ の長さを表し，$\gamma(x,z)$ は γ の部分弧で x と z を結ぶものを表す．x と y を端に持ち，全長が $|x-y|$ の定数倍で押さえられる，途中で膨らむ葉巻のような物が D 内に取れるということである．そこでこの条件を**葉巻条件**という．またこの曲線を**葉巻曲線**と呼ぶ．

定理 3.7 (Aikawa (2001)). 一様領域に対しては一様境界 *Harnack* 原理が成立し，$\Delta = \Delta_1 = \partial D$ である．一様領域の調和測度は 2 倍条件をみたすとは限らない．

注意 3.8. CDC をみたす一様領域は NTA 領域とほぼ同じ性質を持ち，Jerison & Kenig (1982) と同じ方法で一様境界 Harnack 原理が示される．CDC をみたさない場合には Bass & Burdzy (1991) の確率論的 Box argument を解析的に解釈した方法で一様境界 Harnack 原理が示される．

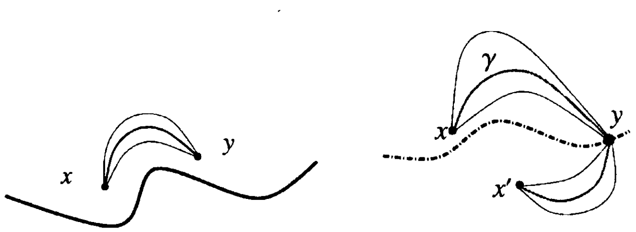


図 4. 一様領域と半一様領域．x と x' を結ぶ適切な葉巻曲線はない．

3.4. **半一様領域.** 一様領域では任意の $x, y \in D$ が適切な葉巻曲線で結べたが，少し考察すれば任意の $x, y \in \overline{D}$ も同様の曲線で結べることが分かる．ここで片方の点の位置を制約しよう．D が**半一様領域**とは D 内の任意の点 x と任意の境界点 y に対して，x と y を結ぶ D 内の曲線 γ で

$$\ell(\gamma) \le C|x-y|,$$

$$\min\{\ell(\gamma(x,z)), \ell(\gamma(z,y))\} \le C\delta_D(z) \quad (z \in \gamma)$$

をみたすものが存在するときをいう．境界が超平面上にある領域を Denjoy 領域という．Denjoy 領域と球との共通部分は典型的な半一様領域である．半一様領域は調和測度の 2 倍条件で特徴付けられる．これについては後で詳しく述べる．

3.5. **John 領域.** 一様領域では x, y が D 内を自由に動けたが，一方を $y = x_0$ と固定し，x のみ動かして同じ条件をみたすときに D を **John 領域**，x_0 を **John 中心**という．より正確に言うと D 内の任意の点 x に対して，x と x_0 を結ぶ曲線 γ で

$$\delta_D(z) \ge c_J \ell(\gamma(x,z)) \quad (z \in \gamma) \tag{3.2}$$

をみたすものが存在するとき，この曲線を **John 曲線**と呼び，D を **John 定数** c_J の John 領域という．中心 x_0 は D 内の固定したコンパクト集合に取り替えても差し支えない．John 定数 c_J は $0 < c_J \le 1$ であって，c_J が 1 に近ければ近いほど領域が滑らかに近いことを表す．John 領域の条件は各点 x から x_0 に向かう開きが一定の捻れた錐が取れることを意味する．

定義 3.9. D を $\partial D \ne \emptyset$ となる任意の領域とする．このとき，$x, y \in D$ の**擬双曲距離**を

$$k_D(x,y) = \inf_{\widetilde{xy}} \int_{\widetilde{xy}} \frac{ds}{\delta_D(z(s))}$$

で定義する．ただし，下限は x と y を D 内で結ぶ曲線 $\widetilde{xy}$ に関して取る．

擬双曲距離 $k_D(x,y)$ は x と y を結ぶ最小の Harnack 鎖の長さに比較可能である．John 領域は次の性質を持つ．

定理 3.10. *John* 領域 D は**擬双曲距離条件**:

$$k_D(x, x_0) \le C \log \frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)} + C' \quad (x \in D)$$

をみたす．特に c_J を D の *John* 定数とすると，$C = 1/c_J$ と取れる．

John 領域の各境界点の近くを擬双曲距離を用いて詳しく調べることが出来る (Aikawa, et al. (2006, Proposition 2.1))．

補題 3.11 (局所参照点). D を *John* 領域とする．このとき *John* 定数にのみ依存する自然数 N があって各境界点 $\xi \in \partial D$ と $R > 0$ 十分小に対して N 個の点 $y_1^R, \ldots, y_N^R \in D \cap S(\xi, R)$ で以下の性質をみたすものがある．

(i) $C^{-1}R \le \delta_D(y_i^R) \le R$.

(ii) $\displaystyle\min_{i=1,\ldots,N}\{k_{D_R}(x, y_i^R)\} \le C \log \frac{R}{\delta_D(x)} + C$ *for* $x \in D \cap B(\xi, R/2)$, ただし $D_R = D \cap B(\xi, 8R)$.

(iii) 任意の $x \in D \cap B(\xi, R/2)$ は在る y_i^R に D_R 内の曲線 γ で結べる．ただし γ は条件

$$\ell(\gamma(x,z)) \le C\delta_D(z) \quad \textit{for all } z \in \gamma$$

をみたす．

$y_1^R, \ldots, y_N^R$ を位数 N の局所参照点という．

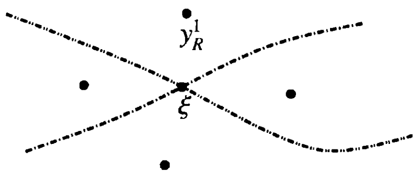


図 5. 局所参照点．

John 領域に対しては**弱境界 Harnack 原理**が成り立つ．

定理 3.12 (Aikawa et al. (2006), Ancona (2007))**.** $\xi \in \partial D$ とする．$R > 0$ 小に対して $y_1^R, \ldots, y_N^R$ を位数 N の局所参照点とする．このとき任意の核関数 $h_0, h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{H}_\xi$ は

$$h_0(x) \le C \sum_{i=1}^{N} \frac{h_0(y_R^i)}{h_i(y_R^i)} h_i(x) \quad (x \in D)$$

をみたす．特に $\mathcal{H}_\xi$ の次元は N 以下である．すなわち，ξ に対応する極小 *Martin* 境界点の数は N 以下である．さらに，$c_J > \sqrt{3}/2$ ならば $N = 2$ と取れ，各位相境界点上の極小 *Martin* 境界点の数は 2 個以下である．定数 $\sqrt{3}/2$ は最良である．

4. 解析的性質から幾何的性質

前節では様々な複雑領域を幾何的性質により定義し，境界 Harnack 原理をはじめとする解析的性質を導いた．この節では逆に解析的性質から，幾何的性質を導くことができることを見よう．

そのためには領域が一様に「大きい」ことが必要である．実際，可算個の収束点列は極集合であり，点列を除いても領域の Green 関数は変化しないが，領域の一様性などの幾何学的性質は大きく変化してしまう．そこで，最小限の仮定として容量密度条件 CDC を仮定する．この仮定の下では一様境界 Harnack 原理や調和測度の強 2 倍条件から幾何学的性質が導かれ，一様領域，半一様領域，John 領域が特徴付けられる (Aikawa (2004), Aikawa & Hirata (2008))．

まず，CDC と同値な条件を調和測度で与える．

定理 4.1. *CDC* が成立する必要十分条件は定数 $C > 0$ と $0 < \beta \le 1$ があって，$\xi \in \partial D$ と十分小さい $r > 0$ に対して，

$$\omega(x; D \cap S(\xi, r), D \cap B(\xi, r)) \le C\Big(\frac{\delta_D(x)}{r}\Big)^\beta \quad (x \in D \cap B(\xi, r/2)) \tag{4.1}$$

となることである．

(4.1) の逆向きの不等式が John 領域を特徴付ける．

定理 4.2. D を *CDC* をみたす領域とする．このとき定数 $C > 0$ と $\alpha > 0$ があって，$\xi \in \partial D$ と十分小さい $r > 0$ に対して，

$$\omega(x; D \cap S(\xi, r), D \cap B(\xi, r)) \geq C\Big(\frac{\delta_D(x)}{r}\Big)^{\alpha} \quad (x \in D \cap B(\xi, r/2)) \tag{4.2}$$

となるならば，D は *John* 領域である．

上の結果を基にして CDC をみたす John 領域をさらに詳しく特徴付けよう．

定理 4.3. D を *CDC* をみたす *John* 領域とする．このとき

D は一様領域 $\Longleftrightarrow$ 一様境界 *Harnack* 原理が成り立つ．

定理 4.4. D を *CDC* をみたす *John* 領域とする．このとき

D は半一様領域 $\Longleftrightarrow$ 調和測度は強 2 倍条件をみたす．

注意 4.5. 調和測度の 2 倍条件は $\mathbb{R}^2$ で多くの研究がなされてきた．

(i) 単連結領域 D が NTA $\Longleftrightarrow$ D の調和測度と $\overline{D}^c$ の調和測度がどちらも 2 倍条件をみたす (Jerison & Kenig (1982, Theorem 2.7)).

(ii) Kim & Langmeyer (1998) は片側条件を与えた．
Jordan 領域が John 領域 $\Longleftrightarrow$ D の調和測度は 2 倍条件をみたす．

(iii) Balogh & Volberg (1996) は (3.1) に似た 2 倍条件を内部一様領域に示した．

(iv) 以上の議論はすべて複素解析による．高次元化は簡単でない．

注意 4.6. 調和測度の 2 倍条件と半一様領域がどうして関係するのかは，Balogh & Volberg (1996) の反例から理解できる．D は線分 $[-1, 1]$ と線分 $L_\theta = \{te^{-i\theta} : 0 \leq t \leq 1\}$ の和集合を平面円板 $B(0, 2)$ から引いた物とする．ただし，$0 < \theta < \pi/2$．ここで $\frac{1}{2}\sin\theta < c < \sin\theta$ のとき，$B_1 = B(te^{-i\theta}, ct)$，$B_2 = B(te^{-i\theta}, 2ct)$ とする．$B_1 \cap [-1, 1] = \emptyset$ であり，$B_2 \cap [-1, 1] \neq \emptyset$ であるから，$t \to 0$ のとき

$$\omega(x_0; B_1 \cap \partial D, D) \approx t^{\pi/(\pi-\theta)}, \quad \omega(x_0; B_2 \cap \partial D, D) \approx t.$$

よって，$\dfrac{\omega(x_0; B_2 \cap \partial D, D)}{\omega(x_0; B_1 \cap \partial D, D)} \to \infty$.

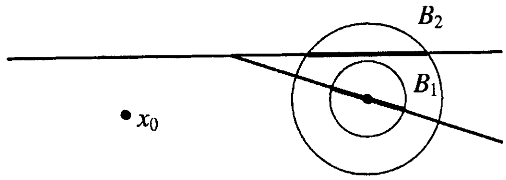


図 6. Balogh-Volberg の反例．

参考文献

[1] Aikawa, H. (2001). 'Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain'. *J. Math. Soc. Japan* **53** (1): 119–145.

[2] Aikawa, H. (2004). 'Potential-theoretic characterizations of nonsmooth domains'. *Bull. London Math. Soc.* **36** (4): 469–482.

[3] Aikawa, H. (2008). 'Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate'. *Math. Scand.* **103** (1): 61–76.

[4] 相川 弘明. (2008). **複雑領域上のディリクレ問題 — ポテンシャル論の観点から** *(岩波数学叢書)*. 岩波書店.

[5] Aikawa, H., & Hirata, K. (2008). 'Doubling conditions for harmonic measure in John domains'. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58** (2): 429–445.

[6] Aikawa, H., Hirata, K., & Lundh, T. (2006). 'Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets'. *J. Math. Soc. Japan* **58** (1): 247–274.

[7] Ancona, A. (1978). 'Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien'. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **28** (4): 169–213.

[8] Ancona, A. (2007). 'Sur la théorie du potentiel dans les domaines de John'. *Publ. Mat.* **51** (2): 345–396.

[9] Armitage, D. H., & Gardiner, S. J. (2001). *Classical potential theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London.

[10] Balogh, Z., & Volberg, A. (1996). 'Boundary Harnack principle for separated semihyperbolic repellers, harmonic measure applications'. *Rev. Mat. Iberoamericana* **12** (2): 299–336.

[11] Bass, R. F., & Burdzy, K. (1991). 'A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains'. *Ann. of Math. (2)* **134** (2): 253–276.

[12] Carleson, L. (1962). 'On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables'. *Ark. Mat.* **4**: 393–399.

[13] Dahlberg, B. E. J. (1977). 'Estimates of harmonic measure'. *Arch. Rational Mech. Anal.* **65** (3): 275–288.

[14] Green, G. (1828). *Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism.* Nottingham.

[15] Jerison, D. S., & Kenig, C. E. (1982). 'Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains'. *Adv. in Math.* **46** (1): 80–147.

[16] Kemper, J. T. (1972). 'A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities'. *Comm. Pure Appl. Math.* **25**: 247–255.

[17] Kim, K., & Langmeyer, N. (1998). 'Harmonic measure and hyperbolic distance in John disks'. *Math. Scand.* **83** (2): 283–299.

[18] Martin, R. S. (1941). 'Minimal positive harmonic functions'. *Trans. Amer. Math. Soc.* **49**: 137–172.

[19] Poisson, S. D. (1823, published 1827). 'Mémoir sur le calcul numérique des integrales définies'. *Mémoires de l'acad. Royale des sci. de l'institute de Françe* (iv): 571–602.

[20] Widman, K.-O. (1967). 'Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations'. *Math. Scand.* **21**: 17–37 (1968).

[21] Wu, J.-M. G. (1978). 'Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains'. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **28** (4): 147–167.

〒 060-0810 札幌市北区北 10 条西 8 丁目，北海道大学理学研究院数学専攻
E-mail address: `aik@math.sci.hokudai.ac.jp`

孤立特異点の境界上の contact structure

Takao Akahori

(V, o) を複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^N$ 内の正規孤立特異点とする（原点 o が特異点)。そして $M = V \cap S_\epsilon^{2N-1}(o)$ を V と原点 o を中心とする半径 ϵ の超球の共通集合とする。するとこの M 上には V より自然に CR 構造 $(M, {}^0T'')$ が入り逆にこの CR 構造が正規孤立特異点を定める。この事実に着目して倉西正武氏は CR 構造の変形理論を創始し、孤立特異点の変形問題を扱った。これは宮嶋公夫氏によって完成された ([Mi])。本講演では宮嶋氏の CR 構造からのアプローチではなく contact structure の立場から孤立特異点の変形問題を議論したい。筆者はこのアプローチが数学の他分野とも結びつくことを期待する。以下、外国からの参加者を考慮してアブストラクトは英文にした。

1 CR structures and contact structure

Let $(M, {}^0T'')$ be a CR structure. This means that M is a real odd-dimensional C^∞ manifold. And ${}^0T''$ is a complex subbundle of the complexfied tangent bundle $C \otimes TM$, satisfying;

$$(1) \quad {}^0T'' \cap \overline{{}^0T''} = 0, dim_{\mathbf{C}} \frac{C \otimes TM}{{}^0T'' + \overline{{}^0T''}} = 1,$$

$$(2) \quad [\Gamma(M, {}^0T''), \Gamma(M, {}^0T'')] \subset \Gamma(M, {}^0T'')$$

While the pair (M, θ) is called a contact structure if M is a real $2n-1$ dimensional C^∞ manifold and θ is a real one form on M satisfying;

$$\theta \wedge (d\theta)^{n-1} \neq 0 \text{ at any point of } M$$

The notion of CR structures is completely different from the one of contact structures(a contact structure is insensible to a CR structure). However, in the case strongly pseudo convex, the situation differs a little bit. And for the case isolated singularity (V, o) in $\mathbf{C}^\mathbf{N}$, set

$$M = V \cap S_\epsilon^{2N-1}(o).$$

Then we have a natural CR structure,

$$(M, {}^0T''), \text{ where } {}^0T'' = C \otimes TM \cap T''(V - o).$$

And set

$$r := \sum_{i=1}^{N} \mid z_i \mid^2 - \epsilon,$$

where $(z_1, ..., z_N)$ is a complex coordinate system of $\mathbf{C^N}$. Set

$$\theta := \sqrt{-1}\partial r.$$

Then, this θ is a real one form on M, and $\theta \wedge (d\theta)^{n-1} \neq 0$ at any point of M. Hence, our (M, θ) is also a contact structure.

Now let $(M, {}^0T'')$ be a strongly pseudo convex CR manifold. We recall the deformation theory of CR structures. We take a supplement vector field ζ over M. And set

$$T' = {}^0T'' + \mathbf{C} \otimes \zeta,$$

Now we set a real one form θ by

$$\theta(\zeta) = 1 \tag{1}$$

$$\theta \mid_{{}^0T'' + {}^0T'} = 0 \tag{2}$$

Here ${}^0T' = \overline{{}^0T''}$. We assume that our real one form θ satisfies

$$\theta(\zeta) = 1 \tag{3}$$

$$d\theta(\zeta, *) = 0, \tag{4}$$

(because of strongly pseudo convexity, by changing ζ, this is always possible). Set a C^∞ vector bundle decomposition;

$$\mathbf{C} \otimes TM = T' + {}^0T''. \tag{5}$$

Suppose that we are given a CR structure $(M, {}^0T'')$. Now consider an almost CR structure (M, E) over this M.

Definition 1.1. *Let E is a complex subbundle of the complexfied tangent bundle $C \otimes TM$. (M, E) is an almost CR structure if and only if our E satisfies*

$$E \cap \overline{E} = 0, dim_{\mathbf{C}} \frac{C \otimes TM}{E + \overline{E}} = 1$$

And an almost CR structure (M, E) is called a finite distance from $(M, {}^0T'')$ if and only if

Definition 1.2. *The following composition map of the inclusion and projection of $C \otimes TM = T' + {}^0T''$ to ${}^0T''$ is isomorphic.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\text{inclusion map}} & C \otimes TM = T' + {}^0T'' \\ & & \Big\downarrow \text{projection to } {}^0T'' \\ & & {}^0T'' \end{array}$$

For an almost CR structure, which is of finite distance from $(M, {}^0T'')$, the following propositions hold(for the more precise explanation, see Sect.3 in [AGL]).

Proposition 1.1. *An almost CR structure, which is of finite distance from $(M, {}^0T'')$, is parametrized by an element of $\Gamma(M, T' \otimes ({}^0T'')^*$. The correspondence is that: for $\phi \in \Gamma(M, T' \otimes ({}^0T'')^*)$,*

$${}^{\phi}T'' = \{X' = X + \phi(X), X \in {}^0T''\}.$$

Proposition 1.2. *An almost CR structure $(M, {}^{\phi}T'')$ is actually a CR structure if and only if*

$$\overline{\partial}^{(1)}_{T'} \phi + R_2(\phi) + R_3(\phi) = 0.$$

Here, $R_2(\phi)$ is the element of $\Gamma(M, T' \otimes \wedge^2({}^0T'')^*)$, which is of second order with respect to ϕ(and this $R_2(\phi)$ includes the first order derivatives of ϕ), and $R_3(\phi)$ is the element of $\Gamma(M, T' \otimes \wedge^2({}^0T'')^*)$, which is of third order with respect to ϕ. We explain $\overline{\partial}^{(1)}_{T'}$.

We set

$$\Gamma(M, T') = \{u : u \text{ is a } T'\text{-valued } C^\infty \text{ section}\},$$

and a T'-valued $\overline{\partial}_b$-operator

$$\overline{\partial}_{T'} : \Gamma(M, T') \to \Gamma(M, T' \otimes ({}^0T'')^*),$$

by: for $u \in \Gamma(M, T')$, for $p \in M$,

$$u \to \overline{\partial}_{T'} u(X_p) = [\tilde{X}_p, u]_{T'},$$

where $\tilde{X}_p$ is a C^∞ extension of X_p, and $[\tilde{X}_p, u]_{T'}$ means the T' part of $[\tilde{X}_p, u]$ with respect to (5). Then, like as for scalar valued differential forms, we have a differential complex

<u>The standard deformation complex</u>

$$0 \longrightarrow \Gamma(M, T') \xrightarrow{\overline{\partial}_{T'}} \Gamma(M, T' \otimes ({}^0T'')^*) \xrightarrow{\overline{\partial}^{(1)}_{T'}}$$

$$\Gamma(M, T' \otimes \wedge^2({}^0T'')^*) \xrightarrow{\overline{\partial}^{(2)}_{T'}} \Gamma(M, T' \otimes \wedge^3({}^0T'')^*) \xrightarrow{\overline{\partial}^{(3)}_{T'}} \ldots.$$

For compact complex manifolds, this differential complex is elliptic. However, for our CR case, i.e., boundaries of open manifolds, this is only subelliptic. This causes the difficuly in constructing the versal family of deformations eventhough $H^j(M,T') = \frac{Ker\overline{\partial}^{(j)}_{T'}}{Im\overline{\partial}^{(j-1)}_{T'}}$ is a finite dimensionalvector space if $1 \leq j \leq n-2$. To overcome this difficulty, we introduce the new complex. Now we recall the new deformation complex, which is developed in our papers ([A3],[AGL]). Let ; for a nonnegative integer j,

$$E_j = \{u : u \in {}^0T' \otimes \wedge^j({}^0T'')^*,\ (\overline{\partial}^{(j)}_{T'}u)_{\mathbf{C}\zeta\otimes\wedge^{j+1}({}^0T'')^*} = 0\}.$$

We note that ; the map ; $u \in {}^0T' \otimes \wedge^j({}^0T'')^* \to (\overline{\partial}^{(j)}_{T'}u)_{\mathbf{C}\zeta\otimes\wedge^{j+1}({}^0T'')^*}$ is the linear map which does not include the derivatives with respect to u. Here $(\overline{\partial}^{(j)}_{T'}u)_{\mathbf{C}\zeta\otimes\wedge^{j+1}({}^0T'')^*}$ means the projection of $\overline{\partial}^{(j)}_{T'}u$ to $\mathbf{C}\zeta\otimes\wedge^{j+1}({}^0T'')^*$ according to the vector bundle decomposition

$$T' \otimes \wedge^{j+1}({}^0T'')^* ={}^0 T' \otimes \wedge^{j+1}({}^0T'')^* + \mathbf{C}\zeta \otimes \wedge^{j+1}({}^0T'')^*.$$

In fact, we extend u to a global section of $\Gamma(M,{}^0T' \otimes \wedge^j({}^0T''))$, $\tilde{u}$, and project $\overline{\partial}^{j+1}_{T'}\tilde{u}$ to $\mathbf{C}\zeta \otimes \wedge^{j+1}({}^0T'')^*$ according to this vector bundle decomposition. Because of taking the projection, $(\overline{\partial}^{(j)}_{T'}\tilde{u})_{\mathbf{C}\zeta\otimes\wedge^{j+1}({}^0T'')^*}$ does not depend on the extension. Then, we have

Proposition 1.3. *(see Theorem 2.2 in [A3]).*
$\overline{\partial}^j_{T'}\Gamma(M,E_j) \subset \Gamma(M,E_{j+1})$.

Proposition 1.4. *(see Theorem 2.4 in [A3]).*
For $j \geq 1$,

$$\frac{Ker\overline{\partial}^j_{T'} \cap \Gamma(M,E_j)}{\overline{\partial}^{j-1}_{T'}\Gamma(M,E_{j-1})} \simeq H^j(M,T').$$

And for $j = 0$, $E_0 = 0$.

So we have some part of deformation complex.

$$\Gamma(M,E_1) \xrightarrow{\overline{\partial}^{(1)}_{T'}} \Gamma(M,E_2) \xrightarrow{\overline{\partial}^{(2)}_{T'}} \ldots$$

For this complex, the following theorem holds.

Theorem 1.5. *(see Theorem 4.1 in [A3]). If $dim_{\mathbf{R}}M \geq 7$, on $\Gamma(M,E_2)$ the subelliptic estimate holds.*

About, the version for real dimension 5, will be in the next section.

2 CR Hamiltonian vector fields

In Sect.2, we recall some part of the new deformation complex. Here, we recall the rest.(This part is proved in Sect.4 in [AGL]. While, in [AGL], we never use the terminology "CR Hamilonian vector field". The terminology "CR Hamiltonian vector field" is used, for the first time, in this paper.). For $g \in \Gamma(M, \mathbf{C})$, we set an element of $\Gamma(M, E_1)$, by

$$Dg := \overline{\partial}_{T'} Z_g.$$

We have to explain some notations. For the notation, we recall the $\overline{\partial}_b$ - operator.

$$\Gamma(M, \mathbf{C}) \to \Gamma(M, ({}^0T'')^*),$$

by; for $u \in \Gamma(M, \mathbf{C})$, we set $\overline{\partial}_b u(\overline{Y}) = \overline{Y}u$. Then, we have the $\overline{\partial}_b$-Dolbeault complex

$$0 \longrightarrow \Gamma(M, \mathbf{C}) \xrightarrow{\overline{\partial}_b} \Gamma(M, ({}^0T'')^*) \xrightarrow{\overline{\partial}_b^{(1)}} \Gamma(M, \wedge^2 ({}^0T'')^*)...$$

Now Let $(M, {}^0T'', \theta)$ be a CR structure with a contact form θ. Let ζ be the real vector field on M, determined by (2.1), (2.2). For any C^∞ function g on M, we can determine an element X_g of ${}^0T'$, satisfying: for $\overline{Y} \in {}^0T''$,

$$d\theta(X_g, \overline{Y}) = -(\overline{\partial}_b g)(\overline{Y}).$$

This X_g is uniquely determined. Actually, this equation comes from:

$$(\overline{\partial}_{T'}(g\zeta))(\overline{Y}) + [X_g, \overline{Y}])_\zeta = 0, \text{ for } \overline{Y} \in {}^0T'',$$

where $\overline{\partial}_{T'}(g\zeta)(\overline{Y}) + [X_g, \overline{Y}])_\zeta$ means the coefficient of ζ of $\overline{\partial}_{T'}(g\zeta)(\overline{Y}) + [X_g, \overline{Y}]$. While by (2.4),

$$(\overline{\partial}_{T'}(g\zeta)(\overline{Y}))_\zeta = (\overline{Y}g)\zeta.$$

Now set $Z_g = g\zeta + X_g$, and call Z_g a CR Hamiltonian vector field. Suppose that M is a real hypersurface in $\mathbf{C}^n$. Then, on M, there is a canonical bundle isomorphism map π: T' to $T'\mathbf{C}^n$ on M(this map is introduced by: just taking a $(1,0)$ part of vectors of T'). So, there is an η of $\Gamma(M, T'\mathbf{C}^n|_M)$, $\pi(\zeta) = \eta$. This means:

$$\zeta = \eta + \overline{\eta}.$$

So, we can set a $(1,0)$ vector on M by: for a C^∞ function g,

$$g\eta + X_g.$$

We use the same notation Z_g for this vector. Set $Dg = Z_g$ for a C^∞ function g on M. Now we have the complete deformation complex for CR structures.

$$0 \longrightarrow \Gamma(M, \mathbf{C}) \xrightarrow{D} \Gamma(M, E_1) \xrightarrow{\overline{\partial}_{T'}^{(1)}} \Gamma(M, E_2) \xrightarrow{\overline{\partial}_{T'}^{(2)}} \ldots$$

3 The new Hodge decomposition

Even though our D is a sencond order partial differential complex(we note that $\overline{\partial}^{(i)}_{T'}, i = 1, 2, ..,$ are first order partial differential operators), for our new complex, we have an apriori estimate. More precisely, we have the following theorem.

Theorem 3.1. *(Main Theorem)(see Theorem 5.1 in [AGL]). If $dim_{\mathbf{R}}M \geq 5$, on $\Gamma(M, E_1)$ the subelliptic estimate holds.*

By our new Hodge decomposition theorem with an estimate, we have a versal family of CR structures in the sense of Kuranishi. While, our family should be more than the versal family in the sense of Kuranishi. Our family would be versal in the sense of "CR Hamiltonian flows". Unfortunately, this work is still in progress. We only explain the notion of "CR Hamiltonian flows" in the next section.

4 CR Hamiltonian flows

Let M be a real hypersurface with a real one form θ, satisfying (3), (4) in a complex manifold N with complex dimension n. The triple $(M, {}^0T'', \theta)$ is called a CR structure with a contact form. Let M_t be a family of real hypersurfaces of $\mathbf{C}^n$, depending on $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Let ${}^tT''$ be the induced CR structure over M_t from N. Now a quartet $(\mathcal{M}, \pi, (-\epsilon, \epsilon), \Theta)$ is called a CR Hamiltonian system if

(4.1) $\mathcal{M}$ is a real submanifold of $N \times (-\epsilon, \epsilon)$, and π is a smooth map from $\mathcal{M}$ to $(-\epsilon, \epsilon)$, satisfying : $M_t = \pi^{-1}(t)$. At $t = o$, $M_0 = M$,

(4.2) Θ is a real one form on $\mathcal{M}$ satisfying; the restriction of Θ to M_t(we write this by θ_t), determines a contact form on M_t, and $\theta_0 = \theta$,

(4.3) there is a C^∞ function g on $\mathcal{M}$, and there is a family of C^∞ maps f_t from $\mathcal{M}$ to $M_t = \pi^{-1}(t)$ satisfying :

$$f_t^*\theta_t = \theta, \quad on\ M. \tag{6}$$

For a point p of N, we take a local complex coordinate $(z_1, \cdots, z_n)$ of p. For the definition of CR Hamiltonian flows, we use this complex coordinate.Let $z_i(p, t) = z_i \cdot f_t$ and $g_t = g \cdot f_t$.

$$\frac{\partial z_i(p, t)}{\partial t} = (g_t\zeta + X_{g_t})z_i(p, t), \text{ on } M \times (-\epsilon, \epsilon). \tag{7}$$

where X_{g_t} is the vector field on M, determined in the way as in Sect.2, for g_t.

The quartet $(\mathcal{M}, \pi, (-\epsilon, \epsilon), \Theta)$ is a CR Hamiltonian sysyem.

5 Versality in the sense of CR Hamiltonian flows

Our family is versal in the sense of Kuranishi. While, our family should be also in the sense of our new complex(see Sect.2 in this paper). This part is still in the progress. But, Kuranishi's approach in [Ku] might be useful in this program. Here, we sketch our plan.

Let $(M, {}^0T'')$ be a strongly pseudo convex CR manifold with $dim_{\mathbf{R}} M = 2n-1 \geq 7$. Let p be a reference point of M. In this case, our CR manifold is embeddable in a complex euclidean space(see [A5]). We are focussing its behavior. Namely, we are given a family of CR structures $(M, {}^{\phi(t)}T'')$, where $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Then,the problem is that: how the local embedding map, f_t, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ behaves if t moves.

Theorem 5.1. *For any C^∞ function $g(t)$, which is parametrized by $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, there is a unique CR Hamiltonian flow, f_t, satisfying; f_t is an embedding of M as a real hypersurface into a complex manifold N, parametrized by $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,*

$$f_t : M \to N,$$

and this f_t is expressed by using complex coordinates of N as follows. Let $f_t = (z_1(t), ., z_n(t))$. Then,

$$\frac{\partial z_i(t)}{\partial t} = (g(t)\zeta + X_{g(t)})z_i(t), \ 1 \leq i \leq n.$$

Here $X_{g(t)}$ is the CR-Hamiltonian vector field determined by $g(t)$. We call this flow a CR Hamiltonian flow.

For this, we recall the following well-known existence theorem of the solutions of a single non-linear partial differential equation.

Theorem 5.2. *On a neighborhood of the origin in $\mathbf{R}^m$, consider the following single non-linear partial differential equation.*

$$F(x_1, \cdots, x_m, s, p_1, \cdots, p_m) = 0,$$

Where F is a real valued C^∞ function on a neighborhood in $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, and s is an unknown function, $p_i = \frac{\partial s}{\partial x_i}$. Suppose $\frac{\partial F}{\partial p_i} \neq 0$ for some i,

$1 \leq i \leq m$ *at the origin. Then, for any initial value, we have a unique solution.*

The proof relies on the existence theorem of solutions of ordinary differential equations.

To the case compact complex manifolds case, the proof of versality by using one parameter group is done by Kuranishi. It might be successful to apply his method to our CR case. If it is done, we will report this next year.

参考文献

[A1] T. Akahori, *Complex analytic construction of the Kuranishi family on a normal strongly pseudoconvex manifold*, 14(1978), 789-847, Publ.Res.Inst.Math.Sci..

[A2] T. Akahori, *The new Neumann operator associated with deformations of strongly pseudo convex domains and its application to deformation theory*, **68**(1982), 317-352, Inventiones Mathematicae.

[A3] T. Akahori, *The new estimate for the subbundles E_j and its application to the deformation of the boundaries of strongly pseudo convex domains*, **63**(1981),pp311-334, Inventiones Mathematicae.

[A4] T. Akahori, *The notion of CR Hamiltonian flows and the local embedding problem of CR structures*, NovaPublisher, ISBN 978-1-60741-011-9.

[A5] T. Akahori, *A new approach to the local embedding theorem of CR structures for $n \geq 4$(the local solvability for the operaotor $\overline{\partial}_b$ in the abstract sense)*, Memoirs of the American Mathematical Society,**366** (1987), 1-257.

[AGL1] T. Akahori, P. M. Garfield, and J. M. Lee, *Deformation theory of five-dimensional CR structures and the Rumin complex*, **50**(2002), 517-549, Michigan Mathematical Journal.

[Mi] K. Miyajima, *CR construction of the flat deformations of normal isolated singularities*, **8**(1999), 403-470, J.Algebraic Geometry.

[Ku] M. Kuranishi, *Application of $\overline{\partial}_b$ to deformations of isolated singularities*, **30** (1972), 97-106, Amer. Math. Soc.,Providence,RI.

第1日　3月24日 (水)

第I会場　幾何学

10:00~12:00

1	知沢　清之	(管理工学研)	* On a direct method for proving existence of 4-dim ducks	10
2	小池　直之	(東京理科大)	♯ プロパー複素等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流	15
3	安藤　直也	(熊本大自然)	* Hartman-Wintner の定理およびその応用	15
4	守屋　克洋	(筑波大数学)	* 擬ユークリッド空間内の超共形時間的曲面	10
5	榊　　真	(弘前大理工)	* セミ・ユークリッド空間の null カルタン曲線	10
6	前田　定廣 内藤　博夫	(佐賀大理工) (山口大理)	* 複素射影空間内の型作用素が ϕ-不変な実超曲面	15
7	奥村　和浩 前田　定廣	(佐賀大) (佐賀大理工)	♯ 何本かの測地線が同じ曲率の円に写る非平坦複素空間形内の実超曲面	15
8	Hui Ma 大仁田　義裕	(中国清華大) (大阪市立大理)	♯ Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces, III	15

14:15~15:15

9	尾國　新一	(愛媛大理)	* 離散群の L^2 不変量の自明性と Coarse Equivalence	15
10	多羅間　大輔	(京大情報)	* Some elliptic fibrations arising from free rigid body dynamics	15
11	柳井　佳奈 中井　功	(お茶の水女大) (お茶の水女大)	* 1 変数 formal diffeomorphisms の関係式	10
12	M. Pichot	(東大 IPMU)	* Random group of intermediate rank	5

15:30~16:30　特別講演

安藤　直也　(熊本大自然)　* 曲面上の主分布の振る舞い

第II会場　函数論

9:20~12:00

1	S.-D. Lin P.-Y. Wang 西本　勝之	(Chung Yuan 基督教大) (Nan-Ya 工大) (デカルト出版)	♯ Elliptic Integrals by Means of Fractional Calculus	10
2	西本　勝之 S.-D. Lin P.-Y. Wang	(デカルト出版) (Chung Yuan 基督教大) (Nan-Ya 工大)	* N-Fractional Calculus of The Logarithmic Function $\log((\sqrt{z-b}-c)^2-d)$	10
3	早味　俊夫 尾和　重義	(近畿大総合理工) (近畿大理工)	Second Hankel determinant $H_2(n)$ for odd starlike and convex functions	10
4	黒木　和雄 尾和　重義	(近畿大総合理工) (近畿大理工)	Subordination relations for certain analytic functions missing some coefficients	10

5	白石　将 尾和　重義	(近畿大総合理工) (近畿大理工)	Properties of certain analytic functions associated with two boundary points	10
6	濱井　健成 早味　俊夫 黒木　和雄 尾和　重義	(近畿大総合理工) (近畿大総合理工) (近畿大総合理工) (近畿大理工)	Coefficient estimates of functions in the class concerning with spirallike functions	10
7	堀田　一敬 布川　護	(東北大情報) (群馬大*)	‡ On strongly starlike and convex functions of order α and type β	10
8	堀田　一敬	(東北大情報)	‡ Löwner chains with complex leading coefficient	10
9	小森　洋平 能城　敏博	(阪市大理) (阪大理)	* ある種数２のリーマン面の正則族の正則切断について	10
10	糸　健太郎	(名大多元数理)	♯ Linear slices close to a Maskit slice	10
11	奥山　裕介	(京都工繊大工芸科学)	ポテンシャルの収束とリヤプノフ指数の近似について	10
12	奥山　裕介	(京都工繊大工芸科学)	複素力学系のエネルギーおよびリヤプノフ指数公式の一証明	10
13	藤川　英華 松崎　克彦	(千葉大理) (岡山大自然)	* The Nielsen realization problem for asymptotic Teichmüller modular groups	10
14	志賀　隆成	(東工大理工)	* Plemelj の定理の一般化について	10

14:30～15:45

15	濱田　英隆	(九州産大工)	♯ Subordination chains in several complex variables	10
16	濱田　英隆 P. Duren I. Graham G. Kohr	(九州産大工) (Univ. of Michigan) (Univ. of Tronto) (Babeç-Bolyai Univ.)	♯ The Loewner differential equation in several complex variables	10
17	鈴木　紀明 西尾　昌治 山田　雅博	(名城大理工) (大阪市大理) (岐阜大教育)	放物型 Bergman 空間上の Schatten-Herz 族 Toeplitz 作用素について	10
18	山田　雅博 菱川　洋介 西尾　昌治	(岐阜大教育) (岐阜大工) (大阪市大理)	* Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type	10
19	中井　三留	(名工大*)	* ディリクレ有限性が有界性を導くリーマン面	10
20	下村　哲 二村　俊英 水田　義弘 大野　貴雄	(広島大教育) (大同大教養) (広島大理) (広島商船高専)	* Orlicz-Sobolev capacity of balls	10

15:45～16:45　特別講演　**2009 年度（第 8 回）解析学賞受賞特別講演**

相川　弘明　(北大理)　‡ 複雑領域上のポテンシャル論　解析的性質と幾何的性質

14 近藤　剛史　（神戸大理）* Generalized polygon の歪み …… 10
小林　俊公　（摂南大工）
15 佐古　彰史　（釧路工業高専）* ADHM 構成法の非可換変形 …… 15
前田　吉昭　（慶大理工）
16 大森　俊明　（東北大理）　指数調和写像を用いた調和写像の存在定理について …… 15
17 石渡　　聡　（筑波大）* ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け …… 15
18 久村　裕憲　（静岡大理）* Ricci 曲率と離散スペクトルの無限性・有限性 …… 10
19 久村　裕憲　（静岡大理）* Absence of eigenvalues and convergence of radial curvatures to zero …… 15
20 岩井　敏洋　（京大情報）♯ 宙返りの幾何、力学、制御 …… 15

13:00〜14:00　特別講演

中田　文憲　（東工大理工）♯ Le Brun-Mason 対応と不定値計量の幾何について

第II会場　函数論

10:00〜11:45

21 本田　竜広　（広島工大工）♯ Bohr's theorem on power series …… 10
濱田　英隆　（九州産大工）
K. Gabriela　（Babeç-Bolyai Univ.）
22 山盛　厚伺　（名大多元数理）* ある Hartogs 領域のベルグマン核の多重対数関数による明示公式 …… 10
23 松島　敏夫　（石川工業高専）* 有界正則写像の集積値集合 …… 10
24 松本　和子　（阪府大総合教育）* C^n の実超曲面への距離の Levi form の大域的な表示と非退化条件 …… 10
25 林本　厚志　（長野工業高専）* スライス保存の CR 写像について …… 10
26 相原　義弘　（福島大人間発達文化）♯ A defect relation for holomorphic curves in algebraic varieties …… 10
27 相原　義弘　（福島大人間発達文化）♯ Deficiencies of holomorphic curves in algebraic varieties ……
10
28 松村　慎一　（東大数理）* Expression of restricted volumes with current integration …… 10
29 久本　智之　（東大数理）* 部分多様体に沿っての直線束の Bergman 核の漸近挙動について …… 10
30 鍋島　克輔　♯ 代数的局所コホモロジーを利用したパラメータ付スタンダード基底計算
（阪大情報・JST CREST）　について …… 10
中村　弥生　（近畿大理工）
田島　慎一　（新潟大工）
31 田島　慎一　（新潟大工）* レゾルベントの留数解析と行列の exact な固有ベクトル計算 …… 10
樋口　水紀
国立情報開発株式会社
32 大沢　健夫　（名大多元数理）　A tower of Riemann surfaces whose Bergman kernels jump at the roof 10
33 野口　潤次郎（東大数理）　A new unicity theorem and Erdös' problem for polarized semi-abelian
C. Pietro　（Udine 大学）　varieties …… 10