日本数学会

2013年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2013年9月

於　愛媛大学

日本数学会

2013年度秋季総合分科会

函数論分科会
講演アブストラクト

2013年9月

於　愛媛大学

函　数　論

9月26日(木)　　第Ⅲ会場

10:00〜12:00

				(分)	頁
1	田 中 清 喜	(阪 市 大 理)♯	Representations and interpolating sequence for harmonic Bergman functions	(10)	1
2	本 田 竜 広 濱 田 英 隆 Kwang Ho Shon	(広島工大工)♯ (九州産大工) (Pusan Nat. Univ.)	Starlike harmonic mappings on the unit disc	(15)	3
3	宮 地 秀 樹	(阪 大 理)♯	Unification of extremal length geometry of Teichmüller space via intersection number and its application	(15)	5
4	小 森 洋 平	(早 大 教 育)*	トーラス上のリーマン面の退化族について	(15)	7
5	柳 下 剛 広	(早 大 理 工)♯	p 乗可積分タイヒミュラー空間への複素構造の導入 —基本領域による単位円板の分割の応用	(15)	9
6	諸 澤 俊 介	(高 知 大 理)♯	$f_a(z) = z + e^z + a$ へのある多項式列の力学的収束について	(15)	11

14:15〜15:00

7	奥 山 裕 介	(京都工繊大工芸)♯	Equilibrium measures and ergodic properties for uniformly quasiregular dynamics	(10)	13
8	奥 山 裕 介	(京都工繊大工芸)♯	A rescaling principle for an isolated essential singularity of a quasiregular mapping	(10)	15
9	奥 山 裕 介	(京都工繊大工芸)♯	Accumulation of periodic points in local uniformly quasiregular dynamics	(10)	17

15:10〜16:10　特別講演

D. Drasin	(Purdue Univ.)♯	Sharpness of Rickman's Picard theorem	19

9月27日(金)　　第Ⅲ会場

9:00〜10:45

10	鍋 島 克 輔 田 島 愼 一	(徳島大総合)♯ (筑波大数理物質)	パラメータ付き局所コホモロジーを用いた Tjurina stratification の計算	(15)	21
11	田 島 愼 一	(筑波大数理物質)*	Newton filtration と local cohomology	(15)	23
12	中 根 静 男	(東京工芸大)♯	Relations between saddle sets for Axiom A polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$	(15)	25
13	児 玉 秋 雄	(金沢大理工)*	On the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid	(15)	27
14	永 田 義 一	(名大多元数理)♯	On Hölder type estimates for $\bar{\partial}$ on infinite type convex domains	(10)	29
15	阿 部 幸 隆 濟 江 厚 子	(富山大理工)* (富山大理工)	$\wp$ 関数の準アーベル多様体への一般化	(15)	31

11:00〜12:00　特別講演

上 田 哲 生	(京 大 理)♯	複素 2 次元半放物型不動点とその分岐	33

Representations and interpolating sequence for harmonic Bergman functions

Kiyoki Tanaka (Osaka City University)*

Let Ω be a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^n$. For $1 \leq p < \infty$, we denote by $b^p(\Omega)$ the harmonic Bergman space in Ω, i.e., the set of all real-valued harmonic functions f on Ω such that $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, where dx denotes the usual n-dimensional Lebesgue measure on Ω. It is known that b^2 is the reproducing kernel Hilbert space. We call the reproducing kernel for b^2 as the harmonic Bergman kernel.

In this talk, we discuss a representation for the harmonic Bergman function and interpolation theorem. B. R. Choe and H. Yi [2] studied the representation theorem and interpolation theorem for the harmonic Bergman function in the upper half space. We achieve to show the following representation theorem for the harmonic Bergman function in a bounded smooth domain.

Theorem 1 (cf. Theorem 1 in [5]). *Let $1 < p < \infty$ and Ω be a bounded smooth domain. Then, we can choose a sequence $\{\lambda_i\}$ in Ω such that $A : \ell^p \to b^p$ is a bounded onto map, where the operator A is defined by*

$$A\{a_i\}(x) := \sum a_i R(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n},$$

where $R(x, y)$ denote the harmonic Bergman kernel and $r(x)$ denotes the distance between x and $\partial\Omega$.

Theorem 1 do not refer to b^1. A representation for b^1-function is achieved by using the another kernel. Its kernel is defined by B. R. Choe, H. Koo and H. Yi [1].

Definition 1. *Let η be a defining function of Ω with condition that $|\nabla\eta|^2 = 1 + \eta\omega$ for some $\omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$. We define the modified harmonic Bergman kernel by*

$$R_1(x, y) = R(x, y) - \frac{1}{2}\Delta_y\big(\eta^2(y) R(x, y)\big)$$

for any $x, y \in \Omega$, where Δ_y is the Laplacian with respect to y.

By using the modified harmonic Bergman kernel, we can give the representation for b^1-function.

Theorem 2 (T. [6]). *Let $1 \leq p < \infty$ and Ω be a bounded smooth domain. Then, we can choose a sequence $\{\lambda_i\}$ in Ω such that $A_1 : \ell^p \to b^p$ is a bounded onto map, where the operator A_1 is defined by*

$$A_1\{a_i\}(x) := \sum a_i R_1(x, \lambda_i) r(\lambda_i)^{(1-\frac{1}{p})n}.$$

This work is partially supported by the JSPS Institutional Program for Young Researcher Overseas Visits " Promoting international young researchers in mathematics and mathematical sciences led by OCAMI ".
2000 Mathematics Subject Classification: 31B05, 46E15, 47B38.
Keywords: Harmonic Bergman space, atomic decomposition.
*e-mail: t.kiyoki@gmail.com
web: http://kiyokitanaka.web.fc2.com/

Above theorem refers to the onto map from ℓ^p to b^p for $1 \leq p < \infty$. The following theorem refers to the onto map from b^p to ℓ^p for $1 < p < \infty$.

Theorem 3 (T. [7])**.** *Let* $1 < p < \infty$ *and* Ω *be a bounded smooth domain. There exists a positive constant* ρ_0 *such that if* $\rho(\lambda_j, \lambda_i) > \rho_0$*, then* $V : b^p \to \ell^p$ *is bounded onto map, where* $\rho(x, y)$ *is pseudo-hyperbolic distance and* $Vf := \{r(\lambda_i)^{\frac{n}{p}} f(\lambda_i)\}$.

References

[1] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, *Projections for harmonic Bergman spaces and applications*, J. Funct. Anal., **216** (2004), 388–421.

[2] B. R. Choe and H. Yi, *Representations and interpolations of harmonic Bergman functions on half-spaces*, Nagoya Math. J. **151** (1998), 51–89.

[3] R.R. Coifman and R. Rochberg, *Representation Theorems for Holomorphic and Harmonic functions in* L^p, *Astérisque* **77** (1980), 11–66.

[4] H. Kang and H. Koo, *Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domains*, J. Funct. Anal., **185** (2001), 220–239.

[5] K. Tanaka, *Atomic decomposition of harmonic Bergman functions*, Hiroshima Math. J., 42 (2012), 143–160.

[6] K. Tanaka, *Representation theorem for harmonic Bergman and Bloch functions*, to appear in Osaka Math. J..

[7] K. Tanaka, *Interpolation theorem for harmonic Bergman functions*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatu.

Starlike Harmonic Mappings on the Unit Disc

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*1
Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*2
Kwang Ho SHON (Pusan National University, Korea)*3

Let f be a complex-valued function of class C^1 on $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. The Jacobian of f is given by $J_f(z) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2 = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$. Lewy [16] proved that if a harmonic mapping f on Δ is locally univalent, then $J_f(z) \neq 0$ in Δ. Thus a locally univalent harmonic mapping is either sense-preserving (if $J_f(z) > 0$ in Δ) or sense-reversing (if $J_f(z) < 0$ in Δ). A harmonic mapping of Δ has the unique representation $f = h + \overline{g}$, where h and g are analytic in Δ and $g(0) = 0$. Note that f is sense-preserving if and only if $|g'(z)| < |h'(z)|$ for all $z \in \Delta$.

Let $f = h + \overline{g}$ be a harmonic mapping of the form

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n. \tag{1}$$

Recently, many mathematicians have studied about holomorphic or harmonic mappings of the above form by certain coefficient conditions. When f is holomorphic, Fait, Krzyż and Zygmunt [6] gave a sufficient coefficient condition for f to be a quasiconformal homeomorphism on Δ and to have a quasiconformal extension to the extended plane $\overline{\mathbb{C}}$ (in several complex variables, see also Brodskiĭ [3], Curt, Kohr and Kohr [4], Graham, Hamada and Kohr [9], Hamada and Kohr [11], [12], [13]). When f is harmonic, Avcı and Złotkiewicz [2], Silverman [18] gave a sufficient coefficient condition for f to be univalent, sense-preserving and starlike when $b_1 = 0$. Jahangiri [14] generalized the result to the case that b_1 is not necessarily 0. He gave a sufficient coefficient condition for f to be univalent, sense-preserving and starlike of order $\alpha \in [0, 1)$ when b_1 is not necessarily 0. He also showed that the condition is also necessary when h has negative and g has positive coefficients. Ganczar [8] gave a sufficient coefficient condition for f to be a quasiconformal homeomorphism on Δ and to have a quasiconformal extension to $\overline{\mathbb{C}}$ when $b_1 = 0$.

Then the following natural questions arise:

Question 1 *Can we give a sufficient coefficient condition for a harmonic mapping f to be a quasiconformal homeomorphism on Δ and to have a quasiconformal extension to $\overline{\mathbb{C}}$ when b_1 is not necessarily* 0*?*

Question 2 *Can we give a sufficient coefficient condition for a starlike harmonic mapping f of order $\alpha \in [0, 1)$ to be a quasiconformal homeomorphism on Δ and to have a quasiconformal extension to $\overline{\mathbb{C}}$ when b_1 is not necessarily* 0*?*

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.
2000 Mathematics Subject Classification: 30C62, 30C45.
Keywords: harmonic mapping, quasiconformal extension, starlike domain.

*1 e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp
*2 e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp
*3 e-mail: khshon@pusan.ac.kr

In the present talk, we will give affirmative answers to the above questions [10]. Namely, we consider the condition for a harmonic mapping $f = h + \overline{g}$ of the form (1) to be a quasiconformal homeomorphism on Δ and to have a quasiconformal extension F to $\overline{\mathbb{C}}$ when $|b_1| < 1$. When $b_1 = 0$, our result also gives an improvement of the estimate of the complex dilatation μ_F given by Ganczar [8]. We also obtain quasiconformal extension results for starlike harmonic mappings of order $\alpha \in (0,1)$ and give a counterexample when $\alpha = 0$.

References

[1] L. V. Ahlfors, *Quasiconformal reflections*, Acta. Math. **109** (1963), 291–301.

[2] Y. Avcı and E. Złotkiewicz, *On harmonic univalent mappings*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A **44** (1990), 1–7.

[3] A. A. Brodskiĭ, *Quasiconformal extension of biholomorphic mappings* (Russian), Theory of mappings and approximation of functions, 30–34, "Naukova Dumka", Kiev, 1983.

[4] P. Curt, G. Kohr and M. Kohr, *Homeomorphic extension of strongly spirallike mappings in* $\mathbb{C}^n$, Sci. China. Math. **53** (2010), 87–100.

[5] J. Clunie and T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. **9** (1984), 3–25.

[6] M. Fait, J. G. Krzyż and J. Zygmunt, *Explicit quasiconformal extensions for some classes of univalent functions*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), no. 2, 279–285.

[7] A. Ganczar, *On harmonic univalent mappings with small coefficients*, Demonstratio Math. **34** (2001), no. 3, 549–558.

[8] A. Ganczar, *Explicit quasiconformal extensions of planar harmonic mappings*, J. Comput. Anal. Appl. **10** (2008), no. 2, 179–186.

[9] I. Graham, H. Hamada and G. Kohr, *Radius problems for holomorphic mappings on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Math. Nachr. **279** (2006), 1474–1490.

[10] H. Hamada, T. Honda and K. H. Shon, *Quasiconformal extensions of starlike harmonic mappings in the unit disc*, Bull. Korean Math. Soc., to appear.

[11] H. Hamada and G. Kohr, *Loewner chains and quasiconformal extension of holomorphic mappings*, Ann. Polon. Math. **81** (2003), 85–100.

[12] H. Hamada and G. Kohr, *Quasiconformal extension of biholomorphic mappings in several complex variables*, J. Anal. Math. **96** (2005), 269–282.

[13] H. Hamada and G. Kohr, *Univalence criterion and quasiconformal extension of holomorphic mappings*, Manuscripta Math., **141** (2013), no.1-2, 195-209.

[14] J. M. Jahangiri, *Harmonic functions starlike in the unit disk*, J. Math. Anal. Appl. **235** (1999), no. 2, 470–477.

[15] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, Second Edition, 1973.

[16] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), no. 10, 689–692.

[17] T. Sheil-Small, *Complex polynomials*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 75, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[18] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), no. 1, 283–289.

Unification of extremal length geometry of Teichmüller space via intersection number and its application

Hideki Miyachi (Osaka University)*

The results given in this talk will appear in [2] and [3]. Let S be a compact oriented surface $\chi(S) < 0$ and $\mathcal{T}$ the *Teichmüller space* $\mathcal{T}$ *of* S. Let d_T be the *Teichmüller distance*.

1. Unification of extremal length geometry

Let $\mathcal{MF}$ be the space of measured foliations. For $x \in \mathcal{T}$ and $F \in \mathcal{MF}$, we denote by $\mathrm{Ext}_x(F)$ the *extremal length* of α on x. Consider a mapping

$$\tilde{\Phi}_{GM} \colon \mathcal{T} \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto \mathrm{Ext}_y(\alpha)^{1/2}] \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \tag{1.1}$$

$$\Phi_{GM} = \mathrm{proj} \circ \tilde{\Phi}_{GM} \colon \mathcal{T} \to \mathrm{P}\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \tag{1.2}$$

where $\mathcal{S}$ is the set of homotopy classes of non-peripheral and non-trivial simple closed curves on S, and $\mathrm{proj} \colon \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} - \{0\} \to \mathrm{P}\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ the projection. It is known that the mapping (1.2) is injective and the image is relatively compact (cf.[1]). The closure $\mathrm{cl}_{GM}(\mathcal{T})$ is called the *Gardiner-Masur compactification*, and the complement $\partial_{GM}\mathcal{T} = \mathrm{cl}_{GM}(\mathcal{T}) - \Phi_{GM}(\mathcal{T})$ is called the *Gardiner-Masur boundary*.

We define

$$\mathcal{C}_{GM} = \mathrm{proj}^{-1}(\mathrm{cl}_{GM}(\mathcal{T})) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$$
$$\tilde{\partial}_{GM} = \mathrm{proj}^{-1}(\partial_{GM}\mathcal{T}) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}.$$

Since $\mathcal{PMF} \subset \partial_{GM}\mathcal{T}$, the space $\mathcal{MF}$ of measured foliations is contained in $\tilde{\partial}_{GM}$ and $\mathcal{C}_{GM}$. In [2], the author established the following *unification* of extremal length geometry via the intersection number.

Theorem 1 ([2]). *Fix a base point $x_0 \in \mathcal{T}$. There is a unique continuous function*

$$i(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \colon \mathcal{C}_{GM} \times \mathcal{C}_{GM} \to \mathbb{R}$$

with the following properties.

(i) *$i(\Psi_{GM}(p), F) = \mathcal{E}_p(F)$ and $i(\tilde{\Phi}_{GM}(y), F) = \mathrm{Ext}_y(F)^{1/2}$ for any $p \in \mathrm{cl}_{GM}(\mathcal{T})$, $y \in \mathcal{T}$ and $F \in \mathcal{MF}$. In particular, the projective class of the function $\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto i(\Psi_{GM}(y), \alpha)$ is exactly the image of $y \in \mathcal{T}$ under the Gardiner-Masur embedding.*

(ii) *For $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{C}_{GM}$, $i(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = i(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$.*

(iii) *For $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{C}_{GM}$ and $t, s \geq 0$, $i(t\mathfrak{a}, s\mathfrak{b}) = ts\, i(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.*

(iv) *For any $y, z \in \mathcal{T}$,*

$$i(\tilde{\Phi}_{GM}(y), \tilde{\Phi}_{GM}(z)) = \exp(d_T(y, z))$$
$$i(\Psi_{GM}(y), \Psi_{GM}(z)) = \exp(-2\langle y \,|\, z\rangle_{x_0}).$$

where

$$\Psi_{GM} \colon \mathcal{T} \ni y \mapsto [\mathcal{S} \ni \alpha \mapsto e^{-d_T(x_0, y)}\mathrm{Ext}_y(\alpha)^{1/2}] \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$$

and $\langle y \,|\, z\rangle_{x_0}$ is the Gromov product

$$\langle y \,|\, z\rangle_{x_0} = \frac{1}{2}(d_T(x_0, y) + d_T(x_0, z) - d_T(y, z)),$$

of y and z with reference point x_0 with respect to the Teichmüller distance d_T.

(v) *For $F, G \in \mathcal{MF} \subset \mathcal{C}_{GM}$, the value $i(F, G)$ is equal to the geometric intersection number $I(F, G)$ between F and G.*

* Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan
e-mail: `miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp`

2. Asymptotically conservative about the Gromov product

Let X be a metric space. We call a sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X *convergent at infinity* if

$$\langle x_n \,|\, x_m\rangle_{x_0} \to \infty \quad (n, m \to \infty). \tag{2.1}$$

Two sequences $\mathbf{x}^1 = \{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\mathbf{x}^2 = \{x_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X are said to be *visually indistinguishable* if

$$\langle x_n^1 \,|\, x_m^2\rangle_{x_0} \to \infty \quad (n, m \to \infty). \tag{2.2}$$

Let X and Y be metric spaces. A mapping $\omega\colon X \to Y$ is said to be *asymptotically conservative* (*about the Gromov product*) if for two sequences $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ convergent at infinity, $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ are visually indistinguishable if and only if so are $\omega(\mathbf{x}^1)$ and $\omega(\mathbf{x}^2)$. Asymptotically conservative mappings are defined in an effort to produce a kind of a qualitative version of quasi-isometries with caring about the asymptotic behavior of the Gromov product in hyperbolic spaces.

Let $\mathbf{x}$ be a sequence convergent at infinity. We denote by $\mathsf{Vis}(\mathbf{x})$ the set of sequences convergent at infinity visually indistinguishable from $\mathbf{x}$. Two asymptotically conservative mappings ω_1 and ω_2 are said to be *close at infinity*, if for any sequences $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$ with $\mathsf{Vis}(\mathbf{x}^1) = \mathsf{Vis}(\mathbf{x}^2)$, ω satisfies $\mathsf{Vis}(\omega_1(\mathbf{x}^1)) = \mathsf{Vis}(\omega_2(\mathbf{x}^2))$. A mapping $\omega\colon X \to Y$ is said to be *invertible* if there is a mapping $\omega'\colon Y \to X$ such that $\omega' \circ \omega$ and $\omega \circ \omega'$ are close to the identity mappings on X and Y, respectively. We call such ω' an *asymptotic quasi-inverse* of ω. Let $\mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(X)$ be the set of invertible asymptotically conservative mappings on X. Then, we can see that the set $\mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(X)$ admits a canonical monoid structure by use of the composition of mappings. Furthermore, the relation "closeness at infinity" is a semigroup congruence on $\mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(X)$ and the quotient semigroup $\mathfrak{AC}(X)$ is a group (cf. [3]).

Theorem 2 ([3])**.** *Let S be a compact orientable surface of negative Euler characteristic. Let $\mathcal{T}$ be the Teichmüller space of S, endowed with the Teichmüller distance. Let $\mathbb{X}(S)$ be the complex of curves on S. Then, there is a canonical monoid epimorphism*

$$\mathrm{AC}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S))$$

which induces an isomorphism

$$\mathfrak{AC}(\mathcal{T}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S)),$$

where $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}(S))$ *is the group of simplicial automorphisms of* $\mathbb{X}(S)$*.*

We will also give a rigorous proof of the following folklore.

Theorem 3 (No homothety with $K \neq 1$ ([3]))**.** *There is no (K, D)-rough homothety with asymptotic quasi-inverse on Teichmüller space $\mathcal{T}$ unless $K = 1$.*

Here, a mapping $\omega\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ is said to be a (K, D)*-rough homothety* if

$$|d_Y(\omega(x_1), \omega(x_2)) - K d_X(x_1, x_2)| \le D, \quad (x_1, x_2 \in X) \tag{2.3}$$

for $x_1, x_2 \in X$

References

[1] F. Gardiner and H. Masur, Extremal length geometry of Teichmüller space. Complex Variables Theory Appl. **16** (1991), no. 2-3, 209–237.

[2] H. Miyachi, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, preprint.

[3] H. Miyachi, Mappings which are conservative about the Gromov product at infinity, preprint.

トーラス上のリーマン面の
退化族について

小森　洋平　(早大教育)*

上半平面の点 τ に対し、格子群 $\Omega_\tau := \mathbf{Z}\cdot 1 + \mathbf{Z}\cdot\tau$ を考える。格子群の直積 $\Omega_\tau \times \Omega_\tau$ の3次元複素ベクトル空間$\mathbf{C}_z \times \mathbf{C}_u \times \mathbf{C}_\zeta$ への次のような作用を考える。$(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_\tau \times \Omega_\tau$ と $(z, u, \zeta) \in \mathbf{C}_z \times \mathbf{C}_u \times \mathbf{C}_\zeta$ に対し

$$(\omega_1, \omega_2)\cdot(z, u, \zeta) := (z+\omega_1, u+\omega_2, f(u,\omega_2)^{n-1} f(u-nz, \omega_2 - n\omega_1)\zeta).$$

ここで $n \geq 2$ とし $f(u,\omega)$ は Weierstrass の σ 関数の乗法因子とする。すなわち

$$\sigma(u+\omega) = f(u,\omega)\sigma(u).$$

この作用から2つのトーラス $R := \mathbf{C}_z/\Omega_\tau$ と $T := \mathbf{C}_u/\Omega_\tau$ の直積$R \times T$ 上に正則直線バンドル $\pi_1 : L_1 \to R \times T$ が定まり、次の写像$\sigma_1 : R \times T \to L_1$ は $\pi_1 : L_1 \to R \times T$ の正則切断になる。

$$\sigma_1(\overline{z}, \overline{u}) := \overline{(z, u, \sigma(u)^{n-1}\sigma(u-nz))}.$$

さらに $\Omega_\tau \times \Omega_\tau$ の $\mathbf{C}_z \times \mathbf{C}_u \times \mathbf{C}_\zeta$ への別の作用

$$(\omega_1, \omega_2)\cdot(z, u, \zeta) := (z+\omega_1, u+\omega_2, f(z,\omega_1)^{n-1} f(u-z, \omega_2 - \omega_1)\zeta)$$

から定まる $R \times T$ 上の正則直線バンドルを $\pi_2 : L_2 \to R \times T$ とすると、$L_1 \simeq L_2^{\otimes n}$ となり、写像 $\Psi : L_2 \to L_1$ を$\Psi(\overline{(z,u,\zeta)}) := \overline{(z,u,\zeta^n)}$ と定義すると、$\Psi : L_2 \to L_1$ は L_1 の零切断で分岐する n 重被覆になる。このとき $\Psi^{-1}(\sigma_1(R \times T))$ は複素解析曲面になり、その特異点解消をM とすると

$$\pi : M \to \Psi^{-1}(\sigma_1(R\times T)) \to R \times T \to R$$

はトーラス R 上の種数 n のリーマン面の退化族になる。本講演ではこの退化族 $\pi : M \to R$ の特異ファイバーと正則切断について考察する。

References

[1] Y. Imayoshi, Y. Komori and T. Nogi *Holomorphic sections of a holomorphic family of Riemann surfaces induced by a certain Kodaira surface, Kodai Math. J. Vol.32, No.3(2009), 450-470.*

[2] Y. Imayoshi, Y. Komori and T. Nogi *On holomorphic sections of a certain Kodaira surface revisited, Riemann Surfaces, Harmonic Maps and Visualization, OCAMI Studies Volume 3 (2009), 151-162.*

* e-mail: ykomori@waseda.jp

p乗可積分タイヒミュラー空間への複素構造の導入 — 基本領域による単位円板の分割の応用

柳下　剛広　(早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻)*

タイヒミュラー空間とは、複素単位円板 $\Delta = \{|z| < 1 | z \in \mathbb{C}\}$ に作用するフックス群の変形空間である。フックス群 Γ のタイヒミュラー空間を $T(\Gamma)$ とする。実数 $p \geq 1$ に対して、Γ の p **乗可積分タイヒミュラー空間** $T^p(\Gamma)$ とは、以下で定義される $T(\Gamma)$ の部分距離空間である：

$$T^p(\Gamma) = \{\tau \in T(\Gamma) | \exists \mu \in \tau \text{ s.t. } \|\mu\|_p = \left(\iint_N |\mu(z)|^p \rho(z)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

ここで、 N は Γ に関する Δ 内の基本領域、ρ を Δ 上のポアンカレ計量とする。任意のフックス群 Γ に対して、 $T(\Gamma)$ には Δ の外部 Δ^* 上の Γ に関する有界正則二次微分からなるバナッハ空間 $\mathcal{B}(\Gamma)$ をモデルとする複素構造が入る。また、$p \geq 2$ かつ Γ が自明な群 $1 = \{id_\Delta\}$ である場合は、 $T^p(1)$ にも Δ^* 上の Γ に関する p 乗可積分正則二次微分からなるバナッハ空間 $A^p(1)$ をモデルとする複素構造が入ることがわかる (cf. Cui [1], Tang [4])。ここで、 Δ^* 上の Γ に関する正則二次微分 ϕ が p 乗可積分であるとは、

$$\|\phi\|_p = \left(\iint_{N^*} |\phi(z)|^p \rho_*(z)^{2-2p} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

をみたすことである。 領域 $N^* \subset \Delta^*$ は基本領域 N の単位円周 $\partial\Delta$ に関する鏡像であり、 ρ_* は Δ^* 上のポアンカレ計量である。この結果から、**一般のフックス群 Γ に対して $T^p(\Gamma)$ にも $A^p(\Gamma)$ をモデルとする複素構造が入るか**、という問題が考えられる。ここで、 Γ が非自明かつ有限生成であるときは $T^p(\Gamma) = T(\Gamma)$ となるので、本質的な部分は Γ が無限生成のときにある。もし、この問題が肯定的に解決すれば、 $T^p(\Gamma)$ を複素多様体として研究することが可能となる。

問題となるのは、基本領域 N の境界が一般に複雑な形をしていることにある。しかし、単位円板 Δ には $\Delta = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\gamma(N)}$ という、基本領域 N によるタイル貼りが存在する。この関係から、

$$\iint_\Delta \cdots dxdy = \sum_{\gamma\in\Gamma} \iint_{\gamma(N)} \cdots dxdy \tag{TF}$$

という積分の変換公式が導かれる。私はこの変換公式を $T^p(1)$ での結果に応用できないかと考えた。本研究の目的は、**変換公式 (TF) を用いて $T^p(\Gamma)$ 上に $A^p(\Gamma)$ をモデルとする複素構造が導入されることを考察すること**である。

示すべきことは、 $T(\Gamma)$ での複素構造の導入で用いられるベアス埋め込みが $T^p(\Gamma)$ から $A^p(\Gamma)$ の中への同相写像となることである。ここで、ベアス埋め込み β とは $T(\Gamma)$ から $\mathcal{B}(\Gamma)$ の中への同相写像である。これが示されれば、1つのチャートからなるアトラス $\{(T^p(\Gamma), \beta)\}$ が $T^p(\Gamma)$ の複素構造となる。実際、目標となる結果は次の行程で得られた：

* 東京都新宿区大久保3-4-1
e-mail: m-yanagishita@asagi.waseda.jp

(1) ドゥアディアール拡張による $T^p(\Gamma)$ の特徴付け

(2) ベアス埋め込み $\beta : (T^p(\Gamma), l_p(\Gamma)) \longrightarrow (A^p(\Gamma), \|\cdot\|_p)$ およびその逆写像の連続性

これらの行程は元々 $T^p(1)$ の場合に考えられたものであり、変換公式 (TF) によって拡張することが可能となった。

(1) について、$T^p(\Gamma)$ の各点が、そのドゥアディアール拡張のベルトラミ係数の p 乗可積分性によって特徴づけられることがわかった。ここで、 $\tau \in T(\Gamma)$ に対するドゥアディアール拡張 $E(\tau)$ とは、 τ 内の代表元の1つであり、そのヤコビアン $J_{E(\tau)}$ に関して以下のような有効な評価 (DE) が得られる、 Δ 上の自己擬等角写像である：

$$\exists C > 0 \quad \text{s.t.} \quad J_{E(\tau)}(z)\rho(E(\tau)(z))^2 \leq C\rho(z)^2 \quad (\forall z \in \Delta) \tag{DE}$$

これは $E(\tau)$ のベルトラミ係数 $\sigma(\tau)$ の p -ノルムの評価に用いられる。

(2) について、まず $T^p(\Gamma)$ に位相を入れる。p -ノルムが有限となるベルトラミ係数全体の集合を $\mathrm{Ael}^p(\Gamma)$ とし、そこに p -ノルムと L^∞ -ノルムの和で定まるノルム $\|\cdot\|_{p,\infty}$ を入れる。$l_p(\Gamma)$ はそのノルムから誘導される $T^p(\Gamma)$ 上の商距離である。このとき、以下の2つの結果から β の連続性が導かれる：

- $\exists C' > 0$ s.t. $\|\beta(\tau) - \beta(\eta)\|_p \leq C'\|\sigma(\tau) - \sigma(\eta)\|_p \quad (\forall \tau, \eta \in T(\Gamma))$
- $\sigma : (T^p(\Gamma), l_p(\Gamma)) \longrightarrow (\mathrm{Ael}^p(\Gamma), \|\cdot\|_{p,\infty})$ が連続

逆写像 β^{-1} については、全空間 $T(\Gamma)$ での連続性を応用している。これは、各点 $\phi \in \beta(T(\Gamma))$ に対して、ϕ の $\mathcal{B}(\Gamma)$ に関するある開近傍 U_ϕ 上で β に関する連続な切断 s が構成できることから導かれる。 ここで、十分小さい ϕ の開近傍 V_ϕ で $U_\phi \cap A^p(\Gamma)$ に含まれるものが存在すれば、 s が V_ϕ から $\mathrm{Ael}^p(\Gamma)$ の中への連続写像となることが示される。このような V_ϕ がとれる十分条件として以下の幾何学的な条件がある：

（LR） $R = \Delta/\Gamma$ と表されるリーマン面上のすべての単純閉測地線の長さの下限が正となる

このとき、ある定数 $C_p > 0$ が存在して、任意の $\phi \in A^p(\Gamma)$ に対して、 $\|\phi\|_\infty \leq C_p\|\phi\|_p$ がなりたつので、題意をみたす V_ϕ が存在することがわかる（cf. Lehner [2], Rao [3]）。

結論 $p \geq 2$ かつフックス群 Γ が条件 (LR) をみたすとき、アトラス $\{(T^p(\Gamma), \beta)\}$ が $T^p(\Gamma)$ の複素構造となる。

したがって、 $T^p(\Gamma)$ を複素多様体として研究することが可能となる。

参考文献

[1] G. Cui, Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces, Science in China Series A **43** (2000), 267–279.

[2] J. Lehner, On the boundedness of integrable automorphic forms, Illinois J. Math. **18** (1974), 575–584.

[3] K. V. Rajeswara Rao, On the boundedness of p-integrable automorphic forms, Proceedings of the American Mathematical Society **44** (1974), 278–282.

[4] S. Tang, Some characterizations of the integrable Teichmüller space, Science Chinam Mathematics **56** (2013), 541–551.

$f_a(z) = z + e^z + a$ へのある多項式列の力学的収束について

諸澤　俊介　(高知大学)*

1. 導入

X を複素平面 $\mathbb{C}$ または複素球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ とする。f を X の解析的自己写像とする。$X = \widehat{\mathbb{C}}$ の場合は f は有理関数であり、 $X = \mathbb{C}$ の場合は整関数である。自然数 n に対し、f^n で f の n 回の合成を表す。関数族 $\{f^n\}$ が正規族となる X の最大開部分集合を f のファトウ集合と呼び $F(f)$ で表す。また、$F(f)$ の X における補集合を f のジュリア集合と呼び、$J(f)$ で表す。ファトウ集合とジュリア集合は完全不変である。$F(f)$ の連結成分をファトウ成分と呼ぶ。ファトウ成分 U が適当な自然数 p に対して $f^p(U) = U$ となるとき周期成分と呼び、そのような p の最小値をその周期と呼ぶ。周期成分は (1) 吸引周期成分、(2) 放物的周期成分、(3) ジーゲル円板、 (4) エルマン環、(5) ベーカー領域の五つに分類されることが知られている。エルマン環は２重連結領域なので整関数の場合には存在しない。ベーカー領域はそこでの関数族 $\{f^n\}$ の極限関数がX に含まれないものをいう。従って、有理関数の場合にはベーカー領域は現れない。周期成分と特異値には密接な関係がある。ここで特異値とは臨界値、漸近値、あるいはそれらの集合の閉包に含まれる点をいう。それらの関係を用いて、特に (1)〜(4) については個数評価をすることが出来る。特異値の挙動により力学系が理解できる。もっとも良く知られている例がマンデルブロー集合である。２次多項式 $z \mapsto z^2 + c$ の臨界値 c を用いて $\{c|\{f^n(c)\}$ が有界集合$\}$ と定義される。c の変化による力学系の変化が見て取れ、分岐図とも呼ばれる。特異値の集合が有限集合あるいは有界集合であるときはベーカー領域は存在しない。ファトウ成分 U で任意の異なる自然数 n と m に対して $f^n(U) \neq f^m(U)$ となるとき遊走領域と呼ぶ。有理関数は遊走領域を持たないことが知られている。また、有限個しか特異値を持たない超越整関数も遊走領域を持たない。

2. 結果

本講演では $f_a(z) = z + e^z + a$ を考える。例えば $a = -1$ のときに $F(f_{-1})$ が左半平面にベーカー領域を持つことは容易に判る。また、適当な変数のときに遊走領域を持つことも知られている。いずれの場合にも、その上の極限関数は ∞ であることに注意する。今 g を $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の解析的自己写像とする。このときある整関数 f で $\exp f(z) = g(e^z)$ を満たすものが存在する。この f を g の対数持ち上げと呼ぶ。力学系として $\exp^{-1} J(g) = J(f)$ が成り立つことが知られている。f_a の力学系を理解する為に、まず f_a を $g_\lambda(z) = \lambda z e^z$、$\lambda = e^a$ の対数持ち上げとして考える。g_λ の特異値は漸近値 0 と臨界値 $-\lambda/e$ の二つである。漸近値 0 は常に不動点であり、力学系を決定するのは臨界値の挙動のみである。g_λ はベーカー領域も遊走領域も持たないので $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\lambda|\{g_\lambda^n(-\lambda/e)\}$ が有界集合$\}$ で分岐図を定義できる。分岐図の内点の連結成分で、そこに属する λ で g_λ が吸引周期を持つときに双曲成分と呼ぶ。$V_0 = \{\lambda \mid 0 < |\lambda| < 1\}$

本研究は科研費 (課題番号:23540213) の助成を受けたものである。
* 〒 780-8520 高知県高知市曙町　高知大学教育研究部自然科学系理学部門
e-mail: morosawa@kochi-u.ac.jp
web: http://www.math.kochi-u.ac.jp/morosawa/index.html

と $V_1 = \{\lambda = e^{1-\mu} \mid |\mu| < 1\}$ は g_λ が吸引不動点に対応する双曲成分である。集合 $A \subset \mathbb{C}^*$ に対し $\{z \mid e^z \in A\}$ を A の持ち上げと呼ぶ。 $\widetilde{\mathcal{M}}$ の持ち上げが f_a の分岐図である。 これを $\mathcal{M}$ と表す。

定理 1 V_0 の持ち上げはただ一つの成分からなる。それを B と表す。$a \in B$ に対し f_a はベーカー領域を持つ。V_1 の持ち上げは可算個の成分からなり、それらは $W_k = \{a \mid |a-(1+2\pi ki)| < 1\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ で与えられる。$a \in W_0$ に対し f_a は吸引不動点を持つ。また、$a \in W_k$ $(k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ に対し f_a は遊走領域を持つ。

次に多項式 $P_{a,d}(z) = (1+a/d)z + (1+z/d)^{d+1} + a$ を考える。これは d 個の有界な臨界値を持つが、対称性からそのうちの一つの軌道を調べれば力学系が理解できる。そこで、一つの臨界値を c_d とし $M_d = \{a \mid P^n_{a,d}(c_d)$ が有界集合$\}$ で分岐図を定義する。$A_d = \{a \mid |a-1| < 1\}$ と $B_d = \{a \mid |a+d| < d\}$ は M_d の吸引不動点に対応する双曲成分である。また、$\varphi(z)$ を $-d$ を中心とする $2\pi/d$ の回転とする。$-[d/2] < k \leq [d/2]$、$k \neq 0$ に対して $W^d_k = \varphi^k(B_d)$ とする。W^d_k に属する変数は周期が 1 以上の吸引周期に対応する。$P_{a,d}(z)$ は $f_a(z)$ に広義一様収束する。$P_{a,d}(z)$ は多項式であるからベーカー領域や遊走領域を持つことは無い。一方で、g_λ が吸引周期を持ちながら、$e^a = \lambda$ を満たす a で f_a がベーカー領域や遊走領域を持つものが存在する。力学的収束について次のことが言える。

定理 2 e^a が $\widetilde{\mathcal{M}}$ の双曲成分に含まれるとする。このとき $d \to \infty$ とすると $J(P_{a,d})$ は $J^*(f_a) = J(f_a) \cup \{\infty\}$ にカラテオドリ収束する。

分岐図 $\mathcal{M}$ と M_d について次の収束が言える。

定理 3 $d \to \infty$ としたときに B_d は B にハウスドルフ収束し、さらにすべての $k \in \mathbb{Z}$ について W^d_k は W_k にハウスドルフ収束する。

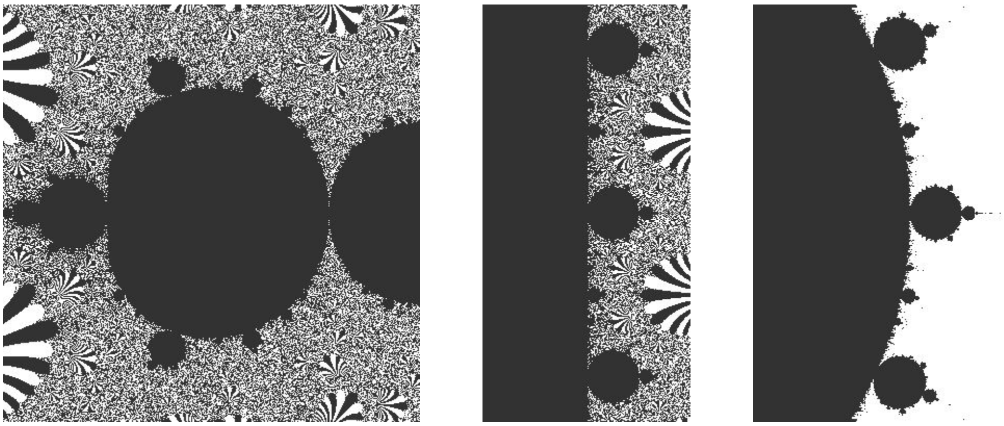


図 1: 左から g_λ、f_a、$P_{a,15}$ の分岐図

Equilibrium measures and ergodic properties for uniformly quasiregular dynamics

Yûsuke Okuyama (Kyoto Institute of Technology, okuyama@kit.ac.jp)

A continuous mapping $f : M \to N$ between oriented Riemannian n-manifolds $M, N, n \geq 2$, is K-quasiregular, $K \geq 1$, if f belongs to $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(M, N)$ and satisfies the distortion inequality $\|Df\|^n \leq KJ_f$ a.e. on M, where $\|Df\|$ is the point-wise operator norm of the differential Df of f and J_f is the Jacobian determinant of Df. A non-constant quasiregular mapping is open, and discrete, i.e., $f^{-1}(y)$ is discrete for each $y \in N$.

Let $\mathbb{M}$ be a closed, connected, and oriented Riemannian n-manifold, $n \geq 2$. A continuous endomorphism f of $\mathbb{M}$ is uniformly quasiregular if there exists $K \geq 1$ so that all the iterates of f are K-quasiregular. For a non-constant uniformly quasiregular endomorphism f of $\mathbb{M}$, a Borel probability measure μ on $\mathbb{M}$ is balanced under f if

$$f^*\mu = (\deg f)\mu,$$

where the measure $f^*\mu$ is the pull-back of μ under f. A measure μ balanced under f is also invariant under f, that is, satisfies

$$f_*\mu = \mu.$$

The measure μ_f below is called the equilibrium measure of f.

Theorem 1. *Let $\mathbb{M}$ be a closed, connected, and oriented Riemannian n-manifold, $n \geq 2$. For every uniformly quasiregular endomorphism f of $\mathbb{M}$ of degree > 1, there exists a Borel probability measure μ_f on $\mathbb{M}$ under f such that for every $a \in \mathbb{M}$ except for a subset $E(f)$ of Hausdorff dimension at most $n - 1$ in $\mathbb{M}$,*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(f^k)^*\delta_a}{\deg f^k} = \mu_f \quad \textit{weakly on } \mathbb{M}.$$

The measure μ_f of f is non-atomic and balanced under f, and the support of μ_f agrees with the Julia set of f, which by definition consists of all non-normality points of the family $\{f^k : k \in \mathbb{N}\}$ on $\mathbb{M}$. Moreover, μ_f is ergodic under f, and indeed f is strongly mixing with respect to the invariant measure μ_f of f in that for every $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{M}, \mu_f)$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{M}} (\psi \circ f)\phi \mathrm{d}\mu_f = \int_{\mathbb{M}} \psi \mathrm{d}\mu_f \int_{\mathbb{M}} \phi \mathrm{d}\mu_f.$$

This research is a joint work with Pekka Pankka (Helsinki) [1].

References

[1] Okuyama, Y. and Pankka, P. Equilibrium measures for uniformly quasiregular dynamics, *ArXiv e-prints* (Apr. 2012).

A rescaling principle for an isolated essential singularity of a quasiregular mapping

Yûsuke Okuyama (Kyoto Institute of Technology, okuyama@kit.ac.jp)

Let M and N be connected and oriented Riemannian n-manifolds, $n \geq 2$. A point $x' \in M$ is an *isolated essential singularity* of a quasiregular mapping $f : M \setminus \{x'\} \to N$ if f does not extend to a continuous mapping from M to N. Similarly, a point $x' \in M$ is a *non-normality point* of a family $\mathcal{F}$ of quasiregular mappings from M to N if $\mathcal{F}$ is not normal on any open neighborhood of x'.

An isolated essential singularity of a quasiregular mapping is characterized by the following rescaling principle.

Theorem 1. *Let M be an oriented Riemannian n-manifold and N a closed and oriented Riemannian n-manifold, $n \geq 2$, and let $x' \in M$.*

A K-quasiregular mapping $f : M \setminus \{x'\} \to N$, $K \geq 1$, has an essential singularity at x' if and only if there exist a non-constant K-quasiregular mapping $g : X \to N$, where X is either $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, and sequences (x_j) and (ρ_j) in $\mathbb{R}^n$ and $(0, \infty)$, respectively, such that $\lim_{j\to\infty} x_j = \phi(x')$, $\lim_{j\to\infty} \rho_j = 0$, and

$$\lim_{j\to\infty} f \circ \phi^{-1}(x_j + \rho_j v) = g(v)$$

locally uniformly on X, where $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ is a coordinate chart of M at x'.

The proof is based not only on the manifold version of Miniowitz's Zalcman-type rescaling principle for a non-normality point of a family of K-quasiregular mappings, $K \geq 1$, but also on the following quasiregular version of the Lehto–Virtanen theorem.

Theorem 2. *Let M be a closed and oriented Riemannian n-manifold, $n \geq 2$, and $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to M$ be a quasiregular mapping with an essential singularity at the origin. Then*

$$\limsup_{r\to 0} \operatorname{diam} f(\partial\mathbb{B}^n(r)) > 0.$$

Here, we set $\mathbb{B}^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ for each $r > 0$.

This research is a joint work with Pekka Pankka (Helsinki) [1].

References

[1] Okuyama, Y. and Pankka, P. Rescaling principle for isolated essential singularities of quasiregular mappings, *ArXiv e-prints* (Nov. 2012).

Accumulation of periodic points in local uniformly quasiregular dynamics

Yûsuke Okuyama (Kyoto Institute of Technology, okuyama@kit.ac.jp)

We generalize the *density of repelling periodic points in the Julia set* in complex dynamics to a class of *local* uniformly quasiregular mappings introduced by Hinkkanen, Martin, and Mayer.

Let $\mathbb{M}$ be an oriented, connected, and closed Riemannian n-manifold, $n \geq 2$. A quasiregular mapping

$$f : \mathbb{M} \setminus S_f \to \mathbb{M}$$

having a countable and closed subset S_f in $\mathbb{M}$ consisting of its isolated essential singularities and their accumulation points is said to be *local uniformly* quasiregular if there is $K \geq 1$ such that for every $k \in \mathbb{N}$, $f^k : f^{-(k-1)}(\mathbb{M} \setminus S_f) \to \mathbb{M}$ is K-quasiregular. When f is local uniformly quasiregular, the Fatou set $F(f)$ of f is the maximal open subset in $D_f := \bigcap_{k\geq 0} f^{-k}(\mathbb{M} \setminus S_f)$ on which the family $\{f^k : k \in \mathbb{N}\}$ is normal, and the Julia set $J(f)$ of f is $\mathbb{M} \setminus F(f)$. Moreover, f is said to be *non-elementary* if f is non-constant and non-injective and satisfies

$$J(f) \not\subset \mathcal{E}(f),$$

where $\mathcal{E}(f) = \{a \in \mathbb{M} : \# \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}(a) < \infty\}$ is the exceptional set of f. The branch set of f^k is denoted by B_{f^k}, $k \in \mathbb{N}$, whose topological dimension $\dim B_{f^k}$ is $\leq n - 2$.

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{M} \setminus S_f \to \mathbb{M}$ be a non-elementary local uniformly quasiregular mapping having a countable and closed subset S_f in $\mathbb{M}$ consisting of its isolated essential singularities and their accumulation points. Then the Julia set $J(f)$ is perfect and any point in $J(f)$ is accumulated by periodic points of f.*

Moreover, if the Fatou set $F(f)$ is non-empty and connected, then any point in $J(f)$ are accumulated by periodic points of f contained in $J(f)$. If one of the following four conditions

(i). $\# \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}(S_f) < \infty$ *and, in addition, $F(f)$ is either empty or connected, or more generally, the topological dimension* $\dim J(f) > n - 2$,

(ii). *f has a repelling periodic point in $D_f \setminus (\mathcal{E}(f) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(B_{f^k}))$,*

(iii). *$J(f) \not\subset \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq j} f^k(B_{f^k})}$, or*

(iv). $n = 2$

holds, then any point in $J(f)$ is accumulated by repelling periodic points of f.

This research is a joint work with Pekka Pankka (Helsinki) [1].

References

[1] Okuyama, Y. and Pankka, P. Accumulation of periodic points for local uniformly quasiregular mappings, *ArXiv e-prints* (June 2013).

Sharpness of Rickman's Picard theorem

David Drasin (Purdue University)

In 1879 Émile Picard proved his famous theorem that a meromorphic function in the complex plane $\mathbb{C}$ which omits three distinct values must be constant. His proof was stunningly short, and one could readily imagine that since the function $f(z) = e^z$ clearly omits two values (0 and ∞), one might imagine the entire subject finished! Instead, it became the foundation of several areas of geometric analysis, ranging from meromorphic functions on C to general issues of hyperbolicity.

A new direction was initiated by Soviet mathematicians in the 1960s, especially Yu. Reshetnyak and V. Zorič, now with functions f having domain $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ (the case $n = 2$ can be reduced to that of meromorphic functions in the plane). They considered open discrete mappings f which, if not smooth, at least had Sobolev regularity, and the key property that at each $x \in \mathbb{R}^n$, the image of a ball $B(x,h)$, with h sufficiently small, could be approximated by an ellipse centered at $f(x)$ of bounded eccentricity (for analytic functions, ellipses could be replaced by balls, but this is not possible in higher dimensions). The maximum allowed eccentricity is called the *distortion* of f. These functions are now called *quasiregular mappings*, although that was not the original term. We now view these as functions

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n.$$

In 1966, Zorič produced a natural generalization of the exponential function (which then omits 0 and ∞) and on at basis conjectured that a (non-constant) qr map can only omit two values. For some time, the best result in this direction was that f could not omit a set of positive conformal capacity.

However, in 1980, Seppo Rickman showed that a non-constant qr map may omit only $q < \infty$, where $q = q(n, K)$, K the maximum distortion. In 1984, Rickman showed by a surprising and remarkable construction that this version of Picard's theorem is sharp at least in dimension 3: for any finite set in the 3-sphere there is a quasiregular mapping from Euclidean 3-space into the 3-sphere omitting exactly that set.

In this talk, I discuss the sharpness of Rickman's Picard theorem in all dimensions: for $n \geq 3$, given a finite set E, there exists a quasiregular mapping from Euclidean n-space into the n-sphere omitting precisely E. This requires a new orientation and methodology, which was developed jointly with Pekka Pankka; not only does it work naturally in all dimensions, but is combinatorially simpler than in Rickman. Thus, if $y \in E$, the preimage of a small cube about y is approximated by a network of cubes in $\mathbb{R}^n$ which can be concretely presented.

This result is a corollary of the following stronger statement: THEOREM: *given a finitely punctured n-sphere* $M = \mathbb{S}^n \setminus \{y_1, \ldots, y_p\}$ *and a Riemannian metric* g *on* M

with cylindrical ends, there exists a mapping of bounded length distortion $\mathbb{R}^n \to (M, g)$.

Mappings of bounded length distortion (BLD mappings) play a crucial role in this approach. It is worth noting that qr maps themselves intrude principally in steps which mirror Zoriç's construction.

パラメータ付き局所コホモロジーを用いた Tjurina stratificationの計算

鍋島克輔　(徳島大学)[*1]
田島慎一　(筑波大学)[*2]

1. はじめに

擬斉次多項式を主要部とする半擬斉次多項式で定義された超曲面の族で μ-constant な変形が与えられたとする。このとき, 対応する特異点の諸性質はその変形パラメータの値により変化する。

ここでは, Tjurina 数に注目し Tjurina 数の値に応じた変形パラメータ空間の効率的な分割アルゴリズムを紹介する (Tjurina stratification)。また, 特異点の複素解析的性質を知る際に重要となるイデアル商のパラメータ付きスタンダード基底計算アルゴリズムも共に紹介する。

これらのアルゴリズムにおいて重要となる鍵は代数的局所コホモロジーである。超曲面を定義する半擬斉次多項式 f のヤコビイデアル $J = \langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle$ により annihilate される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_J は, ベクトル空間となり, その次元は Milnor 数と等しい。また, イデアル $T = \langle f, \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle$ により annihilate される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_T もベクトル空間となり, その次元は Tjurina 数と等しい。代数的局所コホモロジー類のなすベクトル空間 H_J と H_T の関係を用いることで, Tjurina 数およびイデアル商のスタンダード基底を求める計算法を導出する。これらの計算アルゴリズムでは, H_J のパラメータ付き代数的局所コホモロジー類の計算を行うことが必要となるが, その方法については既に論文 [1, 2] において発表してあり, プログラムも計算機代数システム Risa/Asir([3]) に実装されている。

2. Milnor 数と Tjurina 数

X を $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍, $\mathcal{O}_X$ を X の正則関数の成す層 (sheaf), $\mathcal{O}_{X,O}$ を $\mathcal{O}_X$ の原点における茎 (stalk) とする。今, f は X 上の正則関数であり, 超曲面 $f(x) = 0$ は原点 O を孤立特異点として持つとする。$\mathbb{C}^n$ の原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ を

$$\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) := \lim_{k\to\infty} Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle^k, \mathcal{O}_X)$$

で定める。ベクトル空間 H_J の各要素を f 倍する線型写像 $f : H_J \longrightarrow H_J$ を考える。このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{\psi \in H_J \,|\, f\psi = 0\}\\ &= \left\{\psi \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, f(x)\psi = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\psi = 0\right\}\end{aligned}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 14B15, 14F10
キーワード：algebraic local cohomology, qusihomogeneous singularities, Tjurina number
[*1] 〒770-8502　徳島市南常三島町 1-1 徳島大学総合科学部
e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp
[*2] 〒305-8571　つくば市天王台 1-1-1 筑波大学大学院数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

となる。したがって, $\mathrm{Ker}(f)$ の次元は Tjurina 数に他ならない。ここで, ベクトル空間 H_J の各要素を f 倍して得られる集合を $f(H_J) := \{f\psi | \psi \in H_J\}$ と表す。また, μ は Milnor 数, τ は Tjurina 数を表す。このとき次が成り立つ。

命題 1 ([4]). 次は完全列である。$0 \longrightarrow H_T \longrightarrow H_J \longrightarrow f(H_J) \longrightarrow 0$

系 2. $\tau = \mu - \dim_{\mathbb{C}}(f(H_J))$.

命題 3 ([4]). $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J)) = \{h \in \mathcal{O}_{X,O} \,|\, hf \in J\}$.

3. 計算法

半擬斉次多項式を $f_{\{s,t\}} := f_{\{s,0\}} + g_t$ と表す。ただし, $f_{\{s,0\}}$ は擬斉次部であり係数にパラメータ $s = (s_1, \ldots, s_k)$ を含み, g_t は upper monomial からなる多項式であり, 係数にパラメータ $t = (t_1, \ldots, t_l)$ を含むとする。以下に, $f_{\{s,t\}}$ の取り得る各 Tjurina 数に対応する Tjurina stratification と共に, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_{\{s,t\}}(H_J))$ のスタンダード基底を計算するアルゴリズムの概略を紹介する。

アルゴリズムの概略

入力: $f_{\{s,t\}} := f_{\{s,0\}} + g_t$:半擬斉次多項式
出力: Tjurina stratification, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_{\{s,t\}}(H_J))$ のスタンダード基底
1. ベクトル空間 H_J のパラメータ付き代数的局所コホモロジー類を計算する。
2. ステップ 1 で求めた代数的局所コホモロジー類から $f_{\{s,t\}}(H_J)$ を作る。
3. パラメータ空間の分割を行い $f_{\{s,t\}}(H_J)$ の一次独立な基底の構成を行う。
4. ステップ 3 で得られたベクトル空間の基底に対して 各 stratum ごとに

$$\mu - (\text{基底を構成する要素の数})$$

を計算する。ここで, μ は Milnor 数を表す。
5. ステップ 3 で得られたベクトル空間の基底に対して各 stratum ごとにスタンダード基底計算法を適用する。

例 4. 多項式 $f = x^3 + y^9 + x^2y^3 + axy^7 + bx^2y^4$ を考える。ここでは x, y が変数で (a, b) は $\mathbb{C}^2$ を動く変形パラメータとする。f は半擬斉次多項式であり擬斉次部は $x^3 + y^9 + x^2y^3$, upper monomial は xy^7 と x^2y^4 であり Milnor 数は 16 である。パラメータ (a, b) が Tjurina 数にどのように影響を与えるか知るために, 上のアルゴリズム **1-4** を実行する。そうすると, パラメータの条件として $3a - 8b \neq 0$ のとき, Tjurina 数は 15 となり, $3a - 8b = 0$ のとき, Tjurina 数は 16 となる。このように, Tjurina 数のパラメータ依存の仕方が求まる。

参考文献

[1] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1814**, pp. 43–53, (2012).

[2] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について–半擬斉次孤立特異点の場合–, 数理解析研究所講究録 **1784**, pp. 111–122, (2012).

[3] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- A computer algebra system, *Proc. ISSAC'92*, pp.387-396, ACM-Press, (1992).

[4] S. Tajima, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, to appear.

Newton filtration と local cohomology

田島 慎一　(筑波大学)*

概　要

一点に台を持つ局所コホモロジーに対し Newton filtration を導入することで, Newton 非退化な孤立特異点の複素解析的諸性質を解析する新たな枠組みを構築する.

1. 記号および基本概念

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍 X において正則な函数 $f(z) = f(z_1, z_2, ..., z_n)$ が定める超曲面を $S = \{z \in X \mid f(z) = 0\}$ とおく. 超曲面 S は原点を孤立特異点として持つとする. さらに, f は, Newton 非退化であり, commode であるとする.

原点 O に台を持つ局所コホモロジー群を $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X)$ で表す. ただし, Ω^n_X は X 上の n 次正則微分形式のなす層を表すとする. また, X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$, その原点における stalk を $\mathcal{O}_{X,O}$ で表す.

f に対し, $x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} \dots x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$ が局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するイデアル I_f を考える :

$$I_f = (x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} \dots x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

このイデアルに対応して, ベクトル空間 W_{I_f} を次で定める.

$$W_{I_f} = \{\omega \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X) \mid x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\omega = x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\omega = \cdots = x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\omega = 0\}.$$

多変数留数が定める pairing に関する Grothendieck local duality により, W_{I_f} は剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/I_f$ の双対ベクトル空間であることが分かる. ベクトル空間 W_{I_f} の基底となる局所コホモロジー類であり, Newton filtration と両立するものを構成することができる ([4]).

f の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ が局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するヤコビイデアルを J_f で表し, W_{J_f} を次で定める.

$$W_{J_f} = \{\omega \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X) \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}\omega = \frac{\partial f}{\partial x_2}\omega = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\omega = 0\}.$$

W_{J_f} は $\mathcal{O}_{X,O}/J_f$ の双対ベクトル空間である.

2. 主結果

W_{I_f} から W_{I_f} 自身への写像 $\pi : W_{I_f} \longrightarrow W_{I_f}$ を $\pi(\omega) = x_1x_2\cdots x_n\omega$ で定める. このとき, 次が成立する.

キーワード : Newton filtration, Grothendieck local duality, local cohomology
* 〒 305-8571 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学 数理物質系数学域
e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

命題 ([4]) f は, Newton 非退化で commode であるとする. このとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Im}(\pi) = W_{J_f}.$$

この命題より, 孤立特異点の Milnor 数 μ に関する Kouchnirenko の公式 ([2]) を導くことができる.

さて, $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ が $\mathcal{O}_{X,O}$ において生成するイデアルを T_f とおき, ベクトル空間 W_{T_f} を

$$W_{T_f} = \{\omega \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\Omega^n_X) \mid f\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}\omega = \frac{\partial f}{\partial x_2}\omega = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\omega = 0\}$$

で定める. ベクトル空間 W_{T_f} は $\mathcal{O}_{X,O}/T_f$ の双対ベクトル空間であり, その次元は Tjurina 数 τ と等しい.

補題 ([5]) 次は完全列である.

$$0 \longrightarrow W_{T_f} \longrightarrow W_{J_f} \longrightarrow f(W_{J_f}) \longrightarrow 0.$$

定理 ([4]) f は, Newton 非退化で commode であるとする. このとき次が成り立つ.

(i) $\dim(\pi(f(W_{I_f}))) = \mu - \tau$.

(ii) $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(\pi(f(W_{I_f}))) = \{h \in \mathcal{O}_{X,O} \mid hf \in J_f\}$.

Milnor 数と Tjurina 数の差は, 特異点の解析的不変量であることと, $\mu - \tau$ および (ii) の右辺のイデアル商 $\{h \in \mathcal{O}_{X,O} \mid hf \in J_f\}$ はともに, f がどの程度擬斉次でないかを示す解析的な量と解釈できることに注意されたい ([3]).

参考文献

[1] J. Damon and T. Gaffney, Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations, *Invent. Math.* **72** (1983), 335–358.

[2] A. G. Kouchnirenko, Polyèdre de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.* **32** (1976), 1–31.

[3] K. Saito, Quasihomogene isolierte Singularitaten von Hyperflächen, *Invent. Math.* **14** (1971), 123–142.

[4] 田島慎一, Algebraic local cohomology classes and Kouchnirenko's formulae, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定

[5] S. Tajima, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, to appear.

[6] E. Yoshinaga, Topologically principal part of analytic functions, *Trans. AMS.* **314** (1989), 803–814.

Relations between saddle sets for Axiom A polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$

中根　静男　(東京工芸大学)*

$\mathbb{C}^2$ の Axiom A polynomial skew product :

$$f(z,w) = (p(z), q(z,w))$$

を考える。$q_z(w) = q(z,w)$ とおくと,

$$f^k(z,w) = (p^k(z), Q_z^k(w)) := (p(z), q_{p^{k-1}(z)} \circ \cdots \circ q_z(w))$$

である。p の attracting periodic points の集合を A_p とかく。f の saddle set は $J_p \times \mathbb{C}$ 内の saddle set Λ_{J_p} と $A_p \times \mathbb{C}$ 内の saddle set Λ_{A_p} からなる。それらの安定集合、不安定集合を次で定義する。

$$\begin{aligned} W^s(\Lambda_{A_p}) &= \{y \in \mathbb{C}^2; f^n(y) \to \Lambda_{A_p}\}, \\ W^u(\Lambda_{J_p}) &= \{y \in \mathbb{C}^2; \exists \text{ prehistory } \hat{y} = (y_{-k}) \to \Lambda_{J_p}\}. \end{aligned}$$

一般に、basic sets の間の *relation* $\succ$ を次で定義する。

$$\Lambda_1 \succ \Lambda_2 \Longleftrightarrow (W^u(\Lambda_1) \setminus \Lambda_1) \cap (W^s(\Lambda_2) \setminus \Lambda_2) \neq \emptyset$$

これまでは $J_p \times \mathbb{C}$ 内の saddle basic sets の間の relations について考察してきたが、今回は Λ_{A_p} と Λ_{J_p} の間の relation について考える。

$z \in K_p$ に対し、fiber filled-Julia 集合 K_z と fiber Julia 集合 J_z を、

$$K_z = \{w \in \mathbb{C}; \{Q_z^k(w)\}_{k \geq 0} \text{ が有界}\}, \quad J_z = \partial K_z$$

と定義する。J_p が連結で、すべての $z \in J_p$ に対し J_z が連結であるとき、f を連結であるという。

定理 1. *f が連結で、p の critical set C_p が A_p に含まれるならば、$W^u(\Lambda_{J_p}) \cap W^s(\Lambda_{A_p}) = \emptyset$ が成り立つ.*

この性質は、Bedford-Jonsson [BJ] が $\mathbb{C}^2$ の regular polynomial endomorphism の external rays が着地することを示す際に本質的であった。我々は、polynomial skew product に限っているために、証明は著しく簡単になる。$C_p \subset A_p$ という仮定は強いが、$W^u(\Lambda_{J_p}) \cap W^s(\Lambda_{A_p}) = \emptyset$ という性質は摂動しても保たれるので、f のある近傍でも定理は成り立つ。

次は、性質 $W^u(\Lambda_{J_p}) \cap W^s(\Lambda_{A_p}) = \emptyset$ のひとつの特徴づけを与える。

定理 2. *$W^u(\Lambda_{J_p}) \cap W^s(\Lambda_{A_p}) = \emptyset \Longleftrightarrow z \mapsto J_z$ は K_p 上連続.*

本研究は科研費 (課題番号:21540203) の助成を受けたものである。
* 〒243-0297 神奈川県厚木市飯山 1583　東京工芸大学
e-mail: nakane@gen.t-kougei.ac.jp

f-不変な閉集合 Z 上 f が *vertically expanding* とは、

$$|(Q_z^k)'(w)| \geq C\lambda^k \text{ for any } k \geq 0,\ \ z \in Z,\ \ w \in J_z.$$

を満たす $\lambda > 1$ と $C > 0$ が存在することをいう。f が Axiom A ならば J_p および A_p 上 vertically expanding である。

命題 1. *([J]) f が Z 上 vertically expanding ならば $z \mapsto J_z$ は Z 上連続である。*

特に K_p 上 vertically expanding ならば $W^u(\Lambda_{J_p}) \cap W^s(\Lambda_{A_p}) = \emptyset$ が成り立つ。

定理 3. *f が連結で $W^u(\Lambda_{J_p}) \cap W^s(\Lambda_{A_p}) = \emptyset$ を満たせば f は K_p 上 vertically expanding である。*

Jonsson [J] の結果から次が従う。

系 1. *定理 3 の仮定の下で、$z \mapsto K_z$ は K_p 上連続である。さらに、fiberwise inverse Böttcher coordinate $\phi_z : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \setminus K_z$ は (z, w) の関数として $K_p \times (\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$ 上に連続に延長される。*

例 1. $f_a(z, w) = (z^2, w^2 + a(1-z)w)$ は $|a| < \sqrt{2} - 1$ ならば連結で定理 *1* の仮定を満たす。

例 2. $f_2(z, w) = (z^2, w^2 + 2(1-z)w)$ は *Axiom A* ではないが *([J])*、$\alpha = (0, 0) \in \Lambda_{A_p}$ と $\beta = (1, 0) \in \Lambda_{J_p}$ は *saddle* 不動点で, β の *prehistory* $\hat{\beta} = (\cdots, \beta, \beta)$ を考えると、$W^s(\alpha) \cap W^u(\hat{\beta}) \supset \{(z, 0); |z| < 1\}$。この写像に対し、$0 \leq x < 1$ で J_x は単純閉曲線であり、$x \nearrow 1$ のとき $J_x \to \overline{\mathbb{D}}$ だが $J_1 = \partial\mathbb{D}$ であり、$z \mapsto J_z$ は $K_p = \overline{\mathbb{D}}$ 上連続でない。

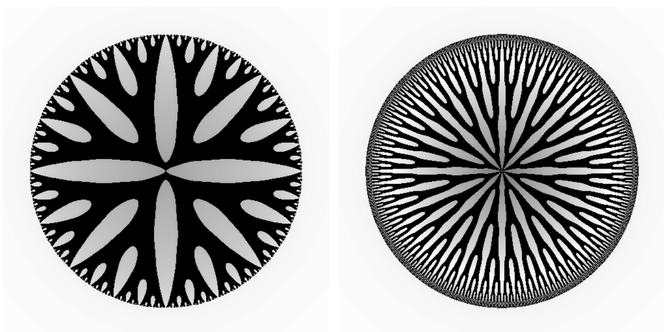


図 1: J_z, 左 : $z = 0.999$, 右 : $z = 0.99999999$

参考文献

[BJ] E. Bedford & M. Jonsson: Dynamics of regular polynomial endomorphisms of $\mathbb{C}^k$. Amer. J. Math., 122 (2000), pp. 153–212.

[J] M. Jonsson: Dynamics of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$. Math. Ann. 314 (1999), pp. 403–447.

On the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid

Akio Kodama (Kanazawa University)*

Abstract

In this talk, we completely determine the structure of the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid. This is a natural generalization of a result due to Landucci. Also this gives an affirmative answer to an open problem posed by Jarnicki and Pflug.

In this talk we study the structure of the holomorphic automorphism group of a *generalized complex ellipsoid*

$$E(n_0, \ldots, n_K; p_0, \ldots, p_K) := \left\{ (z_0, \ldots, z_K) \in \mathbf{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_K} \; ; \; \sum_{k=0}^{K} \|z_k\|^{2p_k} < 1 \right\}$$

in $\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^{n_0} \times \cdots \times \mathbf{C}^{n_K}$, where $n_0, \ldots, n_K$ are positive integers and $p_0, \ldots, p_K$ are positive real numbers, and $N = n_0 + \cdots + n_K$. In general this domain is not geometrically convex and its boundary is not smooth. In the special case where all the $p_k = 1$, this domain reduces to the unit ball B^N in $\mathbf{C}^N$ and the structure of its holomorphic automorphism group $\mathrm{Aut}(B^N)$ is well-known. Also, it is known that $E(n_0, \ldots, n_K; p_0, \ldots, p_K)$ is homogeneous if and only if $p_k = 1$ for all k (cf. [3], [4]).

For convenience and with no loss of generality, in the following we will always assume that $p_0 = 1$, $p_1, \ldots, p_K \neq 1$, $n_1, \ldots, n_K > 0$. Moreover, after relabeling the indices, if necessary, we may assume that there exist positive integers $k_1, \ldots, k_s$ such that

$$\begin{aligned} & k_1 + \cdots + k_s = K, \\ & n_{k_1+\cdots+k_{j-1}+1} = \cdots = n_{k_1+\cdots+k_j}, \quad 1 \leq j \leq s, \\ & n_{k_1+\cdots+k_j} < n_{k_1+\cdots+k_j+1}, \quad 1 \leq j \leq s-1, \end{aligned}$$

where we put $k_0 = 0$.

Now let us choose an arbitrary generalized complex ellipsoid $\mathcal{E}$ in $\mathbf{C}^N$ and write it in the form

$$\mathcal{E} = E(n_0, n_1, \ldots, n_K; 1, p_1, \ldots, p_K). \qquad (*)$$

Here it is understood that 1 does not appear if $n_0 = 0$, and also this domain is the unit ball B^{n_0} in $\mathbf{C}^{n_0} = \mathbf{C}^N$ if $K = 0$.

The purpose of this talk is to announce the following result that gives a full description of the holomorphic automorphism group of generalized complex ellipsoids:

The author is partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 24540166, the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32A07; Secondary 32M05.
Keywords: Holomorphic automorphism groups, Generalized complex ellipsoids.
*e-mail: kodama@se.kanazawa-u.ac.jp

Theorem. *Let $\mathcal{E}$ be the generalized complex ellipsoid appearing in* $(*)$. *Then the holomorphic automorphism group* $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ *of* $\mathcal{E}$ *consists of all transformations*

$$\varphi : (z_0, z_1, \ldots, z_K) \longmapsto (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_K)$$

of the form

$$\tilde{z}_0 = H(z_0), \quad \tilde{z}_k = \gamma_k(z_0) U_k z_{\sigma(k)}, \quad 1 \leq k \leq K$$

(*think of* z_k *as column vectors*), *where*

(1) $H \in \mathrm{Aut}(B^{n_0})$,

(2) $\gamma_k(z_0)$ *are nowhere vanishing holomorphic functions on* B^{n_0} *defined by*

$$\gamma_k(z_0) = \left(\frac{1 - \|a\|^2}{\big(1 - \langle z_0, a \rangle\big)^2} \right)^{1/2p_k}, \quad a = H^{-1}(o) \in B^{n_0},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denotes the standard Hermitian inner product on* $\mathbf{C}^{n_0}$ *and* $o \in B^{n_0}$ *is the origin of* $\mathbf{C}^{n_0}$,

(3) $U_k \in U(n_k)$, *the unitary group of degree* n_k, *and*

(4) σ *is a permutation of* $\{1, \ldots, K\}$ *satisfying the following*:

$$\big\{\sigma(k_1 + \cdots + k_{j-1} + 1), \ldots, \sigma(k_1 + \cdots + k_j)\big\} = \big\{k_1 + \cdots + k_{j-1} + 1, \ldots, k_1 + \cdots + k_j\big\}, \quad 1 \leq j \leq s,$$

and $\sigma(\mu) = \nu$ *can only happen when* $p_\mu = p_\nu$.

In particular, considering the special case where $n_k = 1$ and $2 \leq p_k \in \mathbf{N}$ for all $k \geq 1$, we obtain a natural generalization of Landucci [2, Corollary to Theorem]. This also gives an affirmative answer to an open problem posed in Jarnicki and Pflug [1, Remark 2.5.11].

References

[1] M. Jarnicki and P. Pflug, *First steps in several complex variables: Reinhardt domains*, EMS Textbooks in Math., Euro. Math. Soc., Zürich, 2008.

[2] M. Landucci, *On the proper holomorphic equivalence for a class of pseudoconvex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 807–811.

[3] I. Naruki, *The holomorphic equivalence problem for a class of Reinhardt domains*, Publ. Res. Ins. Math. Sci., Kyoto Univ. **4** (1986), 527–543.

[4] T. Sunada, *Holomorphic equivalence problem for bounded Reinhardt domains*, Math. Ann. **235** (1978), 111–128.

On Hölder type estimates for $\bar{\partial}$ on infinite type convex domains

永田　義一　(名古屋大学)*

概要

$D = \{\rho < 0\} \subset \mathbb{C}^2$ を滑らかな凸領域とする．このとき方程式 $\bar{\partial} u = f (f \in C^{\infty}_{(0.1)}(\bar{D}))$ は $\bar{\partial} f = 0$ のとき解を持つ．この解の一つは積分を用いて

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{\zeta \in \partial D} \frac{\rho_{\zeta_1}(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) + \rho_{\zeta_2}(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{[\rho_{\zeta_1}(z_1 - \zeta_1) + \rho_{\zeta_2}(z_2 - \zeta_2)]|\zeta - z|^2} f \wedge d\zeta_1 \wedge \zeta_2 \\ &\quad + \int_{\zeta \in D} \frac{f_1(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) + f_2(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)}{|\zeta - z|^4} d\bar{\zeta}_1 \wedge \bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge \zeta_2 \end{aligned}$$

と表されることが知られている．D が狭義の凸領域であればこの積分表示より Hölder 評価 $|u(z) - u(w)| \lesssim ||f||_{\infty} |z - w|^{1/2}$ が成り立ち, これが最良の評価であることも分かる．また [1] では, 有限型凸領域 $\{|z_1|^{2m} + |z_2|^2 < 1\}$ において Hölder 評価 $|u(z) - u(w)| \lesssim ||f||_{\infty} |z - w|^{1/2m}$ が最良であることも示されている．

今回の講演では非有限型領域 $\{\exp(1 - 1/|z_1|^{\alpha}) + |z_2|^2 < 1\}(0 < \alpha < 1)$ を考え, 解 u が Hölder 型評価 $|u(z) - u(w)| \lesssim ||f||_{\infty} |\log|z - w||^{-1+1/\alpha}$ を満たすことを説明する．この領域では有限型凸領域のように $|u(z) - u(w)| \lesssim ||f||_{\infty} |z - w|^{1/2m}$ をみたす m は存在しない．また [2] では supnorm 評価 $||u||_{\infty} \lesssim ||f||_{\infty}$ が示されたが, この評価を改良したものにもなっている．

参考文献

[1] K. Diederich, J. E. Fornaess, J. Wiegerinck. Sharp Hölder estimates for $\bar{\partial}$ on ellipsoids. Manuscripta Math. 56 (1986), no. 4, 399-417.

[2] J. E. Fornaess, L. Lee, Y. Zhang. On supnorm estimates for $\bar{\partial}$ on infinite type convex domains in C2. J. Geom. Anal. 21 (2011), no. 3, 495-512.

* 464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: m10035y@math.nagoya-u.ac.jp

$\wp$ 関数の準アーベル多様体への一般化

阿部幸隆（富山大学大学院理工学研究部（理学））
濟江厚子（富山大学大学院理工学教育部）

$X=\mathbb{C}^n/\Gamma$ をトロイダル群とする．$\mathbb{C}^n\setminus\Gamma$ 上の Γ-不変な $\overline{\partial}$-閉である $(0,n-1)$-形式 $\wp^i$ で次をみたすものが構成できる：
$\overline{B_\varepsilon(a)}$ 上の正則関数 f に対し

$$\frac{(2\pi\sqrt{-1})^n}{(n-1)!}\frac{\partial f}{\partial z_i}(a)=\int_{\partial B_\varepsilon(a)} f(z)\wp^i(z-a)\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$$

が成り立つ．ここで，$B_\varepsilon(a)$ は a を中心とした十分小さい半径 $\varepsilon>0$ の開球である．
この $\wp^i$ を用いて $X\setminus\{0\}$ 上の $\overline{\partial}$-閉である $(n-1,n-1)$-形式 $\wp^{ij}$ を

$$\wp^{ij}(z):=\frac{(n-1)!}{2\pi\sqrt{-1})^{n-1}}(-1)^{j-1}\wp^i(z)\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dz_j}\wedge\cdots\wedge dz_n$$

と定義する．このとき，次が成り立つ．

定理 1 X は標準的なコンパクト化 $\overline{X}$ をもつ種数 0 の準アーベル多様体とする．Θ は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数 θ で定義された X 上の正の因子であり，$\overline{X}$ まで正則に拡張できるとする．このとき，$\wp^{ij}$ は Θ 上可積分であり，

$$\int_\Theta \wp^{ij}(z-p)=-\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\log\ \theta\bigg|_p+c_{ij}$$

が成り立つ．ここで，c_{ij} は p に依存しない定数である．

これは，一変数の場合のテータ関数と $\wp$ 関数との関係の一般化に相当する．また，アーベル多様体の場合が Zappa の結果（[2]）である．

参考文献

[1] Y. Abe and A. Kogie, A generalization of Weierstrass' $\wp$-function to quasi-abelian varieties, Toyama Math. J., **35** (2012), 15–33.

[2] P. Zappa, Su una generalizzazione della $\wp$ di Weierstrass, Bollettino U. M. I., (6)**2-A** (1983), 245–252.

特別講演

複素２次元の半放物型不動点とその分岐

上田哲生　(京都大学理学研究科)*

概　要

複素２次元の正則写像の半放物型不動点の分岐についての研究結果を紹介する．特に力学系を変動させたときのジュリア集合の不連続性（インプロージョン）の現象が半放物型不動点の構造をもとにして，どのように解明されるかについて述べる．

1. はじめに

この講演では E. Bedford, J. Smillie および筆者の共同研究の結果を紹介する．

複素１次元の放物型不動点の分岐は様々な興味深い力学的現象を呈する．例えば，力学系の族 $f_\varepsilon(z) = z + z^2 + \varepsilon^2$ を考えよう．$\varepsilon = 0$ のときは 0 は f_0 の放物型不動点であり，$\varepsilon \neq 0$ のときはこの不動点は２つの不動点 $\pm i\varepsilon$ に分岐する．パラメータ ε が変動に伴って f_ε の力学系としての挙動はどんな風に変化するだろうか？これを捉えるには，ジュリア集合のような力学系として意味のある集合が ε の関数としてどう変動するかを調べるとよい．Lavaurs [L], Duady [D] によれば次が成り立つ：

定理　：関数 $\varepsilon \mapsto J(f_\varepsilon)$, $\varepsilon \mapsto K(f_\varepsilon)$ は $\varepsilon = 0$ において不連続である（$\mathbb{C}$ のコンパクト集合のハウスドルフ距離に関して）．

このような現象を複素２次元の場合に考えるのが，ここでの主題である．次元が２以上の場合，リーマン面の一意化定理などの１次元の場合に有効であった強力な方法が利用できないので，新しい工夫が必要になる．一方で，１次元の場合にはリーマン面の正則自己同形は限られたものしかないが，高次元の場合（特に $\mathbb{C}^n$）の場合には正則自己同形写像が豊富に存在していることに注意する．

この主題の源となっているのは次の３つの研究である：

(1) $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同形の力学系（Hubbard, Bedford-Smillie, Fornaess-Sibony,. . . ）
(2) 複素２次元の半放物型（半吸引型）不動点の構造 (Fatou, Ueda, . . .)
(3) 複素１次元放物型不動点の分岐 (implosion) (Lavaurs, Douady, Shishikura,. . . ）

これらの研究は (Fatou のものを別にすれば) いずれも 1980 年代に始まるものである．３つの方向がこのように結びつくことになるとは，この問題を考え始めた頃の筆者には想像もできないことであった．

2. $\mathbb{C}^2$ の多項式自己同形写像

複素１次元の多項式写像の，ある意味で自然な一般化として，$\mathbb{C}^2$ の多項式自己同形写像が考えられる．力学系として興味ある多項式写像は一般 Hénon 写像の合成に共役であることが知られている ([FM])．以下では多項式自己同形といえば，この型のもののみを考える．

本研究は科研費 (課題番号: 21540176) の助成を受けたものである。

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科
e-mail: ueda@math.kyoto-u.ac.jp

この型の写像のうち，最も簡単なのは２次 Hénon 写像である：

$$F = F_{a,c} : (x, y) \mapsto (y, y^2 + c - ax) \qquad \text{ここで } a, c \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

これは２つのパラメータ a, c に依存する写像族である．写像 $F_{a,c}$ は一般には 2 個の不動点をもつが，$(a+1)^2 - 4c = 0$ の場合には不動点は唯１つ $((a+1)/2, (a+1)/2)$ で，そこでの F' の固有値は 1 および a である．

Hénon 写像において，１次元の場合の充填ジュリア集合に相当するのは集合

$$K^{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \ \{F^{\pm n}(x, y)\}_{n \geq 0} \ \text{が有界}\}$$

である．これらの境界はジュリア集合に相当する：

$$J^{\pm} = \partial K^{\pm}$$

また，

$$K = K^+ \cap K^- \ \text{および} \ \ J = J^+ \cap J^-$$

を定義する．$K^{\pm}$, $J^{\pm}$ は非有界な閉集合であるが，その共通部分である $K, J^{\pm}$ はコンパクト集合である．さらに

$$J^* = \overline{\{F \text{ の鞍型周期点}\}} \qquad (\text{閉包})$$

と定める．(J^* は J の部分集合であるが，一致するかどうかは未解決の問題である.)

写像 F の Green 関数は

$$G^{\pm}(x, y) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ \|F^{\pm n}(x, y)\|$$

で定義される．これは連続関数であり，$K^{\pm}$ は

$$K^{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid G^{\pm}(x, y) = 0\}$$

と表せる．また

$$J^{\pm} = \operatorname{supp} dd^c G^{\pm}$$

ここで $dd^c G^{\pm}$ は G から定まる正値 $(1,1)$ カレントで，supp は台を表わす．

$\mathbb{C}^2$ の多項式自己同形写像の族 F_ε $(\varepsilon \in U)$ を考える．Green 関数がパラメータに関して連続であることから次の定理が従う．

定理 1 写像 F_ε がパラメータ $\varepsilon \in U$ に依存して連続的に変化するとき，

(1) 集合値関数 $\varepsilon \mapsto K^{\pm}(F_\varepsilon)$ は上半連続である.（すなわち $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon \in U} (\varepsilon, K(F_\varepsilon))$ は $U \times \mathbb{C}^2$ の閉集合である.)

(2) 集合値関数 $\varepsilon \mapsto J^{\pm}(F_\varepsilon)$ および $\varepsilon \mapsto J^*(F_\varepsilon)$ は下半連続である．

主要結果を述べるために，ε をパラメータとする写像族 $\{F_\varepsilon\}$ で次の条件を満たすものを考える：

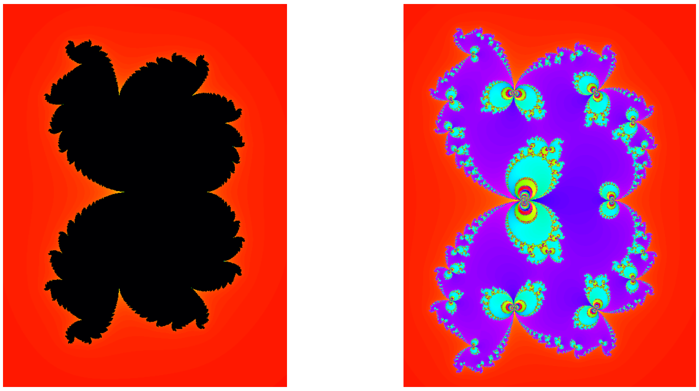
(i) $\varepsilon = 0$ のときは $F_0 : (x, y) \mapsto (x + x^2 + \cdots, by + \cdots)$ の形で，$(0,0)$ を半吸引不動点とする．

(ii) $\varepsilon \neq 0$ のときは不動点が $(\pm\varepsilon, 0) + O(\varepsilon^2)$ のように２つに分裂する．

主要結果は次の定理である：

主定理　$X = J^*,\ J,\ J^+,\ K,\ K^+$ について，関数 $\varepsilon \mapsto X(F_\varepsilon)$ は $\varepsilon = 0$ において不連続である．一方 $X = J^-, K^-$ については，$\varepsilon \mapsto X(F_\varepsilon)$ は連続である．

下の図は $F_{a,\varepsilon} : (x,y) \mapsto ((1+a)x - ay + x^2 + \varepsilon^2, x + \varepsilon^2)$ とするときの，集合値関数 $\varepsilon \mapsto K^+(F_{a,\varepsilon})$ の不連続性を示す．ここで $a = 0.3$ で，左は $\varepsilon = 0$，右は $\varepsilon = 0.05$.
（これは２次 Hénon 写像族の変数およびパラメータを取り換えたものである.）



3. 半放物型–半吸引型不動点

２次元複素多様体 M とその正則自己同形写像 $F : M \to M$ を考える．この写像 M は不動点 $O \in M$ をもつ, すなわち $F(O) = O$ としよう．不動点 O における F の微分 $F'(O)$ の固有値が $1, b$（ただし $0 < |b| < 1$）であるとする．このとき，局所座標 (x,y) を

$$(x,y) \mapsto \Big(x + \sum_{j+k\geq 2} a_{jk}x^j y^k,\ by + \sum_{j+k\geq 2} b_{jk}x^j y^k\Big)$$

となるようにとることができる．ここで，一般的 (generic) な条件として，以後では $a_{20} \neq 0$ と仮定する．

この型の不動点の力学的構造を考察したい．問題となるのは，F の正方向（または負方向）の反復合成によって不動点に収束する点の集合がどんな形をしているかということである．この問には下で定義する集合 $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \Sigma$ を用いて次のように答えることができる：

$$(1)\qquad \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \ = \{P \in M \mid\ F^n(P) \to O \quad (n \to \infty)\}$$

$$(2)\qquad \Sigma \cap \{O\} = \{P \in M \mid\ F^{-n}(P) \to O \quad (n \to \infty)\}$$

局所一様吸引領域　$\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B} = \{p \in M \mid F^n \to O\ (n \to \infty)\ \text{局所一様収束}\ \}$$

によって定義する．このとき，$\mathcal{B}$ は $\mathbb{C}^2$ に双正則な開集合であり，不動点 O は $\mathcal{B}$ の境界 $\partial\mathcal{B}$ に含まれる．また $\mathcal{B}$ から $\mathbb{C}^2$ の上への双正則写像 $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}^2$ によって $F|\mathcal{B}$

は $\mathbb{C}^2$ の平行移動に共役である．すなわち

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{F|\mathcal{B}} & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow[G]{} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

ここで $G:(u,v)\mapsto(u+1,v)$

強安定曲線　（固有値 b に対応する安定曲線）

次の図式を可換にする正則写像 $\eta:\mathbb{C}\to M$ で $\eta(0)=O,\ \eta'(0)\neq 0$ となるものがある：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & M \\ {\scriptstyle\eta}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\eta} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[b]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

ここで b は定数倍写像 $t\to bt$ を表わす．

強安定曲線を $\mathcal{C}:=\eta(\mathbb{C})$ で定義する．このとき $\mathcal{C}$ は $\mathcal{B}$ の境界 $\partial\mathcal{B}$ に含まれ，定理の (1) に言うように，$\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ が F の正方向反復によって O に（各点収束の意味で）吸引される点の全体となる．

漸近曲線 (asymptotic curve)　正則写像 $H:\mathbb{C}\to M$ で，次の可換図式を成り立たせるものが存在する：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & M \\ {\scriptstyle H}\big\uparrow & & {\scriptstyle H}\big\uparrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\tau_1]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

ここで τ_1 は平行移動

$$F\circ H(\zeta)=F(\zeta+1)$$

を表わす．$\Sigma=H(\mathbb{C})\subset M$. とおくと F の負方向反復合成によって O に吸引される点全体は $\Sigma\cup\{O\}$ と表わされる．

ここで F が Hénon 写像の場合に，これらの集合と $k^\pm, J^\pm, K, J$ の関係を見ておこう：

定理 2 F が Hénon 写像で，半吸引型不動点をもつとき

(1) $\mathcal{B}$ は $\operatorname{int}K^+$ の連結成分のひとつ

(2) $\mathcal{C}\subset\partial\mathcal{B}=J^+=\partial K^+$　（稠密）

(3) $\Sigma\subset J^-=K^-$（稠密）

(4) $\Sigma\cap\mathcal{B}\subset K$

K は有界だから，(4) より $\Sigma\not\subset\mathcal{B}$ であることがわかる．

Fatou 座標　これからの考察で主要な役割を果たす "入"Fatou 座標 (incoming Fatou coordinate) と "出"Fatou 座標 (outgoing Fatou coordinate) を定義しよう．

$\mathcal{B}$ の関数 $\varphi^\iota(p)=u\circ\Phi(p)$ を入Fatou 座標とよぶ．ここで Φ は $\mathcal{B}$ から $\mathbb{C}^2$ への双正則写像を与える写像で，u はその第 1 成分を表わす．φ^ι は $\mathcal{B}$ に属する点の "未来" の（不動点の近くでの）挙動を反映して定まっている．これは関数方程式

$$\varphi^\iota(F(p))=\varphi^\iota(p)+1 \qquad (p\in\mathcal{B})$$

を満たしている．

一方，写像 $H:\mathbb{C}\to\Sigma$ の逆写像を出 Fatou 座標 $\varphi^o:\Sigma\to\mathbb{C}$ とよぶ．これは Σ に属する点の "過去" の（不動点の近くでの）挙動を反映して定まっている．これは

$$\varphi^o(F(p))=\varphi^o(p)+1 \qquad (p\in\Sigma)$$

を満たしている．

$\Sigma\cap\mathcal{B}$ の構造　$\mathcal{B}$ と Σ の共通部分に属する点はその正負両方向の軌道が不動点 O に収束する．写像 F を変動させるとき，このような点から周期点が生ずる（eggbeater）ので，この考察は重要である．$\mathcal{B}\cap\Sigma$ 上では，入・出Fatou 座標が定まっているので，この関係を調べよう．そのために

$$\Omega=\varphi^o(\mathcal{B}\cap\Sigma)=H^{-1}(\mathcal{B}\cap\Sigma)$$

とする．

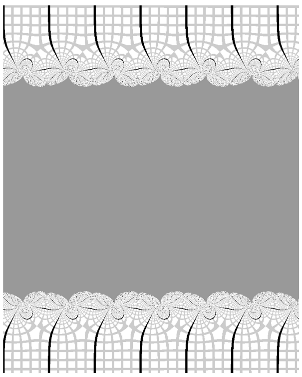
命題　(1) Ω は平行移動 $\zeta\mapsto\zeta+1$ によって不変である．

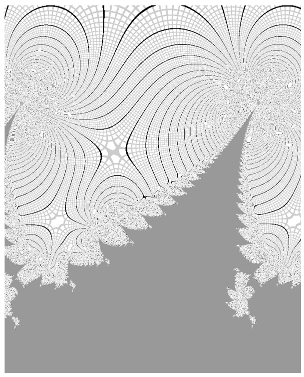
(2) $R>0$ が十分大きいとき，Ω は $\{|\operatorname{Im}\zeta|>R\}$ を含んでいる．

(3) M が Stein 多様体であるとする（たとえば $M=\mathbb{C}^2$）．このとき Ω は２つ以上の連結成分をもつ．その１つ Ω^+ は $\{\operatorname{Im}\zeta>R\}$ を含み，別の１つ Ω^- は $\{\operatorname{Im}\zeta<-R\}$ を含む． また各連結成分は単連結である．

(1) は $\mathcal{B}\cap\Sigma$ が F によって不変であることから従う．(2) は半吸引不動点の局所的考察からわかる．また (3) は $\mathcal{B}$が Runge 領域であることから従う．

下の図は Ω を表わしている．(右は拡大図)





２つの Fatou 座標の関係　Ω 上の関数

$$h=\varphi^\iota\circ(\varphi^o)^{-1}:\Omega\to\mathbb{C}$$

を考える．これは関数方程式$h(\zeta+1)=h(\zeta)+1$ を満たす．したがって $h(\zeta)-\zeta$ は 1 を周期とする周期関数である．$\Omega^\pm$ 上で

$$h(\zeta) = \zeta + c_0^+ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^+ \exp(2n\pi i\zeta) \qquad \zeta \in \Omega^+$$
$$h(\zeta) = \zeta + c_0^- + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \exp(-2n\pi i\zeta) \qquad \zeta \in \Omega^-$$

このフーリエ級数で $n < 0$ の項が現れないのは，Fatou 座標の挙動が Ω の上下端でコントロールできることによる．また，Fatou 座標は加法定数を除いて定まっているので定数項のとり方には自由度があるが，$c_0^+ + c_0^- = 0$ が成り立つようにとることとする．

4. 遷移写像 (transition map)

私たちが問題にしたいのは，半放物型不動点を（適当な方向に）変動させたときの力学系としての性質を，もとの写像の上に見てきた性質を用いて説明することにある．

次に述べる遷移写像は，元の半吸引不動点のみを見る限りでは意味は捉えにくいのだが，半放物型不動点を摂動したときの写像の様子を近似するものと言うことができる．

遷移写像の定義自体は，摂動を考えずに半吸引不動点をもつ写像について与えることができる．

定義　$\alpha \in \mathbb{C}$ をパラメータとする写像族 $T_\alpha : \mathcal{B} \to \Sigma$ を

$$T_\alpha = (\varphi^o)^{-1} \circ \tau_\alpha \circ \varphi^\iota$$

によって定める．ここで τ_α は平行移動 $\zeta \mapsto \zeta + \alpha$ を表わす．この写像 T_α を遷移写像という．

F だけを見ていると，$\mathcal{B}$ の点と Σ の点の間には何の関係もない．

写像 T_α の $\mathcal{B} \cap \Sigma$ への制限を考える．Σ と $\mathbb{C}$ は，(そして $\mathcal{B} \cap \Sigma$ と Ω は) 出 Fatou 座標 φ^o によって対応しているので

$$h_\alpha = \varphi^o \circ T_\alpha \circ (\varphi^o)^{-1} : \Omega \to \mathbb{C}$$

は $T_\alpha | \mathcal{B} \cap \Sigma$ の 出Fatou 座標による表現と考えられる．

$$h_\alpha = \varphi^o \circ (\varphi^o)^{-1} \circ \tau_\alpha \circ \varphi^\iota = \tau_\alpha \circ \varphi^\iota = \tau_\alpha \circ h$$

であることに注意する．

5. 半放物型不動点の分岐

写像族 $\{F_\varepsilon\}_\varepsilon$ で条件 (i),(ii) を満たすものを考える．

定理 3　局所座標 (x, y) とパラメータ ε をとりかえることによって，F_ε は次の形であるとしてよい：

$$F_\varepsilon \ : \ (x, y) \ \mapsto \ (x + (x^2 + \varepsilon^2)\alpha_\varepsilon(x, y),\ b_\varepsilon(x)y + (x^2 + \varepsilon^2)\beta_\varepsilon(x, y)).$$

ここで $\alpha_\varepsilon(0, 0) = 1$.

このとき，$(\pm i\varepsilon, 0)$ は不動点で，直線 $\{x = \pm i\varepsilon\}$ はこれら不動点を通る安定曲線である．また安定曲線の上では写像は線形である．

α-列　α を複素数とする．複素数と自然数の組からなる列 $\{(\varepsilon_j, n_j)\}$ が α-列であるとは $j \to \infty$ のとき $\varepsilon_j \to 0,\ n_j \to \infty$ かつ $n_j - \dfrac{\pi}{\varepsilon_j} \to \alpha$ となることをいう．また $\{\varepsilon_j\}$ が α-列であるとは $\{(\varepsilon_j, n_j)\}$ が α-列となるように $\{n_j\}$ をとれることをいう．

（注）　この条件から $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{\varepsilon_j} = \dfrac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_j}{|\varepsilon_j|^2}$ が有界であることが従う．すなわち，α 列 $\{\varepsilon_j\}$ は実軸の正の部分に２次の接触をしている．

次の定理は，F_0 の摂動が，F_0 について定義された遷移写像をある意味で近似することを述べている．これは，１変数の場合の Lavaurs の定理の高次元化であるが，１変数の場合の一意化定理に相当するものが２次元の場合にはないので証明には独自の工夫を要する．

定理 4　定理 3 の形の写像族 F_ε について，$\{(\varepsilon_j, n_j)\}$ が α 列ならば

$$\lim_{j\to\infty} F_{\varepsilon_j}^{n_j} = T_\alpha$$

が成り立つ．

吸引領域 $\mathcal{B}$ の点 p の遷移写像T_α による像 T_α がもし $\mathcal{B}$ に含まれているならさらにその像 $T_\alpha^2(p)$ を考えることができる．このように T_α は $\mathcal{B}$ の上の部分的に定義された力学系を定めている．この力学系について（充填）Julia 集合の類似物を定義しよう．

Julia-Lavaurs 集合　集合 $K^+(F_0, T_\alpha)$ を $K^+(F_0)$ に属する点 p で次の条件 (i),(ii) のいずれかを満たすものの全体と定義する：

(i)　すべての $n \geq 0$ について $T_\alpha^n(p)$ が定義され $\mathcal{B}$ に属する．

(ii)　ある $n \geq 0$ があって，$k < n$ のとき $T_\alpha^k(p) \in \mathcal{B}$ かつ $T_\alpha^n(p) \in K^+(F) \setminus \mathcal{B}$.

言い換えれば，$K^+(F, T_\alpha)$ は次のような点 p からなる集合の補集合である：

ある $n \geq 0$ があって，$k < n$ のとき $T_\alpha^k(p) \in \mathcal{B}$ かつ $T_\alpha^n(p) \notin K^+(F_0)$.

命題 5　集合 $K^+(F, T_\alpha)$ は次の性質をもっている：

(1)　$K^+(F, T_\alpha) \setminus \mathcal{B} = K^+(F) \setminus \mathcal{B} = K^+(F, T_\alpha) \subset K^+(F)$.

(2)　$K^+(F, T_\alpha) = F(K^+(F, T_\alpha) = K^+(F, T_{\alpha+1})$. したがって $K^+(F, T_\alpha)$ は $\alpha \mod 1$ にのみ依存する．

(3)　$K^+(F, T_\alpha) \cap \mathcal{B}$ は $\{\varphi^\iota = \mathrm{const.}\}$ のファイバーからなる．

集合 $J^*(F_0, T_\alpha)$

$$J^*(F_0, T_\alpha) := \overline{\{T_\alpha \text{ の反発周期点}\}} \quad \text{（閉包）}$$

次の２つの定理は遷移写像に対する Julia-Lavaurs 集合が F_{ε_j} の（充填）Julia 集合で近似されることを意味している：

定理 6　定理 3 の形の写像族 F_ε について，$\{(\varepsilon_j, n_j)\}$ が α 列ならば

$$\liminf_{j\to\infty} J^*(F_{\varepsilon_j}) \supset J^*(F_0, T_\alpha).$$

定理 7　写像族 F_ε が一般 Hénon 写像に共役で，定理 3 の形のようにパラメータ付けされているとする．$\{\varepsilon_j\}$ が α 列ならば

$$\mathcal{B} \cap \limsup_{j\to\infty} K^+(F_{\varepsilon_j}) \subset K^+(F_0, T_\alpha)$$

定理 8 (1) $\mathcal{B} \cap J^*(F_0, T_\alpha)$ は空でない．

(2) 任意の $p \in \mathcal{B}$ に対して，$\alpha' \in \mathbb{C}$ を $p \notin K^+(F, T'_\alpha)$ となるようにとることができる．

系 適当な $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$ をとれば $\mathcal{B} \cap J^*(F_0, T_\alpha) \not\subset K^+(F_0, T\alpha')$ が成り立つ．

主定理（再掲） $X = J^*,\ J,\ J^+,\ K,\ K^+$ について，関数 $\varepsilon \mapsto X(F_\varepsilon)$ は $\varepsilon = 0$ において不連続である．一方 $X = J^-, K^-$ については，$\varepsilon \mapsto X(F_\varepsilon)$ は連続である．

(主定理の証明) $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$ を $\mathcal{B} \cap J^*(F_0, T_\alpha) \not\subset K^+(F_0, T'_\alpha)$ となるようにとる．前定理より

$$J^*(F_0, T_\alpha) \subset \liminf_{j\to\infty} J^*(F_{\varepsilon_j}) \subset \liminf_{j\to\infty} X(F_{\varepsilon_j})$$

$$K^+(F_0, T_\alpha) \supset \mathcal{B} \cap \limsup_{j\to\infty} K^+(F_{\varepsilon_j}) \supset \mathcal{B} \cap \limsup_{j\to\infty} X(F_{\varepsilon_j})$$

もし $X(F_\varepsilon)$ が $\varepsilon = 0$ で連続なら，$\mathcal{B} \cap J^*(F_0, T_\alpha) \subset K^+(F_0, T_\alpha)$ となる．しかし，これは前定理の系に反する．

参考文献

[BSU] E. Bedford, J .Smillie and T. Ueda, Parabolic Bifurcations in Complex Dimension 2, preprint (arXiv:1208.2577)

[BS1] E. Bedford and J. smillie, Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$ VII : Hyperbolicity and external rays, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 32 (1999) no. 4, 455-497.

[BS7] E. Bedford and J. smillie, Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$:

[D] Does a Jula set depend continuously on the polynomial? *complex dynamical systems* (Cincinnati, OH,1994), 94-138 Proc. Sympos. Appl. Math. 49, Amer Math Soc. Providence, RI, 1994.

[DH] A. Douady and J. H. Hubbard, Étude dynamique des polynômes complexes, Partie I. Publications Mathématiques d'Orsay, 84-2. Université de Paris-Sud,1984.

[DSZ] A. Douady and P. Sentenac and M. Zinsmeister, Implosion parabolique et dimension de Hausdorff. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325(1997), no. 7, 765-772.

[FM] S. Friedland and J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, Ergod. Th. and Dynam. Syst.,6 (1989), 67-99.

[FS] J. E. Fornæss and N. Sibony, Complex Hénon mappings in $\mathbb{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains. Duke Math. J. 65 (1992), no. 2, 345-380.

[HO] J. H. Hubbard and R. Oberste-Vorth, Hénon mappings in the complex domain I. The global topology of dynamical space. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 79 (1994), 5-46.

[L] P. Lavaurs, Systemes dynamiques holomorphiques: explosion de points périodiques, Thèse, Université Paris Sud,1989.

[Mi] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Annals of Math. Studies, 2006.

[MNTU] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics* (Cambridge Studiesin Advanced Math.), 2000.

[O1] R. Oudkerk, The parabolic implosion: Lavaurs maps and strong convergence for rational maps. *Value distribution theory and complex dynamics (Hong Kong,2000)* 79-105, Contemp. Math. 303, Amer. Math. Soc., Providence,RI,2002.

[O2] R. Oudkerk, Parabolic implosion for $f_0(z) = z + z^{\nu+1} + \mathcal{O}(z^{\nu+2})$, Thesis, U. of Warwick,1999.

[S] M. Shishikura, Bifurcation of parabolic fixed points,*The Mandelbrot set, theme and variations*, 325-363, London Math. Soc. Lecture note Ser.,274, Cambridge Univ.Press, Cambridge, 2000.

[U1] T. Ueda, Local structuere of analytic transformatons of two complex variables I, J. Math. Kyoto Univ. 26(1986) no. 2,233-261,

[U2] T. Ueda, Local structuere of analytic transformatons of two complex variables II, J. Math. Kyoto Univ.31 (1991) no. 3, 695-711.

[Z] M. Zinsmeister, Parabolic implosion in five days, Notes from a course given at Jyvaskyla, september, 1997.