

✿ 日本数学会

2016年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2016年3月

於 筑波大学

✿ 日本数学会

2016年度年会

函数論分科会
講演アブストラクト

2016年3月

於 筑波大学

函数論

3月16日(水) 第VIII会場

9:45~11:45

		(分)	頁
1	大野林太郎 (東北大情報) 須川敏幸 (東北大情報)	On a Fekete–Szegő-type problem of concave functions (15)	1
2	大野林太郎 (東北大情報) ^b 須川敏幸 (東北大情報)	On the second Hankel determinant of concave functions (10)	3
3	天野政紀 (東工大理工)	漸近的 Jenkins–Strebel 測地線を伴うタイヒミュラー空間の大域パラメータについて (15)	5
4	木坂正史 (京大人間環境) 川平友規 (東工大理工)	Julia sets appear quasi-conformally in the Mandelbrot set (15)	7
5	川平友規 (東工大理工)	From Cantor to Misiurewicz along parameter rays (15)	9
6	川平友規 (東工大理工)	The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics (15)	11
7	角大輝 (阪大理工)	Hausdorff dimension of the Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups and transversality condition (15)	13

14:15~15:05

8	伊藤健太郎 (名城大理工) 酒井良二 (名城大理工) 鈴木紀明 (名城大理工)	On weighted polynomial approximation by the de la Vallée Poussin mean (15)	15
9	菱川洋介 (岐阜大教育) 西尾昌治 (阪市大理工) 山田雅博 (岐阜大教育)	$L^{(\alpha)}$ -conjugates on parabolic Bloch spaces (15)	17
10	田中清喜 (阪市大数学研)	外部領域上の重調和 Bergman 核について (15)	19

15:25~16:25 特別講演

	イェーリッシュユヨハネス (島根大総合理工)	Hausdorff dimension of the Julia sets of non-hyperbolic polynomial semigroups and the method of inducing 21	
--	---------------------------	---	--

16:45~17:45 特別講演

	松本佳彦 (東工大理工)	有界強擬凸領域における完備アインシュタイン計量の変形 29	
--	--------------	---	--

3月17日(木) 第VIII会場

9:45~11:50

11	木村光一	Homogeneous pseudoconvex Reinhardt domains in \mathbf{C}^3 (15)	39
12	山盛厚伺 (名大多元数理)	Yet another proof of Poincaré’s theorem on the inequivalence of the unit ball and the polydisk (10)	41

13	本 田 竜 広 (広島工大工) I. Graham (Univ. of Toronto) 濱 田 英 隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.) Kwang Ho Shon (Pusan Nat. Univ.)	Radius of univalence and related problems in complex Hilbert spaces (15) 43
14	F. Bracci (Univ. di Roma“Tor Vergata”) I. Graham (Univ. of Toronto) 濱 田 英 隆 (九州産大工) G. Kohr (Babeş-Bolyai Univ.)	Variation of Loewner chains, extreme and support points in the class S^0 in several complex variables (15) 45
15	阿 部 幸 隆 (富山大理工)	トロイダル群上の等質直線束の断面のコホモロジー群 (15) 47
16	厚 地 淳 (慶大経済)	Nevanlinna type theorems for meromorphic functions on negatively curved Kähler manifolds (10) 49
17	足 立 真 訓 (東京理大理工) J. Brinkschulte (Univ. Leipzig)	複素射影平面内の Levi 平坦面の曲率評価 (15) 51
18	大 沢 健 夫 (名大多元数理) ^b	An optimal L^2 extension theorem on \mathbb{C}^n (10) 53
13:15~14:20		
19	田 島 慎 一 (筑波大数理物質) ^b 鍋 島 克 輔 (徳島大総合)	Limiting tangent spaces と local cohomology (15) 55
20	泊 昌 孝 (日大文理) ^b 都 丸 正 (群馬大医)	有理曲線を中心曲線とする 2 次元次数付き特異点の極大イデアルサイクルについて (15) 57
21	鍋 島 克 輔 (徳島大総合) 田 島 慎 一 (筑波大数理物質)	パラメータ付き対数的ベクトル場と Bruce–Roberts ミルナー数の計算 (15) 59
22	鍋 島 克 輔 (徳島大総合) 小 原 功 任 (金沢大理) 田 島 慎 一 (筑波大数理物質)	変形パラメータ付きホロノミー D -加群の計算法 —parametric Poincaré–Birkhoff–Witt 代数の利用— (15) 61

On a Fekete-Szegö-type problem of concave functions

Rintaro Ohno (Tohoku University)*1
 Toshiyuki Sugawa (Tohoku University)*2

1. Introduction

Let $\hat{\mathbb{C}}$ be the Riemann sphere and $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ the open unit disk in the complex plane \mathbb{C} . The class \mathcal{B}_p for $p \in \mathbb{D}$ is defined as the set of bounded holomorphic functions $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, which satisfy $\varphi(p) = p$. We will assume that $0 \leq p < 1$ without loss of generality. A function $\varphi \in \mathcal{B}_p$ can be expanded about the origin in the form

$$\varphi(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Note that $|c_n| \leq 1$ for each n . We define the coefficient body $\mathbf{X}_n(\mathcal{F})$ of order $n \geq 0$ for a class \mathcal{F} of analytic functions at the origin as the set

$$\{(c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \varphi(z) = c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n + O(z^{n+1}) \text{ for some } \varphi \in \mathcal{F}\}.$$

A meromorphic function f is said to be *concave*, if it maps \mathbb{D} conformally onto a concave domain, i.e. $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{D})$ is convex, and f is said to be in the class $\mathcal{C}o_p$, if it is concave and has a simple pole at p .

In particular, we know the following from [3].

Theorem 1. *A function is in the class $\mathcal{C}o_p$ if and only if there exists a holomorphic function $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ with $\varphi(p) = p$ such that*

$$f'(z) = \frac{p^2}{(z-p)^2(1-pz)^2} \exp \int_0^z \frac{-2\varphi(\zeta)}{1-\zeta\varphi(\zeta)} d\zeta.$$

2. Main Results

Obviously, $\mathbf{X}_0(\mathcal{B}_0) = \{0\}$ and $\mathbf{X}_1(\mathcal{B}_0) = \{(0, c) : |c| \leq 1\}$.

In the present talk, we describe $\mathbf{X}_n(\mathcal{B}_p)$ for $n = 0, 1$ and $0 < p < 1$.

Theorem 2. *Let $p \in (0, 1)$ and $P = \frac{1}{p} + p$. Then*

- (1) $\mathbf{X}_0(\mathcal{B}_p) = \{c_0 \in \mathbb{C} : |c_0 - P^{-1}| \leq P^{-1}\}$. *For a function $\varphi(z) = c_0 + c_1z + \cdots$ in \mathcal{B}_p , $c_0 \in \partial\mathbf{X}_0(\mathcal{B}_p)$ if and only if φ is an analytic automorphism of \mathbb{D} .*
- (2) $\mathbf{X}_1(\mathcal{B}_p) = \left\{ (c_0, c_1) \in \mathbb{C}^2 : |c_1 - (1 - Pc_0 + c_0^2)| \leq P \left[P^{-2} - |c_0 - P^{-1}|^2 \right] \right\}$. *A pair (c_0, c_1) is contained in $\mathbf{X}_1(\mathcal{B}_p)$ if and only if $c_0 = P^{-1}(1 - w_0)$ and $c_1 = P^{-2}[1 + (P^2 - 2)w_0 + w_0^2] + P^{-1}(1 - |w_0|^2)w_1$ for some $w_0, w_1 \in \mathbb{D}$. Moreover, for a function $\varphi(z) = c_0 + c_1z + \cdots$ in \mathcal{B}_p , $(c_0, c_1) \in \partial\mathbf{X}_1(\mathcal{B}_p)$ if and only if φ is either an analytic automorphism of \mathbb{D} or a Blaschke product of degree 2.*

The first author was supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows No (26 · 2855).

2000 Mathematics Subject Classification: 30C45.

Keywords: univalent functions, concave functions.

*1 e-mail: rohno@ims.is.tohoku.ac.jp

web: <http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~sugawa/rohno/>

*2 e-mail: sugawa@math.is.tohoku.ac.jp

web: <http://sugawa.cajpn.org/>

Additionally, we discuss the following result for a maximum value problem for a quadratic polynomial.

Proposition 3. *Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ and*

$$Q(a, b, c) = \max_{|z| \leq 1} (|a + bz + cz^2| + 1 - |z|^2).$$

When $ac \geq 0$,

$$Q(a, b, c) = \begin{cases} |a| + |b| + |c| & \text{if } |b| \geq 2(1 - |c|), \\ 1 + |a| + \frac{b^2}{4(1 - |c|)} & \text{if } |b| < 2(1 - |c|). \end{cases}$$

When $ac < 0$,

$$Q(a, b, c) = \begin{cases} 1 - |a| + \frac{b^2}{4(1 - |c|)} & \text{if } -4ac(c^{-2} - 1) \leq b^2 \text{ and } |b| < 2(1 - |c|), \\ 1 + |a| + \frac{b^2}{4(1 + |c|)} & \text{if } b^2 < \min\{4(1 + |c|)^2, -4ac(c^{-2} - 1)\}, \\ R(a, b, c) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where

$$R(a, b, c) = \begin{cases} |a| + |b| - |c| & \text{if } |c|(|b| + 4|a|) \leq |ab|, \\ -|a| + |b| + |c| & \text{if } |ab| \leq |c|(|b| - 4|a|), \\ (|c| + |a|)\sqrt{1 - \frac{b^2}{4ac}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finally, we will apply the introduced results to a Fekete-Szegő-type problem of concave functions.

Theorem 4. *Let $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C}o_p$ be a concave function with simple pole at $p \in (0, 1)$ and $\mu \in \mathbb{R}$. Then*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq H(p, \mu).$$

Details of the expression $H(p, \mu)$ will be presented during the talk.

References

- [1] F.G. Avkhadiev and K.-J. Wirths, *A proof of the Livingston conjecture*, Forum Math. **19** (2007), 149–157.
- [2] J. H. Choi, Y. C. Kim, and T. Sugawa, *A general approach to the Fekete-Szegő problem*, J. Math. Soc. Japan **59** (2007), 707–727.
- [3] R. Ohno, *Characterizations for concave functions and integral representations*, Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Tohoku University Press, Sendai (2013), 203–216.
- [4] R. Ohno and T. Sugawa, *Coefficient estimates of analytic endomorphisms of the unit disk fixing a point with applications to concave functions*, Preprint (2015), in preparation.

On the second Hankel determinant of concave functions

Rintaro Ohno (Tohoku University)*¹
 Toshiyuki Sugawa (Tohoku University)*²

1. Introduction

Let $\hat{\mathbb{C}}$ be the Riemann sphere and $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ the open unit disk in the complex plane \mathbb{C} . A meromorphic function f is said to be *concave*, if it is univalent and $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(\mathbb{D})$ is convex. For $p \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ f is said to be in the class $\mathcal{C}o_p$, if it is concave, has a simple pole at p and is normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Without loss of generality we assume that $p \in (0, 1)$.

For $a \in \mathbb{D}$, the Möbius transformation

$$T_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

is an analytic involution of \mathbb{D} interchanging 0 and a . Furthermore, for $\zeta \in \bar{\mathbb{D}}$ we define

$$\begin{aligned} F_\zeta(z) &= \frac{z - T_p(p\zeta)z^2}{(1 - z/p)(1 - pz)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - p^{2n}\zeta}{p^{n-1}(1 - p^2\zeta)} z^n =: \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) z^n. \end{aligned}$$

Avkhadiev and Wirths proved the following in [1].

Theorem 1. *Let $p \in (0, 1)$ and $n \geq 2$. Then*

$$\{a_n(f) : f \in \mathcal{C}o_p\} = A_n(\bar{\mathbb{D}}) = \left\{ w : \left| w - \frac{1 - p^{2n+2}}{p^{n-1}(1 - p^4)} \right| \leq \frac{p^2 - p^{2n}}{p^{n-1}(1 - p^4)} \right\}.$$

Moreover, for $f \in \mathcal{C}o_p$, $a_n(f) \in \partial A_n(\bar{\mathbb{D}})$ if and only if $f = F_\zeta$ for some $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

In the present talk, we consider the second Hankel determinant of order 2 for $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$, which is defined by

$$H(f) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2a_4 - a_3^2.$$

Especially, we will take a closer look at the variability region $H(\mathcal{C}o_p) = \{H(f) : f \in \mathcal{C}o_p\}$ for $p \in (0, 1)$.

The first author was supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows No (26 · 2855).

2000 Mathematics Subject Classification: 30C45.

Keywords: univalent functions, concave functions.

*¹e-mail: rohno@ims.is.tohoku.ac.jp

web: <http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~sugawa/rohno/>

*²e-mail: sugawa@math.is.tohoku.ac.jp

web: <http://sugawa.cajpn.org/>

2. Main Results

A straightforward computation yields

$$H(F_\zeta) = A_2(\zeta)A_4(\zeta) - A_3(\zeta)^2 = -\frac{(1-p^2)^2\zeta}{(1-p^2\zeta)^2} = -\frac{(1-p^2)^2}{p^2}K(p^2\zeta),$$

where

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

is the Koebe function. Set

$$\Omega_p = \{H(F_\zeta) : |\zeta| \leq 1\} = -\frac{(1-p^2)^2}{p^2}K(p^2\mathbb{D}).$$

This set has the following property.

Proposition 2. $\Omega_p \subset \Omega_q$ for $0 < q < p < 1$ and

$$\bigcup_{0 < p < 1} \Omega_p = \mathbb{D} \cup \{-1\} \quad \text{and} \quad \bigcap_{0 < p < 1} \Omega_p = \{-(1+z)^2/4 : |z| \leq 1\}.$$

Here, the set $\{-(1+z)^2/4 : |z| \leq 1\}$ is a closed Jordan domain, bounded by a cardioid with an inward-pointing cusp at the origin.

By the above observations, we have $\Omega_p \subset H(\mathcal{C}o_p)$. In view of the coefficient regions of a_n for $\mathcal{C}o_p$, one might suspect that $H(\mathcal{C}o_p) = \Omega_p$ for $p \in (0, 1)$ and, in particular, $H(\mathcal{C}o_p) \subset \mathbb{D}$. However, this not the case. We set

$$M(p) = \sup\{|H(f)| : f \in \mathcal{C}o_p\}.$$

Theorem 3. Let $p \in (0, 1)$. Then $M(p) > 1$. Moreover,

$$\frac{1}{3p} < M(p) < \frac{1}{3p} + \frac{2}{3}.$$

References

- [1] F.G. Avkhadiiev and K.-J. Wirths, *A proof of the Livingston conjecture*, Forum Math. **19** (2007), 149–157.
- [2] A. F. Beardon and D. Minda, *A multi-point Schwarz-Pick Lemma*, J. Anal. Math. **92** (2004), 81–104.
- [3] K. H. Cho, S.-A Kim, and T. Sugawa, *On a multi-point Schwarz-Pick lemma*, Comput. Methods Funct. Theory **12** (2012), 483–499.
- [4] W. K. Hayman, *On the second Hankel determinant of mean univalent functions*, Proc. London Math. Soc. (3) **18** (1968), 77–94.
- [5] R. Ohno, *Characterizations for concave functions and integral representations*, Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, Tohoku University Press, Sendai (2013), 203–216.
- [6] R. Ohno and T. Sugawa, *Coefficient estimates of analytic endomorphisms of the unit disk fixing a point with applications to concave functions*, Preprint (2015), in preparation.
- [7] R. Ohno and T. Sugawa, *On the second Hankel determinant of concave functions*, Preprint (2015), submitted.
- [8] Ch. Pommerenke, *On the coefficients and Hankel determinants of univalent functions*, J. London Math. Soc. **41** (1966), 111–122.

漸近的 Jenkins-Strebel 測地線を伴うタイヒミュラー空間の大域パラメータについて

天野 政紀 (東京工業大学)*

1. はじめに

タイヒミュラー空間に、互いに漸近する Jenkins-Strebel 測地線を利用した大域パラメータを入れることが出来る。その導入法と、パラメータのいくつかの性質を紹介する。

2. 定義

$\Sigma = \Sigma_{g,n}$ を種数 g で、 n 点穴あきのリーマン面かつ $3g - 3 + n > 0$ を満たすものとし、 $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Sigma)$ をその Teichmüller 空間とする。 $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ を Σ 上の単純閉曲線で、互いに交わらず、ホモトピックでもなく、それぞれが一点や Σ の穴ともホモトピックでないものとする。 S_+^{k-1} を $(k-1)$ 次元球で、全成分が正の部分集合とする。 $[S^*, f^*] \in \mathcal{T}$ と $(m_1, \dots, m_k) \in S_+^{k-1}$ を固定すると、ある $\alpha^* > 0$ が存在し、Jenkins-Strebel 測地線 r で、 $[S^*, f^*]$ を始点とし、向きは $f^*(\Gamma)$ に対応するシリンダーのモジュラスが $(\alpha^* m_1, \dots, \alpha^* m_k)$ で表せる Jenkins-Strebel 微分で与えられるものが存在する ([Str84])。 r の終点はノード付きリーマン面 S_c に対応する。この S_c 上に定まる、各ノードで 2 位の極を持つ二次微分の $1/z^2$ の係数を正規化して $(a_1^*, \dots, a_k^*) \in S_+^{k-1}$ とする。 $\partial_{\mathcal{T}}\mathcal{T} = \{[X, g] \mid g: S_c \rightarrow X \text{ は擬等角写像}\}$ と定め、これを Σ の拡大タイヒミュラー空間 $\hat{\mathcal{T}}$ の境界 $\hat{\mathcal{T}} - \mathcal{T}$ の部分集合とみなす。

次に集合 $\partial_{\mathcal{T}}\mathcal{T} \times S_+^{k-1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ からタイヒミュラー空間 \mathcal{T} への同相写像を構成する。まず $[X, g] \in \partial_{\mathcal{T}}\mathcal{T}$ のノード付きリーマン面 X は k 個のノードを持つ。 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in S_+^{k-1}$ に対し、各ノードで $1/z^2$ の係数が a_j^2 となるような、ノードで 2 位の極を持つ 2 次微分 φ を作る ([Str84])。 φ から定まる critical graph から X を各ノードを中心とした円板に分解できる。この円板の中から同じ中心で半径を短くした小円板を切り抜き、貼り合わせることで普通のリーマン面が作れる。このリーマン面は、 $[X, g]$ に収束する Jenkins-Strebel 測地線上に存在する。各ノードでの貼り合わせの際のねじりの角度を $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ とし、最後の $s \in \mathbb{R}$ は小円板の半径、つまり J-S 測地線の時間パラメータに対応している。この定理は [MM75] の結果からヒントを得たものである。

3. 主結果

定理 1. 次の条件を満たす同相写像 $\hat{\Phi}: \partial_{\mathcal{T}}\mathcal{T} \times S_+^{k-1} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$ が存在する；

1. $\hat{\Phi}([X, g], a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_k, s) = [R, h]$ とすると、任意の $j = 1, \dots, k$ に対し次の等式が成立する。

$$\hat{\Phi}([X, g], a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_j + 2\pi, \dots, t_k, s) = \tau_j([R, h]),$$

ここで、 τ_j は γ_j での位数 1 の Dehn twist である (向きはリーマン面から定まる自然なものを使用している)。

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
e-mail: amano.m.ab@m.titech.ac.jp

2. $[X, g]$ を $\partial_{\Gamma}\mathcal{T}$ 上の点とする. 任意の $\mathbf{a} \in S_+^{k-1}$ と $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ に対し, 集合

$$r_{\mathbf{a}, \mathbf{t}} = \{\hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s) \mid s \geq 0\} \subset \mathcal{T}$$

は一つの Jenkins-Strebel 半測地線で, Γ から定まる曲線族に対応するシリンダー分解のモジュラスはそれぞれ (m_1, \dots, m_k) の正の実数倍となり, $s \rightarrow +\infty$ とすることで $[X, g]$ に収束する. さらに, $\{r_{\mathbf{a}, \mathbf{t}}\}_{\mathbf{a}, \mathbf{t}}$ は互いに漸近的となる ([Ama14a]).

系 2. 任意の $[X, g], [X', g'] \in \partial_{\Gamma}\mathcal{T}$, $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in S_+^{k-1}$, $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathbb{R}^k$ に対し,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} d_{\mathcal{T}}(\hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s), \hat{\Phi}([X', g'], \mathbf{a}', \mathbf{t}', s + \lambda)) = \max\{d([X, g], [X', g']), |\lambda|\}$$

ここで d は $\hat{\mathcal{T}} - \mathcal{T}$ 上で同相なノード付リーマン面に対応する二点に定められる距離関数である.

各座標が変化するとタイヒミュラー距離がどの程度変化するかについて, 次の命題がある. (しかし $[X, g]$ が変化した時の距離はまだ未評価である.)

命題 3. 以下の式が成り立つ;

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{T}}(\hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s), \hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s')) &= |s - s'|, \\ d_{\mathcal{T}}(\hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s), \hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}', s)) &\leq \frac{1}{2} \log \max_j K(\tau_{t_j - t'_j}), \end{aligned}$$

ここで, $\tau_{t_j - t'_j}$ は γ_j に対応する $\hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s), \hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}', s)$ の円板上での角度 $t_j - t'_j$ の *twist* に対応する擬等角写像である.

さらに, ある定数 $c(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ が存在し, 任意の $s_0 > c(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ を固定すると, 任意の $s > s_0$ に対し, ある $C(\mathbf{a}, \mathbf{a}', s_0)$ が不等式

$$d_{\mathcal{T}}(\hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s), \hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}', \mathbf{t}, s)) \leq C(\mathbf{a}, \mathbf{a}', s_0)$$

を満たすように出来る. ちなみに $\lim_{s_0 \rightarrow \infty} C(\mathbf{a}, \mathbf{a}', s_0) = 0$ も成り立たせることができる. 下からの評価は次のようになる;

$$d_{\mathcal{T}}(\hat{\Phi}([X, g], \mathbf{a}, \mathbf{t}, s), \hat{\Phi}([X', g'], \mathbf{a}', \mathbf{t}', s')) \geq |s - s'| - \frac{1}{2} \log k.$$

ただし, この式は s, s' がある程度離れていなければ意味がない. ($\frac{1}{2} \log(3g - 3 + n)$ 以上で十分である)

参考文献

- [Ama14a] Masanori Amano. On behavior of pairs of Teichmüller geodesic rays. *Conform. Geom. Dyn.*, 18:8-30, 2014.
- [MM75] Albert Marden and Howard Masur. A foliation of Teichmüller space by twist invariant disks. *Math. Scand.*, 36(2):211-228, 1975.
- [Str84] Kurt Strebel. Quadratic differentials, volume 5 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Julia sets appear quasi-conformally in the Mandelbrot set

木坂 正史 (京都大学 大学院 人間・環境学研究科)*¹

川平 友規 (東京工業大学 大学院 理工学研究科)*²

2次多項式 $P_c(z) := z^2 + c$ の充填 Julia 集合 K_c , Julia 集合 J_c は次で定義される:

$$K_c := \{z \in \mathbb{C} \mid P_c^n(z) \not\rightarrow \infty\}, \quad J_c := \partial K_c$$

またパラメーター空間の部分集合として, 次の Mandelbrot 集合が定義される:

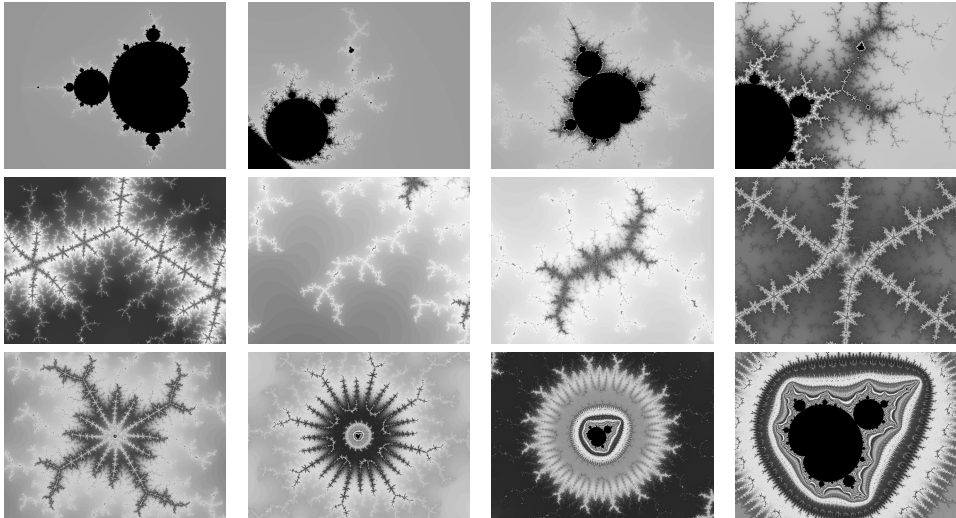
$$M := \{c \mid J_c : \text{連結}\} = \{c \mid \{P_c^n(0)\}_{n=0}^\infty : \text{有界}\}$$

M の境界付近を拡大していくと小さな Mandelbrot 集合がたくさん現れるが, それは次のようにして得られることが知られている: $s_0 \neq 0$ を超吸引パラメーター (即ち, P_{s_0} が超吸引周期点を持つ. その周期を s) とすると s_0 を含むような小さな Mandelbrot 集合

$$M_{s_0} := s_0 \perp M : M \text{ の } s_0 \text{ での tuning}$$

が存在する ($c_1 = s_0 \perp c_0 \in M_{s_0}$ は M の「 c_0 相当の点」で, $P_{c_1}^s \sim P_{c_0}$ が成立). M_{s_0} が”カージオイドを持つ”とき **primitive**, 持たないとき **satellite** と呼ぶ.

前回の学会では M に関する次のような現象が見られ, それを定式化して証明することが出来ることを報告した: c_0 を Misiurewicz または放物型パラメーター (即ち, P_{c_0} で臨界点 0 が前周期的になる, または P_{c_0} が放物型周期点を持つようなもの) とする. 小さい Mandelbrot 集合 M_{s_0} で satellite なものを任意に 1 つとり, M_{s_0} 内の c_0 相当のパラメーター $s_0 \perp c_0 \in M_{s_0}$ の近傍を拡大すると $J_{c_0+\eta}$ ($\exists \eta \in \mathbb{C}, |\eta| : \text{十分小}, c_0 + \eta \notin M$) に似た図形が見える. 更にこの図形の中央部を拡大していくとこの図形の z^2 による逆像, 更にその逆像 \dots , という入れ子構造が見え, その果てに更に小さい Mandelbrot 集合が現れる (注: 図では c_0 は Misiurewicz).

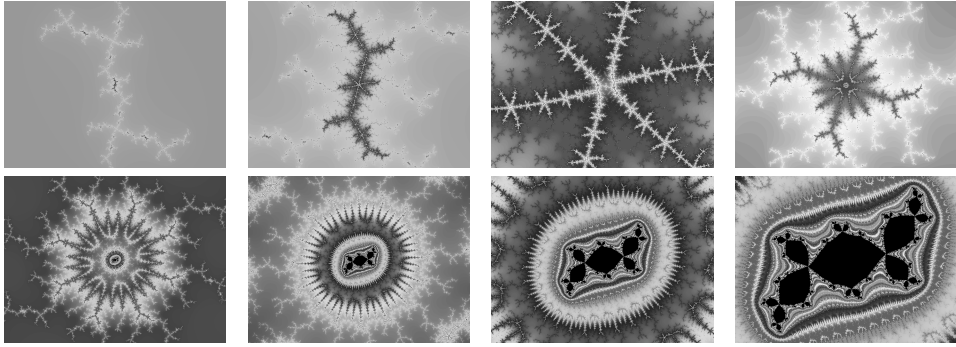


今回は M_{s_0} が satellite でも OK であることがわかった (Theorem A).

また, 上記のように現れる更に小さい Mandelbrot 集合を $M_{s'_0}$ とし, $M_{s'_0}$ からパラメータをとってその充填 Julia 集合を描き, その中央部を拡大していくと次のようになる (Theorem B):

*¹ e-mail: kisaka@math.h.kyoto-u.ac.jp

*² e-mail: kawahira@math.titech.ac.jp



図では $c \in M$ を吸引3周期点を持つパラメーター (rabbitと呼ばれる充填 Julia 集合をもつもの) とし, $M_{s'_0} = s'_0 \perp M$ の c 相当の点 $s'_0 \perp c$ の充填 Julia 集合 $K_{s'_0 \perp c}$ を描いた. 拡大の過程で見える図形は先に見た小さい Mandelbrot 集合の拡大の過程で見えるものと画面上では区別がつかない.

以上のことを定式化して述べると次のようになる: 以下では c_0 を任意の Misiurewicz または放物型パラメーター, $s_0 \neq 0$ を任意の超吸引パラメーターとする.

Definition 1: $c' \notin M$ とする (注: このとき $J_{c'}$ は Cantor 集合となる).

- (1) $R > 1$ で $J_{c'} \subset A_{\frac{1}{\sqrt{R}}, \sqrt{R}} := \left\{ z \mid \frac{1}{\sqrt{R}} < |z| < \sqrt{R} \right\}$ なるものをとる.
- (2) $\Gamma_0(c') := J_{c'} \times R^{\frac{3}{2}} \subset A_{R, R^2}$, $\Gamma_m(c') := z^{2^m}$ による $\Gamma_0(c')$ の逆像
(注: $\Gamma_m(c')$ は互いに素 ($\cdot: \Gamma_0(c') \subset A_{R, R^2}$, $\Gamma_1(c') \subset A_{\sqrt{R}, R}$, $\Gamma_2(c') \subset A_{\sqrt[4]{R}, \sqrt{R}}$, \dots)
- (3) $c \in M$, $\varphi_c: \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ を Böttcher 座標, $\varphi_M: \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ を Riemann 写像として

$$\mathcal{K}(c, c') := K_c \cup \varphi_c^{-1}(\cup_{m=0}^{\infty} \Gamma_m(c')), \quad \mathcal{M}(c') := M \cup \varphi_M^{-1}(\cup_{m=0}^{\infty} \Gamma_m(c'))$$

Definition 2: $X, Y \subset \mathbb{C}$ とする. X が Y 内に擬等角に現れるとは, 擬等角写像 $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ で $\varphi(X) \subset Y$, $\varphi(\partial X) \subset \partial Y$ なるものが存在することをいう.

Theorem A: 任意の $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ に対し, ある $\eta \in \mathbb{C}$ で $c_0 + \eta \in D(c_0, \varepsilon) \setminus M$ なるものが存在し, $\mathcal{M}(c_0 + \eta)$ が M に擬等角に現れる. 更に詳しくは $M \cap D(s_0 \perp c_0, \varepsilon')$ に現れる.

Theorem B: Theorem A の $\mathcal{M}(c_0 + \eta)$ の qc-image として現れる小さい Mandelbrot 集合を $M_{s'_0}$ とすると次が成り立つ: 任意の $c \in M$ に対して $\mathcal{K}(c, c_0 + \eta)$ が $K_{s'_0 \perp c}$ に擬等角に現れる.

Theorem C: 任意の Misiurewicz パラメーター c_0 に対して超吸引パラメーター s_0 を適当にとると Theorem A の擬等角写像の歪曲度は 1 にいくらでも近いものとれる.

参考文献

- [D-BDS] A. Douady, X. Buff, R. Devaney and P. Sentenac, Baby Mandelbrot sets are born in cauliflowers, In *The Mandelbrot set, theme and variations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), 19–36.
- [DH] A. Douady and J. Hubbard, On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **18**, (1985), 287–343.
- [M] C.T. McMullen, The Mandelbrot set is universal, In *The Mandelbrot set, theme and variations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **274**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2000), 1–17.

From Cantor to Misiurewicz along parameter rays

川平 友規 (東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻)*

概 要

We consider degeneration process from a Cantor Julia set to a Misiurewicz Julia set in the family of quadratic maps. We give an estimate of the speed of the holomorphic motion when the parameter moves along a pre-periodic parameter ray of the Mandelbrot set. Then we will conclude that such a particular motion dynamically converges. (jointly with Yi-Chiuan Chen at Academia Sinica.)

Quadratic Maps/Julia sets/Mandelbrot set. Let $f_c(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$) be a quadratic polynomial acting on the plane with only one critical point at $z = 0$. We define the *Julia set* J_c by the closure of the repelling periodic points.

The *Mandelbrot set* \mathbb{M} is the set of c such that the orbit $\{f_c^n(0)\}_{n \geq 0}$ is bounded. A theorem by Fatou and Julia yields the following dichotomy: For $c \in \mathbb{C}$, the Julia set J_c is connected if and only if $c \in \mathbb{M}$, and otherwise i.e., if $c \notin \mathbb{M}$, $f_c^n(0) \rightarrow \infty$ and J_c is a Cantor set.

Parameter Rays By the theory of Douady and Hubbard, there exists a conformal map $\Phi : \mathbb{C} - \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$ such that $\Phi(c)/c \rightarrow 1$ ($c \rightarrow \infty$). A *parameter ray of angle* $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ is defined by

$$R(\theta) := \{\Phi^{-1}(re^{i\theta}) : 1 < r < \infty\}.$$

Misiurewicz Parameter. Another intriguing fact by Douady and Hubbard is, if θ is of the form $\frac{2m+1}{2n}$, the limit $\hat{c} := \lim_{r \searrow 1} \Phi^{-1}(re^{i\theta}) \in \partial\mathbb{M}$ exists. We call the parameter “the landing point” of $R(\theta)$. Moreover, it is known that for such a parameter \hat{c} , $\{f_{\hat{c}}^n(0)\}$ eventually lands on a repelling cycle of $f_{\hat{c}}$. We say such a parameter \hat{c} a *Misiurewicz parameter*. (Conversely, any Misiurewicz parameter is the landing point of a parameter ray of angle [odd/even]). For example $\hat{c} = -2$ and i are Misiurewicz that are the landing points of the parameter rays $R(1/2)$ and $R(1/6)$, respectively.

How the Julia Sets Move? When $c \notin \mathbb{M}$, J_c moves holomorphically. More precisely, if we set $\mathbb{X} := \mathbb{C} - \mathbb{M} \cup [1/4, \infty)$, and choose any $c_0 \in \mathbb{X}$, there exists a map $H : J_{c_0} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ such that

- (1) $H(z, c_0) = z$ for any $z \in J_{c_0}$;
- (2) For any $c \in \mathbb{X}$, $J_{c_0} \ni z \mapsto H(z, c)$ is injective.
- (3) For any $z_0 \in J_{c_0}$, $\mathbb{X} \ni c \mapsto H(z_0, c)$ is holomorphic

partially supported by JSPS.

* 〒152-8551 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
 e-mail: kawahira@math.titech.ac.jp
 web: <http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira>

By the λ -Lemma, the map in (2) is quasiconformal.

Motion along a Parameter Ray Now fix $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} - \{0\}$, and set $c_0 := \Phi^{-1}(2e^{i\theta})$. When one choose any $z_0 \in J_{c_0}$, then $c \mapsto z(c) := H(z_0, c)$ is a holomorphic function on \mathbb{X} . Consider the motion of $z(c)$ with along $R(\theta)$: i.e., $c = c(r) := \Phi^{-1}(re^{i\theta})$ and we let $r \searrow 1$.

In this setting, we have:

Theorem 1 (Chen-K) *Suppose that \hat{c} is Misiurewicz and the parameter ray $R(\theta)$ lands on \hat{c} . If $c \rightarrow \hat{c}$ with $c \in R(\theta)$, we have a uniform estimate*

$$\left| \frac{d}{dc} z(c) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{|c - \hat{c}|}} \right)$$

that is independent of the choice of z_0 .

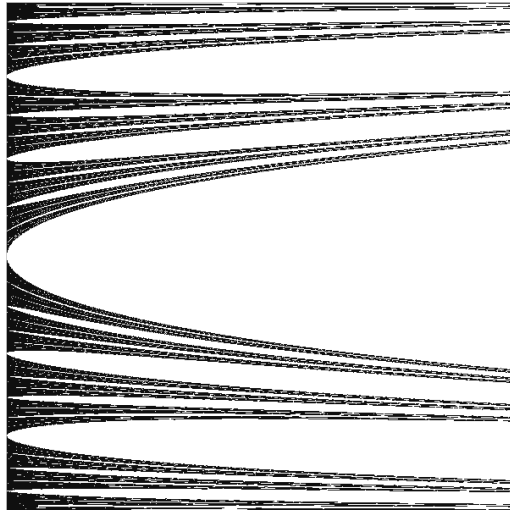
Corollary 2 *For any initial point $z_0 \in J_{c_0}$, the integral*

$$z(\hat{c}) := z(c_0) + \lim_{\delta \searrow 0} \int_2^{1+\delta} \frac{dz}{dc} \cdot \frac{dc(r)}{dr} dr$$

exists.

This means that the whole dynamics on the Julia set converges to that of Misiurewicz parameter. The proof is based on a detailed estimate of the following formula:

$$\frac{d}{dc} z(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Df^n(z(c))}.$$



⊠ 1: The motion of the Julia sets along $R(1/2)$ with $\hat{c} = -2$.

The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics

川平 友規 (東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻)*

概 要

We give an interpretation of the Riemann hypothesis in terms of complex and topological dynamics. For example, the Riemann hypothesis is affirmative and all zeros of the Riemann zeta are simple if and only if a certain meromorphic function has no attracting fixed point. To obtain this, we use holomorphic index (residue fixed point index), which characterizes local properties of fixed points in complex dynamics.

The Riemann zeta function. For $s \in \mathbb{C}$, the series

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

converges if $\operatorname{Re} s > 1$. Indeed, $\zeta(s)$ is analytic on the half-plane $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$ and by analytic continuation the function turns out to be a meromorphic function (a holomorphic map) $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ with only one pole at $s = 1$, which is simple. This is *the Riemann zeta function*.

It is known that $\zeta(s) = 0$ when $s = -2, -4, -6, \dots$. These zeros are called *trivial zeros* of the Riemann zeta function. We say the other zeros are *non-trivial*.

The *Riemann hypothesis*, which is the most important conjecture on the Riemann zeta function, concerns the alignment of the non-trivial zeros of ζ :

The Riemann hypothesis. *All non-trivial zeros lie on the vertical line $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = 1/2\}$.*

The line $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s = 1/2\}$ is called *the critical line*. (It is numerically verified that first 10^{13} zeros (from below) lie on the critical line.)

It is also conjectured that every zero of ζ is simple. We refer to this conjecture as *the simplicity hypothesis* after some literature.

The aim of this talk is to translate the Riemann hypothesis in terms of complex and topological dynamical systems. More precisely, we translate the locations of the non-trivial zeros into some dynamical properties of the fixed points of a meromorphic function of the form

$$\nu_g(z) = z - \frac{g(z)}{z g'(z)},$$

partially supported by JSPS.

* 〒152-8551 東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
 e-mail: kawahira@math.titech.ac.jp
 web: <http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira>

where g is a meromorphic function on \mathbb{C} that shares (non-trivial) zeros with ζ . Indeed, we may set $g = \zeta$ or the *xi function*

$$\xi(z) := \frac{1}{2}z(1-z)\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z),$$

etc. The function $\nu_g(z)$ is carefully chosen so that

- If $g(\alpha) = 0$ then $\nu_g(\alpha) = \alpha$; and
- The *holomorphic index* (or *residue fixed point index*, see [Mi]) of ν_g at α is α itself when α is a simple zero of $g(z)$.

For a given meromorphic function $g : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, we say a fixed point α of g is *attracting* if $|g'(\alpha)| < 1$, *indifferent* if $|g'(\alpha)| = 1$, and *repelling* if $|g'(\alpha)| > 1$. Here are some possible translations of the Riemann hypothesis (plus the simplicity hypothesis) by ν_ζ :

Theorem 1 ([Ka]) *The following conditions are equivalent:*

- (a) *The Riemann hypothesis is affirmative and every non-trivial zero of ζ is simple.*
- (b) *Every non-trivial zero of ζ is an indifferent fixed point of the meromorphic function*

$$\nu_\zeta(z) := z - \frac{\zeta(z)}{z\zeta'(z)}.$$
- (c) *The meromorphic function ν_ζ above has no attracting fixed point.*
- (d) *There is no topological disk D with $\overline{\nu_\zeta(D)} \subset D$.*

Note that (d) is a topological property of the map ν_ζ , in contrast to the analytic (or geometric) nature of (a). We should also remark that we can apply the method of this note to the L -functions without extra effort.

参考文献

- [Ka] T. Kawahira. The Riemann hypothesis and holomorphic index in complex dynamics. *Preprint (available at my web page)*.
- [Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable. (3rd edition)*. Ann. of Math. Studies **160**, Princeton University Press, 2006.

**Hausdorff Dimension of the Julia Sets
of Postcritically Bounded Polynomial Semigroups
and Transversality Condition**

角 大輝 (Sumi, Hiroki) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻

E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/>

In this talk, we consider the dynamics of **polynomial semigroups** (i.e., semigroups of non-constant polynomial maps) on the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$. This topic is deeply related to random dynamical systems of polynomial maps on $\hat{\mathbb{C}}$ ([S11,S15]).

- Definition 1.**
1. We denote by $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ the **Riemann sphere** endowed with the spherical distance.
 2. We set $\mathcal{P} := \{h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid h \text{ is a polynomial, } \deg(h) \geq 2\}$. (For each non-constant polynomial h , we set $h(\infty) := \infty$.)
 3. For each $n \in \mathbb{N}$ with $n \geq 2$, we set $\mathcal{P}_n := \{h \in \mathcal{P} \mid \deg(h) = n\} \cong (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n$. We endow \mathcal{P} with a topology by $\mathcal{P}_n \cong (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n (\forall n \geq 2)$, $\mathcal{P} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{P}_n$ (disjoint union).
 4. For each $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2$, we set $\langle f_1, f_2 \rangle := \{f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1} \mid n \in \mathbb{N}, \omega_1, \dots, \omega_n \in \{1, 2\}\}$. This is a semigroup whose semigroup operation is the composition of maps.
 5. For each $(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2$, we set $F(f_1, f_2) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists \text{ nbd } U \text{ of } z \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \text{ s.t. } \{h|_U : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{h \in \langle f_1, f_2 \rangle} \text{ is equicontinuous on } U\}$. This is called the **Fatou set** of $\langle f_1, f_2 \rangle$ ([HM96]). Also, we set $J(f_1, f_2) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f_1, f_2)$. This is called the **Julia set** of $\langle f_1, f_2 \rangle$.
Remark: $J(f_1, f_2) = f_1^{-1}(J(f_1, f_2)) \cup f_2^{-1}(J(f_1, f_2))$.
Question: $\dim_H(J(f_1, f_2)) = ?$. Here, \dim_H denotes the Hausdorff dimension with respect to the Euclidean distance.
 6. For each $(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2$, we set $P(f_1, f_2) := \overline{\bigcup_{h \in \langle f_1, f_2 \rangle \cup \{Id\}} h(\cup_{i=1}^2 \{\text{critical values of } f_i : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\})}$ where the closure is taken in $\hat{\mathbb{C}}$. This is called the **postcritical set** of $\langle f_1, f_2 \rangle$.

Definition 2. We use the following notations.

1. $\mathcal{B} := \{(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2 \mid P(f_1, f_2) \setminus \{\infty\} \text{ is bounded in } \mathbb{C}\}$.
2. $\mathcal{C} := \{(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2 \mid J(f_1, f_2) \text{ is connected}\}$.
3. $\mathcal{D} := \{(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2 \mid J(f_1, f_2) \text{ is disconnected}\}$.
4. $\mathcal{H} := \{(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2 \mid \langle f_1, f_2 \rangle \text{ is hyperbolic, i.e., } P(f_1, f_2) \subset F(f_1, f_2)\}$.
5. $\mathcal{I} := \{(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2 \mid J(f_1) \cap J(f_2) \neq \emptyset\}$.

Lemma 3. *The sets $\mathcal{H}, \mathcal{B} \cap \mathcal{H}, \mathcal{D} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}$ are non-empty and open in \mathcal{P}^2 . Thus $(\partial \mathcal{C}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}$.*

Definition 4. Let $(f_1, f_2) \in \mathcal{P}^2$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$. We set

$t(f_1, f_2, z) := \inf\{t \geq 0 \mid \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{1, 2\}^n} \sum_{y \in (f_{\omega_1} \cdots f_{\omega_n})^{-1}(z)} \|D(f_{\omega_1} \cdots f_{\omega_n})_z\|^{-t} < \infty\}$, where $\|\cdot\|$ denotes the norm of the derivative with respect to the spherical metric, $0^{-t} := \infty$, and we set $\inf \emptyset = \infty$. Also, we set $t(f_1, f_2) := \inf\{t(f_1, f_2, z) \mid z \in \hat{\mathbb{C}}\} \in [0, \infty]$.

Remark: If $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}$, then $t(f_1, f_2)$ is equal to the **Bowen parameter** (unique zero of the **pressure function** of the skew product associated with (f_1, f_2)). See [S05].

Theorem 5 ([S05]). *Let $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}$. Then $\dim_H(J(f_1, f_2)) \leq t(f_1, f_2)$. Moreover, if, in addition to the assumption, (f_1, f_2) satisfies the **open set condition**, i.e., there exists a non-empty open subset U of $\hat{\mathbb{C}}$ such that $\cup_{i=1}^2 f_i^{-1}(U) \subset U$ and $f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(U) = \emptyset$, then $\dim_H(J(f_1, f_2)) = t(f_1, f_2)$.*

Theorem 6 ([SU10]). $(f_1, f_2) \in \mathcal{H} \mapsto t(f_1, f_2)$ is real-analytic and plurisubharmonic on \mathcal{H} .

Theorem 7 ([S15]). *Let $(f_1, f_2) \in (\mathcal{D} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}) \cup ((\partial\mathcal{C}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}) \setminus \mathcal{I}$. Then (f_1, f_2) satisfies the open set condition and $\dim_H(J(f_1, f_2)) = t(f_1, f_2) < 2$.*

Theorem 8 (Main Theorem). *Let $(f_1, f_2) \in ((\partial\mathcal{C}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}) \setminus \mathcal{I}$. Let $d_i := \deg(f_i)$, $i = 1, 2$. Then there exist an open neighborhood V of $(f_1, f_2) \in \mathcal{P}_{d_1} \times \mathcal{P}_{d_2} \cong \prod_{i=1}^2 ((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{d_i})$ and a subset A of V with $\dim_H(V \setminus A) < \dim_H(V)$ (thus $\text{Leb}(V \setminus A) = 0$, where Leb denotes the Lebesgue measure on V) such that for each $(g_1, g_2) \in A$, we have*

$$1 < \frac{\log(d_1 + d_2)}{\sum_{i=1}^2 \frac{d_i}{d_1 + d_2} \log d_i} < \dim_H(J(g_1, g_2)) = t(g_1, g_2) < 2. \quad (\text{The equality is the main result.})$$

Remark 9 (and Theorems, [S15]). 1. For each hyperbolic $f_1 \in \mathcal{P}$ and for each $d \in \mathbb{N}$ with $d \geq 2$, $(\deg(f_1), d) \neq (2, 2)$, there exists an $f_2 \in \mathcal{P}_d$ such that $(f_1, f_2) \in ((\partial\mathcal{C}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}) \setminus \mathcal{I}$.

2. We have $\text{int}(\overline{\mathcal{C}}) \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H} = \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{H}$, where int denotes the set of interior points with respect to the topology in \mathcal{P}^2 . Thus, regarding the set A in Theorem 8, we have $A \cap \text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Note that for each $(g_1, g_2) \in A \cap \text{int}(\mathcal{C})$, we have $\cap_{i=1}^2 g_i^{-1}(J(g_1, g_2)) \neq \emptyset$, and we do not know whether (g_1, g_2) satisfies the open set condition or not. (Maybe not.)

Idea of proof of Th. 8: We show that there exists an open conn. nbd V of (f_1, f_2) such that V satisfies the “**transversality condition**” ([SU13]) except a proper holo. subvariety X of V .

References:

- [HM96] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The dynamics of semigroups of rational functions. I.*, Proc. London Math. Soc. (3) 73 (1996), no. 2, 358-384.
- [JS15] J. Jaerisch and H. Sumi, *Dynamics of infinitely generated nicely expanding rational semigroups and the inducing method*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., <http://arxiv.org/abs/1501.06772>.
- [S05] H. Sumi, *Dimensions of Julia sets of expanding rational semigroups*, Kodai Math. J., Vol.28, 2005, No.2, pp. 390-422.
- [S11] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London. Math. Soc. (2011), 102 (1), 50–112.
- [S15] H. Sumi, *The space of 2-generator postcritically bounded polynomial semigroups and random complex dynamics*, <http://arxiv.org/abs/1408.4951>. (Provisionally accepted for publication in Adv. Math.)
- [SU10] H. Sumi and M. Urbanski, *Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2010), Vol. 30, No. 2, 601-633.
- [SU13] H. Sumi and M. Urbanski, *Transversality family of expanding rational semigroups*, Adv. Math. 234 (2013) 697–734.

On weighted polynomial approximation by the de la Vallée Poussin mean

伊藤 健太郎 (名城大理工)*1

酒井 良二 (名城大理工)*2

鈴木 紀明 (名城大理工)*3

1. 導入

\mathbb{R} 上の多項式近似について考察する際に, 多項式はいかなる $1 \leq p \leq \infty$ に対しても $L^p(\mathbb{R})$ に属さないため, 任意の非負の整数 n に対して $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^n w(x) = 0$ となるような適当な重み w を乗じて考えなければならない. ここでは重み w は上記に加えてさらにいくつかの条件をみたす $\mathcal{F}(C^2+)$ と呼ばれるクラスに属するものを扱う.

\mathcal{P}_n を次数が n 次以下の多項式全体とする. $1 \leq p \leq \infty$ と $fw \in L^p(\mathbb{R})$ に対して

$$E_{p,n}(w; f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|w(f - P)\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

とおく. このとき $E_{p,n}(w; f)$ は 0 に収束することが知られている (但し $p = \infty$ の場合は $fw \in C_0(\mathbb{R})$ も仮定する). 即ち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - P_n)w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{1.1}$$

なる多項式の列 $\{P_n\}$ が存在する. ところが一般にそれを具体的な形で求めることは容易な問題ではない.

重み w を $w(x) = \exp(-Q(x))$ と表し, Q を用いて関数 T を

$$T(x) := \frac{xQ'(x)}{Q(x)}, \quad x \neq 0$$

と定義する. この T の挙動によって $\mathcal{F}(C^2+)$ に属する重みは 2 種類に分類され, T が有界のとき w を **Freud 型** と呼び, 逆に T が有界でないとき w を **Erdős 型** と呼ぶ. H. N. Mhaskar らは, w が Freud 型の場合に, ある定数 $C = C(w, p) \geq 1$ が存在して, $fw \in L^p(\mathbb{R})$ なる任意の関数 f に対して

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CE_{p,n}(w; f) \tag{1.2}$$

が成り立つことを示した [4, Lemma 4.1.5]. ここで, $v_n(f)$ は f に関する **de la Vallée Poussin 平均** と呼ばれ,

$$v_n(f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{2n} s_j(f)(x)$$

によって定まる高々 $2n$ 次の多項式である. 但し, $s_m(f)(x)$ は w より定まる直交多項式系に関する f の m 次の Fourier 部分和である. ここで de la Vallée Poussin 平均を考える理由の一つとして, 任意の $P \in \mathcal{P}_n$ に対して $v_n(P) = P$ が成り立つことがある.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A17, 41A10

キーワード: de la Vallée Poussin 平均, 重み付き多項式近似, Erdős 型重み

*1 e-mail: 133451501@ccalumni.meijo-u.ac.jp

*2 e-mail: ryozi@crest.ocn.ne.jp

*3 e-mail: suzuki@meijo-u.ac.jp

web: <http://ccmath.meijo-u.ac.jp/~suzukin/>

2. 主結果

今回の我々の主結果は, (1.2) を Erdős 型まで拡張した評価である. 以降, $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ はある定数 $c > 0$ に対して

$$T(a_n) \leq c \left(\frac{n}{a_n} \right)^{2/3}$$

を仮定する (但し Freud 型ならば無条件で成立する). ここで現れた a_n とは等式

$$n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{a_n t Q'(a_n t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

より定まる n 次の **MRS 数** である. このときある定数 $C(w, p) \geq 1$ が存在して, $f \in L^p(\mathbb{R})$ なる任意の関数 f に対して

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w; f). \quad (2.1)$$

$T^{1/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ なる任意の関数 f に対して

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CE_{p,n}(T^{1/4}w; f). \quad (2.2)$$

さらに f が絶対連続かつ $f'w \in L^p(\mathbb{R})$ のとき

$$\|(f' - v_n(f'))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CT^{3/4}(a_n)E_{p,n-1}(w; f') \quad (2.3)$$

が成り立つ. 証明においては de la Vallée Poussin 平均の L^p 有界性が重要である.

さて, de la Vallée Poussin 平均が (1.1) をみたす具体的な多項式であること, 即ち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad (2.4)$$

は w が Erdős 型の場合はいかなる条件の下で成立するのか. 一般に (2.1), (2.2), (2.3) の右辺は 0 に収束するとは限らないが, 我々は (2.4) が成立するための条件を 2 通り与えることが出来た. 一つ目は $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ がより滑らかなクラスである $\mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ に属する場合で, 一般に $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ であっても T のベキがかかったものが再び $\mathcal{F}(C^2+)$ に属すとは限らないが, $w \in \mathcal{F}_\lambda(C^3+)$ のときは $w^* \sim T^{1/4}w$ であるような $w^* \in \mathcal{F}(C^2+)$ が構成できることから, (2.2) よりすべての $T^{1/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ について (2.4) が示される. 一方, 単に $w \in \mathcal{F}(C^2+)$ であっても f が絶対連続かつ $f'w \in L^p(\mathbb{R})$ である場合には (2.1) より (2.4) が成立する. さらにこれに加えて $f''w \in L^p(\mathbb{R})$ であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f' - v_n(f'))w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$$

が (2.3) より成り立つ. これは f が十分滑らかな関数であれば, de la Vallée Poussin 平均の導関数 $v_n(f)'$ は f' に対しても良い近似を与えていることを意味している.

参考文献

- [1] K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki, *The de la Vallée Poussin mean and polynomial approximation for exponential weight*, International Journal of Analysis. 2015, Article ID 706930, 8 pages, (2015).
- [2] K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki, *An estimate for derivative of the de la Vallée Poussin mean*, Mathematical Journal of Ibaraki University, 47 (2015), 1-18.
- [3] K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki, *Polynomial approximation for absolutely continuous functions*, Preprint.
- [4] H. N. Mhaskar, *Introduction to the theory of weighted polynomial approximation*, World Scientific, Singapore, 1996.

$L^{(\alpha)}$ -conjugates on parabolic Bloch spaces

菱川 洋介 (岐阜大・教育)

西尾 昌治 (阪市大・理)

山田 雅博 (岐阜大・教育)

H を $n+1$ 次元実ユークリッド空間の上半空間とする. すなわち, $H = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ とする. $0 < \alpha \leq 1$ に対し, 放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は $L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ と定義される. ここで, $\partial_t = \partial/\partial t$, Δ_x は x に関するラプラシアンを表す. H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$ 調和であるとは, 超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となることをいう. 放物型プロッホ空間の定義を述べる. $m(\alpha) = \min\{1, \frac{1}{2\alpha}\}$ とする. $\sigma > -m(\alpha)$ に対し, $\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ を次のように定義する.

$\mathcal{B}_\alpha(\sigma) = \{u \in C^1(H); L^{(\alpha)} \text{ 調和},$

$$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} := \sup_{(x,t) \in H} t^\sigma \left\{ t^{\frac{1}{2\alpha}} |\nabla_x u(x, t)| + t |\partial_t u(x, t)| \right\} < \infty \}.$$

$$(\nabla_x = (\partial_1, \dots, \partial_n), \partial_j = \partial/\partial x_j)$$

また, $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma) = \{u \in \mathcal{B}_\alpha(\sigma), u(0, 1) = 0\}$ とする. $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ はノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}$ のもとでバナッハ空間となる. また, $\tilde{\mathcal{B}}_{1/2}(0)$ は調和プロッホ空間 ([3]) に対応する.

本講演では, 放物型プロッホ空間上の $L^{(\alpha)}$ -共役について得られた結果を述べる. 我々は [1] において, 調和共役の拡張である α -放物型共役関数を定義し, 研究を行っている. しかし, α -放物型共役関数は常に存在するとは限らない, また元の関数と同じ関数空間に属するとは限らないという問題点があった. これらの問題を解決するため, 我々は放物型プロッホ空間上の $L^{(\alpha)}$ -共役と呼ばれる共役関数について研究を進めた.

まず, H 上における調和共役の定義を述べる. [4] によると, 一般化されたコーシー・リーマンの方程式によって定義されている.

定義 A ([4]). u を H 上の関数とする. (v_1, \dots, v_n) が u の調和共役であるとは, (v_1, \dots, v_n, u) が次の一般化されたコーシー・リーマンの方程式を満たすときをいう.

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad (1 \leq j, k \leq n), \quad (1)$$

$$\partial_j u = \partial_t v_j \quad (1 \leq j \leq n), \quad (2)$$

$$-\partial_t u = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j.$$

次に, α -放物型共役関数の定義を述べる. 記号を準備する. 実数 κ に対し, $\mathcal{D}_t^\kappa = (-\partial_t)^\kappa$ は t に関する κ 次の実数冪微分作用素, \mathcal{FC}^κ は $\mathcal{D}_t^\kappa \varphi$ が定義可能であるような \mathbb{R}_+ 上の関数 φ からなる関数族を表す.

定義 B ([1]). $0 < \alpha \leq 1$ とする. また, u を H 上の関数とする. (v_1, \dots, v_n) が u の α -放物型共役関数であるとは, $v_j \in C^1(H)$, $u(x, \cdot) \in \mathcal{FC}^{\frac{1}{\alpha}-1}$ かつ, (v_1, \dots, v_n, u) が (1), (2) 及び次の式を満たすときをいう.

$$\sum_{j=1}^n \partial_j v_j = \begin{cases} \mathcal{D}_t^{\frac{1}{\alpha}-1} u & (0 < \alpha < 1), \\ u - \lim_{t \rightarrow \infty} u(0, t) & (\alpha = 1). \end{cases}$$

放物型ブロッホ空間上の α -放物型共役関数について、次の結果を得ている。

定理 A ([1]). $0 < \alpha \leq 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ とする。また、 $\eta = \frac{1}{2\alpha} - 1 + \sigma$ とおく。 $\eta > -\frac{1}{2\alpha}$ ならば、 $v_j \in \tilde{\mathcal{B}}_\alpha(\eta)$ を満たすような u の α -放物型共役関数 (v_1, \dots, v_n) が唯一存在する。さらに、 u に依存しない定数 $C > 0$ が存在して次を満たす。

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq \sum_{j=1}^n \|v_j\|_{\mathcal{B}_\alpha(\eta)} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}.$$

定理 A における注意

- (I) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \eta > -\frac{1}{2\alpha}$ は常に満たす。
- (II) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \Rightarrow \eta \leq -\frac{1}{2\alpha}$ となる実数 σ が存在する。
- (III) $\alpha \neq \frac{1}{2}$ のとき、 $\eta \neq \sigma$ となる。

特に、(II) と (III) の問題を解決するため、我々は [2] で新たな共役関数を導入した。以下、本講演での主結果について述べる。 $L^{(\alpha)}$ -共役の定義を述べる。

定義 1 ([2]). $0 < \alpha \leq 1$ とする。また、 u を H 上の関数とする。 (v_1, \dots, v_n) が u の $L^{(\alpha)}$ -共役であるとは、 $v_j, u \in C^1(H)$, $v_j(x, \cdot), u(x, \cdot) \in \mathcal{FC}^{\frac{1}{2\alpha}}$ かつ、 (v_1, \dots, v_n, u) が (1) 及び次の式を満たすときをいう。

$$\begin{aligned} \partial_j u &= -\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2\alpha}} v_j \quad (1 \leq j \leq n), \\ \mathcal{D}_t^{\frac{1}{2\alpha}} u &= \sum_{j=1}^n \partial_j v_j. \end{aligned}$$

放物型ブロッホ空間上の $L^{(\alpha)}$ -共役について、次の結果を得ている。

定理 1 ([2]). $0 < \alpha \leq 1$, $\sigma > -m(\alpha)$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ とする。このとき、 $v_j \in \tilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ を満たすような u の $L^{(\alpha)}$ -共役 (v_1, \dots, v_n) が唯一存在する。さらに、 u に依存しない定数 $C > 0$ が存在して次を満たす。

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq \sum_{j=1}^n \|v_j\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}.$$

参考文献

- [1] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, *Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type*, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 487–520.
- [2] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, *$L^{(\alpha)}$ -conjugates on parabolic Bloch spaces*, preprint.
- [3] W. Ramey and H. Yi, *Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 633–660.
- [4] E. M. Stein and G. Weiss, *On the theory of harmonic functions of several variables I. The theory of HP -spaces*, Acta Math., **103** (1960), 25–62.

外部領域上の重調和 Bergman 核について

田中 清喜 (阪市大・数学研究所)*

\mathbb{B} を \mathbb{R}^N 上の開単位球とし、 $\beta > -1$ とする。 $H^2(D)$ を領域 D 上における重調和関数全体の成す空間とする。本講演では領域を $D = \mathbb{B}, \mathbb{B} \setminus \{0\}$ もしくは $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$ として考え、この領域上において重み付き重調和 Bergman 空間

$$b_{\alpha,\beta}^{2,2}(D) := H^2(D) \cap L^2(D, |x|^\alpha |1 - |x|^2|^\beta dx)$$

を考える。重調和関数における平均値の定理より、この空間は再生核を持つヒルベルト空間であることがわかる。 $b_{\alpha,\beta}^{2,2}(D)$ に対する再生核を重み付き重調和 Bergman 核と呼び、 $R_{D,2,\alpha,\beta}(x, y)$ と書く。

日本数学会 2015 年度秋季総合分科会では、 $D = \mathbb{B}$ であるときの重調和 Bergman 核 $R_{\mathbb{B},2,0,0}(x, y)$ の表示について報告したが、本講演では $D = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$ であるときの重み付き重調和 Bergman 核 $R_{D,2,\alpha,\beta}(x, y)$ を表示する方法を紹介する。

補題 1. $\beta > -1$ とし $-\alpha - 2\beta - 8 + N > 0$ とする。そのとき

$$R_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}, 2, \alpha, \beta}(x, y) = |x|^{4-N} |y|^{4-N} R_{\mathbb{B}, 2, -\alpha - 2\beta - 8, \beta}(x^*, y^*) \quad x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$$

が成り立つ。ここで $x^* = \frac{x}{|x|^2}$ とする。

また $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ のとき、 $R_{\mathbb{B}, 2, \alpha, \beta}(x, y)$ は解析接続によって $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}} \times \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$ 上まで拡張できる。その拡張によって得られる関数を $\hat{R}_{\mathbb{B}, 2, \alpha, \beta}(x, y)$ と書く。そのとき次の結果が得られる。

定理 1. $\beta \in \mathbb{N}$ とし $-N < \alpha < N - 2\beta - 8$ とする。そのとき

$$R_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}, 2, \alpha, \beta}(x, y) = (-1)^\beta \hat{R}_{\mathbb{B}, 2, \alpha, \beta}(x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$$

が成り立つ。

参考文献

- [1] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, *Polyharmonic functions*, Clarendon press, Oxford, 1983.
- [2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [3] R. Coifman and R. Rochberg, *Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p* , *Astérisque* **77** (1980), 1–66.
- [4] M. Nishio and K. Tanaka, *Harmonic Bergman spaces with radial measure weight on the ball*, submitted.
- [5] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, *J. Math. Anal. Appl.* **216** (1997), 499–509.
- [6] Z.G.Zhao, *The harmonic Bergman kernels for punctured domains*, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **30** (2014), 1997–1988.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B05, 47B38

キーワード: biharmonic, Bergman kernel

* 〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号 大阪市立大学数学研究所
e-mail: ktanaka@sci.osaka-cu.ac.jp

Hausdorff dimension of the Julia sets of non-hyperbolic polynomial semigroups and the method of inducing

Johannes Jaerisch

Department of Mathematics

Faculty of Science and Engineering

Shimane University

E-mail: jaerisch@riko.shimane-u.ac.jp

Web: <http://www.math.shimane-u.ac.jp/~jaerisch/>

Introduction. We investigate the interplay between geometric and dynamical properties of Julia sets of semigroups of holomorphic maps on the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$. The study of semigroups of rational maps, which was initiated by Hinkkanen and Martin ([HM96]), generalises the iteration theory of a single rational map. This is deeply related to the study of random complex dynamical systems ([Sum11, JS15a]). For instance, regarding a random dynamical system of polynomial maps, if we consider the function $T_L(z)$ of probability of tending to a minimal set L (e.g. $L = \{\infty\}$), then under certain conditions (e.g., PBOSC in Definition 1 below), T_L is continuous on the Riemann sphere and varies precisely on the Julia set of the associated semigroup of rational maps.

The framework of semigroups of rational maps is also suitable to further unify the research on the Julia sets of rational maps and limit sets of Kleinian groups. In fact, the concept of conformal measures, introduced by Patterson ([Pat76]) for Fuchsian groups and generalized to Kleinian groups by Sullivan ([Sul83]), plays a central role in the fractal theory of Julia sets of semigroups of holomorphic maps on $\hat{\mathbb{C}}$. For a survey on the fractal properties of Julia sets of the iteration of a single rational map we refer to [Urb03].

Let Rat denote the semigroup of all non-constant rational maps on $\hat{\mathbb{C}}$ with semigroup operation being functional composition. A subsemigroup of Rat is called a *rational semigroup*. A rational semigroup consisting entirely of polynomials is called a *polynomial semigroup*.

The *Fatou set* of a rational semigroup G is given by

$$F(G) := \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists U \subset \hat{\mathbb{C}} \text{ open such that } z \in U \text{ and } \{g|_U\}_{g \in G} \text{ is equicontinuous} \right\}.$$

The *Julia set* of a rational semigroup G is given by $J(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(G)$.

As for the iteration theory of a single rational map, we have that if $\#(J(G)) \geq 3$ then the Julia set $J(G)$ is a non-empty compact and perfect subset of $\hat{\mathbb{C}}$ which has the property that repelling cycles are dense in $J(G)$, that is,

$$J(G) = \overline{\left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists g \in G \text{ such that } g(z) = z \text{ and } |g'(z)| > 1 \right\}} = \overline{\bigcup_{g \in G} J(g)}. \quad (1)$$

For the proofs of these results we refer to [HM96] and [Sum00].

Our main goal is to characterize the Hausdorff dimension of $J(G)$ with respect to the spherical distance d on $\hat{\mathbb{C}}$ in terms of dynamical properties of G . The idea goes back to Bowen ([Bow79]) who proved that the Hausdorff dimension of certain limit sets of Fuchsian groups is given by the unique zero of a geometric pressure function associated with the group. This type of formula, which is referred to as Bowen's formula, was generalised to various settings and it is still an active area of research. We refer to Definition 7 below for the definition of the geometric pressure function in the context of rational semigroups, and we refer to Theorem 9 below for a new version of Bowen's formula in the context of infinitely generated rational semigroups.

Let G be a rational semigroup. We denote by $\delta(G)$ the *critical exponent of the Poincaré series of G* ([Sum05]) given by

$$\delta(G) := \inf \left\{ \delta(G, z) \mid z \in \hat{\mathbb{C}} \right\},$$

where

$$\delta(G, z) := \inf \left\{ v \geq 0 : \sum_{g \in G} \sum_{w \in g^{-1}(z)} \|g'(w)\|^{-v} < \infty \right\}.$$

Here, $\|g'(w)\|$ denotes the norm of the derivative with respect to the spherical metric on the Riemann sphere, $\sum_{w \in g^{-1}(z)}$ counts the multiplicities and we set $\inf \{\emptyset\} := \infty$ and $0^{-v} := \infty$ for $v \geq 0$.

The *postcritical set* $P(G)$ of a rational semigroup G is given by

$$P(G) := \overline{\bigcup_{g \in G} \text{CV}(g)},$$

where $\text{CV}(g)$ denotes the set of all the critical values of a rational map g , and the closure is taken with respect to the spherical distance d on $\hat{\mathbb{C}}$. A rational semigroup satisfying $P(G) \subset F(G)$ is called *hyperbolic*.

Let $I \subset \mathbb{N}$ be an index set and let $(f_i)_{i \in I}$ be a family of rational maps. We use

$$\langle f_i : i \in I \rangle := \{ f_{\omega_n} \circ f_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\omega_1} \mid n \in \mathbb{N}, (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in I^n \}$$

to denote the semigroup generated by $(f_i)_{i \in I}$. We say that $\langle f_i : i \in I \rangle$ (or $(f_i)_{i \in I}$) satisfies the *open set condition* if there exists a non-empty open set $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ such that $(f_i^{-1}(U))_{i \in I}$ are pairwise disjoint subsets of U . Sumi ([Sum05]) proved that if $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ is a hyperbolic rational

semigroup satisfying the open set condition and each generator f_i has degree at least two, then

$$\dim_H(J(G)) = \delta(G).$$

To state our first main result, we need further definitions. For a polynomial g we denote by $K(g)$ the *filled Julia set of g* given by

$$K(g) := \{z \in \mathbb{C} \mid (g^n(z))_{n \in \mathbb{N}} \text{ is bounded in } \mathbb{C}\}.$$

We introduce the following class of polynomial semigroups.

Definition 1 (J./Sumi ([JS15b])). Let f_1, f_2 be polynomials of degree at least two. We say that the polynomial semigroup $G := \langle f_1, f_2 \rangle$ satisfies *PBOSC* if each of the following holds:

1. $P(G) \setminus \{\infty\}$ is a bounded subset of \mathbb{C} .
2. $K(f_1) \subset \text{Int}(K(f_2))$, where Int denotes the interior of a set.
3. (f_1, f_2) satisfies the open set condition with the open set $U := \text{Int}(K(f_2)) \setminus K(f_1)$.
4. $\text{CV}(f_2) \setminus \{\infty\} \subset \text{Int}(K(f_1))$.

Note that a rational semigroup satisfying PBOSC is not necessarily hyperbolic. See Example 3 for an example. We also remark that for each polynomial f_1 with $\deg(f_1) \geq 2$ such that $J(f_1)$ is connected and $\text{Int}(K(f_1)) \neq \emptyset$, and for each $d \in \mathbb{N}$ with $d \geq 2$ such that $(\deg(f_1), d) \neq (2, 2)$, there exists a polynomial f_2 with $\deg(f_2) = d$ such that $\langle f_1, f_2 \rangle$ satisfies PBOSC ([Sum11]). Also, regarding the above, we can take f_2 so that $\langle f_1, f_2 \rangle$ satisfies PBOSC and $J(\langle f_1, f_2 \rangle)$ is connected.

For a subset $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ we denote by $\dim_H(A)$ its Hausdorff dimension with respect to the spherical distance d on $\hat{\mathbb{C}}$. We are now in the position to state our first main result.

Theorem 2 (J./Sumi ([JS15b])). *Let $G := \langle f_1, f_2 \rangle$ be a polynomial semigroup satisfying PBOSC. Then*

$$\dim_H(J(G)) = \max\{\delta(G), \dim_H(J(f_1))\}.$$

We consider an example to which Theorem 2 applies.

Example 3. We let

$$\varphi_1(z) := z^2 + \frac{1}{4}, \quad \varphi_2(z) := \frac{1}{4}z^2.$$

Denote by $f_1 := \varphi_1 \circ \varphi_1$ and $f_2 := \varphi_2 \circ \varphi_2$ the second iterates of φ_1 and φ_2 and let $G := \langle f_1, f_2 \rangle$. Note that $z = 1/2$ is a parabolic fixed point of f_1 and thus, the rational semigroup G is not hyperbolic. However, G satisfies PBOSC and therefore Theorem 2 applies. Since moreover f_1 is a non-recurrent critical point map, it is well-known that $\dim_H(J(f_1)) \leq \delta(\langle f_1 \rangle) \leq \delta(G)$ ([Urb03]). We have thus shown that $\dim_H J(G) = \delta(G)$. We refer to the figure below for a sketch of $J(G)$. For related results in the framework of conformal iterated function systems, we refer to [MU00].

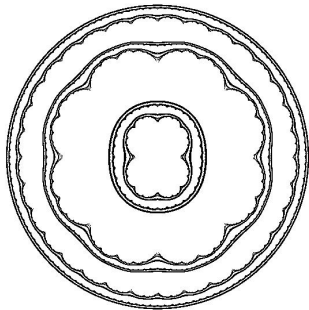


Figure 1: The graph of the Julia set $J(\langle f_1, f_2 \rangle)$ in Example 3.

In the following we aim to explain the main ideas and methods which are used in the proof of Theorem 2. In a nutshell, the idea of the proof of Theorem 2 can be described by the following three steps:

1. *Definition of a hyperbolic subsemigroup H of G :* We define the subsemigroup H given by

$$H := \langle h_n : n \geq 0 \rangle, \quad \text{where } h_n := f_2 \circ f_1^n, \quad \text{for } n \geq 1, \text{ and } h_0 := f_2.$$

This is an infinitely generated polynomial semigroup which turns out to be hyperbolic.

2. *Hausdorff dimension formula for the Julia set of H :* We develop a fractal theory for the Julia set of the infinitely generated hyperbolic rational semigroup H . This is the main step of the proof, which will be discussed in the next section. Briefly, we will introduce a subset $J_{\text{pre}}(H) \subset J(H)$ (see Definition 6 below) and we will prove a version of Bowen's formula for the Hausdorff dimension of $J_{\text{pre}}(H)$ (see Theorem 9 below).

3. *Relation between the Julia sets of G and H :* It turns out that

$$J_{\text{pre}}(H) = J(H) \setminus \bigcup_{g \in G} g^{-1}(J(\langle f_1 \rangle)).$$

Moreover, we have $J(H) = J(G)$ and $\delta(H) = \delta(G)$. Theorem 2 follows.

By using the above idea, which is referred to as the method of inducing, we can obtain similar results on the Hausdorff dimension of the Julia sets of various non-hyperbolic rational semigroups.

A fractal theory for infinitely generated hyperbolic rational semigroups. Throughout, let $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ be a rational semigroup with $I \subset \mathbb{N}$. We will always assume that each generator f_i has degree at least two.

We say that $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ is *expanding* if there exists $C > 0$ and $\lambda > 1$ such that, for all $z \in J(G)$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{\omega_1, \dots, \omega_n \in I^n, y \in (f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1})^{-1}(z)} \|(f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1})'(y)\| \geq C\lambda^n.$$

By using the Poincaré metric on components of the Fatou set we deduce the following fact.

Proposition 4 (J./Sumi ([JS15b])). *If $\langle f_i : i \in I \rangle$ is hyperbolic, then $\langle f_i : i \in I \rangle$ is expanding.*

If I is a finite set, then hyperbolicity and expandingness are in fact equivalent ([Sum98]). However, the converse of Proposition 4 does not hold in general when the alphabet is infinite.

To state Bowen's formula we introduce the following dynamical system associated with a rational semigroup $G = \langle f_i : i \in I \rangle$.

Definition 5 (Sumi ([Sum00])). The *skew product map \tilde{f} associated with $(f_i)_{i \in I}$* is given by

$$\tilde{f} : I^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow I^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}, \quad \tilde{f}(\tau, z) := (\sigma(\tau), f_{\tau_1}(z)),$$

where

$$\sigma : I^{\mathbb{N}} \rightarrow I^{\mathbb{N}}, \quad \sigma((\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (\tau_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

denotes the shift map.

For $\tau \in I^{\mathbb{N}}$ we define the *Julia set*

$$J_\tau := \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \nexists U \subset \hat{\mathbb{C}} \text{ open, } z \in U, \text{ such that } (f_{\tau_n} \circ f_{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\tau_1}|_U)_{n \in \mathbb{N}} \text{ is equicontinuous} \right\}.$$

The *Julia set of \tilde{f}* is given by

$$J(\tilde{f}) := \overline{\bigcup_{\tau \in I^{\mathbb{N}}} \{\tau\} \times J_\tau} \subset I^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}},$$

where the closure in $I^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ is taken with respect to the product topology, and I is equipped with the discrete topology.

We now introduce a subset of the Julia set $J(G)$ for which we will be able to investigate its Hausdorff dimension. For a related definition for conformal iterated function systems we refer to [MU96].

Definition 6 (J./Sumi ([JS15b])). The *pre-Julia set $J_{\text{pre}}(G)$* of a rational semigroup G is given by

$$J_{\text{pre}}(G) := \bigcup_{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in G^{\mathbb{N}}} \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid (\gamma_k \circ \cdots \circ \gamma_1)_{k \in \mathbb{N}} \text{ is not normal in } z \right\}.$$

We first remark that, by the density of the repelling fixed points in the Julia set (see (1)), we have that

$$\overline{J_{\text{pre}}(G)} = J(G).$$

If $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ then we have

$$J_{\text{pre}}(G) = \bigcup_{\tau \in I^{\mathbb{N}}} J_\tau.$$

The relation between the Julia set of \tilde{f} and the pre-Julia set is the following. We denote by $\pi_{\hat{\mathbb{C}}} : I^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ the projection on the second coordinate. If $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ is expanding then we

have

$$J_{\text{pre}}(G) = \pi_{\tilde{c}}(J(\tilde{f})).$$

Also, we remark that, if I is finite and $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ is expanding then

$$J_{\text{pre}}(G) = J(G).$$

In order to state our main result on the Hausdorff dimension of the pre-Julia set, we define the geometric pressure function.

Definition 7 (Sumi ([Sum05])). The *geometric pressure function* of a hyperbolic rational semigroup $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ is for $z \in J(G)$ and $\beta \in \mathbb{R}$ given by

$$\mathcal{P}(\beta, z) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\omega \in I^n} \sum_{y \in (f_{\omega_n} \cdots f_{\omega_1})^{-1}(z)} \|(f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1})'(y)\|^{-\beta}. \quad (2)$$

We will also use another definition of the geometric pressure function, which is derived from the classical notion of topological pressure for continuous potentials on a compact metric space introduced by Walters ([Wal75]). Recall that, for a continuous function $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ on a compact metric space X and for a continuous dynamical system $T : X \rightarrow X$, the *topological pressure of ψ* with respect to (X, T) is given by

$$\mathcal{P}(\psi, T) := \sup \left\{ h_\mu(T) + \int \psi \, d\mu \right\}, \quad (3)$$

where the supremum is taken over all T -invariant Borel probability measures on X , and $h_\mu(T)$ refers to the measure-theoretic entropy of the dynamical system (X, T) . Since the fibre-wise Julia set $J(\tilde{f})$ is compact only when I is finite, we use the following definition of the topological pressure function, which was introduced in the context of countable topological Markov chains by Sarig ([Sar99]), extending the notion of the topological entropy due to Gurevic ([Gur69]).

The geometric pressure function of a hyperbolic rational semigroup $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ is given by

$$\mathcal{P}(\beta) := \sup \{ \mathcal{P}(-\beta \log \|\tilde{f}'_K\|, \tilde{f}_K) \}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

where the supremum is taken over all compact subsets $K \subset J(\tilde{f})$ satisfying $\tilde{f}(K) = K$, and

$$\|\tilde{f}'((\omega_1, \omega_2, \dots), z)\| := \|f'_{\omega_1}(z)\|, \quad ((\omega_1, \omega_2, \dots), z) \in J(\tilde{f}).$$

It turns out that, for hyperbolic rational semigroups, the above definitions are equivalent.

Proposition 8 (J./Sumi ([JS15b])). *If $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ is hyperbolic rational semigroup, then*

$$\mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(\beta, z), \quad \text{for every } z \in J(G).$$

We are now in the position to state our main result on the Hausdorff dimension of the pre-Julia set of hyperbolic rational semigroups.

Theorem 9 (J./Sumi ([JS15b])). *Let $G = \langle f_i : i \in I \rangle$ be a hyperbolic rational semigroup satisfying the open set condition. Then we have*

$$\dim_H(J_{\text{pre}}(G)) = \inf \{ \beta \geq 0 \mid \mathcal{P}(\beta) \leq 0 \} = \delta(G).$$

We remark that $J_{\text{pre}}(G)$ cannot be replaced by $J(G)$. Moreover, we cannot replace the Hausdorff dimension by the box-counting or by the packing dimension. The result shall be compared with the Hausdorff dimension formula by Bishop and Jones ([BJ97]), which states that, for an arbitrary Kleinian group, the Hausdorff dimension of its radial limit is given by the critical exponent of the Poincaré series. For a related result in the context of conformal iterated function systems, we refer to [MU96] (see also [MU03]).

On the proof of Theorem 9. The proof of Theorem 9 splits into two parts: the upper bound and the lower bound of the Hausdorff dimension.

To prove the upper bound, that is $\dim_H(J_{\text{pre}}(G)) \leq \delta(G)$, we will in fact demonstrate that the $\delta(G)$ -dimensional Hausdorff measure of $J_{\text{pre}}(G)$ is finite. We will use the concept of conformal measures and the mass-distribution principle.

By the construction principle of the Patterson-Sullivan measure ([Pat76]), we verify that there exists a probability measure $\mu_{\delta(G)}$ on $J(G)$ which satisfies for every Borel set A and $g \in G$,

$$\mu(g(A)) \leq \int_A \|g'\|^{\delta(G)} d\mu. \quad (4)$$

The details of this construction for rational semigroups are elaborated in [Sum98]. A measure satisfying (4) is called $\delta(G)$ -subconformal. Using (4), Koebe's distortion theorem and the property that $\langle f_i : i \in I \rangle$ is expanding by Proposition 4, we prove the existence of $C > 0$ such that, for every $z \in J_{\text{pre}}(G)$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_{\delta(G)}(B(z, r))}{r^{\delta(G)}} \geq C.$$

By the mass-distribution principle it follows that the $\delta(G)$ -dimensional Hausdorff measure of $J_{\text{pre}}(G)$ is finite.

To prove the lower bound $\dim_H(J_{\text{pre}}(G)) \geq \delta(G)$ we use a reduction to the case when I is finite. Set $G_n := \langle f_i : i \in I, i \leq n \rangle$ for $n \in \mathbb{N}$. Clearly, we have

$$\dim_H(J_{\text{pre}}(G)) \geq \sup_{n \geq 1} \dim_H(J_{\text{pre}}(G_n)).$$

Since $J_{\text{pre}}(G_n) = J(G_n)$ it follows from Sumi's result ([Sum05]) for the finitely generated hyperbolic rational semigroup G_n that

$$\dim_H J_{\text{pre}}(G_n) = \delta(G_n).$$

Denoting by \mathcal{P}_n the geometric pressure function of $G_n := \langle f_i : i \in I, i \leq n \rangle$ we have that $\mathcal{P}_n(\delta(G_n)) = 0$. Finally, the lower bound follows from the fact that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n(\beta) = \mathcal{P}(\beta), \quad \text{for every } \beta \in \mathbb{R}.$$

References

- [BJ97] C. J. Bishop and P. W. Jones, *Hausdorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math. **179** (1997), no. 1, 1–39. MR 1484767 (98k:22043)
- [Bow79] R. Bowen, *Hausdorff dimension of quasicircles*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1979), no. 50, 11–25. MR 556580 (81g:57023)
- [Gur69] B. M. Gurevič, *Topological entropy of a countable Markov chain*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **187** (1969), 715–718. MR MR0263162 (41 #7767)
- [HM96] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The dynamics of semigroups of rational functions. I*, Proc. London Math. Soc. (3) **73** (1996), no. 2, 358–384. MR 1397693 (97e:58198)
- [JS15a] J. Jaerisch and H. Sumi, *Multifractal formalism for expanding rational semigroups and random complex dynamical systems*, Nonlinearity **28** (2015), 2913–2938.
- [JS15b] ———, *Dynamics of infinitely generated nicely expanding rational semigroups and the inducing method*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear. Preprint <http://arxiv.org/abs/1501.06772> (2015).
- [MU96] R. D. Mauldin and M. Urbański, *Dimensions and measures in infinite iterated function systems*, Proc. London Math. Soc. (3) **73** (1996), no. 1, 105–154. MR 1387085 (97c:28020)
- [MU00] ———, *Parabolic iterated function systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **20** (2000), no. 5, 1423–1447. MR 1786722 (2001m:37047)
- [MU03] ———, *Graph directed Markov systems*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 148, Cambridge, 2003.
- [Pat76] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), no. 3-4, 241–273. MR 0450547 (56 #8841)
- [Sar99] O. M. Sarig, *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), no. 6, 1565–1593. MR MR1738951 (2000m:37009)
- [Sul83] D. Sullivan, *Conformal dynamical systems*, Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1007, Springer, Berlin, 1983, pp. 725–752. MR 730296 (85m:58112)
- [Sum98] H. Sumi, *On Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups*, Kodai Math. J. **21** (1998), no. 1, 10–28. MR 1625124 (99h:30029)
- [Sum00] ———, *Skew product maps related to finitely generated rational semigroups*, Nonlinearity **13** (2000), no. 4, 995–1019.
- [Sum05] ———, *Dimensions of Julia sets of expanding rational semigroups*, Kodai Math. J. **28** (2005), no. 2, 390–422. MR 2153926 (2006c:37050)
- [Sum11] ———, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc. (1) (2011), no. 102, 50–112.
- [Sum15] ———, *The space of 2-generator postcritically bounded polynomial semigroups and random complex dynamics*, <http://arxiv.org/abs/1408.4951>, (Provisionally accepted for publication in Adv. Math.) (2015).
- [Urb03] M. Urbański, *Measures and dimensions in conformal dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **40** (2003), no. 3, 281–321. MR 1978566 (2004f:37063)
- [Wal75] P. Walters, *A variational principle for the pressure of continuous transformations*, Amer. J. Math. **97** (1975), no. 4, 937–971. MR 0390180 (52 #11006)

有界強擬凸領域における 完備アインシュタイン計量の変形

松本 佳彦 (東京工業大学)*

1 はじめに

本稿における考察の舞台は、 n 次元 Stein 多様体 Y の滑らかな境界を持つ有界強擬凸領域 Ω である ($n \geq 2$ とする. また、「有界」という語は「相対コンパクト」の意味で用いている). 本稿で単に「有界強擬凸領域」と言ったときは、特に断らないかぎり、ある Stein 多様体のそれを指しているものとする. ただし、以下で述べる内容は $X = \mathbb{C}^n$ の領域に限っても非自明なので、読者はその場合だけを念頭に置いてよい.

よく知られているように、上述のような領域間の双正則写像と境界間の CR 同値写像は「等価」である. すなわち次のことが成り立つ: 有界強擬凸領域 $\Omega_1 \subset Y_1$, $\Omega_2 \subset Y_2$ に対し、任意の双正則写像 $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ は領域の閉包への滑らかな拡張 $\bar{F}: \bar{\Omega}_1 \rightarrow \bar{\Omega}_2$ を持ち、拡張 \bar{F} の境界への制限 $f := \bar{F}|_{\partial\Omega_1}: \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2$ は自動的に CR 微分同相写像 (CR 構造を保つ微分同相写像) となるが、こうして得られる写像

$$\{F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \mid F \text{ は双正則}\} \rightarrow \{f: \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2 \mid f \text{ は CR 微分同相}\} \quad (1.1)$$

は全単射である*1. 少し違う見方をすれば、領域 Ω の双正則同値類と境界 $\partial\Omega$ の CR 同値類の間には一対一対応があるということでもある:

$$\{\Omega \mid \Omega \text{ は有界強擬凸領域}\} / \sim_{\text{bihol}} \cong \{\partial\Omega \mid \Omega \text{ は有界強擬凸領域}\} / \sim_{\text{CR-diffeo}}. \quad (1.2)$$

ひとまず、(1.2) のことを「領域・境界対応」と呼んでおこう.

今回の議論におけるもうひとつの大前提は、有界強擬凸領域 Ω 上には、次の定理に述べる **Cheng–Yau 計量** と呼ばれる標準的な Kähler 計量があるという事実である.

定理 1 (Cheng–Yau [10]). 有界強擬凸領域 Ω 上には、負スカラー曲率を持つ完備 Kähler–Einstein 計量が存在する. この計量は (正定数倍を除き) 一意的で、したがってまた双正則不変である.

* 日本学術振興会特別研究員-PD. Email: matsumoto@math.titech.ac.jp

*1 難しいのは写像 (1.1) の well-definedness, つまり F に対する \bar{F} の存在の証明である. これは $Y_1 = Y_2 = \mathbb{C}^n$ のときは Fefferman [13], 一般には Bedford–Bell–Catlin [2] によって示された. 全射性は Bochner–Hartogs の定理 [5] (Hörmander [21] の定理 2.3.2') とその Kohn–Rossi [23] による拡張から従う (Burns–Shnider–Wells [7] も参照せよ). 単射性は最大値原理から明らかである.

この Cheng–Yau 計量 g は、 $\text{Ric}(g) = -(n+1)g$ という正規化のもとで次の形で与えられる：

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \log(1/\varphi). \quad (1.3)$$

ここで φ は Ω のある定義関数である (Ω 上で $\varphi > 0$ となるようにとる)。この関数 φ は Ω 上 C^∞ 級であるが、境界における正則性は一般には $\varphi \in C^{n+1,\alpha}(\bar{\Omega})$ しか成り立たない。

われわれは、Cheng–Yau 計量 g を「領域・境界対応 (1.2) を微分幾何化するもの」として捉える。そう捉えることができるのは、計量 g は領域 Ω の複素構造によって定められている一方で、境界 $\partial\Omega$ の局所 CR 構造によっても「漸近的に」定まるからだ。つまり、たとえば、2つの有界強擬凸領域 Ω_1, Ω_2 に対し、各々のある境界点の近傍の間だけで定義された局所的な双正則写像があるとき、Cheng–Yau 計量 g_1, g_2 のそれらの近傍への制限は「漸近的に」一致する。あるいは、関数 φ の境界における漸近展開を考えると、その展開の係数はあるオーダーまで境界の Moser 標準形 [11] の係数によって記述できる (正確な意味については [16] を見よ)。計量 g を規定する方程式が Ω において微分幾何的に与えられていることと、 g が漸近的に $\partial\Omega$ の微分幾何によって決定されることの両面において、 g は対応 (1.2) を微分幾何化している*2。



Cheng–Yau 計量を利用することで、 Ω の双正則不変量であって、 $\partial\Omega$ の田中=Webster 曲率と捩率によって具体的に表示できるようなものが構成できる。こうして得られるスカラー値不変量としては、Burns–Epstein 不変量 [8, 6, 26] と (最近定義された) Q -prime 曲率の全積分 [9, 17, 18] が知られている。スカラー値に限らなければ、CR 山辺ラプラシアンとその高階化もそういう例とみなせる [22, 15, 19]。

さて、タイトルにあるように、われわれは有界強擬凸領域 Ω における Einstein 計量の変形を、O. Biquard の枠組み [3] に従って論じる。変形のもとになるのは Cheng–Yau 計量で、新しく作られる計量は再び Ω 上の完備 Einstein 計量になる。この新しい計量の意義は、**微分幾何的な領域・境界対応 (1.4) を一般化することにある**。ただし、そこにはもはや通常の複素構造は現れないし、通常の CR 構造も現れない。新しい計量について現在わかっていることは、ある仕方で一般化された $\partial\Omega$ 上の CR 構造たちと関係があることだ——というよりも、新しい計量は一般化された CR 構造に対応する形で構成される。これらの「一般化された CR 構造」は partially integrable CR 構造と呼ばれる。また、新しい計量は「漸近的複素双曲計量 (ACH 計量)」と呼ばれる計量のクラスにおいて

*2 Bergman 計量も図式 (1.4) にフィットする点では同じである。しかし Cheng–Yau 計量には、漸近展開を具体的に書き下すことができるという利点がある。一方で、関数論との関係の明瞭さという点では、Bergman 計量に分がある。

作られる.

$$\begin{array}{l}
 \text{境界に partially integrable} \\
 \text{CR 構造を備えた領域} \\
 \text{境界の partially integrable} \\
 \text{CR 構造}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow \\
 \nearrow \\
 \text{漸近的}
 \end{array}
 \rightarrow \text{漸近的複素双曲 Einstein 計量}
 \tag{1.5}$$

各々の漸近的複素双曲計量 g には, g の共形無限遠 (conformal infinity) と呼ばれる境界上の partially integrable CR 構造 J が付随する. Cheng–Yau 計量も漸近的複素双曲計量であり, その共形無限遠は $\partial\Omega$ の標準的な CR 構造 J_{std} なのだが, われわれは J_{std} を摂動して, 対応する漸近的複素双曲 Einstein 計量を構成しようとするのである. すなわちこれは一種の Dirichlet 問題である.

今回は大域的な存在の問題, すなわち (1.5) の上の矢印を扱う^{*3}. 主定理を述べよう.

定理 2 (松本 [30]). $n \geq 3$ と仮定する. Ω を有界強擬凸領域, J_{std} を $\partial\Omega$ の標準的な CR 構造, J を $C^{2,\alpha}$ 位相に関して J_{std} に十分近い partially integrable CR 構造とする. そのとき, Ω 上の漸近的複素双曲 Einstein 計量 g であって, J を共形無限遠とするものが存在する.

Biquard が [3] において証明したのは, Ω が \mathbb{C}^n の単位開球 B^n の場合であった (この場合, 次元は $n \geq 2$ でよかった). 今回の結果は, 次元の制約 $n \geq 3$ のもとで, 同じことが一般の領域で成立するというものである. なお, 計量 g には「局所的一意性」がある. これは [3] ですでに一般的に議論されている.

本稿の残りにおける目標は, $\Omega = B^n$ の場合と一般の領域の場合の違いを説明することではなく, むしろそれらに共通する枠組みの説明——つまり [3] の第 1 章の解説——である^{*4}. それによって定理 2 の証明は L^2 無限小 Einstein 変形の消滅定理に帰着される. これは $\Omega = B^n$ のときは明らかなのだが, 一般の領域で示すには工夫が必要となる. この工夫については第 5 節でごく簡単に述べるが, 詳しくは [30] を参照されたい (講演でもっと詳しく触れる).

議論の枠組みを支えているのは, 漸近的複素双曲計量に対する幾何的楕円型線型微分方程式の一般論である. これを第 4 節で説明する. そのための準備が第 3 節である. 第 2 節は基本的な定義の説明にあてた.

2 いくつかの基本的定義

この節では, 領域 Ω の強擬凸性について説明した上で, 境界 $\partial\Omega$ の持つ構造の抽象化にあたる CR 構造の定義, およびその一般化である partially integrable CR 構造の定義を行う. 以下本節では, 単に「領域」と言ったときには, Stein とは限らない複素多様体の滑らかな境界を持つ領域を指す.

^{*3} 下の矢印については松本が以前議論した [28, 27].

^{*4} ただし [3] における記述には sketchy な箇所も見られる. これを読み解く上では, Lee [25] による漸近的複素双曲計量 (複素ではなく実の場合) に対する類似の議論も参考になる.

強擬凸領域の最も基本的な例は単位開球 $B^n \subset \mathbb{C}^n$ である。一般に領域 Ω が強擬凸であるとは、境界 $\partial\Omega$ の各点において $\partial\Omega$ が ∂B^n の局所双正則像によって 2 次近似できることをいう。

強擬凸性は、実際には次で定義される Levi 形式を調べることによってチェックできる。複素多様体 X の領域 Ω に対し、 Ω 上で正の値を持つ定義関数 $\varphi \in C^\infty(X)$ をとる。そのとき、点 $p \in \partial\Omega$ における正則接ベクトル $\xi, \eta \in T_p^{1,0}\partial\Omega := T_p^{1,0}X \cap \mathbb{C}T_p\partial\Omega$ に対し

$$L_\varphi(p)(\xi, \bar{\eta}) := -\partial\bar{\partial}\varphi(\xi, \bar{\eta})$$

と定める。こうして定義される $T^{1,0}\partial\Omega$ 上の Hermite 形式 L_φ を、 φ の定める $\partial\Omega$ の Levi 形式という。Levi 形式 L_φ の共形類は φ の選び方によらない。そして Ω が強擬凸であるためには、 L_φ が各点で正定値であることが必要十分である。

境界 $\partial\Omega$ が備えている（標準的な）CR 構造というのは、いま出てきた正則接束 $T^{1,0}\partial\Omega$ のことである。同じことだが、超平面束 $H := \text{Re}T^{1,0}\partial\Omega \subset T\partial\Omega$ の概複素構造 $J \in \Gamma(\text{End}(H))$ と言ってもよい（ J は、その i 固有部分束が $T^{1,0}\partial\Omega$ に一致するようにとる）。一般に、3 次元以上の奇数次元の実多様体 M^{2n-1} に対し、超平面束 $H \subset TM$ とその上の概複素構造 J の組を概 CR 構造という。概 CR 構造 J は固有分解 $\mathbb{C}H = T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}$ を与える。そして、 J が可積分、すなわち $\Gamma(T^{1,0}M)$ が Lie ブラケットについて閉じているとき、 (H, J) を M 上の **CR 構造** と呼ぶ。CR 多様体 (M, H, J) の上に Levi 形式を定めるには、 $\ker\theta = H$ となる微分 1 形式 θ をとる。そして

$$L_\theta(p)(\xi, \bar{\eta}) := -i d\theta(\xi, \bar{\eta})$$

とおく（ $M = \partial\Omega$ の場合には、 $\theta = \frac{i}{2}(\partial\varphi - \bar{\partial}\varphi)|_{T\partial\Omega}$ とすれば $L_\theta = L_\varphi$ となる）。領域の境界の場合と違って θ と $-\theta$ は対等なので、 L_θ が正定値または負定値のときに (M, H, J) は強擬凸であるという——そしてそのときは $L_\theta > 0$ となるような θ を常に用いるものとする。 $T^{1,0}M$ の局所余枠 $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^{n-1}$ が与えられているとき、 J の可積分性によって $d\theta$ は

$$d\theta = i \sum_{\alpha, \beta=1}^{n-1} h_{\alpha\bar{\beta}} \theta^\alpha \wedge \bar{\theta}^\beta \pmod{\theta} \quad (2.1)$$

と表されるから、局所的には Hermite 行列値関数 $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ を Levi 形式と呼んでもよい。式 (2.1) が $\text{mod } \theta$ でなく正確に成り立つように 1 形式の組 $\{\theta^\alpha\}_{\alpha=1}^{n-1}$ を取ることもできる。さらに $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ が単位行列になることを要請すれば、 $\{\theta^\alpha\}$ の各点における自由度は $U(n-1)$ だけになる——というのが Chern–Moser [11] による強擬凸 CR 多様体に対する正規 Cartan 接続の構成の最初のステップである。

ところで、 $d\theta$ が式 (2.1) のように表されるための条件としては、 J の可積分性は実は過剰である。実際には次の条件だけでよい*5：

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}).$$

*5 概複素多様体の場合と違って、 $T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}$ （これは H の複素化に他ならない）は CTM よりランクが 1 だけ小さいことに注意されたい。

これを満たす概 CR 構造のことを **partially integrable CR 構造**と呼ぶ。したがって強擬凸 partially integrable CR 構造についても、可積分な場合と同様に、正規 Cartan 接続（あるいは田中=Webster 接続）に基づく微分幾何が開展できる。

以下、(partially integrable) CR 構造には常に強擬凸性を仮定する。

3 漸近的複素双曲性の諸相

「漸近的複素双曲性」にはいくつかの定式化があり得る。われわれも 2 種類の定式化を与える（定義 1 と定義 2）。定義 1 は解析的議論のために本質的に重要と思われる性質を取りだしたもので、定義 2 はさらに共形無限遠が普通の partially integrable CR 多様体として定まることを要請したものである。定義 1 の定式化だけでどこまで議論を推し進められるかというのも興味深い。次節で用いるのは定義 2 である。なおいずれの定式化も Biquard [3], Lee [25] を参考にしたものだが（さらに [4] にも読みやすい記述がある）、定義 1 は、この形では既存の文献には現れていないと思う。

複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ の半径 $\rho > 0$ の開球を B_ρ と書く。また $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ とする。

定義 1. 非コンパクトな実 $2n$ 次元多様体 X 上の完備 Riemann 計量 g が $C^{k,\alpha}$ 級の**漸近的複素双曲性**を持つというのは、 $\rho > 0$ を適切に選ぶと、任意の $\varepsilon > 0$ に対しコンパクト部分集合 $K \subset \Omega$ および X の中への微分同相写像の族 $\{\Phi_\lambda: B_\rho \rightarrow U_\lambda := \Phi_\lambda(B_\rho) \subset X\}$ を次を満たすように取れるということである：

- (i) $\{U_\lambda\}$ は $X \setminus K$ を被覆する。
- (ii) $\|\Phi_\lambda^*g - g_{\mathbb{C}H^n}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)} < \varepsilon$ が成り立つ。

任意の k, α に対し $C^{k,\alpha}$ 級の漸近的複素双曲性を持つとき、単に漸近的複素双曲性を持つということにする。

上の定義に現れる族 $\{\Phi_\lambda\}$ を**複素双曲アトラス**と呼ぼう。Cheng–Yau 計量 g はこの意味で漸近的複素双曲性を持つ。実際には Einstein 性は無関係で、たとえば、境界まで滑らかな定義関数 $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ によって式 (1.3) で定義される計量はすべて漸近的複素双曲性を持つ*6。

技術的にはさらに次のことが重要になる。これを複素双曲アトラスの**強一様局所有限性**とも言うておこう。多様体 X 全体にわたってというだけでなく、 ε についても一様性があるのがポイントである。

補題. Cheng–Yau 計量 g について、 $\rho > 0$ および正整数 N を適切に選ぶと、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、上の (i), (ii) に加えてさらに次が満たされるように複素双曲アトラス $\{\Phi_\lambda\}$ をとることができる：

*6 Cheng–Yau [10] はそういう計量が bounded geometry を持つことについて議論しているが、これはその精密化にあたる。証明のひとつの方法は接触構造の局所自明性を用いるものである (Biquard [3] の方法)。もうひとつ、[13] の第 1 部冒頭で行われているように、 $\partial\Omega$ の ∂B^n による 2 次近似を一様に与えることによる方法も考えられる。後者の方法だと Φ_λ を双正則写像とすることができて、場合によっては有用だと思う。

- (iii) $U'_\lambda := \Phi_\lambda(B_{\rho/2})$ とおくと, $\{U'_\lambda\}$ がすでに $X \setminus K$ を被覆している.
(iv) 任意の点 $p \in X$ に対し, $p \in U'_\lambda$ となる λ は高々 N 個しかない.

次に, 共形無限遠がきちんと定まるような設定を導入する. X を非コンパクトな実 $2n$ 次元多様体で, 滑らかなコンパクト境界つき多様体 \overline{X} の内部として実現されているものとする. 境界 $M := \partial\overline{X}$ 上に partially integrable CR 構造 (H, J) が与えられているとする. そのとき, \overline{X} の境界近傍を $M \times [0, x_0)$ と同一視して, $M \times (0, x_0) \subset X$ において

$$g_0 = 2 \frac{dx^2}{x^2} + \frac{\theta^2}{2x^4} + \frac{L_\theta}{2x^2}$$

という計量を考える (x は $M \times [0, x_0)$ の $[0, x_0)$ 成分の座標). 境界近傍において g_0 と一致するような Riemann 計量はこれから定義する意味での漸近的複素双曲計量とみなし, (H, J) をその共形無限遠と考える. さらに, g_0 と比べたときに境界における減衰を持つような摂動を施すことも許容する. これを記述するために, 重みつき Hölder 空間

$$C_\delta^{2,\alpha}(S^2T^*X) := x^\delta C^{2,\alpha}(S^2T^*X)$$

を導入する. ここで $C^{2,\alpha}(S^2T^*X)$ は g_0 に関する通常の Hölder 空間である.

定義 2. X 上の Riemann 計量 g がある $\delta > 0$ について

$$g = g_0 + k, \quad k \in C_\delta^{2,\alpha}(S^2T^*X)$$

と表されるとき, g は (H, J) を **共形無限遠** とする **漸近的複素双曲計量** であるという.

このような定義をする理由は, 有界強擬凸領域において, Cheng–Yau 計量をはじめとする (1.3) 型の計量が定義 2 に述べた性質を持っているからだ*7. (H, J) を共形無限遠とする漸近的複素双曲計量 g は, 定義 1 の意味で漸近的複素双曲性を持つ. さらに, 強一様局所有限性を持つ複素双曲アトラスをとることができる.

4 漸近的複素双曲計量に対する幾何的線型微分作用素

Einstein 計量の変形を考察するためには, Einstein 方程式を線型化した微分方程式を考える. Kähler-Einstein 計量の場合には Einstein 方程式を複素 Monge–Ampère 方程式に帰着することができて, その線型化は Laplace 型の方程式となるのだった. 一般の場合には Einstein 方程式を直接考えるのだが, そのままでは線型化作用素に同型性が期待できない. というのは, Einstein 方程式の解に明らかに一意性がないからである——Einstein 性は微分同相写像による引き戻しで保たれるからだ. そこで通常, 基準となるある計量 g を利用して, ゲージ固定のための項を導入する. ここでは次のようにする:

$$\mathcal{E}(g') := \text{Ric}(g') + (n+1)g' + \delta_g^* \mathcal{B}_g g', \quad \mathcal{B}_g g' := \delta_g g' + \frac{1}{2} d \text{tr}_g g'.$$

*7 もちろん $X = \Omega$ だが, \overline{X} の可微分構造については注意が必要となる. $\overline{\Omega}$ の可微分構造を採用するのではなく, Ω の定義関数 φ に対し $\sqrt{\varphi}$ が \overline{X} 上の滑らかな関数と見なされるようにする. この操作を Epstein–Melrose–Mendoza [12] は「 $\overline{\Omega}$ の平方根をとる」と言っている.

未知計量 g' を $g + C_\delta^{2,\alpha}(S^2T^*X)$ の中で考える限り，方程式 $\mathcal{E}(g') = 0$ の解は自動的に $\mathcal{B}_g g' = 0$ を満たし，したがって Einstein 計量になる．

この準備のもとで， $\partial\Omega$ の標準的な CR 構造 J_{std} の $C^{2,\alpha}$ 近傍 $\mathcal{J}^{2,\alpha}$ をとり，

$$\mathcal{J}^{2,\alpha} \oplus C_\delta^{2,\alpha}(S^2T^*X) \rightarrow \mathcal{J}^{2,\alpha} \oplus C_\delta^{0,\alpha}(S^2T^*X), \quad (J, \sigma) \mapsto (J, \mathcal{E}_{g_J}(g_J + \sigma)) \quad (4.1)$$

に $(J_{\text{std}}, 0)$ において逆写像定理を適用することを考える．ただし g_J は $J \in \mathcal{J}^{2,\alpha}$ を共形無限遠とする漸近的複素双曲計量で， J に関して滑らか，かつ $g_{J_{\text{std}}}$ が Cheng–Yau 計量に一致するようにしておく．もし $(J_{\text{std}}, 0)$ の近傍で (4.1) が逆写像を持つならば， $(J, 0)$ の逆像を (J, σ) とすれば， $g' = g_J + \sigma$ が求める Einstein 計量となる．こうして，われわれの証明すべきことは次の同型定理になった．

主張．有界強擬凸領域 Ω 上の Cheng–Yau 計量 g について，ある $\delta > 0$ に関し

$$\mathcal{E}'\sigma = \frac{1}{2}(\nabla^*\nabla - 2\mathring{R}): C_\delta^{2,\alpha}(S^2T^*X) \rightarrow C_\delta^{0,\alpha}(S^2T^*X) \quad (4.2)$$

は Banach 空間の同型写像である．

ここからの議論は純粋に偏微分方程式論的なものになると思うかもしれないが，実はそうではなく，微分作用素 \mathcal{E}' が「幾何的に定義されたもの」であることを利用する．複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ において \mathcal{E}' の性質をじっくり考察し，それを複素双曲アトラスを用いて「貼り合わせ」て一般の Ω における主張を得るのである．

見通しをよくするために，「幾何的に定義された」微分作用素の概念を一般的に導入しておく． g を (H, J) を共形無限遠とする X 上の漸近的複素双曲計量とする．簡単のため， $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ という形の線型微分作用素のみを考える．

定義 3. (X, g) 上の線型微分作用素 $P: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ が幾何的であるとは，次が成り立つことをいう．

- (i) E は \mathbb{R} 上のある有限次元 $O(2n)$ 表現 V に付随するベクトル束．
- (ii) P は，主 $O(2n)$ 接続から誘導される E の自然な接続によって，局所座標，局所枠の取り方や (X, g) に依存しない普遍的な表示で与えられる．

以下， P を m 階の幾何的楕円型線型微分作用素で，(形式的) 自己共役性を持つものとする．特にこれを $\mathbb{C}H^n$ で考えることができる．単位開球モデルを採用して $\mathbb{C}H^n$ を B^n と同一視し， $x = \sqrt{1 - |z|^2}$ によって $B^n \setminus \{0\}$ をさらに $S^{2n-1} \times (0, 1)$ と同一視する．

重みつき Hölder 空間に関する P の mapping properties はその「動径方向成分」によって決まっている．「動径方向成分」を代数的なものとして取り出すために，次のような操作を行う． V を原点 $0 \in B^n$ におけるファイバー E_0 と同一視し，原点を始点とする測地線 γ をひとつ固定して (たとえば $\text{Re } z^1$ 軸方向の測地線としてよい)，それに沿った平行移動によってファイバー $E_{\gamma(t)}$ を $E_0 = V$ と同一視する．さらに $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$ という表示により， $E|_{S^{2n-1} \times (0,1)}$ のセクションを $U(n) \times (0, 1)$ 上の $U(n-1)$ 同変な V 値関数とみなす．すると具体的な計算によって， P は

$$P = a_0(x\partial_x)^m + a_1(x\partial_x)^{m-1} + \cdots + a_m + O(x) \quad \text{as } x \rightarrow 0 \quad (4.3)$$

という形で表されることがわかる。ただし各 a_i は $\text{End}_{U(n-1)}(V)$ の元である。

上記の表示 (4.3) から、ある種の δ に対しては

$$P: C_\delta^{m,\alpha}(E) \rightarrow C_\delta^{0,\alpha}(E)$$

は同型写像にはならないことが期待される。実際、 $u \sim x^\delta u_0$ ($u_0 \in V$) というセクションを考えると、(4.3) によって

$$Pu \sim x^\delta((a_0 u_0)\delta^m + (a_1 u_0)\delta^{m-1} + \cdots + (a_m u_0))$$

である。もし $I(\delta) = a_0 \delta^m + a_1 \delta^{m-1} + \cdots + a_m \in \text{End}_{U(n-1)}(V)$ が全射でなければ、 $C_\delta^{0,\alpha}(E)$ には少なくとも、 $u \sim x^\delta u_0$ という形のセクションの像にはならない元がある。

$\text{End}_{U(n-1)}(V)$ 係数多項式

$$I(s) := a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m$$

を P の**特性多項式**といい、 $I(s)$ が同型写像とならない s を**特性ウェイト**と呼ぶ。 P の自己共役性により、特性ウェイトは直線 $\text{Re } s = n$ に関して対称に現れる*8。 $|\text{Re } s - n|$ の最小値を P の**特性半径**と呼ぶ。

L^2 空間において方程式 $Pu = v$ (ここで $v \in L^2(E)$ とする) が一意的に解けるという仮定のもとで、次に述べる肯定的結果が得られる。この仮定は $P: H^m(E) \rightarrow L^2(E)$ が Hilbert 空間の同型写像となることと同値で、そのための条件は、

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|Pu\|_{L^2} \quad (4.4)$$

となる定数 $C > 0$ が存在することである。これを P に対する強圧性評価という。

補題. P の特性半径を $R > 0$ とし、また $\mathbb{C}H^n$ において (4.4) が成り立つと仮定する。そのとき、 $\delta \in (n - R, n + R)$ に対し、 $\mathbb{C}H^n$ における

$$P: C_\delta^{k,\alpha}(E) \rightarrow C_\delta^{k-m,\alpha}(E)$$

は Banach 空間の同型写像である。

こうして得られた複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ における P^{-1} を複素双曲アトラスを用いて貼り合わせることで、一般の漸近的複素双曲空間においても P のパラメトリクスが構成できる。さらに次が成り立つ。

定理 3 (Biquard [3]). P を漸近的複素双曲空間 (X, g) 上の形式的自己共役 m 階幾何的楕円型線型微分作用素とし、その特性半径を $R > 0$ とする。さらに P が $\mathbb{C}H^n$ において強圧性評価 (4.4) を満たすと仮定する。そのとき、 $\delta \in (n - R, n + R)$ に対し

$$P: C_\delta^{k,\alpha}(E) \rightarrow C_\delta^{k-m,\alpha}(E)$$

の核と余核はいずれも有限次元で (つまり P は Fredholm 作用素で)、それらの次元は一致する。さらに自然な同一視 $\ker P = \ker_{(2)} P$ がある。ただし $\ker_{(2)} P$ は P を $L^2(E)$ 上の非有界作用素とみなしたときの核である。

*8 この n というのは $C_\delta^0(E) \subset L^2(E)$ となるような δ の下限である。

したがって、同型定理を得るために必要なのは

- (i) $\mathbb{C}H^n$ における強圧性評価
- (ii) 特性半径 R の計算
- (iii) $\ker_{(2)} P$ の消滅の証明

ということになる。線型化 Einstein 作用素 \mathcal{E}' については (i) は (4.2) から明らかで、(ii) も長いが単純な計算によって $R = n$ とわかる (これは [29] にある)。したがって、十分小さい $\delta > 0$ は Fredholm レンジ $(0, 2n)$ に入る。こうして、 $\ker_{(2)} \mathcal{E}'$ の考察が最後に残る。

5 Einstein 計量の変形

前節までの考察によって、われわれの定理の証明は次の命題に帰着された。

命題. $n \geq 3$ とする。そのとき、有界強擬凸領域 Ω 上の Cheng–Yau 計量 g に対して、線型化 Einstein 作用素 \mathcal{E}' の L^2 -kernel は自明である。

ここからの考察は論文 [30] を参照してほしい。ここではアイデアのみを述べる。

- 小磯 [24] の観察により、 \mathcal{E}' は正則接束 $T^{1,0}\Omega$ に値を持つ $(0, 1)$ 形式に作用する Dolbeault ラプラシアン $\Delta_{\bar{\partial}}$ (の部分空間への制限) と同一視される。それによって、命題は Cheng–Yau 計量に関する $H_{(2)}^{0,1}(\Omega; T^{1,0}\Omega)$ の消滅に帰着される。
- これを、 L^2 コホモロジーの完全列 (大沢 [31] にある) とコンパクト台コホモロジーの消滅 (Andreotti–Vesentini [1] の結果) を用いて、境界近傍における L^2 評価に帰着する。
- Morrey–Kohn–Hörmander 評価を強擬凹領域にも適用可能にする Hörmander のテクニック [20] がある (Folland–Kohn [14] も参照)。これを用いて境界近傍における L^2 評価を行う。漸近的複素双曲性が再び重要な役割を果たす。
- $n = 3$ の場合には以上だけではうまくいかないので、Biquard の定理 3 を再利用し、 $\ker_{(2)} \mathcal{E}'$ の消滅を重みつき L^2 評価に帰着して上述のテクニックを適用する。

こうしてわれわれの定理が得られる。

参考文献

- [1] A. Andreotti and E. Vesentini, Carleman estimates for the Laplace–Beltrami equation on complex manifolds, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **25** (1965), 81–130.
- [2] E. Bedford, S. Bell, and D. Catlin, Boundary behavior of proper holomorphic mappings, *Michigan Math. J.* **30** (1983), no. 1, 107–111.
- [3] O. Biquard, Métriques d’Einstein asymptotiquement symétriques, *Astérisque* **265** (2000), vi+109.
- [4] O. Biquard and R. Mazzeo, A nonlinear Poisson transform for Einstein metrics on product spaces, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **13** (2011), no. 5, 1423–1475.
- [5] S. Bochner, Analytic and meromorphic continuation by means of Green’s formula, *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), 652–673.
- [6] D. Burns and C. L. Epstein, Characteristic numbers of bounded domains, *Acta Math.* **164** (1990), no. 1-2, 29–71.

- [7] D. Burns Jr., S. Shnider, and R. O. Wells Jr., Deformations of strictly pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **46** (1978), no. 3, 237–253.
- [8] D. M. Burns Jr. and C. L. Epstein, A global invariant for three-dimensional CR-manifolds, *Invent. Math.* **92** (1988), no. 2, 333–348.
- [9] J. S. Case and P. Yang, A Paneitz-type operator for CR pluriharmonic functions, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **8** (2013), no. 3, 285–322.
- [10] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman’s equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 4, 507–544.
- [11] S. S. Chern and J. K. Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, *Acta Math.* **133** (1974), 219–271.
- [12] C. L. Epstein, R. B. Melrose, and G. A. Mendoza, Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains, *Acta Math.* **167** (1991), no. 1-2, 1–106.
- [13] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **26** (1974), 1–65.
- [14] G. B. Folland and J. J. Kohn, *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1972. Annals of Mathematics Studies, No. 75.
- [15] A. R. Gover and C. R. Graham, CR invariant powers of the sub-Laplacian, *J. Reine Angew. Math.* **583** (2005), 1–27.
- [16] C. R. Graham, Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation, *Compositio Math.* **64** (1987), no. 2, 133–155.
- [17] K. Hirachi, Q -prime curvature on CR manifolds, *Differential Geom. Appl.* **33** (2014), no. suppl., 213–245.
- [18] K. Hirachi, T. Marugame, and Y. Matsumoto, Variation of total Q -prime curvature on CR manifolds, preprint. [arXiv:1510.03221](https://arxiv.org/abs/1510.03221).
- [19] P. D. Hislop, P. A. Perry, and S.-H. Tang, CR-invariants and the scattering operator for complex manifolds with boundary, *Anal. PDE* **1** (2008), no. 2, 197–227.
- [20] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Math.* **113** (1965), 89–152.
- [21] ———, *An introduction to complex analysis in several variables*, Third, North-Holland Mathematical Library vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [22] D. Jerison and J. M. Lee, The Yamabe problem on CR manifolds, *J. Differential Geom.* **25** (1987), no. 2, 167–197.
- [23] J. J. Kohn and H. Rossi, On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, *Ann. of Math. (2)* **81** (1965), 451–472.
- [24] N. Koiso, Einstein metrics and complex structures, *Invent. Math.* **73** (1983), no. 1, 71–106.
- [25] J. M. Lee, Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **183** (2006), no. 864, vi+83.
- [26] T. Marugame, Renormalized Chern-Gauss-Bonnet formula for complete Kähler-Einstein metrics, to appear in *Amer. J. Math.* [arXiv:1309.2766](https://arxiv.org/abs/1309.2766).
- [27] Y. Matsumoto, *Asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics and CR geometry*, Ph.D. Thesis, 2013. The University of Tokyo.
- [28] ———, Asymptotics of ACH-Einstein metrics, *J. Geom. Anal.* **24** (2014), no. 4, 2135–2185.
- [29] ———, GJMS operators, Q -curvature, and obstruction tensor of partially integrable CR manifolds, to appear in *Diff. Geom. Appl.* [arXiv:1402.4110](https://arxiv.org/abs/1402.4110).
- [30] ———, Deformation of Einstein metrics and L^2 -cohomology on strictly pseudoconvex domains, in preparation.
- [31] T. Ohsawa, Applications of the $\bar{\partial}$ technique in L^2 Hodge theory on complete Kähler manifolds, *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 413–425.

Homogeneous pseudoconvex Reinhardt domains in \mathbf{C}^3

木村 光一

概要

A homogeneous Reinhardt domain in \mathbf{C}^* coincides with \mathbf{C}^* . Generalizing this fact, we showed that a homogeneous pseudoconvex Reinhardt domain in $(\mathbf{C}^*)^n$ coincides with $(\mathbf{C}^*)^n$. Conversely, we investigate pseudoconvex reinhardt domains containing the origin in \mathbf{C}^3 this time, and we decide Liouville foliations which can be defined on them. From this, when the preceeding domains are homogeneous, we classify these domains by means of algebraic equivalence and determine thier canonical forms.

1. 基本予想

\mathbf{C}^n 内の領域は、各座標軸のまわりの回転に関して不変なとき、Reinhart 領域であるという。とくに、等質な擬凸 Reinhardt 領域は代数的同値性によって次のように分類されるだろうと予想されている。

\mathbf{C}^n 内の等質な擬凸 Reinhardt 領域 D は、負でない整数 k, l, m と正の整数 n_1, \dots, n_k ($n_1 + \dots + n_k + l + m = n$) が存在して、直積領域 $B_{n_1} \times \dots \times B_{n_k} \times \mathbf{C}^l \times (\mathbf{C}^*)^m$ と代数的同値である。ただし、 B_{n_k} は n_k 次元単位球体である。

ここで、 \mathbf{C}^n 内の二つの領域が代数的同値であるとは、両者の間に $(\mathbf{C}^*)^n$ の正則自己同型 $(z_i) \mapsto (w_i)$:

$$w_i = \alpha_i z_i^{a_{i1}} \cdots z_n^{a_{in}} \quad ((a_{ij}) \in GL(n, \mathbf{Z}), (\alpha_i) \in (\mathbf{C}^*)^n; i = 1, \dots, n)$$

が惹き起こす正則同型写像が存在することである。 D が有界の場合には、その上の正則自己同型群はコンパクト開位相に関してリー群をなし D にリー変換群として作用する、というカルタンの定理にもとづいて解決済みである ([2])。したがって、非有界の場合だけが問題として残されている。そこで、初めに D が $(\mathbf{C}^*)^n$ 内にある場合に問題を限定して次の結果を得た ([5])。

定理 1 $(\mathbf{C}^*)^n$ 内の等質な擬凸 Reinhardt 領域は $(\mathbf{C}^*)^n$ それ自身である。

もし結論がなりたたなければ、 D の正則自己同型をその普遍被覆空間に持ち上げると、持ち上げのある成分がアフィン変換になることを示すのが証明の要点である。

2. 主定理

次に、定理 1 の条件と対照的な、領域 D が座標原点を含むという条件のもとで、しかも次元を複素 3 次元に限定して、次の結果を得た。

定理 2 \mathbf{C}^3 内の原点を含む非有界かつプロパーで等質な擬凸 reinhardt 領域 D は、 $B_1 \times B_1 \times \mathbf{C}, B_2 \times \mathbf{C}, B_1 \times \mathbf{C}^2$ のうちいずれか一つと代数的同値である。

この場合は、 D は非有界であるからカルタンの定理は使えない。 D 上の正則自己同型群が大きすぎてリー群の構造を持ってないからである。そこで清水 ([3], [4]) はリュール葉層の概念を提唱した。

M を複素多様体とする。 M の部分集合の族 $\mathcal{F} = \{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が次の条件を満たすとき、 \mathcal{F} を M 上のリュール葉層という。

(L1) $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ならば、 $\Sigma_{\alpha_1} \cap \Sigma_{\alpha_2} = \emptyset$

(L2) $\bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha = M$

(L3) M 上の任意の有界な多重劣調和関数は、各 Σ_α 上で一定値をとる。

(L4) 各 $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) に対して M 上の有界な多重劣調和関数が存在して、 Σ_{α_1} 上でとる一定値と Σ_{α_2} 上でとる一定値が異なる。

任意の複素多様体はただ一つのリュール葉層を持ち、リュール葉層の正則同型による像は再びリュール葉層になる。従って、 D のリュール葉層が非特異な葉と特異な葉を同時に含めば、 D は等質ではありえない。この原理による篩にかけるために、 D のタイプに応じてリュール葉層を具体的に決定することを試みた。その結果、完全ではないが 定理 2 を証明するには十分な結果に到達した。

参考文献

- [1] K.Kimura, Homogeneous Reinhardt domains in the three-dimensional complex space, preprint
- [2] S.Shimizu, Automorphisms of bounded Reinhardt domains, Japan. J. Math. 15 (1989), 385-414.
- [3] S.Shimizu Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in C^2 , Osaka J. Math. 28 (1991), 609-621.
- [4] S.Shimizu Holomorphic equivalence problem for a certain class of unbounded Reinhardt domains in C^2 , II, Kodai Math. J. 15 (1992), 430-444.
- [5] S.Shimizu and K.Kimura Homogeneous Reinhardt domains containing no coordinate hyperplanes, Kodai Math. J. 37 (2014) 235-245

Yet another proof of Poincaré's theorem on the inequivalence of the unit ball and the polydisk

山盛厚伺 (名大多元数理)*

1. 背景

Poincaréの定理は、多変数複素関数論の黎明期における重要な結果の一つである。

定理 1 (Poincaré). $n > 1$ のとき単位球 \mathbb{B}^n と多重円盤 \mathbb{D}^n は双正則同値ではない。

本講演の目的は、この定理の別証明を次の (i), (ii), (iii) に基づいて与えることである (未定義の記号等は講演で導入する)。

(i) 2つの領域の Bergman 核の表示式

(ii) 単位球の等質性

(iii) 関数 $G_D(z) = K_D(z, z) / \det T_D(z, z)$ の双正則不変性

(i.e. 双正則写像 $f : D \rightarrow D'$ に対し $G_D(z, z) = G_{D'}(f(z), f(z))$ が成立)

例 1. \mathbb{B}^2 と \mathbb{D}^2 の Bergman 核は次で与えられる (計算方法は例えば [1] を参照)。

$$K_{\mathbb{B}^2}(z, w) = \frac{2!}{\pi^2(1 - \langle z, w \rangle)^3}, \quad K_{\mathbb{D}^2}(z', w') = \frac{1}{\pi^2(1 - z'_1 \bar{w}'_1)^2(1 - z'_2 \bar{w}'_2)^2}.$$

2. 証明 ($n = 2$ の場合)

$\mathbb{B}^2 \simeq \mathbb{D}^2$ と仮定すると、(ii) より双正則写像 $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ で $f(0) = 0$ なものが存在する。従い、(iii) より $G_{\mathbb{B}^2}(0, 0) = G_{\mathbb{D}^2}(0, 0)$ となるはずだが、例 1 より左辺は $2/9\pi^2$ 、右辺は $1/4\pi^2$ なので矛盾が生じた。□

3. いくつかの注意

注意 1. 論文 [3] および本予稿では簡単のため $n = 2$ の場合のみ扱ったが、一般の n でも同様の証明が適用可能である。講演の際には、一般の n における証明を与える。なお、上記の $n = 2$ の証明から容易に推測されるように、一般の場合の証明で異なる点は $G_{\mathbb{B}^n}(0, 0), G_{\mathbb{D}^n}(0, 0)$ の値に関するところだけである。

注意 2. 「この証明方法が他の領域 D_1, D_2 間の正則同値問題に適用可能か？」が自然な問題として考えられる。有界対称領域であれば上記 (i), (ii), (iii) と同様の性質を持っているので、類似の手法が適用されると期待できる。一方、(本予稿執筆の時点では) これ以外の領域のクラスは発見できていない。まず、考察する対象が等質でない場合には $f(0) = 0$ なる双正則写像の存在性が保証されない。関数 $K_D(z, z) / \det T_D(z, z)$ の双正則不変性は一般的事実なので問題は生じないが、前述のような f の存在が保証されないので、

$$K_{D_1}(0, 0) / \det T_{D_1}(0, 0) = K_{D_2}(f(0), f(0)) / \det T_{D_2}(f(0), f(0))$$

までしか導けない ($D_1 \simeq D_2$ という仮定の下)。

* e-mail: ats.yamamori@gmail.com

従い, 上記証明で行ったような「関数 $K_D(z, z)/\det T_D(z, z)$ の原点での値の比較」と同じ論法は適用できない. そして, Bergman 核自体が一般に計算困難な対象なので $K_D(z, z)/\det T_D(z, z)$ も同じく計算困難な関数となる.

例えば, 論文 [2] において複素楕円体

$$D_p = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^{p_1} + \dots + |z_n|^{p_n} < 1\}, \quad (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$$

の正則同値問題が解かれた. 「この結果の Bergman 核の理論に基づいた別証明が存在するか」という問題が考えられるが上記で記した理由などにより, いまのところ成功していない.

以上をふまえ次を問題として記述しておく.

問題 1. 双正則不変な関数 G_D を用いて, 双正則同値問題が解決可能な領域のクラスを発見せよ.

参考文献

- [1] R. E. Greene, K.-T. Kim and S.G. Krantz, *The Geometry of Complex Domains*. Progress in Mathematics, Vol. 291, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2011.
- [2] I. Naruki, *The holomorphic equivalence problem for a class of Reinhardt domains*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 4 (1968), 527–543.
- [3] A. Yamamori, *Yet another proof of Poincaré’s theorem*, Amer. Math. Monthly, to appear.

Radius of univalence and related problems in complex Hilbert spaces

Tatsuhiro HONDA (Hiroshima Institute of Technology, Japan)*¹
 Ian GRAHAM (University of Toronto, Canada)
 Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University, Japan)*²
 Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University, Romania)
 Kwang Ho SHON (Pusan National University, Korea)

Let X be a complex Banach space, B be the open unit ball of X , and let $H(B)$ be the set of holomorphic mappings from B into X . For $z \in X \setminus \{0\}$, we define

$$T(z) = \{l_z \in L(X, \mathbb{C}) : l_z(z) = \|z\|, \|l_z\| = 1\}.$$

Then $T(z) \neq \emptyset$ in view of the Hahn-Banach theorem.

We recall the Carathéodory family in $H(B)$:

$$\mathcal{M} = \{h \in H(B) : h(0) = 0, Dh(0) = I, \Re l_z(h(z)) > 0, z \in B \setminus \{0\}, l_z \in T(z)\}.$$

If $X = \mathbb{C}$, it is clear that $f \in \mathcal{M}$ if and only if $f(z)/z \in \mathcal{P}$, where

$$\mathcal{P} = \{p \in H(U) : p(0) = 1, \Re p(z) > 0, z \in U\}$$

is the Carathéodory family on the unit disc U in \mathbb{C} .

The following family of holomorphic mappings on B is a natural generalization of the Carathéodory family \mathcal{M} . This family was introduced by Graham, Hamada and Kohr (see [4]) in the case $X = \mathbb{C}^n$, and played an important role in the study of normalized biholomorphic mappings on the unit ball in \mathbb{C}^n (see [4], [9], [11], [12]).

Definition 1. Let $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ be a univalent function such that $g(0) = 1$. Also, let $h : B \rightarrow X$ be a normalized holomorphic mapping. We say that h belongs to the family \mathcal{M}_g if

$$\frac{1}{\|z\|} l_z(h(z)) \in g(U), \quad z \in B \setminus \{0\}, \quad l_z \in T(z). \quad (1)$$

Remark 2. Obviously, if $\Re g(\zeta) > 0$, $\zeta \in U$, then $\mathcal{M}_g \subseteq \mathcal{M}$. Also, if $g(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\zeta \in U$, then $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}$. However, there are other choices of g which provide interesting properties of the set \mathcal{M}_g (see [4], [9], [12]).

Definition 3. Let $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ be a univalent function such that $g(0) = 1$. Also, let $f : B \rightarrow X$ be a normalized holomorphic mapping. We say that f belongs to the family \mathcal{R}_g if $h \in \mathcal{M}_g$, where $h(z) = Df(z)(z)$, $z \in B$. The family \mathcal{R}_{g_0} is denoted by \mathcal{R} , where $g_0(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $|\zeta| < 1$.

In this talk, we are concerned with certain radius problems for holomorphic mappings in the family \mathcal{R}_g [3]. Analogous results may be also obtained for the family \mathcal{M}_g

This work has been supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151.

2000 Mathematics Subject Classification: 32H99, 30C45, 46G20.

Keywords: biholomorphic, convex, parametric representation, starlike .

*¹e-mail: thonda@cc.it-hiroshima.ac.jp

*²e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp

(compare with [5], in the case $X = \mathbb{C}^n$). Various results related to radius of univalence, parametric representation, starlikeness or convexity in the Euclidean unit ball \mathbb{B}^n in \mathbb{C}^n , were considered in [5] (see also [16]; see [18], in the case $n = 1$).

References

- [1] F. Bracci, M. Elin, D. Shoikhet, Growth estimates for pseudo-dissipative holomorphic maps in Banach spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.* 15 (2014) 191–198.
- [2] P. Duren, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables, *Math. Ann.* 347 (2010) 411–435.
- [3] I. Graham, H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, K. H. Shon, Growth, distortion and coefficient bounds for Carathéodory families in \mathbb{C}^n and complex Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 416-1 (2014) 449 – 469.
- [4] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Parametric representation of univalent mappings in several complex variables, *Canadian J. Math.* 54(2) (2002) 324–351.
- [5] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, Radius problems for holomorphic mappings on the unit ball in \mathbb{C}^n , *Math. Nachr.* 279 (2006) 1474–1490.
- [6] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Parametric representation and asymptotic starlikeness in \mathbb{C}^n , *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008) 3963–3973.
- [7] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Asymptotically spirallike mappings in several complex variables, *J. Anal. Math.* 105 (2008) 267–302.
- [8] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, Univalent subordination chains in reflexive complex Banach spaces, *Contemp. Math.* 591 (2013) 83–111.
- [9] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.
- [10] H. Hamada, Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables, *J. Math. Anal. Appl.* 381 (2011) 179–186.
- [11] H. Hamada, T. Honda, Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables, *Chinese Ann. Math. Ser.B* 29 (2008) 353–368.
- [12] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, Growth theorems and coefficient bounds for univalent holomorphic mappings which have parametric representation, *J. Math. Anal. Appl.* 317 (2006) 302–319.
- [13] H. Hamada, G. Kohr, Φ -like and convex mappings in infinite dimensional spaces, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* 47 (2002) 315–328.
- [14] H. Hamada, G. Kohr, Loewner chains and the Loewner differential equation in reflexive complex Banach spaces, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 49 (2004) 247–264.
- [15] L. Hörmander, On a theorem of Grace, *Math. Scand.* 2 (1954) 55–64.
- [16] M.S. Liu, Y. Zhu, The radius of convexity and a sufficient condition for starlike mappings, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 35(2) (2012) 425–433.
- [17] T.H. MacGregor, Functions whose derivative has a positive real part, *Trans. Amer. Math. Soc.* 104 (1962) 532–537.
- [18] C. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [19] W. Rogosinski, On the coefficients of subordinate functions, *Proc. London Math. Soc.* 48 (1943) 48–82.

Variation of Loewner chains, extreme and support points in the class S^0 in several complex variables

Filippo BRACCI (Università di Roma“Tor Vergata”)
 Ian GRAHAM (University of Toronto)
 Hidetaka HAMADA (Kyushu Sangyo University)*¹
 Gabriela KOHR (Babeş-Bolyai University)

This talk is an announcement of [3]. Let $\mathbb{B}^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|^2 < 1\}$ denote the Euclidean unit ball of \mathbb{C}^n . Let $S := \{f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : f(0) = 0, df_0 = \text{id}, f \text{ univalent}\}$ be the class of normalized univalent mappings in \mathbb{B}^n .

For $n = 1$, the class S is compact, and a great variety of extremal problems have been studied ([4], [10], [11], [14], [16]). Also, for $n = 1$, every $f \in S$ can be embedded into a normalized Loewner chain ([11]). Much is known about the structure of extreme points and support points of linear problems, in particular they are single-slit mappings (see [4, p. 286-288 and 306-307]).

For $n > 1$, the class S is not compact, and it is not known whether every element in S can be embedded into a normalized Loewner chain. Partial results on this can be found in [1], [5], [9]. The compact subclass S^0 of S of mappings admitting parametric representation was introduced in [5]; it was first considered by Poreda ([12], [13]) on the polydisc. We note that $S^0 = S$ for $n = 1$.

In this talk, we will focus on linear problems where some recent progress has been made in identifying mappings which are or which are not support points or extreme points ([2], [6], [7], [15], [17]). It is proved in [2] that there exist bounded support points of S^0 for $n = 2$.

The aim of this talk is to define a natural class of normalized Loewner chains, “geräumig”, which allow to construct other normalized Loewner chains having the property that from a certain time on, they coincide with the initial Loewner chain. This variational method seems to be completely new and seems to adapt well to the case of bounded univalent mappings of \mathbb{B}^n having some regular extension up to $\partial\mathbb{B}^n$.

Proposition 1 *Let $(f_t)_{t \geq 0}$ be a normalized Loewner chain on \mathbb{B}^n . Let $0 \leq T_1 < T_2 \leq \infty$ and $a \in (0, 1]$. Then, the following conditions are equivalent:*

1. *For a.e. $t \in [T_1, T_2)$ and for all $z \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, it holds*

$$\Re \left\langle [d(f_t)_z]^{-1} \frac{\partial f_t}{\partial t}(z), \frac{z}{\|z\|^2} \right\rangle \geq a. \quad (1)$$

2. *For all $T_1 \leq s < t < T_2$, it holds*

$$\|f_t^{-1}(f_s(z))\| \leq e^{a(s-t)} \|z\|, \quad \text{for all } z \in \mathbb{B}^n. \quad (2)$$

Definition 2 *Let $(f_t)_{t \geq 0}$ be a normalized Loewner chain on \mathbb{B}^n . We say that $(f_t)_{t \geq 0}$ is exponentially squeezing in $[T_1, T_2)$, for $0 \leq T_1 < T_2 \leq +\infty$ (with squeezing ratio $a \in (0, 1]$) if condition (1)—or equivalently (2)—holds.*

Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 25400151

*¹e-mail: h.hamada@ip.kyusan-u.ac.jp

web: <http://www.ip.kyusan-u.ac.jp/J/kougaku/tb/hamada/>

Let A be an $n \times n$ matrix. We let $\mu(A) := \min_{\|v\|=1} \|A(v)\|$.

Definition 3 Let $(f_t)_{t \geq 0}$ be a normalized Loewner chain on \mathbb{B}^n . We say that $(f_t)_{t \geq 0}$ is geräumig¹ in $[T_1, T_2)$, for some $0 \leq T_1 < T_2 \leq +\infty$, if there exist $a, b > 0$ such that

1. for all $t \in [T_1, T_2)$ and for all $z \in \mathbb{B}^n$, it holds $\mu(d(f_t)_z) \geq a$,
2. for a.e. $t \in [T_1, T_2)$ and for all $z \in \mathbb{B}^n$, it holds $\left\| \frac{\partial f_t}{\partial t}(z) \right\| \leq b$,
3. $(f_t)_{t \geq 0}$ is exponentially squeezing in $[T_1, T_2)$.

We say that $(f_t)_{t \geq 0}$ is geräumig if it is geräumig in $[0, +\infty)$.

References

- [1] L. Arosio, F. Bracci, E. F. Wold, *Embedding univalent functions in filtering Loewner chains in higher dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), no. 4, 1627–1634.
- [2] F. Bracci, *Shearing process and an example of a bounded support function in $S^0(\mathbb{B}^2)$* , Comput. Methods Funct. Theory. 15 (2015), 151–157.
- [3] F. Bracci, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Variation of Loewner chains, extreme and support points in the class S^0 in higher dimensions*, Constr. Approx., to appear.
- [4] P. Duren, *Univalent functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [5] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canad. J. Math. 54 (2002), 324–351.
- [6] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Extreme points, support points, and the Loewner variation in several complex variables*, Sci. China Math. 55 (2012), 1353–1366.
- [7] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Extremal properties associated with univalent subordination chains in \mathbb{C}^n* , Math. Ann. 359 (2014), 61–99.
- [8] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Support points and extreme points for mappings with A -parametric representation in \mathbb{C}^n* , J. Geom. Anal., to appear.
- [9] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and parametric representation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl. 281 (2003), 425–438.
- [10] D.J. Hallenbeck, T.H. MacGregor, *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman, Boston, 1984.
- [11] Ch. Pommerenke, *Univalent functions. With a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen*, Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [12] T. Poreda, *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in \mathbb{C}^n which have the parametric representation, I - the geometrical properties*, Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska, Sect A 41 (1987), 105–113.
- [13] T. Poreda, *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc which have the parametric representation, II - necessary and sufficient conditions*, Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska, Sect A 41 (1987), 114–121.
- [14] O. Roth, *Control Theory in $\mathcal{H}(\mathbb{D})$* , Diss. Bayerischen Univ. Würzburg, 1998.
- [15] O. Roth, *Pontryagin’s maximum principle for the Loewner equation in higher dimensions*, Canadian J. Math. 67 (2015), 942–960.
- [16] A. C. Schaeffer, D. C. Spencer, *Coefficient Regions for Schlicht Functions*, AMS Coll. Series, 1950.
- [17] S. Schleissinger, *On support points of the class $S^0(B^n)$* , Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), 3881–3887.

¹ “geräumig” is a German word which means “spacious”

トロイダル群上の等質直線束の断面のコ ホモロジー群

阿部幸隆（富山大学大学院理工学研究部（理学））

Let X be a toroidal group. The cohomology groups $H^p(X, \mathcal{O})$ ($p \geq 1$) were completely determined by Kazama. The next problem is to determine $H^p(X, \mathcal{O}(L))$ for any holomorphic line bundle L over X . If X is compact, i.e. a complex torus, then we know the cohomology groups $H^p(X, \mathcal{O}(L))$ for any L . The general result is known as the Index theorem. In this case we need tools which are valid for compact Kähler manifolds. Unfortunately, they are not applicable to non-compact toroidal groups.

In this talk we consider homogeneous line bundles L over a toroidal group $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ with $\text{rank } \Gamma = n + m$. It is known that X has the structure of principal $(\mathbb{C}^*)^{n-m}$ -bundle $\mu : X \rightarrow \mathbb{T}$ over an m -dimensional complex torus \mathbb{T} . We determine the cohomology groups $H^p(X, \mathcal{O}(L))$ for $p \geq 1$. The following three cases occur when L is not analytically trivial:

- (1) $H^p(X, \mathcal{O}(L)) = 0$ for $p \geq 1$,
- (2) $H^p(X, \mathcal{O}(L)) \cong H^p(\mathbb{T}, \mathcal{O})$ for $p \geq 1$,
- (3) $H^p(X, \mathcal{O}(L))$ is a non-Hausdorff Fréchet space, then, of infinite dimension for $1 \leq p \leq m$.

It seems to us that this result is the first step beyond the case of $H^p(X, \mathcal{O})$. When X is a complex torus, we know $H^p(X, \mathcal{O}(L)) = 0$ ($p \geq 1$) for any homogeneous line bundle L over X which is not analytically trivial. Our method gives another proof of this fact. We give examples which show that each of the above cases really occurs.

Nevanlinna type theorems for meromorphic functions on negatively curved Kähler manifolds

厚地 淳 (慶応義塾大学)*

ネヴァンリンナの第2主定理は、一般に次の形をとるものと期待される。

f を複素多様体 M 上の非定数有理形関数で、 $a_1, \dots, a_q \in \mathbf{P}(\mathbf{C})$ を異なる点とすると、

$$\sum_{k=1}^q m(r, a_k) + N_1(r) \leq 2T(r) + O(\log T(r)) + S(r)$$

が r の適当な非有界集合について成り立つ。ここで、 $O(\log T(r))$ の項に f に依存する項はすべて含まれ、 $S(r)$ は M のみによる。 $M = \mathbf{C}$ の時は、 $S(r) = \text{const.} \log r$ 、 M が単位円板の時は、 $-\log(1-r)$ ($0 < r < 1$) となるのは古典的である。完備ケーラー多様体の時も成立するが、一般的には $S(r)$ を M の幾何学的量を用いて簡明に表すのは難しいと思われる。defect relation を導くことを考えると、 $S(r) \ll T(r)$ の時は、 $\sum_k \delta(a_k) \leq 2$ となるので、 $S(r) \approx T(r)$ または、 $T(r) \uparrow \infty$ かつ $T(r) \ll S(r)$ の時が問題となる。このような状況をカバーするために、我々は古典的なネヴァンリンナ理論に現れる関数-近接関数、個数関数、特性関数-の類似を用いてネヴァンリンナ理論を再構築することを考える。

次のような状況を考える。

M を完備ケーラー多様体とし、次の曲率条件を満たすものとする。

(R $_{\beta}$) M の Ricci 曲率は $Ric_M \geq -Cr(x)^{\beta}$ を満たす。ただし、 $r(x)$ は、ある参照点 $x_0 \in M$ から x までの距離を表す。

(R $_2$) の下では、 M 上に $\partial/\partial t - \frac{1}{2}\Delta_M$ の基本解 $p(t, x, y)$ が存在し、保存的である。ここで、 Δ_M は M のケーラー計量から決まるラプラシアンである。 $p(t, x, y)$ は M 上のブラウン運動 X_t の推移関数でもある: $E_x[\phi(X_t)] = \int_M p(t, x, y)\phi(y)dv(y)$ ($\phi \in C_b(M)$). dv は M のリーマン体積から決まる測度、 E_x は $X_0 = x$ となるブラウン運動の法則 P_x による積分(期待値)である。これを用いて、近接関数、個数関数、特性関数の類似を次のように定義する。 $[w, a]$ を $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の弦距離とする。 $f(x) \neq a$ の時、

$$\tilde{m}_x(t, a) := E_x[\log[f(X_t), a]^{-2}] = \int_M p(t, x, y) \log[f(y), a]^{-2} dv(y),$$

$$\tilde{N}_x(t, a) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x(\sup_{0 \leq s \leq t} \log[f(X_s), a]^{-2} > \lambda),$$

$$\tilde{T}_x(t) := E_x\left[\int_0^t e(X_s) ds\right] = \int_0^t \int_M p(s, x, y) f^* \omega_{FS} \wedge \omega^{n-1} ds.$$

ただし、 $e(x) = f^* \omega_{FS} \wedge \omega^{n-1} / dv$ 。ここで、 ω_{FS} は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の Fubini-Study 計量の基本形式、 ω は M の基本形式である。

これらの量は有限とは限らないが、 $\tilde{T}_x(t) < \infty$ ならば、ほかの2者も有限である。これは次の第1主定理の類似からわかる。 $f(x) \neq a$ の時、

$$\tilde{m}_x(t, a) - \log[f(x), a]^{-2} + \tilde{N}_x(t, a) = \tilde{T}_x(t) \quad (t > 0).$$

* 〒 223-8521 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1 慶応義塾大学
e-mail: atsujikeio.jp

また、(R₂) の下では、 f が a を除外するならば $\tilde{N}_x(t, a) = 0$ ($\forall t > 0$) である。

さらに、

(S0) (リーマン多様体として) M の断面曲率は非正。

を仮定する。

$$\tilde{N}_x(t, Ric) = - \int_0^t \int_M R(y) p(t, x, y) dv(y),$$

とおく。ただし、 $R(x) = \inf_{|\xi|=1, \xi \in T_x M} Ric(\xi, \xi)$ 。また、

$$\tilde{N}_1(t, x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P_x \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \log^- e(X_s) > \lambda \right)$$

とおく。この時、次が成り立つ。

Theorem 1. 完備ケーラー多様体 M に対し、(S0), (R _{β}) ($\exists \beta < 2$) を仮定する。 f を M 上の非定数有理形関数とする。この時、次のいずれかは成立する。

(i)

$$\sum_{i=1}^q m(r, a_i) + N_1(r) \leq 2T(r) + o(T(r))$$

が $0 < r < \infty$ に関して長さ有限な集合を除いて成り立つ。

または、

(ii) 適当な $x \in M$ に対して

$$\sum_{i=1}^q \tilde{m}_x(t, a_i) + \tilde{N}_1(t, x) \leq 2\tilde{T}_x(t) + \tilde{N}_x(t, Ric) + O(\log \tilde{T}_x(t))$$

が $0 < t < \infty$ に関して長さ有限な集合を除いて成り立つ。

ここで、(i) の $m(r, a_i), N_1(r), T(r)$ は M の普遍被覆 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ 上の半径 r の測地球上で定義される近接関数、微分の零点の個数関数、特性関数である。古典的な場合は、これらは古典的な近接関数そのほかに、それぞれ定数差を除いて一致する。例えば、 $T(r)$ は次のように書ける。 \tilde{M} には M の計量から決まるケーラー計量を与え、この基本形式を $\tilde{\omega}$ とする。適当な $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ を固定する。

$$T(r) = \int_M g_r(\tilde{x}_0, y) f^* \omega_{FS} \wedge \tilde{\omega}^{n-1}.$$

ここで、 $g_r(x, y)$ は、 \tilde{M} の中心 \tilde{x}_0 、半径 $r > 0$ の測地球上のディリクレ境界条件を与えたときの $\Delta_{\tilde{M}}$ に関するグリーン関数である。(ii) の x は、 $\pi(\tilde{x}_0) = x$ と取ればよい。

Remark 2. 1. f が対数容量正の集合を除外しなければ、

$$T(r) \uparrow \infty \quad (r \rightarrow \infty), \quad \tilde{T}_x(t) \uparrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

がわかる。

2. (i) の場合の剰余項 $S(r)$ は、荒く評価すると、条件 (R _{β}) より $const \cdot r^{2+\beta}$ 以下となる。すなわち、この場合は $T(r) \gg r^{2+\beta}$ の場合を含む。

複素射影平面内の Levi 平坦面の曲率評価

足立 真訓 (東京理大・理工)*1
Judith Brinkschulte (Univ. Leipzig)*2

概 要

複素射影平面内の閉 Levi 平坦面の非存在予想は、多変数関数論、力学系理論、微分幾何学と関係する未解決問題である。我々はこの問題となっている Levi 平坦面が仮に存在したならば、従来知られているよりも強い曲率制約を受けられることを示した [4] ので、これを報告する。

1. 閉 Levi 平坦面の非存在予想

複素多様体 X 内の滑らかな実超曲面 M は、 X を局所的に両側 Stein に分ける時、**Levi 平坦面** と呼ばれる。Levi 平坦性は Levi 形式が M 上恒等的に消えることと同値であり、さらに M が X の非特異複素超曲面による非特異葉層 (**Levi 葉層**) を持つことと同値である。Levi 平坦面は、例えば、ある種の線織面内の平坦円周束のように、余次元1の正則葉層が保つ実超曲面として現れる。Levi 平坦面は多変数関数論だけでなく、正則葉層の力学系理論においても基本的な研究対象である。

1980年代から Poincaré–Bendixson の定理のアナログとして次が期待されている:

予想 複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ の余次元1の特異正則葉層を考える。どの葉の閉包にも葉層の特異点が含まれるであろう。

Cerveau (1993) により、この予想の大きな部分が次の予想に帰着された:

予想 $\mathbb{C}P^2$ 内に、実解析的な閉 Levi 平坦面は存在しないであろう。

高次元 $\mathbb{C}P^n$ ($n > 2$) における閉 Levi 平坦面の非存在は、実解析的な場合は Lins Neto (1999)、滑らかな場合も Siu (2000) により確立している。 $\mathbb{C}P^2$ の場合、種々の証明が報告されているが、そのいずれも不完全であり、現在も予想は未解決とみなされている。

2. 先行結果

滑らかな閉 Levi 平坦面 $M \subset \mathbb{C}P^2$ の存在を仮定し、 M の囲む領域(の片方)を Ω で表す。 $\mathbb{C}P^2$ に Fubini–Study 計量を与え、これを制限し M に Riemann 計量を与える。 M の単位法ベクトル場 ν を1つ取り、 M 上の Reeb ベクトル場 $\xi = -J\nu$ を考える (J で $\mathbb{C}P^2$ の可積分複素構造を表した)。 M の ξ, ξ 方向の Ricci 曲率 $\text{Ric}^M(\xi, \xi)$ を **総実 Ricci 曲率** と呼ぶ。本研究に先立ち、問題の Levi 平坦面について次の制約条件が知られていた:

- M 上に総実 Ricci 曲率 $\text{Ric}^M(\xi, \xi)$ が負となる点が存在する。 ([5])
- M の Levi 葉層の如何なる調和測度についても、Lebesgue 測度と絶対連続かつ密度関数が上下から正の定数で抑えられるということはない。 ([6])
- 補集合 Ω の Diederich–Fornaess 指数は $1/2$ を越えない。 ([7], [3])

本研究発表は科研費 (課題番号: 26800057) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 32V15; 32V40, 53B25, 53C12.

*1 e-mail: adachi_masanori@ma.noda.tus.ac.jp

*2 e-mail: brinkschulte@math.uni-leipzig.de

3. 主結果と証明のアイデア

我々はこれらの先行結果は、概ね同値な制約条件であることを観察した (論理的には [6] が最も強い. cf. [1], [2], [4, Appendix A]). そして、これらを以下の形で改善した.

主結果. $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ に Fubini–Study 計量を与え、 C^2 級閉 Levi 平坦面 $M \subset X$ の存在を仮定する. この時、 M 上には総実 Ricci 曲率 $\text{Ric}^M(\xi, \xi)$ が -4 以下となる点が存在する.

証明は、 M の囲む領域 Ω 上のある Bergman 空間に着目して行われる. K_X で $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の標準束 $\mathcal{O}(-3)$ を表す. 武内 (1964), 大沢–Sibony (1998) の結果から Ω は Stein かつ超凸であるので、標準的手法で K_X 値の Bergman 空間 $L^2(\Omega, K_X) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$ は無限次元と分かる. 一方で、我々は M 上で $\text{Ric}^M(\xi, \xi) > -4$ を仮定すると、問題の Bergman 空間 $L^2(\Omega, K_X) \cap \text{Ker } \bar{\partial}$ の有限次元性が導かれることを示し、矛盾を得た. その要点は、

1. Griffiths [8] に由来する評価式:

$$\int_{\Omega \setminus K} |s|^2 (-i\Theta(L) \wedge i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho + 2(i\partial\bar{\partial}\rho)^2) \lesssim \int_{\Omega \setminus K} |\bar{\partial}s|^2 dV_\omega.$$

ここで、 $(L, h) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$: Hermite 正則直線束, $K \Subset \Omega$: 十分大きな相対コンパクト領域, ω : Fubini–Study 形式, ρ : ω に関する $\partial\Omega$ への符号付距離関数であり、不等式の定数は、 $\bar{\Omega} \setminus K$ 内にコンパクト台を持つ L の C^∞ 級切断 s の取り方に寄らない.

2. 総実 Ricci 曲率の Levi 葉層の無限小ホロノミーとしての解釈: Ω の境界上、

$$2(i\partial\bar{\partial}\rho)^2 = -2i\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho = -\frac{1}{2}(2 - \text{Ric}^M(\xi, \xi))\omega \wedge i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho.$$

ここで α は上式左辺で定義される Levi 葉層に沿う $(1, 0)$ -形式で、Levi 葉層の無限小ホロノミーの大きさを ω に関して測る.

参考文献

- [1] M. Adachi, *A local expression of the Diederich–Fornaess exponent and the exponent of conformal harmonic measures*. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **46**, 65–79 (2015).
- [2] M. Adachi, *A CR proof for a global estimate of the Diederich–Fornaess index of Levi-flat real hypersurfaces*. Complex Analysis and Geometry, Springer Proc. Math. Stat., **144**, 41–48 (2015).
- [3] M. Adachi and J. Brinkschulte, *A global estimate for the Diederich–Fornaess index of weakly pseudoconvex domains*. To appear in Nagoya Math. J.
- [4] M. Adachi and J. Brinkschulte, *Curvature restrictions for Levi-flat real hypersurfaces in complex projective planes*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), published online; to appear in print.
- [5] A. Bejancu and S. Deshmukh, *Real hypersurfaces of $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ with non-negative Ricci curvature*. Proc. Amer. Math. Soc. **124**, 269–274 (1996).
- [6] B. Deroin, *Hypersurfaces Levi-plates immergées dans les surfaces complexes de courbure positive*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **38**, 57–75 (2005).
- [7] S. Fu, M.-C. Shaw, *The Diederich–Fornaess exponent and non-existence of Stein domains with Levi-flat boundaries*. J. Geom. Anal., published online; to appear in print.
- [8] Ph. A. Griffiths, *The extension problem in complex analysis. II. Embeddings with positive normal bundle*. Amer. J. Math. **88**, 366–446 (1966).

An optimal L^2 extension theorem on \mathbb{C}^n

Takeo Ohsawa

November 25, 2015

Graduate School of Mathematics Nagoya University

E-mail: *ohsawa@math.nagoya-u.ac.jp*

Abstract

For any plurisubharmonic function ϕ on \mathbb{C}^n , for any holomorphic function $f(z')$ on \mathbb{C}^{n-1} and for any positive number ϵ , there exists a holomorphic function $\tilde{f}(z)$ on \mathbb{C}^n satisfying

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\tilde{f}(z)|^2 e^{-\phi(z) - (1+\epsilon)\log(1+|z|^2)} \leq \frac{\pi}{\epsilon} \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z')|^2 e^{-\phi(z)}.$$

The estimate is optimal.

Limiting tangent spaces と local cohomology

田島 慎一 (筑波大学)*¹

鍋島 克輔 (徳島大学)*²

Parameter 付き local cohomology 系を利用することで, 孤立特異点を持つ超曲面の limiting tangent spaces を求め, 構造を解析することが可能となることを報告する.

1. Nash blow-up と limiting tangent space

X は, \mathbb{C}^n の原点 O の近傍とし, 正則関数 $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が定める超曲面 $S = \{x \in X | f(x) = 0\}$ は, 原点を孤立特異点として持つとする.

Non-singular な点 $x \in S - \{O\}$ に対し, そこでの超曲面 S の接空間 $T_x S$ を対応させる写像を, 法線ベクトルを利用して与える.

$$\text{grad}f : x \longrightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \in \mathbb{P}^{n-1}$$

ただし, $[\]$ は, 同値類をとる写像 $[\] : \mathbb{C}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ を表す. 写像 $\text{grad}f$ のグラフ $\text{graph}(\text{grad}f) \subset S \times \mathbb{P}^{n-1}$ の閉包を $\overline{\text{graph}(\text{grad}f)}$ で表す. 第一成分への射影 $S \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow S$ の定義域を制限することで, Nash blow-up

$$\nu : \overline{\text{graph}(\text{grad}f)} \longrightarrow S$$

を得る. この写像 ν の原点 O 上の fiber $\nu^{-1}(O)$ の第二成分を $K(S, O)$ で表す. この $K(S, O) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ を超曲面 S の limiting tangent space と呼ぶ. Limiting tangent space は特異点に関し, tangent cone より多くの情報を含んでいる.

2. B. Teissier の結果

原点 O を通る超平面を, 超平面を定める法線ベクトル $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ を用いて H_ξ で表し, 正則関数 f を超平面 H_ξ に制限して得られる関数を $f|_{H_\xi}$ で表す. 関数 $f|_{H_\xi}$ が原点を孤立特異点として持つ場合, その Milnor 数を $\mu^{(n-1)}(f|_{H_\xi})$ で表す. この時, Milnor 数 $\mu^{(n-1)}(f|_{H_\xi})$ は一般に, $[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1}$ に依存するが, 最小値

$$\min_{[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1}} \mu^{(n-1)}(f|_{H_\xi})$$

が存在する. この最小値を B. Teissier に従って, $\mu^{(n-1)}(f)$ で表す.

B. Teissier ([9, 10]) は, 射影空間 \mathbb{P}^{n-1} の部分集合

$$\{[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \mu^{(n-1)}(f|_{H_\xi}) = \mu^{(n-1)}(f)\}$$

本研究は科研費 (課題番号: 15K04891, 15K17513) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 32S05

キーワード: アルゴリズム, local cohomology system

*¹ 〒 305-8671 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数学科

e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

*² 〒 770-8502 徳島市南常三島町 1-1 徳島大学総合科学部

e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp

が, Zarisky open, dense であり, さらに

$$\{[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \mu^{(n-1)}(f|H_\xi) = \mu^{(n-1)}(f)\} = \mathbb{P}^{n-1} - K(S, O)$$

であることを示した.

定理 (B. Teissier) $[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1}$ に対し次は, 同値

- (i) $[\xi] \in K(V, O)$
- (ii) $\mu^{(n-1)}(f|H_\xi) > \mu^{(n-1)}(f)$

3. アルゴリズムの導出

函数 f を超平面 H_ξ に制限することで得られる函数を r_ξ で表しそのヤコビデアルを J_{r_ξ} で表す. 超平面 H_ξ の原点 O に台を持つ局所コホモロジーに属するコホモロジー類であり, 函数 r_ξ のヤコビデアル J_{r_ξ} により annihilate されるもの全体のなす空間を

$$H_{J_{r_\xi}}^{(n-1)} = \{\psi \in \mathcal{H}_{\{O\}}^{n-1}(\mathcal{O}_{H_\xi}) \mid J_{r_\xi} \psi = 0\}$$

とおく.

函数 r_ξ が原点 O を孤立特異点として持つ場合, $H_{J_{r_\xi}}^{(n-1)}$ は有限次元ベクトル空間となりその次元は, $f|_{H_\xi}$ の Milnor 数と等しい.

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_{J_{r_\xi}}^{(n-1)}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{H_\xi}/J_{r_\xi}).$$

Parameter 付き local cohomology 系の計算 ([6]) を行い, $\dim_{\mathbb{C}}(H_{J_{r_\xi}}^{(n-1)}) > \mu^{(n-1)}(f)$ なる条件をみたく $[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1}$ からなる strata を求め, その和集合として limiting tangent space $K(V, O)$ を求めることが可能である.

参考文献

- [1] T. Gaffney, Aureoles and integral closure of modules, *Travaux en Cours* **55** Hermann (1997), 55–62.
- [2] A. Hénaut, Cycles exceptionnel de l'éclatement de Nash d'une hypersurface analytiques complexe à singularité isolée, *Bull. Soc. Math. France.* **109** (1981), 475–481.
- [3] D. T. Lê, Limites d'espaces tangents sur les surfaces, *Nova Acta Leopoldina* **52** (1981), 119–137.
- [4] D. T. Lê, Geometry of tangents on singular spaces and Chern classes, Notes prepared by T. Urabe, *Lectures in Math. Kyoto Univ.* **13** Kinokuniya Company, 1981.
- [5] D. T. Lê et B. Teissier, Limites d'espaces tangents en géométrie analytiques, *Comment. Math. Helvetici*, **63** (1988), 540–578.
- [6] K. Nabeshima and S. Tajima, Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, submitted.
- [7] D. O'Shea, Computing limits of tangent spaces : singularities, computation and pedagogy, in *Singularity Theory, Trieste 1991*, World Sci. (1995), 549–573.
- [8] J. Snoussi, Limites d'espaces tangents à une surface normale, *Comment. Math. Helvetici* **76** (2001), 61–88.
- [9] B. Teissier, Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney, *Astérisques* **7-8**, Soc. Math. France. (1973), 285–362.
- [10] B. Teissier, Variété polaires, *Inventiones Math.* **40** (1977), 267–292.

有理曲線を中心曲線とする 2 次元次数付き特異点の極大イデアルサイクルについて

日本大学・文理学部 泊 昌孝

群馬大学・医学部 都丸 正

(V, p) を正規 2 次元複素特異点、 $\psi : (\tilde{V}, A) \rightarrow (V, p)$ を特異点解消とし、例外集合を $A = \cup_{j=1}^m A_j$ と既約分解する。M.Artin の意味での基本サイクルとは、 $Z_\psi = \min\{D \in \bigoplus_{j=1}^m \mathbf{Z}A_j \mid D \cdot A_j \leq 0 \ (\forall j), D \neq 0\}$ である。一方 O_V の極大イデアル m から定まる $D(m, \psi) = \sum_{j=1}^m \{\inf_{f \in m} \{\text{ord}_{A_j}(\psi^*(f))\}\} A_j$ を考えると、 $f \in m$ があり、 $D(m, \psi) = D((f), \psi)$ であり、 $D(m, \psi) \cdot A_j \leq 0$ がわかる。特に、 $D(m, \psi) \geq Z$ であり $D(m, \psi) = M_\psi$ と表す。これを極大イデアルサイクルと呼ぶ。以下、 (V, p) の最小良特異点解消において A の双対グラフが中心曲線 X をもつ星型であるとする。 $F^k = \psi_*(O_{\tilde{V}}(-kX)) \subset O_V$ と定めると、次数付き環 $G = \bigoplus_{n \geq 0} F^n / F^{n+1}$

は、孤立特異点を持つ整域になる。正規化 \bar{G} は、星型グラフから Pinkham の定め方で X 上の正有理因子 D を与えると、 $\bar{G} = R(X, D)$ となる。 V が \mathbf{C}^* -作用を持つ場合、 $G = R(X, D)$ であり、星型特異点は、 \mathbf{C}^* -作用を持つ場合の自然な拡張になっている。私たちは、2014 年秋学会にて、2 次元次数付き特異点について、次数付き構造環 $R(X, D)$ の正の最小次数部分に被約元が存在する際には、同一視 $M_\psi = Z_\psi$ が、中心曲線 X での同一視から判定できる事を報告した [4]。実際、両サイクルの中心曲線での係数については、次がわかる。

$$Z_\psi \text{ の中心曲線 } X \text{ における係数} = \min\{\alpha > 0 \mid \deg[\alpha D] \geq 0\}$$

$$M_\psi \text{ の中心曲線 } X \text{ における係数} = \min\{\alpha > 0 \mid H^0(X, O_X([\alpha D]) \neq 0\}$$

特に $X = P^1$ である場合は、常に両者は一致する。そこで、 $X = P^1$ である場合に $Z = M$ の成立非成立をより詳しく調べようというのが今回のテーマである。既に、 $X = P^1$ である場合でも $Z \neq M$ となる例は、Kummer 被覆の手法により [4],[6] でいくつか得られているが、次は双対グラフの観点から状況をより明らかにするものである。

定理 1. 2次元 $R = R(X, D)$ について、有理因子 D を $D = \sum_{x \in X} p_x / q_x x \in \text{Div}(E) \otimes \mathbf{Q}$

と表示する。 $e = \min\{\alpha > 0 \mid \deg[\alpha D] \geq 0\}$ とおき、 $h \in R_e$ を有理関数 $\phi \in H^0(E, O(eD))$ を用いて $h = \phi T^e$ (T は $\mathbf{Q}(\mathbf{R})$ の次数 1 の元) と表す。このとき、

$$\text{div}_{\tilde{V}}(h) = Z \iff X \text{ の各点 } x \text{ にて } p'_x \left(\text{ord}_x h - e \frac{p_x}{q_x} \right) < 1$$

である。 p'_x は、 $1 \leq p'_x < q_x$ なる整数であって、 $p'_x p_x \equiv 1 \pmod{q_x}$ とする。

注意 2. $h \in R_e$ が被約であることは、 X の各点 x にて $q_x \left(\text{ord}_x h - e \frac{p_x}{q_x} \right) \leq 1$ と同値である。この式は、上記の条件式の十分条件になる（必要条件では無い）。このことから、定理 1 は、[4] の結果の一つの拡張を与えている。

$X = P^1$ の時は、 D の表現による双対グラフの言葉によって、 $Z = M$ に対する最小次元での実現に関する必要十分条件が得られる。

系 3. 2次元 $R = R(P^1, D)$ について、 D と e を上記の通りとする。

$$\text{div}_{\check{V}}(h) = Z \text{ となる } h \in R_e \text{ が存在} \iff P^1 \text{ の各点 } x \text{ にて } p'_x \left(\left[e \frac{p_x}{q_x} \right] - e \frac{p_x}{q_x} \right) < 1$$

である。

例 4. (1) [4] $X = P^1$, $D = 12P_0 - \sum_{i=1}^{16} \frac{2}{3}P_i - \frac{4}{5}P_{17} - \frac{2}{5}P_{18}$ とする。 $e = 6$, $[6D] \sim 0$ であり、 $\phi \in k(P^1)$ を $\text{div}(\phi) = -[6D]$ なる唯一の元とすると、 $\text{div}(\phi) + 6D = \frac{1}{5}P_{17} + \frac{3}{5}P_{18}$ である。 $p'_{P_{18}} = 3$ であって、 $3 \cdot \frac{3}{5} \geq 1$ 。系 2 により、最小次元で Z の実現は不可である。さらに、 $R_7 = R_8 = R_{10} = 0$ と R_9 についての類似考察 [5] により、 $Z \neq M$ がわかる。(2) 超曲面特異点 $z^4 = x(y^5 + x^{16})$ は $R = R(P^1, D)$ $D = P_0 - \frac{3}{64}P_1 - \frac{3}{4}P_2 - \frac{1}{5}P_3$ と表すことができる。 $e = 20$ となり、同様の考察により、 $Z \neq M$ であることがわかる。現在、我々が知っている $X = P^1$ であって、Gorenstein であり、かつ重複度が最小の例がこの例である。

注意 5. 星形特異点であり、中心曲線で $Z = M$ であるのに、全体では $Z \neq M$ となる状況では、 $p_a(Z) > p_a(M)$ である事が簡単に示される。そのことから、自然なコホモロジー写 $R^1\psi_*O(-M) \rightarrow R^1\psi_*O$ が単射でない状況が生ずる。filtered ring の研究の中では、当初、珍しい現象として捉えられていた例が、今回の考察から、より構成しやすくなったと考えられる。多変数関数論的には、さらに背景を調べる入り口がこれらの例にあると考えている。

Ref. [1] Konno, K. Nagashima, D: Osaka J. Math. **49**(1) (2012), 225-245 [2] Meng, F.-N. Okuma, T: Kyushu J. Math. **68** (2014), 121-137 [3] Pinkham, H.: Math. Ann., **227** (1977), 183-193. [4] Tomari, M., Tomaru, T., Tohoku Math. J. (to appear), [5] Tomari, M., Watanabe, Kei-ichi: Publ. Res. Inst. Math. Sci, Kyoto Univ., **25**(1989), 681-740 [6] Tomaru, T., 群馬大学保健学研究紀要 (to appear)

パラメータ付き対数的ベクトル場と Bruce-Roberts ミルナー数の計算

鍋島克輔 (徳島大学)*¹

田島慎一 (筑波大学)*²

孤立特異点を持つ超曲面の変形族に付随するパラメータ付き対数的ベクトル場, および超曲面と正則関数の族に対する Bruce-Roberts ミルナー数の計算方法を報告する. 講演では, 実装したプログラムを用いて, デモも行う.

1. 基本概念

X は, \mathbb{C}^n の原点 O の近傍, \mathcal{O}_X は X 上の正則関数のなす層を表す. 正則な関数 $\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が定める超曲面を $S = \{x \in X | \phi(x) = 0\}$ とする. 本稿では, 超曲面 S は原点に孤立特異点を持つとする.

正則ベクトル場

$$v = a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad a_i(x) \in \mathcal{O}_X, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

は, $v(\phi) \in \langle \phi \rangle$ を満たすとき S に沿って対数的であるという. ここで, $\langle \phi \rangle$ は ϕ によって生成される \mathcal{O}_X のイデアルを表す. X 上で S に沿った対数的ベクトル場のなす層を $Der_X(-\log S)$ で表す. 正則関数の germ $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ に対し, 局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるイデアル $\langle v(f) | v \in Der_{X,O}(-\log S) \rangle$ を $I_{BR}(f,S)$ で表す. このとき, Bruce-Roberts ミルナー数 $\mu_{BR}(f, S)$ は, 次元 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_{BR}(f,S))$ として定義される ([1]). この Bruce-Roberts ミルナー数は古典的なミルナー数の概念を特異多様体の場合に一般化したものであり, local Euler obstruction とも関係する重要な不変量であることが知られている. しかし, その値を実際に求めることは, 特異多様体が超曲面である場合であっても一般的には極めて困難であった. 近年, 著者たちの研究により, local cohomology から対数的ベクトル場を構成し Bruce-Roberts ミルナー数を計算する方法が与えられた.

ここでは, ϕ や f の係数に変形パラメータを含む場合を考える. パラメータの値により, 対数的ベクトル場はもちろん, Bruce-Roberts ミルナー数も変化する. ここで紹介する計算法により, パラメータの状態によりいかに Bruce-Roberts ミルナー数が変化するのかわかることができる. 計算法での重要な鍵となるのは, パラメータ付き local cohomology 系である. パラメータ付き local cohomology 系とは, local cohomology の形 (性質) により場合分けされた系のことである. パラメータ付き local cohomology 系の計算法は論文 [2, 3] により紹介されており計算機にも実装されている.

本研究は科学研究補助金 課題番号 15K17513 と課題番号 15K04891 の助成を受けております.

2010 Mathematics Subject Classification: 32S05

キーワード: アルゴリズム, 対数的ベクトル場, 局所コホモロジー

*¹ 〒770-8502 徳島市南常三島町 1-1 徳島大学総合科学部

e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp

*² 〒305-8571 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学大学院数理物質系数域

e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

2. 計算概要と例

次は計算の概略であり、入力は f, ϕ , 出力は, Bruce-Roberts ミルナー数の値に応じたパラメータ空間の分割と, 分割の各 stratum における Bruce-Roberts ミルナー数からなる. 計算の過程で, パラメータ付き対数的ベクトル場も計算する.

1. B. Teissier [5] の条件を満たす generic な座標系をパラメータ付き local cohomology 系を使って求める.
2. Polar variety と超曲面の交わりを表すパラメータ付き local cohomology 系の計算を行い, そのパラメータ付き local cohomology 系からベクトル場の計算に必要なイデアル商のパラメータ付きスタンダード基底を計算する. (我々は, このスタンダード基底から対数的ベクトル場の構造を知ることができる.)
3. (2. で得られたスタンダード基底を利用し,) パラメータ付きの拡張イデアルメンバーシップアルゴリズム, および局所環におけるパラメータ付き syzygy 計算によりパラメータ付き対数的ベクトル場を求める.
4. イデアル $I_{BR(f,S)}$ により annihilate される local cohomology 類のなすベクトル空間の, パラメータ付き local cohomology 系を求める.
5. パラメータ付き local cohomology 系が与える (分割で得られる) ベクトル空間の次元, 対応する **Bruce-Roberts ミルナー数** となる.

この計算法は, 計算機代数システム Risa/Asri [4] に著者により実装された.

例 原点に孤立特異点を持つ2つの多項式を $f = x^2 + y^3 + txy$, $\phi = x^3 + y^8 + sxy^6$ とおく. ここで, t と s は $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ となるパラメータ, x と y は変数である. このとき, 我々のプログラムは, 超曲面 S 上での f の (パラメータ付き) Bruce-Roberts ミルナー数を次のように返す,

もしパラメータ (s, t) が $\mathbb{V}(t) \setminus \mathbb{V}(t, s)$ に属するならば, 11,

もしパラメータ (s, t) が $\mathbb{V}(s) \setminus \mathbb{V}(t, s)$ に属するならば, 9,

もしパラメータ (s, t) が $(\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{V}(ts)) \cup (\mathbb{V}(s, t))$ に属するならば, 10,

となる. ここで, $\mathbb{V}(t) = \{(s, 0) | s \in \mathbb{C}\}$, $\mathbb{V}(s) = \{(0, t) | t \in \mathbb{C}\}$, $\mathbb{V}(st) = \mathbb{V}(s) \cup \mathbb{V}(t)$, $\mathbb{V}(t, s) = \{(0, 0)\}$ を意味する.

参考文献

- [1] J. W. Bruce and R. M. Roberts, *Critical points of functions on an analytic variety*, Topology **27**, pp. 57–90, (1988)
- [2] K. Nabeshima and S. Tajima, *On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases*, Proc. ISSAC 2014, ACM, pp. 351–358, (2014)
- [3] K. Nabeshima and S. Tajima, *Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals*, arXiv:1508.06724v1, (2015)
- [4] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir- A computer algebra system*, <http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html>
- [5] B. Teissier, *Variété polaire*, Inventiones math. **40**, pp. 267–292, (1977)

変形パラメータ付きホロノミー D -加群の計算法

—parametric Poincaré-Birkhoff-Witt 代数の利用—

鍋島克輔 (徳島大学)*1

小原功任 (金沢大学)*2

田島慎一 (筑波大学)*3

1. 序

n 変数多項式 f に対し, 偏微分作用素環 $D_X[s]$ における f^s の annihilater イdeal $\text{Ann}(f^s)$ を考える ([3, 5]). このイdeal (偏微分方程式系) から, f の b -関数の根と, 各根毎に付随したホロノミー D -加群を計算できる ([8]).

ここでは, これらの結果を n 変数多項式 f の係数に (特異点の変形) パラメータが含まれる場合に拡張することを考える. Poincaré-Birkhoff-Witt 代数におけるグレブナー基底計算をパラメータを含むような場合に拡張することが可能であること, このアルゴリズムを用いて, f^s のパラメータ付零化イdealの生成系を求めることが可能となることを報告する. 応用として, f がパラメータを含む場合にも b -関数, パラメータ付ホロノミー D -加群が計算可能となる.

2. Briançon et Maisonobe の計算法とその拡張

$X = \mathbb{C}^n$, $K = \mathbb{Q}$ とおく. n 変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ の多項式環を $K[x]$, 多項式係数の偏微分作用素 (Weyle 代数) を $D_X = K[x, \frac{\partial}{\partial x}]$ で表し, $D_X[s] = D_X \otimes_K K[s]$ とおく. 多項式 $f \in K[x]$ に対し, f^s の $D_X[s]$ における零化イdealを

$$\text{Ann}_{D_X[s]}(f^s) = \{P \in D_X[s] \mid Pf^s = 0\}$$

で表す. J. Briançon と P. Maisonobe ([2]) は, Poincaré-Birkhoff-Witt 代数におけるグレブナー基底計算を用いることで, この零化イdealの生成系を効率的に求める計算法を与えた. 以下がその概略 ([6]) である.

1. 新しい変数 $\frac{\partial}{\partial t}$ を用意し次の集合 T を作る.

$$T = \left\{ f \frac{\partial}{\partial t} + s, \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}.$$

ここでは, $\frac{\partial}{\partial t}$ と s は $s \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} s + 1$ を満たすとする (Poincaré-Birkhoff-Witt 代数) .

2. 変数 $\frac{\partial}{\partial t}$ を消去するような項順序に対して, $\langle T \rangle$ のグレブナー基底 G を $D_X[s, \frac{\partial}{\partial t}]$ で計算する.

本研究は科学研究補助金 若手研究 (B) 課題番号 15K17513 と基盤研究 (C) 課題番号 15K04891 の助成を受けております.

2010 Mathematics Subject Classification: 32S05

キーワード: アルゴリズム, D -加群, b -関数, 包括的グレブナー基底系

*1 〒770-8502 徳島市南常三島町 1-1 徳島大学総合科学部

e-mail: nabeshima@tokushima-u.ac.jp

*2 〒920-1192 金沢市角間町 金沢大学理工研究域数物科学系

e-mail: ohara@air.s.kanazawa-u.ac.jp

*3 〒305-8571 つくば市天王台 1-1-1 筑波大学大学院数理物質系数数学域

e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

3. G から変数 $\frac{\partial}{\partial t}$ を持つような式を消去した集合 R が $\text{Ann}_{D_X[s]}(f^s)$ の生成系となる.

さて, ここで f がパラメータを含む場合を考える. 上で紹介した零化イデアルの生成系の計算法は Poincaré-Birkhoff-Witt 代数におけるグレブナー基底計算に基づいている. 現在, 数式処理システム Risa/Asir 上で, Poincaré-Birkhoff-Witt 代数に対しグレブナー基底計算を行うことができる ([9]). 「グレブナー基底とイデアルの安定性を用いて構成した偏微分作用素環でのパラメータ付きグレブナー基底 (包括的グレブナー基底系) 計算アルゴリズム ([7, 8])」を「Briançon と Maisonobe が用いた Poincaré-Birkhoff-Witt 代数がパラメータを含む場合」に拡張することで, $\langle T \rangle$ のパラメータ付きグレブナー基底は構成可能となる. これらにより,

パラメータ付き零化イデアルの生成系

は構成できる. b -関数は, $\langle R \cup \{f\} \rangle$ のグレブナー基底を計算することにより得られる ([8]). パラメータ付きグレブナー基底は計算可能であるので,

多項式 f が係数に変形パラメータを含む場合に対しても b -関数の根, 各根に付随するパラメータ付ホロノミー D -加群

も構成可能である. b -関数の理論では, $D_X[s]$ -加群

$$D_X[s]/\text{Ann}_{D_X[s]}(f^s), D_X[s]/(\text{Ann}_{D_X[s]}(f^s) + D_X[s]f)$$

が重要な役割を果たしている. これらの加群は, 超曲面 $S = \{x \in X | f(x) = 0\}$ に関する情報を多く含んでいる. また, b -関数の根, 根に付随するホロノミー D -加群は, 超曲面 S の特異点集合の情報を含んでいるので, 本研究は特異点の変形理論にも有用なものである.

講演では, 実装されたプログラムのデモも行う予定である.

参考文献

- [1] G. M. Bergman, *Diamond lemma for ring theory*, Adv. math. **29** (1978), 178–218.
- [2] J. Briançon et P. Maisonobe *Remarques sur l'ideal de Bernstein associe des polynomes*, Preprint No. 650 (2002), Univ. Nice Sophia-Antipolis.
- [3] T. Oaku, *Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial*, J. Pure and Appl. Algebra, **117-118** (1997), 495–518.
- [4] 大阿久俊則, *D 加群と計算数学*, 朝倉書店, (2002).
- [5] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems*, Invent. Math. **38** (1976), 33–53.
- [6] Ph. Maisonobe and C. Sabbah, *Aspects of the theory of D-modules, Lecture Notes, Kaiserlautern*, (2002).
- [7] K. Nabeshima, *Comprehensive Gröbner bases in various domeins*, doctotal thesis. Johannes Kepler Universität Linz, Austria, (2007).
- [8] 鍋島克輔, 田島慎一, 偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系とホロノミー D -加群, b -関数, 数理解析研究所講究録「数式処理研究の新たな発展」, (2015 年度内) 掲載予定
- [9] 小原功任, 田島慎一, Poincaré-Birkhoff-Witt 代数上のグレブナ基底計算と Risa/Asir への実装, 数理解析研究所講究録「数式処理とその周辺分野の研究」, 掲載予定