

第 64 回実函数論・函数解析学  
合同シンポジウム  
講演集

期日：2025 年 9 月 8 日（月）～9 月 10 日（水）  
会場：神奈川大学 横浜キャンパス 20 号館 3 階 301



## まえがき

本講演集は, 2025年9月8日(月)から9月10日(水), 神奈川大学横浜キャンパスで開催の第64回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です.

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが, 関係者各位のご尽力によって, 講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました. 各グループの責任者の方々, 講演者の皆様, 本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします.

代表者：会議担当者：和地 輝仁 (北海道教育大学)  
プログラム担当者：深尾 武史 (龍谷大学)  
会場責任者：山崎 教昭 (神奈川大学)

# 目次

廣田 大輔 (鶴岡工業高等専門学校)	
関数空間上の全射等距離写像に関する保存問題について .....	1
熊崎 耕太 (京都教育大学)	
多孔質媒体内の浸透現象を記述する自由境界問題について .....	20
宮西 吉久 (信州大学)	
Recent developments in the spectral theory for the layer potential operators .....	39
荒神 健太 (海上保安大学校)	
Isometric Gelfand transforms of complete Pick spaces .....	56
安達 駿弥 (宇都宮大学)	
完全積分可能系の積分変換と多変数特殊関数 .....	66
里見 貴志 (理化学研究所)	
局所コンパクト群上の Young の畳み込み不等式の最適定数 .....	86
成川 康男 (玉川大学)	
集合関数の加法表現について .....	106
田中 仁 (筑波技術大学)	
Multilinear embedding theorem for fractional sparse operators and my recent research .....	119
出耒 光夫 (東京都市大学)	
変動指数 Lebesgue 空間における近似定理 .....	129
Cid REYES BUSTOS (NTT 基礎数学センタ)	
Symmetry operators for quantum Rabi models and generalizations .....	139
茨木 貴徳 (横浜国立大学)	
極大単調作用素の零点問題に対する縮小射影法の研究 .....	152

## 第 64 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム プログラム

期日：2025 年 9 月 8 日 (月) 13:30 – 9 月 10 日 (水) 12:00

会場：神奈川大学 横浜キャンパス 20 号館 3 階 301

〒 221-8686 神奈川県横浜市神奈川区六角橋 3-27-1

<https://www.kanagawa-u.ac.jp/access/yokohama/>

### 9 月 8 日 (月)

13:30–14:30：廣田 大輔 (鶴岡工業高等専門学校)

関数空間上の全射等距離写像に関する保存問題について

14:45–15:45：熊崎 耕太 (京都教育大学)

多孔質媒体内の浸透現象を記述する自由境界問題について

16:00–17:00：宮西 吉久 (信州大学)

Recent developments in the spectral theory for the layer potential operators

### 9 月 9 日 (火)

9:30–10:30：荒神 健太 (海上保安大学校)

Isometric Gelfand transforms of complete Pick spaces

10:45–11:45：安達 駿弥 (宇都宮大学)

完全積分可能系の積分変換と多変数特殊函数

11:45–14:00：(昼食休み)

14:00–15:00：里見 貴志 (理化学研究所)

局所コンパクト群上の Young の畳み込み不等式の最適定数

15:15–15:55(40 分)：成川 康男 (玉川大学)

集合関数の加法表現について

16:05–17:05：田中 仁 (筑波技術大学)

Multilinear embedding theorem for fractional sparse operators and my recent research

## 9月10日 (水)

9:15–9:55 (40 分)：出耒 光夫 (東京都市大学)

変動指数 Lebesgue 空間における近似定理

10:05–11:05：Cid REYES BUSTOS (NTT 基礎数学センタ)

Symmetry operators for quantum Rabi models and generalizations

11:20–12:00 (40 分)：茨木 貴徳 (横浜国立大学)

極大単調作用素の零点問題に対する縮小射影法の研究

# 関数空間上の全射等距離写像に関する保存問題について

廣田大輔 (鶴岡工業高等専門学校)\*

2025 年 9 月 8 日

## 目 次

1	はじめに .....	1
2	ベクトル値連続関数からなる Banach 空間上の等距離写像.....	3
3	連続関数空間とその部分空間に関する Tingley 問題.....	12
4	$\ell^1$ -直和型関数空間に関する Tingley 問題 .....	15
5	今後の展望 .....	17

## 1 はじめに

$(B_i, \|\cdot\|)$  ( $i = 1, 2$ ) をそれぞれ  $\mathbf{0}_{B_i}$  を零元として持つ Banach 空間とする. 特に断らない限り, 本講演集では扱う全ての Banach 空間は複素数体  $\mathbb{C}$  をスカラー体としてもつこととする.

Banach 空間とは線形空間に完備なノルムが定義された空間のことであり, 線形演算からなる代数構造やノルムから定義される距離構造など様々な数学的構造が存在する. これら数学的構造はそれぞれ独立に存在するのではなくお互いに影響し合っていることが知られている.

Banach 空間上で定義された写像がある特定の数学的構造を保存するとき, その写像が他の数学的構造にどのような影響を与えているのかもしくは制限しているのかを明らかにすることが, いわゆる保存問題 (preserver problem) の大きな目的の 1 つである. 特に Banach 空間の距離構造を保存する写像である等距離写像に関する保存問題の研究は古くから活発に行われている. 等距離写像とは任意の 2 点間の距離を保つ写像であり, 写像  $T: B_1 \rightarrow B_2$  で条件

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad (x, y \in B_1)$$

を満たす写像のことである.

このような全射等距離写像に関する保存問題は「距離構造を保つことによって, 他にどのような数学的構造を保存あるいは制限するのか」について明らかにすることを目的としている.

---

\* 〒997 - 8511 山形県鶴岡市井岡字沢田 104  
e-mail: [dhirota@tsuruoka-nct.ac.jp](mailto:dhirota@tsuruoka-nct.ac.jp)

Banach 空間上の等距離写像に関する保存問題の研究において、重要な結果の 1 つとして Banach–Stone の定理 [5, VI, Theorem 2.1] が知られている。この定理を述べるにあたり、いくつか記号と用語を準備する。

$X$  をコンパクト Hausdorff 空間とし、 $C(X)$  を  $X$  上の複素数値連続関数全体からなる線形空間とする。任意の元  $f \in C(X)$  に対して、 $f$  の sup ノルム  $\|f\|_\infty$  を

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

と定義することで連続関数空間  $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$  は Banach 空間となる。ここで、 $\mathbb{T}$  を絶対値が 1 である複素数全体の集合（すなわち複素平面上の単位円周）とする。Banach–Stone の定理はこのような連続関数空間における全射複素線形等距離写像の構造を明らかにした結果である。

**定理 (Banach–Stone の定理)**  $X_i$  をコンパクト Hausdorff 空間 ( $i = 1, 2$ ) とし、 $T : C(X_1) \rightarrow C(X_2)$  を全射複素線形等距離写像とする。このとき、連続関数  $\alpha : X_2 \rightarrow \mathbb{T}$  と同相写像  $\tau : X_2 \rightarrow X_1$  が存在して、

$$T(f)(y) = \alpha(y)f(\tau(y)) \quad (f \in C(X_1), y \in X_2)$$

が成り立つ。

この定理は、連続関数空間上の全射複素線形等距離写像の構造を明らかにしており、そのような写像は絶対値 1 の複素数に値を取る連続関数と合成作用素との積、すなわち、荷重合成作用素の形に限られることを述べている。さらに重要な点は全射複素線形等距離写像から 2 つの位相空間  $X_1$  と  $X_2$  の間の同相写像  $\tau : X_2 \rightarrow X_1$  が誘導される点である。このことは連続関数空間において、代数構造と距離構造がともに保存されるとき、位相構造も自動的に保存されることを意味している。すなわち、連続関数空間に存在する様々な数学的構造の間には密接な相互関係が存在していることを示唆している。

一方で、Mazur–Ulam の定理 [6, Theorem 1.3.5] から 2 つの Banach 空間  $B_1$  と  $B_2$  の間の写像  $T : B_1 \rightarrow B_2$  が全射等距離写像で零元を保存するとき、自動的に  $T$  は実線形写像であることが導かれる。

**定理 (Mazur–Ulam の定理)**  $B_i$  を Banach 空間とする ( $i = 1, 2$ )。写像  $T : B_1 \rightarrow B_2$  が全射等距離写像で  $T(\mathbf{0}_{B_1}) = \mathbf{0}_{B_2}$  であるとき、 $T$  は実線形である。ただし、 $\mathbf{0}_{B_i}$  は Banach 空間  $B_i$  の零元を表す。

Mazur–Ulam の定理は 2 つの Banach 空間  $B_1$  と  $B_2$  の間の写像が  $T(\mathbf{0}_{B_1}) = \mathbf{0}_{B_2}$  を満たす全射等距離写像のとき、実線形であることを主張していることに加え、Banach 空間の距離距離構造が一致すれば自動的に代数構造も一致することを示している。この定理により Banach 空間上の全射等距離写像を研究する場合、複素線形は強い条件であり、それよりも弱い条件である実線形を仮定することが自然であることがわかる。では先ほど

述べた Banach–Stone の定理において全射等距離写像に複素線形ではなく実線形を仮定した場合、写像  $T$  の形はどうか。この問題は [8] の結果を用いることで解決でき、それにより以下の結果が得られる。

**定理 (実線形版 Banach–Stone の定理)**  $X_i$  をコンパクト Hausdorff 空間 ( $i = 1, 2$ ) とし、 $T : C(X_1) \rightarrow C(X_2)$  を全射実線形等距離写像とする。このとき、連続関数  $\alpha : X_2 \rightarrow \mathbb{T}$  と同相写像  $\tau : X_2 \rightarrow X_1$ 、開かつ閉部分集合  $K \subset X_2$  が存在して

$$T(f)(y) = \begin{cases} \alpha(y)f(\tau(y)) & (y \in K), \\ \alpha(y)\overline{f(\tau(y))} & (y \in X_2 \setminus K) \end{cases} \quad (1)$$

が成り立つ。

この定理から全射等距離写像  $T : C(X_1) \rightarrow C(X_2)$  に実線形を仮定した場合でも同相写像  $\tau : X_2 \rightarrow X_1$  が誘導されることがわかる。この定理と Mazur–Ulam の定理から 2 つの連続関数空間の距離構造が保存されることで代数構造や位相空間も自動的に保存されることを表している。さらに任意の  $f \in C(X_1)$  に対して、 $U(f)$  を次のように定義する。

$$U(f)(y) = \begin{cases} \overline{\alpha(y)T(f)(\tau(y))} & (y \in K), \\ \alpha(y)T(f)(\tau(y)) & (y \in X_2 \setminus K). \end{cases} \quad (2)$$

このとき写像  $U : C(X_1) \rightarrow C(X_2)$  は写像  $T$  の形 (1) から全射複素線形等距離写像であることがわかる。すなわち、2 つの連続関数空間  $C(X_1)$  と  $C(X_2)$  は距離構造が一致することで他の数学的構造も自動的に保存され Banach 空間として同型になることがわかる。他にも連続関数空間以外の様々な関数空間の場合でも同様のことが成り立つことが知られている [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 19]。このことは Banach 空間に存在する様々な数学的構造は距離構造により決定されることを示唆している。そのため、等距離写像の研究は現在まで様々な Banach 空間に対して行われている。

## 2 ベクトル値連続関数からなる Banach 空間上の等距離写像

実数や複素数などのスカラー体に値を取る連続関数からなる Banach 空間の他にもベクトル値連続関数からなる Banach 空間上の等距離写像の研究も活発に行われている。 $X$  と  $Y$  をコンパクト Hausdorff 空間としたとき、 $C(X, C(Y))$  は次で定義される線型空間である：

$$C(X, C(Y)) = \{F : X \rightarrow C(Y) : F \text{ は } X \text{ 上で連続}\}. \quad (3)$$

任意の  $F \in C(X, C(Y))$  に対して、そのノルム  $\|F\|_\infty$  を

$$\|F\|_\infty = \sup_{x \in X} \|F(x)\|_\infty$$

と定義することで、 $(C(X, C(Y)), \|\cdot\|_\infty)$  は Banach 空間となる。この空間は次の定理から連続関数空間  $C(X \times Y)$  と同一視できることがわかる。この定理の証明は [12, Section 2] の手法を参考にしたものである。

**定理 2.1** 写像  $U : C(X, C(Y)) \rightarrow C(X \times Y)$  を

$$U(F)(x, y) = F(x)(y) \quad (F \in C(X, C(Y)), (x, y) \in X \times Y)$$

で定義すると, 写像  $U : C(X, C(Y)) \rightarrow C(X \times Y)$  は全射複素線形等距離写像である.

**証明の概略** 写像  $U$  が複素線形であることは定義からすぐにわかるため,  $U$  がノルムを保存することを示す. 任意の元  $F \in C(X, C(Y))$  をとり固定する. このとき,

$$|U(F)(x, y)| = |F(x)(y)| \leq \|F(x)\|_\infty \leq \|F\|_\infty$$

が全ての  $(x, y) \in X \times Y$  で成り立つので,  $\|U(F)\|_\infty \leq \|F\|_\infty$  がいえる. 次に逆向きの不等式を示す.  $\|F\|_\infty$  の定義から任意の正の数  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\|F\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} < \|F(x)\|_\infty \quad (4)$$

を満たす  $x \in X$  が存在する. 同様に sup ノルムの定義から

$$\|F(x)\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} < |F(x)(y)| \quad (5)$$

を満たす  $y \in Y$  が存在する. (4) と (5) から

$$\|F\|_\infty - \varepsilon < |F(x)(y)| = |U(F)(x, y)| \leq \|U(F)\|_\infty$$

から  $\|F\|_\infty - \varepsilon < \|U(F)\|_\infty$  がいえる. ここで  $\varepsilon > 0$  は任意の正の数であるため,  $\|F\|_\infty \leq \|U(F)\|_\infty$  が成り立つ. 以上より  $\|U(F)\|_\infty = \|F\|_\infty$  が証明された.

最後に写像  $U$  が全射であることを示す.  $G \in C(X \times Y)$  を任意にとり固定する. このとき任意の  $x \in X$  に対して,  $G_x : Y \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$G_x(y) = G(x, y) \quad (y \in Y)$$

で定義する. 関数  $G$  は  $X \times Y$  上で連続であることから,  $G_x$  は  $Y$  上で連続であることがわかる. したがって,  $G_x \in C(Y)$  である. ここで関数  $F : X \rightarrow C(Y)$  を

$$F(x) = G_x \quad (x \in X)$$

で定義して,  $F \in C(X, C(Y))$  であることを示す.  $x \in X$  と  $\varepsilon > 0$  を任意にとり固定する. 関数  $G$  は  $X \times Y$  上で連続なので, それぞれの  $y \in Y$  に対して  $x$  の開近傍  $V_y$  と  $y$  の開近傍  $W_y$  が存在して

$$|G(x, y) - G(s, t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad ((s, t) \in V_y \times W_y) \quad (6)$$

$Y$  はコンパクト Hausdorff 空間で  $Y \subset \bigcup_{y \in Y} W_y$  から

$$Y \subset \bigcup_{k=i}^m W_{y_k} \quad (7)$$

となる  $y_1, \dots, y_m \in Y$  が存在する.  $X$  の部分集合  $V$  と  $Y$  の部分集合  $W$  を

$$V = \bigcap_{k=1}^m V_{y_k}, \quad W = \bigcup_{k=1}^m W_{y_k}$$

とすると  $V$  と  $W$  はそれぞれ  $x$  と  $y$  の開近傍である.  $s \in V$  を任意にとり固定する. 任意の  $y \in Y$  に対して (7) から  $y \in W_{y_k}$  となる  $k \in \{1, \dots, m\}$  が存在する.  $(s, y) \in V \times W_{y_k}$  であることと  $V \subset V_{y_k}$  から  $(s, y) \in V_{y_k} \times W_{y_k}$  であることが成り立つ. したがって (6) から

$$|F(x)(y) - F(s)(y)| = |G(x, y) - G(s, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が全ての  $y \in Y$  で成り立つ. したがって,  $s \in V$  であるならば

$$\|F(x) - F(s)\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

より  $F$  は  $x$  で連続である.  $x \in X$  は任意に選ばれた元であるため,  $F \in C(X, C(Y))$  である.  $F$  の定義から

$$U(F)(x, y) = F(x)(y) = G_x(y) = G(x, y) \quad ((x, y) \in X \times Y)$$

が成り立つので, 写像  $U$  が全射であることが示された.  $\square$

定理 2.1 により, Banach 空間  $C(X, C(Y))$  は連続関数空間  $C(X, Y)$  と同一視することができる. これと実線形版 Banach–Stone の定理を組み合わせることで, 以下の定理が得られる:

**定理 2.2**  $X_i, Y_i$  ( $i = 1, 2$ ) をコンパクト Hausdorff 空間とし,  $T : C(X_1, C(Y_1)) \rightarrow C(X_2, C(Y_2))$  を全射実線形等距離写像とする. このとき, 連続関数  $\alpha : X_2 \times Y_2 \rightarrow \mathbb{T}$  と同相写像  $\tau : X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times Y_1$ , 開かつ閉部分集合  $K \subset X_2 \times Y_2$  が存在して

$$U(T(f))(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y)U(F)(\tau(x, y)) & ((x, y) \in K), \\ \alpha(x, y)\overline{U(F)(\tau(x, y))} & ((x, y) \in (X_2 \times Y_2) \setminus K) \end{cases} \quad (8)$$

が成り立つ.

ここで今後の議論では関数空間  $C(X, C(Y))$  の線形部分空間  $A$  上の全射等距離写像に注目し, そのような部分空間においても同様のことが成り立つか考察する. 定理 2.1 の証明と同じ方法で  $A$  は連続関数空間  $C(X \times Y)$  の部分空間として埋め込むことができる:

**定理 2.3**  $A \subset C(X, C(Y))$  を線形部分空間とする. 写像  $U : A \rightarrow C(X \times Y)$  を

$$U(F)(x, y) = F(x)(y) \quad (F \in A, (x, y) \in X \times Y)$$

とする. このとき, 写像  $U$  は複素線形等距離写像である.

この定理により  $A$  上の全射実線形等距離写像  $T : A \rightarrow A$  に対して、 $B = U(A)$  とおくことで、写像  $S = U \circ T \circ U^{-1} : B \rightarrow B$  は  $C(X \times Y)$  の部分空間  $B$  上の全射実線形等距離写像として扱うことができる。

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{S} & B \\
 U^{-1} \downarrow & & \uparrow U \\
 A & \xrightarrow{T} & A
 \end{array}$$

**補足** 本章では、関数空間  $C(X, C(Y))$  の全体ではなく、特定の構造を持つ線形部分空間  $A$  に制限して、全射等距離写像の構造や誘導される位相的情報について考察する。このような部分空間に制限した議論は、より具体的な応用や例への適用を可能にし、全空間での定理を洗練・拡張する上で重要である。

これと同じような手法は連続関数からなる様々な Banach 空間である関数空間上の全射等距離写像の構造を解明する際に繰り返し用いられてきた [7, 11, 12, 16]。特に、対象となる関数空間をある特定の sup ノルムが定義された連続関数空間に埋め込むことは、次に述べる Arens–Kelley の定理 [6, Theorem 2.3.5] が適用できるために重要である。この定理は関数空間上の全射等距離写像を解明する際、中心的な役割を果たしている。なお、証明の詳細については [6, Theorem 2.3.5] をご覧いただきたい。以下、この定理を述べるために必要となるいくつか記号を導入する。

**定義 2.4**  $B$  を連続関数空間  $C(X \times Y)$  の線形部分空間、 $B^*$  を  $B$  の双対空間とする。任意の  $(x, y) \in X \times Y$  に対して  $\delta_{(x,y)} : B \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$\delta_{(x,y)}(F) = F(x, y) \quad (F \in B) \quad (9)$$

と定義する。 $\delta_{(x,y)}$  を点  $(x, y)$  における点値汎関数という。 $\|\delta_{(x,y)}\|_{op}$  を  $\delta_{(x,y)}$  の作用素ノルムとすると  $\delta_{(x,y)}$  の定義から  $\|\delta_{(x,y)}\|_{op} \leq 1$  で  $\delta_{(x,y)} \in (B^*)_1 = \{\varphi \in B^* \mid \|\varphi\|_{op} \leq 1\}$  であることがわかる。

また、全射実線形等距離写像  $S : B \rightarrow B$  を調べる際、次の  $B^*$  の閉単位球  $(B^*)_1$  の端点を調べるのが重要となる。 $(B^*)_1$  の端点 (extreme point) とは平面の凸多角形の頂点にあたるものであり、以下のように定義される [5, V, Definition 7.1]。

**定義 2.5 (端点)**  $B$  を連続関数空間  $C(X \times Y)$  の線形部分空間とし、 $B^*$  をその双対空間とする。また、 $B^*$  の閉単位球を

$$(B^*)_1 = \{\varphi \in B^* \mid \|\varphi\| \leq 1\}$$

と表す。

$\varphi \in (B^*)_1$  が  $(B^*)_1$  の **端点** (extreme point) であるとは, 任意の異なる  $\varphi_1, \varphi_2 \in (B^*)_1$  に対して

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \longrightarrow \quad \varphi_1 = \varphi = \varphi_2$$

が成り立つことをいう. すなわち,  $\varphi$  は  $(B^*)_1$  の異なる 2 点の midpoint で表せない点である. また,  $(B^*)_1$  のすべての端点全体の集合を  $\text{ext}(B^*)_1$  と記す.

以上の準備が整ったところで, Arens–Kelley の定理を述べる. この定理により  $\text{ext}(B^*)_1$  に属する元の形を具体的に決定することができる.

**定理 2.6 (Arens–Kelley の定理)**  $B$  を連続関数空間  $C(X \times Y)$  の線形部分空間とする. 任意の  $\varphi \in \text{ext}(B^*)_1$  に対して,

$$\varphi = z\delta_{(x,y)}$$

となる  $z \in \mathbb{T}$  と  $(x, y) \in X \times Y$  が存在する.

さらに全射実線形等距離写像  $S : B \rightarrow B$  を用いて  $B^*$  上の全射実線形等距離写像  $S_* : B^* \rightarrow B^*$  を以下のように定義することができる. この定義に関する詳細は, [10] をご覧いただきたい.

**定義 2.7**  $S : B \rightarrow B$  を全射実線形等距離写像とする.  $S_* : B^* \rightarrow B^*$  を以下のように定義する;

$$S_*(\varphi)(f) = \text{Re}(\varphi(S(f))) - i\text{Re}(\varphi(S(if))) \quad (\varphi \in B^*, f \in B). \quad (10)$$

このとき以下の定理が成り立つことが知られている [9, Proposition 1].

**定理 2.8**  $B$  を連続関数空間  $C(X \times Y)$  の線形部分空間とし,  $B^*$  を  $B$  の双対空間とする.  $S : B \rightarrow B$  が全射実線形等距離写像であるとき,  $S_* : B^* \rightarrow B^*$  は全射実線形等距離写像である.

さらに定理 2.8 から以下の定理が導かれる.

**定理 2.9**  $B$  を連続関数空間  $C(X \times Y)$  の線形部分空間とし,  $S : B \rightarrow B$  を全射実線形等距離写像とする. このとき,

$$S_*(\text{ext}(B^*)_1) = \text{ext}(B^*)_1$$

が成り立つ.

**証明の概略**  $\varphi \in \text{ext}(B^*)_1$  を任意にとり固定する.  $S_*(\varphi) \in \text{ext}(B^*)_1$  であることを示す. そのために  $\eta_1, \eta_2 \in (B^*)_1$  で

$$S_*(\varphi) = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \quad (11)$$

であるとする．写像  $S : B \rightarrow B$  は全射実線形等距離写像であるから定理 2.8 より， $S_* : B^* \rightarrow B^*$  もまた全射実線形等距離写像であるから写像  $S_*$  は単射である．加えて，

$$S_*(\varphi_i) = \eta_i \quad (i = 1, 2)$$

となる  $\varphi_i \in (B^*)_1$  が存在する．ゆえに (11) から

$$S_*(\varphi) = S_*\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

が成り立つため

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

が得られる． $\varphi \in \text{ext}(B^*)_1$  と  $\varphi_1, \varphi_2 \in (B^*)_1$  から  $\varphi_1 = \varphi = \varphi_2$  であるため

$$\eta_1 = S_*(\varphi_1) = S_*(\varphi) = S_*(\varphi_2) = \eta_2$$

が成り立つ．したがって， $S_*(\varphi) \in \text{ext}(B^*)_1$  が任意の  $\varphi \in \text{ext}(B^*)_1$  で成り立つので

$$S_*(\text{ext}(B^*)_1) \subset \text{ext}(B^*)_1 \quad (12)$$

が得られる． $S_* : B^* \rightarrow B^*$  が全射実線形等距離写像であるため， $(S_*)^{-1}$  もまた全射実線形等距離写像である．そのため同様の議論を行うことで  $(S_*)^{-1}(\text{ext}(B^*)_1) \subset \text{ext}(B^*)_1$  を得られることから

$$\text{ext}(B^*)_1 \subset S_*(\text{ext}(B^*)_1) \quad (13)$$

が成り立つ．(12) と (13) から定理 2.10 が成り立つことがわかる．  $\square$

この定理は写像  $S_*$  が  $(B^*)_1$  の端点を保存していることを示している．この結果と定理 2.6 を組み合わせることで以下の定理が導かれる．

**定理 2.10**  $S : B \rightarrow B$  を全射実線形等距離写像とする．任意の  $z \in \mathbb{T}$  と  $(x_1, y_1) \in X \times Y$  に対して

$$S_*(z\delta_{(x_1, y_1)}) = w\delta_{(x_2, y_2)}$$

となる  $w \in \mathbb{T}$  と  $(x_2, y_2) \in X \times Y$  が存在する．

定理 2.10 により，写像  $S_*$  は具体的に記述された  $(B^*)_1$  の端点同士を対応させていることがわかる．さらに部分空間  $B$  が点分離性などの適切な条件を満たす場合には，[9, 10] における手法を適用することができ，全射実線形等距離写像  $S : B \rightarrow B$  はある同相写像を誘導し，その対応する写像  $T : A \rightarrow A$  の形は (8) で与えられるように，荷重合成作用素かその複素共役を伴う形になることが知られてる．

特に，ベクトル値連続関数からなる Banach 空間上の全射実線形等距離写像に関する研究において，自然な問題として次のような問いが提起される．講演者自身もこの問題に強い関心を寄せている．

**問題**  $B_i$  を  $C(X_i \times Y_i)$  内の Banach 空間 ( $i = 1, 2$ ) とし,  $T : B_1 \rightarrow B_2$  を全射実線形等距離写像とする. このとき, 写像  $T$  が同相写像  $\tau : X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times Y_1$  を誘導したとき, すなわち, 直積空間  $X_1 \times Y_1$  と  $X_2 \times Y_2$  が同相であると仮定する. このとき直積空間の同相写像  $\tau$  は各成分の位相空間が同相であることを必ず保証するか.

すなわち, 2つの同相写像  $\tau_X : X_2 \rightarrow X_1$  と  $\tau_Y : Y_2 \rightarrow Y_1$  が存在して,

$$\tau(x, y) = (\tau_X(x), \tau_Y(y)) \quad ((x, y) \in X_2 \times Y_2) \quad (14)$$

の形で表されるか. またこのような現象が生じるのはどのような関数空間で起きるのだろうか.

もちろん直積空間  $X_1 \times Y_1$  と  $X_2 \times Y_2$  の間に同相写像  $\tau : X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times Y_1$  が存在したとしても (14) のようになるとは限らない. 例えば以下のような例が存在する.

**例** 区間  $I = [0, 1]$  とし,  $y \in I$  に対して

$$\delta(y) = \frac{1}{8} \sin(\pi y) \quad (\delta(0) = \delta(1) = 0, |\delta(y)| < \frac{1}{2})$$

を定める. このとき, 各  $y$  ごとに増加同相  $h_y : I \rightarrow I$  を

$$h_y(x) = \begin{cases} 2x(\frac{1}{2} + \delta(y)), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (\frac{1}{2} + \delta(y)) + 2(1 - \frac{1}{2} - \delta(y))(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

で与える (折れ線の一次写像の貼り合わせ). 写像

$$H : I \times I \longrightarrow I \times I, \quad H(x, y) = (h_y(x), y)$$

を考える. このとき,

- $H$  は同相写像である. 実際,  $y$  を固定すれば  $x \mapsto h_y(x)$  は  $I$  の同相写像であり,  $y \mapsto h_y$  も連続に依存する. よって  $H$  は連続かつ可逆で, 逆写像は

$$H^{-1}(u, v) = (h_v^{-1}(u), v)$$

と明示できる.

- $H$  は境界  $\partial(I \times I)$  で恒等写像, つまり,  $H|_{\partial(I \times I)} = \text{id}_{I \times I}$  となる.
- $H$  は直積形  $H(x, y) = (\tau_1(x), \tau_2(y))$  にはならない. 実際,  $x$  を固定して  $y$  を動かすと第 1 成分  $h_y(x)$  が  $y$  に依存して変化する.

筆者はこの問題やその周辺の課題について, 新潟大学の三浦毅先生よりご教示いただいた. これを受けて, 先行研究 [7, 12] を参考にしながら, リプシッツ関数空間  $\text{Lip}(I)$  に値をとる連続微分可能な関数空間  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  上の全射実線形等距離写像の構造解明を試みた. この問題を正確に述べるために必要となるいくつかの記号や定義を準備する.

**定義 (関数空間  $C^1(I)$  と  $\text{Lip}(I)$ )**  $I$  を 0 から 1 までの閉区間  $[0, 1]$  とする.  $L^\infty(I)$  を閉区間  $[0, 1]$  上のルベーグ測度について本質的に有界な可測関数からなる線形空間とする. 任意の  $f \in L^\infty(I)$  に対して, そのノルム  $\|f\|_{L^\infty}$  を  $f$  の本質的上界, つまり,

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{x \in I} |f(x)|$$

と定義することで,  $(L^\infty(I), \|\cdot\|_{L^\infty})$  は Banach 空間となる.

ここで用いた本質的上界 (essential supremum) の定義及びその性質の詳細については, 文献 [20, Definition 3.7] を参照されたい.

このとき, 関数空間  $C^1(I)$  と  $\text{Lip}(I)$  をそれぞれ次のように定義する:

$$\begin{aligned} C^1(I) &= \{f \in C(I) \mid f' \in C(I)\}, \\ \text{Lip}(I) &= \{g \in C(I) \mid g' \in L^\infty(I)\}. \end{aligned}$$

これら 2 つの関数空間  $C^1(I)$  と  $\text{Lip}(I)$  にはお互いに非常に似た性質をいくつか持つ Banach 空間である. まず両空間には自然な微分構造が存在し, 任意の関数  $f \in C^1(I)$  と  $g \in \text{Lip}(I)$  に対して導関数を持ちそれぞれ  $f' \in C(I)$  と  $g' \in L^\infty(I)$  である. また両空間には同じようなノルムを定義でき, 任意の  $f \in C^1(I)$  と  $g \in \text{Lip}(I)$  に対してノルム  $\|f\|_1$  と  $\|g\|_1$  を

$$\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad \|g\|_1 = \|g\|_\infty + \|g'\|_{L^\infty} \quad (15)$$

で定義する. このとき,  $(C^1(I), \|\cdot\|_1)$  と  $(\text{Lip}(I), \|\cdot\|_1)$  は Banach 空間となる. 以降, 本章の議論では関数空間  $C^1(I)$  および  $\text{Lip}(I)$  のノルムはそれぞれ (15) で定義されるとする. 次に線形空間  $C(I, \text{Lip}(I))$  における微分を以下のように定義する.

**定義 2.11 (線形空間  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  とその微分)** 線形空間  $C(I, \text{Lip}(I))$  を

$$C(I, \text{Lip}(I)) = \{F : I \rightarrow \text{Lip}(I) \mid F \text{ は } I \text{ 上で連続}\}$$

と定義する.  $F, G \in C(I, \text{Lip}(I))$  に対して,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - G(t) \right\|_1 = 0 \quad (t \in I)$$

が成り立つとき,  $G$  を  $F$  の導関数とし,  $G = D(F)$  とする.

通常の実数値関数の場合は微分商は絶対値を用いて考えるが,  $C(I, \text{Lip}(I))$  の場合は関数の値域が Lipschitz 関数空間  $\text{Lip}(I)$  であることから, ノルム  $\|\cdot\|_1$  を用いて微分を定義する. 以降記号の簡略化のため, 以下の略記を使用する.

**注意** 任意の  $F \in C(I, \text{Lip}(I))$  と  $s \in I$  に対して,

$$F_s = F(s), \quad F'_s = F'(s)$$

とする. このとき,  $F \in C(I, \text{Lip}(I))$  から  $F(s) \in \text{Lip}(I)$  となるため, Banach 空間  $\text{Lip}(I)$  の定義から  $F_s \in \text{Lip}(I)$ ,  $F'_s \in L^\infty(I)$  であることに注意する. また任意の  $F \in C(I, \text{Lip}(I))$  と  $(s, x) \in I \times I$  に対して,

$$F(s)(x) = F(s, x)$$

とすることで  $F \in C(I, \text{Lip}(I))$  を  $F_s \in \text{Lip}(I)$  ( $s \in I$ ) を満たす  $I \times I$  上の連続関数とみなす.

**定義 2.12**(関数空間  $C^1(I, \text{Lip}(I))$ ) 関数空間  $C(I, \text{Lip}(I))$  の線形部分空間  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  を

$$C^1(I, \text{Lip}(I)) = \{F \in C(I, \text{Lip}(I)) \mid D(F) \in C(I, \text{Lip}(I))\}$$

で定義する. 任意の  $F \in C^1(I, \text{Lip}(I))$  に対して  $F$  のノルム  $\|F\|_\Sigma$  を

$$\|F\|_\Sigma = \sup_{s \in I} \|F_s\|_1 + \sup_{t \in I} \|D(F)_t\|_1 \quad (16)$$

と定めることで  $(C^1(I, \text{Lip}(I)), \|\cdot\|_\Sigma)$  は Banach 空間となる.

$f \in C^1(I)$  と  $g \in \text{Lip}(I)$  に対して, 関数  $f \otimes g : I \rightarrow \text{Lip}(I)$  を

$$f \otimes g(s) = f(s)g \quad (s \in I) \quad (17)$$

で定義すると,  $f \otimes g \in C^1(I, \text{Lip}(I))$  であることが直ちに確認できる. ここで  $1_I : I \rightarrow \mathbb{C}$  を 1 の値を取る定数関数とし, (17) で  $f = 1_I$  と  $g = 1_I$  をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} f \otimes 1_I(s, x) &= f(s) & ((s, x) \in I \times I), \\ 1_I \otimes g(s, x) &= g(x) & ((s, x) \in I \times I) \end{aligned}$$

が成り立つ. つまり,  $f \in C^1(I)$  と  $g \in \text{Lip}(I)$  をそれぞれ  $f \otimes 1_I$  と  $1_I \otimes g$  と同一視することで  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  は 2 つの Banach 空間  $C^1(I)$  と  $\text{Lip}(I)$  を含み, かつ 2 種類の微分構造を持つ  $C(I \times I)$  内の Banach 空間であることがわかる. 定義から明らかのように,  $C^1(I)$  と  $\text{Lip}(I)$  は互いに似た性質を持つ Banach 空間であるが  $f \in C^1(I)$  と  $g \in \text{Lip}(I)$  のそれぞれの導関数が  $f \in C(I)$  と  $g' \in L^\infty(I)$  であるため微分構造が若干異なっている Banach 空間である. 論文 [16] ではこれら 2 種類の微分構造の違いが  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  上の距離構造にどのような影響を及ぼしているのか  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  上の全射等距離写像を通して調べた. 特に, 全射等距離写像  $T : C^1(I, \text{Lip}(I)) \rightarrow C^1(I, \text{Lip}(I))$  が同相写像  $\tau : I \times I \rightarrow I \times I$  を誘導する場合に, これら 2 つの微分構造の違いが  $\tau$  に反映され

$$\tau(x, y) = (\tau_1(x), \tau_2(y)) \quad ((x, y) \in I \times I)$$

のように 2 つの同相写像  $\tau_i : I \rightarrow I$  ( $i = 1, 2$ ) に自然に分離されるか, あるいはそうならないかを明らかにし, 以下の結果を得た.

**定理 2.13 (Hirota [16])** 写像  $T$  を Banach 空間  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  上の全射実線形等距離写像とする. このとき, 定数  $c \in \mathbb{T}$  と同相写像  $\tau_i \in \{\text{id}_I, 1_I - \text{id}_I\}$  が存在し,

$$\begin{aligned} T(F)(s, x) &= cF(\tau_1(s), \tau_2(x)) \quad ((F \in C^1(I, \text{Lip}(I)), (s, x) \in I \times I)) \\ &\text{or} \\ T(F)(s, x) &= \overline{cF(\tau_1(s), \tau_2(x))} \quad ((F \in C^1(I, \text{Lip}(I)), (s, x) \in I \times I)) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし,  $\text{id}_I : I \rightarrow I$  は  $\text{id}_I(t) = t$  ( $t \in I$ ) で定義される  $I$  上の恒等写像である.

この結果から  $C^1(I, \text{Lip}(I))$  上の全射実線形等距離写像は荷重合成作用素もしくはそれに複素共役がついた形になることが明らかになった. それに加えて写像  $T$  から誘導された  $I \times I$  上の同相写像が  $C^1$  関数空間と Lipschitz 関数空間  $\text{Lip}(I)$  のそれぞれの変数に分離され, 2つの同相写像  $\tau_1$  と  $\tau_2$  によって自動的に分離されることがわかった. この結果は Banach 空間の微分構造と距離構造がお互いに影響を及ぼし合っていることを示唆した結果であるといえる.

### 3 連続関数空間とその部分空間に関する Tingley 問題

近年では全射等距離写像の構造を決定している本質的な情報はどこに存在しているのかを明らかにする研究が注目されている. 1987年に D. Tingley は以下の問題を提唱した.

**問題 (D. Tingley [21])**  $(B_i, \|\cdot\|_i)$  を Banach 空間とし ( $i = 1, 2$ ),  $S(B_i)$  を

$$S(B_i) = \{x \in B_i \mid \|x\|_i = 1\}$$

で定まる  $B_i$  の単位球面とする.

任意の全射等距離写像  $\Delta : S(B_1) \rightarrow S(B_2)$  に対し,  $S(B_1)$  上で  $\Delta$  と一致する全射実線形等距離写像  $T : B_1 \rightarrow B_2$  は存在するか, すなわち,  $T|_{S(B_1)} = \Delta$  を満たすような全射実線形等距離写像  $T$  が存在するか.

この問題は全射等距離写像  $T : B_1 \rightarrow B_2$  の構造を決定する上で, 本質的な情報が Banach 空間  $B$  の単位球面  $S(B)$  に存在していることを主張している. 言い換えれば, Banach 空間の単位球面が等距離同型であれば空間全体の距離構造もそれによって一意的に決まることを主張している. これまで連続関数空間をはじめとする様々な連続関数からなる Banach 空間に関する Tingley 問題が肯定的に解決されてきた. 一方で一般の場合については 2次元 Banach 空間の場合は [1] にて肯定的に解かれているが 3次元以上の場合では現在でも未解決のようである.

連続関数からなる Banach 空間に関する Tingley 問題に対する初期の結果として知られているのが 1994年の R.S. Wang の結果 [22] である. ここで  $\Omega$  を局所コンパクトな

Hausdorff 空間とし,  $C_0(\Omega)$  を無限遠点で 0 に収束する  $\Omega$  上の連続関数からなる線形空間とす。任意の  $f \in C_0(\Omega)$  に対して

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

で定められるノルムにより,  $(C_0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$  は Banach 空間となる。Wang はこの空間における単位球面上の任意の全射等距離写像  $\Delta : S(C_0(\Omega_1)) \rightarrow S(C_0(\Omega_2))$  が, 空間全体に拡張可能であること, すなわち全射実線形等距離写像  $T : C_0(\Omega_1) \rightarrow C_0(\Omega_2)$  で  $\Delta = T|_{S(C_0(\Omega_1))}$  を満たすものが存在することを証明した。さらに連続関数空間よりも小さい部分空間においても Tingley 問題が解決されている。Hatori, Oi, Togashi は [13] にて連続関数空間  $C(X)$  の関数環の場合でも同様の結果が得られることを明らかにした。関数環とは  $1_X(x) = 1$  ( $x \in X$ ) で定義される定数関数  $1_X$  を持ち, 次の条件を満たす  $C(X)$  の閉部分環  $A$  である。

- 任意の 2 点  $x, y \in X$  に対して,  $f(x) \neq f(y)$  を満たすような  $f \in A$  が存在する。

一方で, 単位元の存在を仮定しない *uniformly closed function algebra* の場合でも Cueto-Avellaneda, Hirota, Miura, Peralta により Tingley 問題が肯定的に解決されることが明らかにされた [3]。この結果を述べるために *Choquet boundary* と *uniformly closed function algebra* を定義する。詳しい背景や定義については, Choquet boundary は [6, Definition 2.3.7], *uniformly closed function algebra* については [3, 8] をそれぞれご覧いただきたい。

**定義 3.1 (Choquet boundary)**  $A$  を連続関数空間  $C_0(\Omega)$  の線形部分空間とする。各  $x \in \Omega$  に対して, 点値汎関数  $\delta_x$  を

$$\delta_x(f) = f(x) \quad (f \in A)$$

で定めるとき,  $\Omega$  の部分集合  $\text{Ch}(A)$  を

$$\text{Ch}(A) = \{x \in \Omega \mid \delta_x \in \text{ext}(A^*)_1\}$$

を線形部分空間  $A$  の *Choquet boundary* という。

**定義 3.2 (uniformly closed function algebra)**  $A$  を連続関数空間  $C_0(\Omega)$  の閉部分環とする。このとき, 以下の条件を満たすとき,  $A$  を  $C_0(\Omega)$  の *uniformly closed function algebra* という：

- 任意の  $x \in \Omega$  に対して,  $f(x) \neq 0$  を満たす  $f \in A$  が存在する。
- 任意の 2 点  $y, z \in \Omega$  に対して,  $g(y) \neq g(z)$  を満たす  $g \in A$  が存在する。

$\text{Ch}(A)$  は *uniformly closed function algebra*  $A$  に属する関数の重要な情報を含む  $\Omega$  の部分集合である。特に次の 2 つが成り立つ [8, Proposition 2.2, 2.3]：

- 各  $f \in A$  に対して,  $|f(x)| = \|f\|$  を満たす  $x \in \text{Ch}(A)$  が存在する.
- 任意の  $\varepsilon > 0$  と  $x \in \text{Ch}(A)$  に対して,

$$u(x) = 1 = \|u\|_\infty, \quad |u(y)| < \varepsilon \quad (y \in \Omega \setminus U) \quad (18)$$

を満たす関数  $u \in A$  が存在する. このとき関数  $u$  を  $A$  の peaking function という.

[3] では peaking function の対応を調べていくことで単位球面上の全射等距離写像の形を以下のように明らかにした.

**定理 3.3 (Cueto-Avellaneda, H, Miura, Peralta [3])**  $A_i$  を  $C_0(\Omega_i)(i = 1, 2)$  の uniformly closed function algebra とする.  $\Delta : S(A_1) \rightarrow S(A_2)$  が全射等距離写像であるとき, 関数  $\alpha : \text{Ch}(A_2) \rightarrow \mathbb{T}$  と同相写像  $\tau : \text{Ch}(A_2) \rightarrow \text{Ch}(A_1)$ , 部分集合  $K \subset \text{Ch}(A_2)$  が存在して

$$\Delta(f)(y) = \begin{cases} \alpha(y)f(\tau(y)) & (y \in K) \\ \alpha(y)\overline{f(\tau(y))} & (y \in \text{Ch}(A_2) \setminus K) \end{cases} \quad (19)$$

が成り立つ.

この結果から写像  $T : A_1 \rightarrow A_2$  を

$$T(f) = \begin{cases} \|f\|_\infty \Delta\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) & (f \neq \mathbf{0}_{A_1}) \\ \mathbf{0}_{A_2} & (f = \mathbf{0}_{A_1}) \end{cases}$$

と定義することで (19) から  $T$  は  $T|_{S(A_1)} = \Delta$  を満たす全射等距離写像になるため, uniformly closed function algebra に関する Tingley 問題は肯定的に解決されることがわかる. ここで注目したいのは, 全射等距離写像  $\Delta : S(A_1) \rightarrow S(A_2)$  から同相写像  $\tau : \text{Ch}(A_2) \rightarrow \text{Ch}(A_1)$  が誘導される点である. この現象は 2 つの単位球面  $S(A_1)$  と  $S(A_2)$  の距離構造が一致することで関数が定義されている位相空間の位相構造も一致していることを主張している. すなわち, uniformly closed function algebra では単位球面の距離構造に Banach 空間全体の構造を特徴づける本質的な情報が含まれているといえる.

uniformly closed function algebra は環の構造をもつため, 通常の意味での関数の積について閉じている. 一方で, 一般の Banach 空間の中には, 積について閉じていない空間が数多く存在する. 例えば  $L^p$  空間 ( $1 \leq p < \infty$ ) のような空間では, 関数の積をとる操作が閉じた演算とはならない場合がある. このような背景のもと, 次の問いが生じる:

積について閉じているとは限らない Banach 空間においても, Tingley 問題は肯定的に解決されるだろうか?

この問いに対する一つの答えを与えたのが, 2022 年の Hatori による研究である. Hatori は [15] にて, Banach 空間  $B$  が complex Mazur–Ulam property を満たすための十分条

件を与えた. この性質の始まりとされる Mazur–Ulam property は 2011 年に Cheng と Dong により導入された概念であり, Tingley 問題と密接に関係している. そのため, 現在では Tingley 問題と同等もしくはそれ以上に研究がなされている. Mazur–Ulam property に関する詳しい説明は [4] と [15] をご覧いただきたい.

さて, [15] の結果を用いることで連続関数空間  $C_0(\Omega)$  の部分空間の一つである extremely C-regular subspace では単位球面の距離構造から空間全体の構造を復元できることがわかる. この空間は uniformly closed function algebra と非常に似た性質をもつ連続関数空間  $C_0(\Omega)$  の閉部分空間である. 以下にその定義を記す.

**定義 3.4 (extremely C-regular subspace)**  $\Omega$  を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. 連続関数空間  $C_0(\Omega)$  の閉部分空間  $A$  が *extremely C-regular subspace* であるとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  と任意の  $x_0 \in \text{Ch}(A)$  および  $x_0$  の任意の開近傍  $U \subset \Omega$  に対して,

$$f(x_0) = 1 = \|f\|_\infty, \quad |f(y)| < \varepsilon \quad (y \in \Omega \setminus U) \quad (20)$$

を満たす関数  $f \in A$  が存在することである.

この定義の下で, [15] から次の定理が得られる.

**定理 3.5 (Hatori [15])**  $A$  を  $C_0(\Omega)$  の extremely C-regular subspace とし,  $B$  を任意の Banach 空間とする. 全射等距離写像  $\Delta : S(A) \rightarrow S(B)$  が存在するならば,  $T_{S(A)} = \Delta$  を満たす全射実線形等距離写像  $T : A \rightarrow B$  が存在する.

この定理は, extremely C-regular subspace と単位球面の距離構造が一致する Banach 空間は空間全体の距離構造も自動的に一致することを意味している. さらに, Mazur–Ulam の定理により写像  $T : A \rightarrow B$  は実線形となるため, 空間の代数構造の一部も保存される. 言い換えれば, extremely C-regular subspace においては単位球面の距離構造に空間全体の構造を特徴づける本質的な情報が含まれているということである.

## 4 $\ell^1$ -直和型関数空間に関する Tingley 問題

Hatori による [15] の結果は complex Mazur–Ulam property を通じて Tingley 問題の肯定的解決を導く十分条件を与えている. 一方で, この条件を満たさない代表的な Banach 空間も存在する. その典型例が Lipschitz 関数空間  $\text{Lip}(I)$  や連続微分可能な関数空間  $C^1(I)$  など自然な微分構造を備えた Banach 空間である.

本章ではこのような Banach 空間を対象とする  $\ell^1$ -ノルムが定義された Banach 空間に関する Tingley 問題の研究について述べる. Banach 空間  $\text{Lip}(I)$  は (15) で定義されるノルムの他に様々なノルムが定義される. 例えば, 任意の  $g \in \text{Lip}(I)$  に対して  $g$  のノルム  $\|g\|_\sigma$  を

$$\|g\|_\sigma = |g(0)| + \|g'\|_{L^\infty} \quad (21)$$

で定める. このとき  $(\text{Lip}(I), \|\cdot\|_\sigma)$  は Banach 空間となる. この Banach 空間は, 次に述べるに補題により, Banach 空間  $\mathbb{C}$  と  $L^\infty(I)$  の  $\ell^1$ -ノルムによる直和空間と見なすことができる.

**補題 4.1**  $\mathbb{C} \oplus_{\ell^1} L^\infty(I)$  を, ノルム

$$\|(z, f)\|_1 = |z| + \|f\|_{L^\infty} \quad ((z, f) \in \mathbb{C} \oplus L^\infty(I))$$

によって定義される Banach 空間とする.

任意の  $g \in \text{Lip}(I)$  に対して,  $U(g) \in \mathbb{C} \oplus_{\ell^1} L^\infty(I)$  を

$$U(g) = (g(0), g')$$

で定義する. このとき, 写像  $U : \text{Lip}(I) \rightarrow \mathbb{C} \oplus_{\ell^1} L^\infty(I)$  は全射複素線形等距離写像である.

**証明の概略** 写像  $U : \text{Lip}(I) \rightarrow \mathbb{C} \oplus_{\ell^1} L^\infty(I)$  の定義により  $U$  が複素線形かつ等距離なのは明らかである. よって, 残りは  $U$  が全射であることを示せば良い. 任意の  $(z, f) \in \mathbb{C} \oplus_{\ell^1} L^\infty(I)$  をとり固定する.  $I$  上の関数  $g$  を

$$g(x) = z + \int_0^x f(t) dm(t) \quad (x \in I)$$

により定める (ただし,  $m$  は  $I$  上の Lebesgue 測度とする).  $f \in L^\infty(I)$  であることから,  $g$  は  $I$  上で絶対連続かつ  $g \in \text{Lip}(I)$  である. したがって, [20, Theorem 7.20] と  $g$  の定義から

$$g(0) = z, \quad g' = f$$

であることがわかる. したがって,

$$U(g) = (g(0), g') = (z, f)$$

が成り立ち,  $U$  が全射であることが示された. ゆえに, 写像  $U : \text{Lip}(I) \rightarrow \mathbb{C} \oplus_{\ell^1} L^\infty(I)$  は全射複素線形等距離写像である.  $\square$

$(\text{Lip}(I), \|\cdot\|_\sigma)$  のように, 複数の Banach 空間の  $\ell^1$ -直和空間は一般に [15] で与えられた十分条件を満たさないことが知られている [2, Remark 1]. 応募者は Miura との共著 [17] にて, Banach 空間  $(\text{Lip}(I), \|\cdot\|_\sigma)$  に関する Tingley 問題を [23] とは異なる手法を用いて肯定的に解決した.

**定理 4.2 (H, Miura [17])**  $\Delta : S(\text{Lip}(I)) \rightarrow S(\text{Lip}(I))$  を  $\|\cdot\|_\sigma$  に関する全射等距離写像とすると,  $T|_{S(\text{Lip}(I))} = \Delta$  を満たす全射実線形等距離写像  $T : \text{Lip}(I) \rightarrow \text{Lip}(I)$  が存在する.

さらに, Cabezas, Cueto-Avellaneda, Enami, Miura, Peralta は上の結果をさらに一般化し, extremely C-regular subspace  $A$  と複素数体  $\mathbb{C}$  の  $\ell^1$ -直和である Banach 空間に対する Tingley 問題を肯定的に解決した [2]. 応募者はさらにこの結果を複数の Banach 空間の  $\ell^1$ -直和空間である場合に拡張した. 結果を述べる前にまず対象となる Banach 空間について述べる.

**定義 4.3 ( $\ell^1$ -直和空間)**  $\Lambda$  を空でない集合とする.  $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を Banach 空間の族とし, 集合  $\ell_\Lambda^1(B_\lambda)$  を

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \left\{ (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \mid \sum_{\lambda \in \Lambda} \|f_\lambda\| < \infty \right\}$$

で定義する. 任意の  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \ell_\Lambda^1(B_\lambda)$  に対して,  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  のノルム  $\|(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\|_1$  を

$$\|(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\|_1 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|f_\lambda\|$$

と定めると,  $(\ell_\Lambda^1(B_\lambda), \|\cdot\|_1)$  は Banach 空間となる.

この Banach 空間  $\ell_\Lambda^1(B_\lambda)$  を族  $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の  $\ell^1$ -直和空間という.

この Banach 空間は [17] で扱った  $(\text{Lip}(I), \|\cdot\|_\sigma)$  をはじめとした代表的な Banach 空間を含んでいる. 具体的な例については [2, 18] をご覧いただきたい. 応募者は [18] において,  $\ell^1$ -直和空間における Tingley 問題に対して肯定的な結果を得ており, その構造的特徴を明らかにした.

**定理 4.4 (Hirota [18])**  $M, N$  を空でない集合とし,  $\ell_M^1(B_\mu)$  と  $\ell_N^1(B_\nu)$  をそれぞれ Banach 空間の族  $\{B_\mu\}_{\mu \in M}$  と  $\{B_\nu\}_{\nu \in N}$  の  $\ell^1$ -直和空間とする. 写像  $\Delta : S(\ell_M^1(B_\mu)) \rightarrow S(\ell_N^1(B_\nu))$  が全射等距離写像であるとき,  $T_{|S(\ell_M^1(B_\mu))} = \Delta$  を満たす全射実線形等距離写像  $T : \ell_M^1(B_\mu) \rightarrow \ell_N^1(B_\nu)$  が存在する.

## 5 今後の展望

本稿で紹介した結果は現在進行中の研究の一部であり, 今後はより一般的な Banach 空間への拡張を目指して研究を継続していく予定である. 特に, 本稿で扱った連続微分可能な関数空間  $(C^1(I), \|\cdot\|_1)$  や Lipschitz 関数空間  $(\text{Lip}(I), \|\cdot\|_1)$  など, 自然な微分構造を備えた Banach 空間における Tingley 問題に焦点を当て, さらなる理論的發展を図っていく.

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP24K22845 の助成を受けたものです.

## 参考文献

- [1] T. Banach, *Every 2-dimensional Banach space has the Mazur-Ulam property*, Linear Algebra Appl. **632** (2022), 268–280.
- [2] D. Cabezas, M. Cueto-Avellaneda, Y. Enami, T. Miura, A.M. Peralta, *Tingley’s problem for complex Banach spaces which do not satisfy the Hausdorff distance condition*, Banach J. Math. Anal. **17** (2023), no. 4, Paper No. 65, 34 pp.
- [3] M. Cueto-Avellaneda, D. Hirota, T. Miura, A.M. Peralta, *Exploring new solutions to Tingley’s problem for function algebras*, Quaest. Math. **46** (2023), no. 7, 1315–1346.
- [4] L. Cheng, Y. Dong, *On a generalized Mazur-Ulam question: extension of isometries between unit spheres of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **377** (2011), no. 2, 464–470.
- [5] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, second edition, Graduate Texts in Mathematics, 96, Springer, New York, 1990
- [6] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003
- [7] H. Koshimizu and T. Miura, *Surjective isometries on  $C^1$  spaces of uniform algebra valued maps*, Nihonkai Math. J. **30** (2019), no. 2, 41–76.
- [8] T. Miura, *Real-linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2011), no. 4, 778–788
- [9] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, in *Function spaces in analysis*, 231–239, Contemp. Math., **645**, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [10] K. Kawamura, T. Miura, *Real-linear surjective isometries between function spaces*, Topology Appl. **226** (2017), 66–85.
- [11] T. Miura and N. Niwa, *Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc*, Nihonkai Math. J. **29** (2018), no. 1, 53–67.
- [12] O. Hatori and S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps*, Acta Sci. Math. (Szeged) **84** (2018), no. 1-2, 151–183.
- [13] O. Hatori, S. Oi and R. Shindo Togashi, *Tingley’s problems on uniform algebras*, J. Math. Anal. Appl. **503** (2021), no. 2, Paper No. 125346, 14 pp.
- [14] O. Hatori, *The Mazur-Ulam property for uniform algebras*, Studia Math. **265** (2022), no. 2, 227–239.
- [15] O. Hatori, *The Mazur-Ulam property for a Banach space which satisfies a separation condition*, in *Research on preserver problems on Banach algebras and related topics*, 29–82, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B93, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.
- [16] D. Hirota, *Surjective isometries on the Banach algebra of continuously differentiable maps with values in Lipschitz algebra*, Acta Sci. Math. (Szeged) **89** (2023), no. 1-2, 227–256.
- [17] D. Hirota and T. Miura, *Tingley’s problem for a Banach space of Lipschitz functions on the closed unit interval*, in *Research on preserver problems on Banach algebras and related topics*, 157–181, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B93, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.

- [18] D. Hirota, *Tingley's problem for the direct sum of uniformly closed extremely  $C$ -regular subspaces with the  $\ell^1$ -sum norm*, Adv. Oper. Theory **10** (2025), no. 2, Paper No. 38, 35 pp.
- [19] K. Kawamura, H. Koshimizu, T. Miura, *Norms on  $C^1([0, 1])$  and their isometries*, Acta Sci. Math. (Szeged) **84** (2018), no. 1-2, 239–261.
- [20] W. Rudin, *Real and complex analysis*, third edition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [21] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, Geom. Dedicata **22** (1987), no. 3, 371–378.
- [22] R. S. Wang, *Isometries between the unit spheres of  $C_0(\Omega)$  type spaces*, Acta Math. Sci. (English Ed.) **14** (1994), no. 1, 82–89.
- [23] R. S. Wang, A. Orihara, *Isometries on the  $l^1$ -sum of  $C_0(\Omega, E)$  type spaces*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), no. 1, 131–154.

# 多孔質媒体内の浸透現象を記述する自由境界問題について

熊崎耕太 (京都教育大学教育学部)

## 概要

本発表では、多孔質材料内部における拡散物質の浸透現象を記述する自由境界問題について、古典的なステファン問題を出发点として考察する。自由境界問題は、解を求める領域の境界の位置が時間とともに変化し、かつその位置が解の一部として決定される問題である。このような問題は、氷の融解、腫瘍の成長、生物の生息領域拡大など、自然界や工学分野の様々な現象で現れる数学的枠組みである。

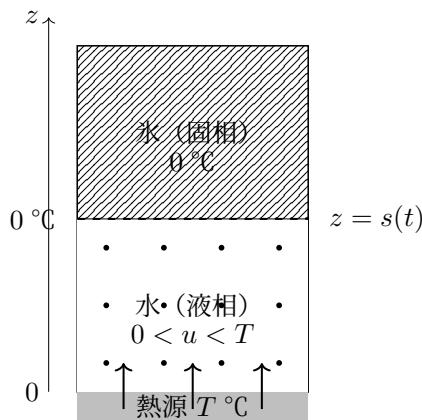
## 1 自由境界問題

代表的な自由境界問題として、ステファン問題が知られている。ステファン問題は、1831年にJ. Stefanによって氷の形成過程を記述するために定式化された。この問題は、固体と液体の境界が移動する現象を数学的にモデル化したものである。

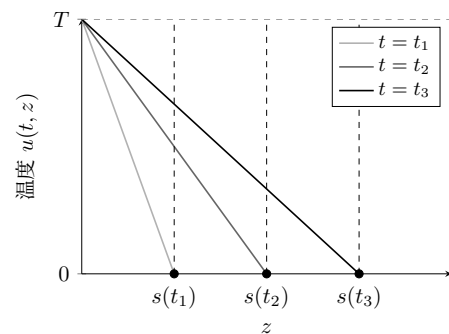
### 1.1 具体的な設定と数学的定式化

初期状態で一様に  $0^\circ\text{C}$  となっている氷柱を考える。時刻  $t = 0$  から、氷柱の底面 ( $z = 0$ ) に熱源を接触させ、一定温度  $T^\circ\text{C}$  ( $T > 0$ ) に保つ。時間の経過とともに底面から氷が融解し、水の領域と氷の領域が形成される。水の領域では、温度は底面の  $T^\circ\text{C}$  から氷との界面の  $0^\circ\text{C}$  まで連続的に変化する。この問題を数学的に定式化するために以下の記号を用いる:

- $z$ : 氷柱の底からの距離
- $u(t, z)$ : 時刻  $t$ , 距離  $z$  における温度
- $s(t)$ : 水と氷の境界



(a) ステファン問題の物理的設定



(b) 温度分布の時間発展

図 1: 氷の融解過程における温度分布と自由境界の移動

この記号のもとでは、時刻  $t > 0$  において、水の領域を  $0 \leq z \leq s(t)$ 、氷の領域を  $z > s(t)$  と表すことができる。水の領域では温度は  $T^\circ\text{C}$  ( $z = 0$ ) から  $0^\circ\text{C}$  ( $z = s(t)$ ) まで単調に減少し、氷の領域では温度は一様に  $0^\circ\text{C}$  である。移動境界  $z = s(t)$  は時間とともに増加する ( $s'(t) > 0$ )。この融解過程では、底面から供給される熱が水中を伝導し、界面に到達した熱が氷の融解に使われる。

### 数学的定式化

ステファン問題は温度  $u(t, z)$  と水の氷の境界  $s(t)$  を用いて、次のように定式化される。時刻  $t \in [0, T]$  における水の領域を  $\Omega(t) = \{z \in \mathbb{R} : 0 < z < s(t)\}$  とする。  $u : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$  と  $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  は以下の連立系を満たす：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \text{in } Q_T := \{(t, z) \mid 0 < t < T, 0 < z < s(t)\} & (1.1) \\ u(t, 0) = f(t) & \text{on } (0, T) & (1.2) \\ u(t, s(t)) = 0 & \text{on } (0, T) & (1.3) \\ \frac{ds}{dt}(t) = -k \frac{\partial u}{\partial z}(t, s(t)) & \text{on } (0, T) & (1.4) \\ s(0) = s_0, \quad u(0, z) = u_0(z) & \text{for } z \in [0, s_0] & (1.5) \end{cases}$$

(1.1) 式は水の領域で熱が熱伝導方程式に従って伝わること、(1.2) は水の底面 ( $z = 0$ ) で熱源  $f(t)$  に触れていること、(1.3) は水と氷の境界 ( $z = s(t)$ ) では温度が 0 であることをそれぞれ表している。ここで、重要なのは (1.4) 式の自由境界条件である。これは「氷に到達する熱流束が大きいほど、氷は速く融解する」という物理法則を数学的に表現したものである。

### 自由境界問題の本質的困難：

この問題の数学的な難しさは、解を求めるべき領域  $Q_T$  自体が未知関数  $s(t)$  に依存することにある。つまり、解と同時に解の定義域も求める必要がある。この困難を克服するため、変数変換  $y = z/s(t)$  により移動領域を固定領域  $[0, 1]$  に変換する手法が有効である。

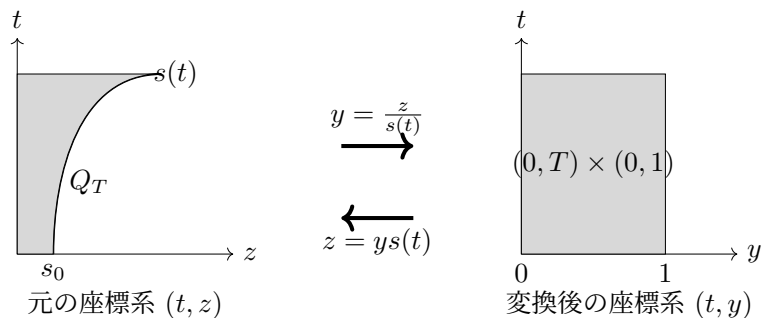


図 2: 領域変換による固定領域への帰着

変換後の未知関数  $v(t, y) = u(t, ys(t))$  は固定領域  $(0, T) \times (0, 1)$  で定義され、元の問題は  $v$  と  $s$  に関する連立系に書き換えられる。この変換により、未知領域の問題が固定領域での非線形問題に帰着される。これにより、偏微分方程式の初期値境界値問題を解くための理論、例えば発展方程式（無限次元空間上の常微分方程式）の理論を適用することが可能となる。

## 1.2 可解性と挙動に関する結果

ステファン問題{(1.1)-(1.5)}は、古くから研究されており、これまでに解の存在や解の挙動に関する豊富な結果が知られている。例えば、 $f(t) = T$  (定数) の場合、関数  $u$  と自由境界  $s(t)$  は以下のように決定される:

$$u(t, z) \sim \int_{\frac{z}{2\sqrt{kt}}}^{\alpha} e^{-z^2} dz \quad (\alpha > 0), \quad s(t) \sim 2\alpha\sqrt{kt}$$

ここで  $\alpha$  は (1.2) 式などにより決定される定数である。後者の自由境界  $s(t)$  の挙動は、 $z = s(t)$  を  $u(t, z)$  に代入することによって得られる。これは融解界面が時間の平方根に比例して進行することを表している。一般の  $f(t)$  の場合、[7]において、 $s_0 > 0$  で  $f(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) と  $u_0$  ( $0 \leq z \leq s_0$ ) が微分可能な関数である場合に、ステファン{(1.1)-(1.5)}が一意解  $(s, u)$  を持つことを示している。ここでいう解  $(s, u)$  は次のような条件をみたすものをいう:

- (S1)  $s(t) > 0$  かつ  $s(t)$  は  $0 < t \leq T$  で連続的・微分可能。
- (S2) 領域  $D$  ( $0 < z < s(t), 0 < t < T$ ) において、 $u_t, u_{zz}$  は連続かつ (1.1) を満たす。
- (S3)  $(0, T)$  上で (1.2)-(1.4) を満たす。また  $s(0) = s_0$  かつ  $[0, s_0]$  上で  $u(0, z) = u_0(z)$  を満たす。

また、[2] では  $s_0 > 0$  で  $u_0$  と  $f$  がそれぞれ  $[0, s_0]$  上および  $[0, T]$  上で区分的に連続である場合に、[3] では  $s_0 > 0$  で  $u_0$  と  $f$  がそれぞれ  $[0, s_0]$  上および  $[0, T]$  上で非負で有限個のジャンプ点以外で連続の場合に、ステファン問題{(1.1)-(1.5)}の一意解  $(s, u)$  の存在を証明している。

異なる境界条件下における問題として、条件 (1.2) の代わりに

$$-\frac{\partial u}{\partial z}(t, 0) = f(t) \text{ on } (0, T) \tag{1.6}$$

を課したステファン問題{(1.1), (1.6), (1.3)-(1.5)}が挙げられる。[4, 5] では  $f(t)$  が時間に関して一定の場合、[1] では  $f(t)$  を  $(0, T)$  上非負で連続な場合に一意解  $(s, u)$  の存在と証明している。また、[6] では、以下のように (1.3) と (1.4) を一般化した条件のもとでのステファン問題の解の存在と一意性が示されている。

$$\begin{aligned} u(t, s(t)) &= F(t, s(t)), \\ \frac{\partial u}{\partial z}(t, s(t)) &= \lambda(t, s(t))s_t(t) + \mu(t, s(t)) \end{aligned}$$

ここで、 $F, \lambda, \mu$  はそれぞれ時刻  $t$  と位置  $z$  に依存する関数である。この挙げた結果はごく一部であるが、これ以外にも (1.1) 式に反応項がある場合や (1.6) 式を一般化したものなどステファン問題に対する結果は数多くあり、現在も解析が進められている。

以下に、ステファン問題{(1.1)-(1.5)}の解を持つ基本的な解の性質を挙げる。

**定理 1.**  $(0, T)$  上で  $f(t) \geq 0$  かつ  $[0, s_0]$  上で  $u_0(z) \geq 0$  のとき

- (i) 温度の非負性:  $u(t, z) \geq 0$  for  $(t, z) \in Q_T$
- (ii) 自由境界の単調性:  $s'(t) \geq 0$  for  $t \in (0, T)$

**定理 2.** 二つの解  $(u_1, s_1), (u_2, s_2)$  に対し、初期・境界データが  $u_{01} \leq u_{02}$  かつ  $f_1 \leq f_2$  を満たすなら、 $s_1(t) \leq s_2(t)$  かつ共通領域で  $u_1 \leq u_2$ .

定理 1 の結果において、自由境界の単調性は融解が進行することを意味している。その証明は、最大値原理に基づく。すなわち (1.1) のような放物型方程式を満たしている場合、その解は領域の境界で最大値と最小値を達成する。本問題の場合、 $u(t, 0) = f(t) \geq 0$ ,  $u(0, z) = u_0 \geq 0$ ,  $u(0, z) = u_0 \geq 0$  より領域の境界上で  $u(t, z) \geq 0$  であることから定理 1 の (i) が得られる。特に  $s(t)$  近傍で  $u > 0$  であることも分かるので、 $\frac{\partial u}{\partial z}(t, s(t)) < 0$  となり、(1.4) から定理 2 の (ii) が成り立つことがわかる。定理 2 は定理 1 と背理法を用いて示される。

また、以下のような自由境界  $s(t)$  の表示式も知られている。

$$s^2(t) = s_0^2 + 2 \int_0^t f(\tau) d\tau + 2 \int_0^{s_0} zu_0(z) dz - 2 \int_0^{s(t)} zu(t, z) dz$$

(表示式の導出) 方程式 (1.1) に  $z$  を掛けて区間  $[0, s(t)]$  で積分すると

$$\int_0^{s(t)} zu_t(t, z) dz - k \int_0^{s(t)} zu_{zz}(t, z) dz = 0$$

が得られる。部分積分用いると第一項と第二項は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^{s(t)} zu_t(t, z) dz &= \frac{d}{dt} \left( \int_0^{s(t)} zu(t, z) dz \right) - s(t)u(t, s(t))s_t(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \int_0^{s(t)} zu(t, z) dz \right), \\ k \int_0^{s(t)} u_{zz}z dz &= k \int_0^{s(t)} \left[ (u_z(t, z)z)_z - u_z(t, z) \right] dz \\ &= ku_z(t, s(t))s(t) - (u(t, s(t)) - u(t, 0)) = ku_z(t, s(t))s(t) + u(t, 0) \end{aligned}$$

ここで、 $u(t, s(t)) = 0$  を用いている。自由境界条件  $s_t(t) = -ku_z(t, s(t))$  より、

$$ku_z(t, s(t))s(t) = -s_t(t)s(t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2(t)$$

である。これらを元の積分方程式に代入し区間  $[0, t]$  で積分することにより、表示式が導かれる。

この表示式を用いて、以下の自由境界  $s(t)$  の詳細な挙動が導出される。

**定理 3** (自由境界の挙動). 関数  $f(t)$  が  $\int_0^\infty f(t) dt = \infty$  かつ  $\limsup_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  を満たしているとする。このとき、

$$s(t) \sim \left( 2 \int_0^t f(\tau) d\tau \right)^{1/2}$$

この結果は、様々な時間変化する熱源に対する融解境界の長時間での挙動を示しており、定理 3 における  $f(t)$  として  $f(t) = \alpha t^{-\delta}$  ( $\alpha > 0$ ,  $0 < \delta < 1$ ) や  $f(t) = \alpha t^{-1}$  ( $\alpha > 0$ ) などが挙げられる。

## 2 多孔質材料内の浸透現象

### 2.1 物理的背景と研究動機

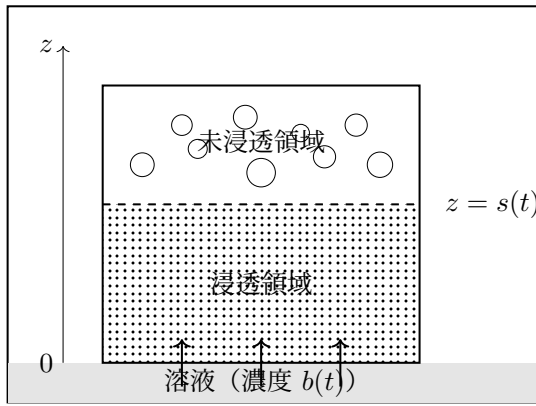
気泡ゴムは、ゴムの樹液に発泡剤を加えてスポンジ状に成形した多孔質材料である。このような多孔質材料は、建築材料、フィルター、生体材料など幅広い分野で使用されており、その内部での物質輸送現象の理解は工学的に重要である。

本研究では、気泡ゴム内の拡散物質の浸透現象に着目する。具体的には、気泡ゴムを溶液に浸した際に拡散物質がゴム内部に浸透し、材料が膨潤する過程を考察する。この現象では、拡散物質の濃度分布と浸透位置（拡散フロント）の時間発展を理論的に導出することが主な関心事である。

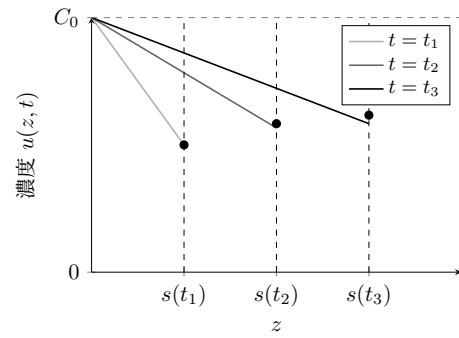
## 2.2 具体的な設定と数学的定式化

拡散物質が溶けている溶液に気泡ゴム（内部の構造は一様とする）を浸すことを考える。時刻  $t = 0$  において、気泡ゴムの底面 ( $z = 0$ ) が溶液と接しているものとする。時間経過とともに、底面から拡散物質が流入し、拡散物質の領域（浸透領域）と拡散物質のない領域（未浸透領域）が形成される。拡散物質の領域では、拡散物質の濃度が連続的に変化する。この問題を数学的定式化するために以下の記号を用いる。

- $z$ : 気泡ゴムの底からの距離
- $u(t, z)$ : 時刻  $t$ , 距離  $z$  における拡散物質の濃度
- $s(t)$ : 拡散物質の領域と拡散物質のない領域の境界



(a) 気泡ゴム内の拡散物質浸透の模式図



(b) 濃度分布の時間発展（浸透問題）

この記号のもとでは、時刻  $t > 0$  において、浸透領域を  $0 \leq z \leq s(t)$ 、未浸透領域を  $z > s(t)$  と表すことができる。浸透領域では、底部 ( $z = 0$ ) から拡散物質が吸収され、拡散物質の濃度がしだいに高まることを考える。初期条件として、 $t = 0$  ではわずかに浸透領域があるものとして  $s(0) = s_0$  ( $s_0$  は微小な正値) で  $[0, s_0]$  では  $u_0 \geq 0$  とする。

### 数学的定式化

浸透問題は拡散物質の濃度 ( $u, z$ ) と浸透領域と未浸透領域の境界  $s(t)$  を用いて、次のように定式化される。時刻  $t \in [0, T]$  における拡散物質の領域を  $\Omega(t) = \{z \in \mathbb{R} : 0 < z < s(t)\}$  とする。  $u : [0, T] \times \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$  と  $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  は以下の連立系を満たす：

$$\begin{cases} u_t - u_{zz} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, s(t)) & (2.1) \\ -u_z(t, 0) = \beta(b(t) - \gamma u(t, 0)) & \text{on } (0, T) & (2.2) \\ -u_z(t, s(t)) = u(t, s(t))s_t(t) & \text{on } (0, T) & (2.3) \\ s_t(t) = a_0(u(t, s(t)) - \varphi(s(t))) & \text{on } (0, T) & (2.4) \\ s(0) = s_0, \quad u(0, z) = u_0(z) & \text{for } z \in [0, s_0] & (2.5) \end{cases}$$

ここで、 $b(t)$  は溶液内の拡散物質の濃度、 $\beta > 0$  は吸収率を表すパラメータ、 $\gamma > 0$  は表面での濃度平衡に関する係数、 $a_0 > 0$  はフロント移動の速度を制御するパラメータ、 $\varphi(s)$  は重力など浸透抑制効果を表す関数である。(2.1) 式は、拡散物質が拡散方程式によって広がることを表現しており、(2.2) 式と (2.3) 式は具体的な設定に基づく境界条件である。その物理的意味と導出は以下である。固定端  $z = 0$  における条件 (2.2) は、溶液とゴム表面での物質輸送を記述する。この条件は以下のように解釈される：

- $b(t) > \gamma u(t, 0)$  のとき： $u_z(t, 0) < 0$  となり、拡散物質が材料内部へ流入
- $b(t) = \gamma u(t, 0)$  のとき： $u_z(t, 0) = 0$  となり、平衡状態で流入なし
- $b(t) < \gamma u(t, 0)$  のとき： $u_z(t, 0) > 0$  となり、拡散物質が材料から流出

自由境界  $z = s(t)$  における条件 (2.3) は、質量保存則から導出される。時間区間  $[t, t + \Delta t]$  における物質収支を考えると：

$$\int_0^{s(t)} u(t, z) dz - u_z(t, 0) \Delta t = \int_0^{s(t+\Delta t)} u(t + \Delta t, z) dz.$$

$\Delta t$  で両辺を割り、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限をとると：

$$\begin{aligned} -u_z(t, 0) &= \int_0^{s(t)} u_t(t, z) dz + s_t(t) u(t, s(t)) \\ &= \int_0^{s(t)} u_{zz}(t, z) dz + s_t(t) u(t, s(t)) \\ &= u_z(t, s(t)) - u_z(t, 0) + s_t(t) u(t, s(t)). \end{aligned}$$

これより、 $-u_z(t, s(t)) = u(t, s(t)) s_t(t)$  が得られる。この自由境界上の条件は古典的なステファン問題と本質的に異なっている。

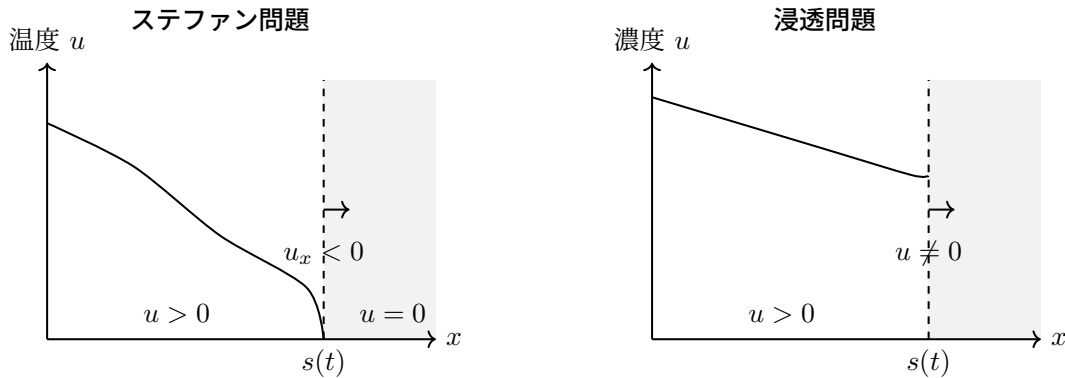


図 4: 横方向から見たステファン問題と浸透問題の移動境界と未変化領域

- **ステファン問題**： $u(t, s(t)) = 0$  (相境界で温度が融点)、 $s_t(t) = -u_z(t, s(t))$
- **浸透問題**： $u(t, s(t)) > 0$  (境界でも濃度が存在)、 $s_t(t) = a_0(u(t, s(t)) - \varphi(s(t)))$

浸透問題では、もし  $u(t, s(t)) = 0$  とすると、条件 (2.3) から  $u_z(t, s(t)) = 0$  となり境界は移動しない。実際、(2.3) と (2.4) を組み合わせると

$$-u_z(t, s(t)) = u(t, s(t)) s_t(t) = a_0 u(t, s(t)) (u(t, s(t)) - \varphi(s(t)))$$

となる。これは、境界での濃度  $u(t, s(t))$  が大きいほど、境界の移動速度が速くなることを示している。この点がステファン問題との大きな違いであり、本問題の数学的特徴である。

## 実験との比較

S. Nepal et al. [16] では、 $\varphi(r) = \alpha r$  (線形抑制効果) の場合について、実験データと数値計算結果の比較が行われた。パラメータ値として  $\alpha = 1/5, 1/10, 1/20$  および  $a_0 = 10, 100, 1000$  を用いた結果、以下のような振る舞いが観察された：

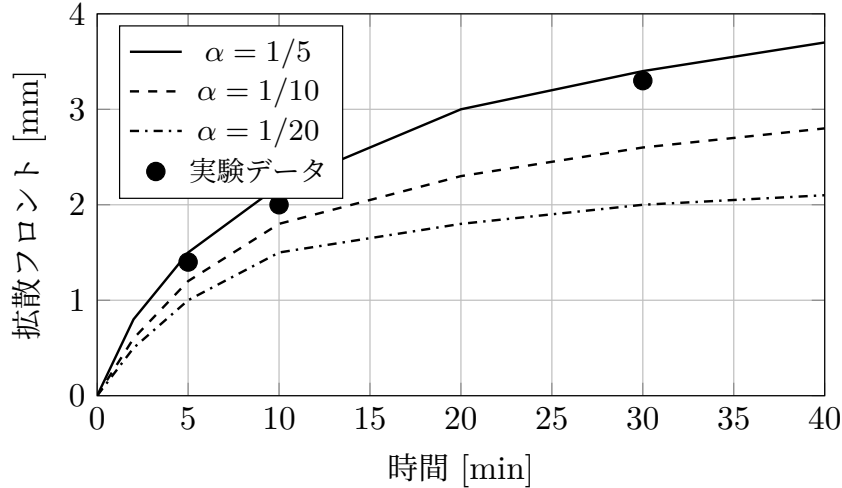


図 5: 拡散フロントの時間発展：実験データと数値計算の比較

興味深いことに、古典的なステファン問題では  $s(t) \sim \sqrt{t}$  という振る舞いが知られているが、浸透問題では  $s(t) \sim t^\delta$  ( $\delta > 0$ ) というべき乗則が示唆されている。ステファン問題でも浸透問題でも同じ偏微分方程式に支配されているにもかかわらず、自由境界の振る舞いに違いが生まれているのは境界条件の非線形性と浸透抑制効果  $\varphi(s)$  の存在に起因すると考えられる。

## 2.3 先行研究との関連、仮定と解の定義

多孔質材料内の拡散物質浸透現象を記述する自由境界問題 (2.1)-(2.5) については、これまでに系統的な数学解析が進められてきた。[9, 10] では、有界な関数  $\beta(r)$ ,  $\varphi(r)$  に対して解の存在と一意性を証明している。また、時刻  $t = 0$  から拡散物質が流入し続け、総流入量が無限大になるという条件

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \beta(b(\tau) - \gamma u(\tau, 0)) d\tau = 0$$

のもとで、自由境界が時間経過に伴って無限大に発散することも示している。

[11] では、線形成長条件  $\beta(r) = \beta r$  かつ浸透抑制効果なし ( $\varphi = 0$ ) の場合に焦点を当て、解の存在と一意性を示した。加えて、先のような積分条件がなくても、自由境界が時間経過に伴って無限大に発散することを明らかにした。最近の研究では、[12] において、 $\beta(r) = \beta r$  かつ  $\varphi(r) = \alpha r$  ( $\alpha > 0$ ) の場合に、解の存在と一意性を証明した。加えて、解の持つ性質から有限浸透性という重要な性質が発見された、この結果をもとに、[13] では、自由境界が長時間経過後に、浸透抑制力  $\alpha$  に応じたある有限値に近づくことを証明した。

本講演では、実験結果との対応が良い線形の場合、 $\beta(r) = \beta r$  かつ  $\varphi(r) = \alpha r$  に焦点をあてる。ここで、いくつかの関数空間を定義しておく。

### 数学的記号と関数空間

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) を開集合,  $1 \leq p < \infty$  とする.  $L^p(\Omega)$  を可測関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  で,  $|f|^p$  が  $\Omega$  上可積分であるものの集合とする.  $f \in L^p(\Omega)$  のとき

$$|f|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

とおく.  $L^\infty(\Omega)$  は可測関数  $f$  で本質的上限が有限, すなわち  $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$  となるものの集合とし

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

とおく. また,  $W^{1,p}(\Omega)$  は  $L^p(\Omega)$  に属する関数  $f$  ですべての  $|\alpha| \leq 1$  に対して一階弱微分  $D_\alpha f$  が存在し,  $D_\alpha f \in L^p(\Omega)$  となる集合と定義する.  $f \in W^{1,p}(\Omega)$  のとき

$$|f|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left[ \sum_{|\alpha| \leq 1} |D_\alpha f|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p}$$

とおく. 特に,  $p = 2$  のときは

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx \text{ for } u, v \in L^2(\Omega),$$

$$(u, v)_{W^{1,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} D_\alpha u(x) \cdot D_\alpha v(x) dx \text{ for } u, v \in W^{1,2}(\Omega)$$

という内積を備えているヒルベルト空間となる. 以後,  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$  と書く.

**本問題の仮定** 以下の仮定を置く.

(A1)  $\beta > 0, \gamma > 0, a_0 > 0, \alpha > 0$

(A2)  $s_0 > 0, u_0 \in L^\infty(0, s_0)$  on  $[0, s_0]$ :  $u_0 \geq 0$  on  $[0, s_0]$

(A3)  $b, b_t \in L^2(0, T)$ :  $b \geq 0$  on  $[0, T]$ ,  $b^* = \max \left\{ \max_{0 \leq t \leq T} b(t), r|u_0|_{L^\infty(0, s_0)} \right\}$

(A2) が意味していることは, 時刻  $t = 0$  でわずかに浸透しており ( $s_0 > 0$ ), 初期の濃度は非負で有界であるということである.

ステファン問題と同様に, 解くべき領域が未知関数  $s(t)$  に依存している. この問題を克服するため関数  $\tilde{u}(t, y) = u(t, ys(t))$  ( $y \in [0, 1]$ ) を用いて固定領域  $[0, T] \times [0, 1]$  上に変換する. 変換後の方程式系は固定領域上の偏微分方程式系となるが, 係数に  $s(t)$  が現れる構造を持つ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_t - \frac{1}{s^2(t)} \tilde{u}_{yy} = \frac{ys_t(t)}{s(t)} \tilde{u}_y \quad \text{on } (0, T) \times (0, 1) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{s(t)} \tilde{u}_y(t, 0) = \beta(b(t) - \gamma \tilde{u}(t, 0)) \quad \text{on } (0, T) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{s(t)} \tilde{u}_y(t, 1) = \tilde{u}(t, 1) s_t(t) \quad \text{on } (0, T) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_t(t) = a_0(\tilde{u}(t, 1) - \alpha s(t)) \quad \text{on } (0, T) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s(0) = s_0, \tilde{u}(0, y) = u_0(ys_0)(=: \tilde{u}_0(y)) \quad \text{for } y \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

ここで,  $[0, T]$  上の関数  $s$  と  $(0, T) \times (0, 1)$  上の関数  $\tilde{u}$  が次の条件をみたすとき問題{(2.6)-(2.10)}の解という:

(S1)  $s(t) > 0$  かつ  $s(t)$  は  $0 < t < T$  で微分可能かつ有界.

(S2)  $0 < t < T$  において,  $\tilde{u}_t(t) \in (H^1(0, 1))^*$  ( $H^1(0, 1)$  の共役空間) かつ  $\tilde{u}_y(t) \in L^2(0, 1)$  で, 適切なテスト関数に対する以下の弱形式をみたす:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \tilde{u}_t(t), z(t) \rangle dt + \int_0^T \frac{1}{s^2(t)} (\tilde{u}_y(t), z_y(t)) dt \\ & + \int_0^T \frac{1}{s(t)} \tilde{u}(t, 1) s_t(t) z(t, 1) dt - \int_0^T \frac{1}{s(t)} \beta(b(t) - \gamma \tilde{u}(t, 0)) z(t, 0) dt \\ & = \int_0^T \int_0^1 \frac{y s_t(t)}{s(t)} \tilde{u}_y(t) z(t) dy dt \end{aligned}$$

(S3)  $0 < t < T$  において, (3.4) を満たす. また,  $s(0) = s_0$  かつ  $[0, 1]$  上で  $\tilde{u}(0, y) = \tilde{u}_0(y)$  を満たす.

ここで,  $\langle \tilde{u}_t(t), z(t) \rangle$  は  $(H^1(0, 1))^*$  と  $H^1(0, 1)$  との双対組である. (S2) は, もし  $\tilde{u}_t(t), \tilde{u}_{yy}(t) \in L^2(0, 1)$  ならば, 直接 (2.6)-(2.8) を満たすということの意味しており, 関数  $\tilde{u}$  が (2.6)-(2.8) を弱い意味で満たすことを表している.

## 2.4 可解性と挙動に関する結果

**定理 4** (時間局所的な解の存在と一意性). (A1)-(A3) の下で, 問題{(2.6)-(2.10)}は時間局所的に一意解を持つ, すなわち, ある  $T^* > 0$  が存在して, 区間  $[0, T^*]$  において一意的な解  $(s, \tilde{u})$  が存在する.

(定理 4 の証明の概略) 解の存在は, 次のようにして証明される. まず, 与えられた関数  $s(t)$  に対して, 次の補助問題 (AP)

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \frac{1}{s^2(t)} \tilde{u}_{yy} = \frac{y s_t(t)}{s(t)} \tilde{u}_y & \text{on } (0, T) \times (0, 1) \\ -\frac{1}{s(t)} \tilde{u}_y(t, 0) = \beta(b(t) - \gamma \tilde{u}(t, 0)) & \text{on } (0, T) \\ -\frac{1}{s(t)} \tilde{u}_y(t, 1) = a_0 \tilde{u}(t, 1) (\tilde{u}(t, 1) - \alpha s(t)) & \text{on } (0, T) \\ \tilde{u}(0, y) = \tilde{u}_0(y) & \text{for } y \in [0, 1] \end{cases}$$

を解き, 解  $\tilde{u}(t, z)$  を求める. 次に, 解  $\tilde{u}(t, z)$  を用いて, (2.9) の積分方程式として与えられる以下の写像  $\Gamma$ :

$$\Gamma(s) = s_0 + \int_0^t a_0 (\tilde{u}(\tau, 1) - \alpha s(\tau)) d\tau$$

を考え,  $(0, T)$  上の 2 乗可積分な関数の空間  $L^2(0, T)$  における縮小性を示す. これにより, バナッハの不動点定理を適用する.

(証明における技術的詳細) 補助問題の解を求める際は, 以下の補助問題に対する近似問題  $(AP)_\varepsilon$  を出発点としている: 各  $\varepsilon > 0$  に対して,

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(t, y) - \frac{1}{s^2(t)} \tilde{u}_{yy}(t, y) = \frac{y s_t(t)}{s(t)} \eta_y(t, y) & \text{for } (t, y) \in (0, T) \times (0, 1), \\ -\frac{1}{s(t)} \tilde{u}_y(t, 0) = \beta(b(t) - \gamma \tilde{u}(t, 0)) & \text{for } t \in (0, T), \\ -\frac{1}{s(t)} \tilde{u}_y(t, 1) = a_0 ((\tilde{u}(t, 1))^2 - \alpha (\rho_\varepsilon * \eta)(t, 1)) s(t) & \text{for } t \in (0, T), \\ \tilde{u}(0, y) = \tilde{u}_{0\varepsilon}(y) & \text{for } y \in [0, 1] \end{cases}$$

ここで、 $\eta$  は適切に与えられた  $(0, T)$  上の関数、 $\rho_\varepsilon$  は  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  にサポートをもつ軟化子で  $\rho_\varepsilon * \eta$  は  $\eta$  と  $\rho_\varepsilon$  との合成積である ( $\bar{\eta}$  は  $(0, T)$  では  $\eta$ ,  $(0, T)$  の外側では 0 で拡張した関数である):

$$(\rho_\varepsilon * \eta)(t, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(t-s)\bar{\eta}(s, 1)ds \text{ for } t \in [0, T],$$

また、 $\tilde{u}_{0\varepsilon}$  は  $\{\tilde{u}_{0\varepsilon}\} \subset H^1(0, 1)$  で  $|\tilde{u}_{0\varepsilon}|_{L^2(0,1)} \leq |\tilde{u}_0|_{L^2(0,1)} + 1$  かつ  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき  $\tilde{u}_{0\varepsilon} \rightarrow \tilde{u}_0$  in  $L^2(0, 1)$  となる  $\tilde{u}_0$  の近似関数である。

この近似問題に対して、以下の劣微分作用素によって支配されるヒルベルト空間  $H$  上の発展方程式の理論 (cf. [8]) を適用することが可能である。具体的には、 $H = L^2(0, 1)$  として、適切に定義された凸関数  $\psi^t$  の劣微分  $\partial\psi^t$  を用いて、抽象的な発展方程式

$$u_t(t) + \partial\psi^t(u(t)) \ni f(t) \text{ in } H \text{ for } t \in [0, T]$$

の形に帰着させる。ここで、 $\psi^t$  は  $H$  上の適正下半連続凸関数であり、劣微分  $\partial\psi$  は

$$\partial\psi^t(u) =: \{z^* \in H \mid (z^*, v - u) \leq \psi(v) - \psi(u) \text{ for } v \in H\}$$

と定義される。 $f(t)$  は  $[0, T]$  上の  $L^2(0, 1)$  に値をとる与えられた関数である。

実際の  $\psi^t$  は以下のように定義する:

$$\psi^t(u) := \begin{cases} \frac{1}{2s^2(t)} \int_0^1 |u_y(y)|^2 dy + \frac{1}{s(t)} \int_0^{u(1)} a_0(\xi^2 - \alpha(\rho_\varepsilon * \eta)(t, 1)s(t))d\xi \\ -\frac{1}{s(t)} \int_0^{u(0)} \beta(b(t) - \gamma\xi)d\xi \text{ if } u \in H^1(0, 1), \\ +\infty \text{ それ以外.} \end{cases}$$

このとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{1}{s(t)} \int_0^r a_0(\xi^2 - \alpha(\rho_\varepsilon * \eta)(t, 1)s(t))d\xi \right) &= \frac{2a_0}{s(t)} r > 0 \text{ for } r > 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( -\frac{1}{s(t)} \int_0^r \beta(b(t) - \gamma\xi)d\xi \right) &= \frac{\beta\gamma}{s(t)} > 0 \text{ for } r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

より、 $\psi^t$  を構成する項の 2 階微分が正となることから、 $\psi^t$  が  $L^2(0, 1)$  上の凸関数となることがわかる。その劣微分  $z^* \in \partial\psi^t(u)$  は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} z^* &= -\frac{1}{s^2(t)} u_{yy} \text{ on } (0, 1), \\ -\frac{1}{s(t)} u_y(0) &= \beta(b(t) - \gamma u(0)), \quad -\frac{1}{s(t)} u_y(1) = a_0(u^2(1) - \alpha(\rho_\varepsilon * \eta)(t, 1)s(t)). \end{aligned}$$

したがって、 $f(t) = \frac{y s_t(t)}{s(t)} \eta_y(t)$  として上記の発展方程式の理論を適用することで近似問題  $(AP)_\varepsilon$  の解  $\tilde{u}_\varepsilon$  を見つけることができる。その後、極限移行  $\varepsilon \rightarrow 0$  と  $\eta \rightarrow \tilde{u}$  という写像の縮小性から、補助問題 (AP) の解を求める。

補助問題 (AP) に対する近似問題  $(AP)_\varepsilon$  を考えている理由は、 $L^2(0, 1)$  上の関数  $\psi^t$  の凸性を保証するためである。これにより、上記のような発展方程式の抽象理論を適用することが可能となっている。このようにして構成した近似解は、ステファン問題の解と同じように、 $\tilde{u}_{\varepsilon t}(t) \in L^2(0, 1)$  かつ  $\tilde{u}_{\varepsilon yy}(t) \in L^2(0, 1)$  という正則性を有している。しかしながら、合成積の時間に関する微分が  $\varepsilon$  に依存することなどが原因となり、 $|\tilde{u}_{\varepsilon t}(t)|_{L^2(0,1)}$  に関する一様な評価が得られないため、 $\tilde{u}_{\varepsilon t}(t)$  の  $L^2(0, 1)$  における極限移行ができない。このことから、本問題の解の定義として (S2) のような弱形式を導入している。

**補題 5.** 各パラメータ  $\beta, \gamma, \alpha$ , 及び  $b^*, s_0, |b_t|_{L^2(0,T)}, |b_t|_{L^1(0,T)}$  に依存する正定数  $M$  が存在して, 以下が成り立つ.

$$(i) \quad s_0 e^{-a_0 \alpha T} \leq s(t) \leq M \text{ for } t \in [0, T]$$

$$(ii) \quad 0 \leq \tilde{u}(t) \leq u^* := \max\{\alpha M, \frac{b^*}{\gamma}\} \text{ on } [0, 1] \text{ for } t \in [0, T]$$

この補題における自由境界に関する結果は, 長時間経過しても拡散物質の領域が完全に消失することはないことを保証している. 一方, 上界  $M$  の存在は浸透に限界があることを示している. これらの有界性の結果は, 自由境界  $s(t)$  の変化率が (2.9) 式で支配されていることに起因している. 実際に, (2.9) 式と関数  $\tilde{u}$  の非負値性を用いると

$$s_t(t) + a_0 \alpha s(t) = a_0 \tilde{u}(t, 1) \geq 0$$

となることがわかる. この性質から以下の関係式を導くことができる.

$$(s(t)e^{\alpha a_0 t})_t = (s_t(t) + a_0 \alpha s(t))e^{\alpha a_0 t} \geq 0$$

したがって, 関数  $s(t)e^{\alpha a_0 t}$  は時間に関して単調非減少であり, これを  $[0, t]$  で積分することによって自由境界  $s(t)$  の下限を具体的に示すことができる. 上界の導出は, より精密な解析が必要となる. (S2) の積分等式において  $z = \tilde{u} - b/\gamma$  とすることで, 次の不等式を導くことができる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( s(t) \left| \tilde{u}(t) - \frac{b(t)}{\gamma} \right|_{L^2(0,1)}^2 \right) + \frac{1}{s(t)} \int_0^1 |\tilde{u}_y(t)|^2 dy \\ & + \tilde{u}(t, 1) s_t(t) \left( \tilde{u}(t, 1) - \frac{b(t)}{\gamma} \right) - \frac{s_t(t)}{2} \left( \tilde{u}(t, 1) - \frac{b(t)}{\gamma} \right)^2 + \beta \gamma \left| \tilde{u}(t, 0) - \frac{b(t)}{\gamma} \right|^2 \\ & \leq \frac{1}{\gamma} |b_t(t)| |s(t)| \left( |\tilde{u}_y(t)|_{L^2(0,1)} + \left| \tilde{u}(t, 0) - \frac{b(t)}{\gamma} \right| \right) \text{ for a.e. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

この (2.11) 式の左辺第 3 項と 4 項を組み合わせると, 以下の表現が得られる:

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(t, 1) s_t(t) \left( \tilde{u}(t, 1) - \frac{b(t)}{\gamma} \right) - \frac{s_t(t)}{2} \left( \tilde{u}(t, 1) - \frac{b(t)}{\gamma} \right)^2 \\ & = s_t(t) \tilde{u}^2(t, 1) - s_t(t) \tilde{u}(t, 1) \frac{b(t)}{\gamma} - \frac{s_t(t)}{2} \left( \tilde{u}^2(t, 1) - 2\tilde{u}(t, 1) \frac{b(t)}{\gamma} + \left( \frac{b(t)}{\gamma} \right)^2 \right) \\ & = \frac{s_t(t)}{2} \tilde{u}^2(t, 1) - \frac{s_t(t)}{2} \left( \frac{b(t)}{\gamma} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.12) 式の右辺第一項について, (2.9) 式を再び利用することで以下のように計算を行うことができる:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} s_t(t) |\tilde{u}(t, 1)|^2 &= \frac{\tilde{u}(t, 1)}{2} \left( \frac{|s_t(t)|^2}{a_0} + \alpha s(t) s_t(t) \right) \\ &= \frac{1}{2a_0} \tilde{u}(t, 1) |s_t(t)|^2 + \frac{\alpha s(t)}{2} \left( \frac{|s_t(t)|^2}{a_0} + \alpha s(t) s_t(t) \right) \\ &= \frac{1}{2a_0} \tilde{u}(t, 1) |s_t(t)|^2 + \frac{\alpha}{2a_0} s(t) |s_t(t)|^2 + \frac{\alpha^2}{6} \frac{d}{dt} s^3(t) \\ &\geq \frac{\alpha^2}{6} \frac{d}{dt} s^3(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

式 (2.12) と (2.13) を不等式 (2.11) 式に代入し、時間区間  $[0, t]$  での積分を考慮することで、次の評価式を導出することができる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}s(t) \left| \tilde{u}(t) - \frac{b(t)}{\gamma} \right|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t \frac{1}{2s(\tau)} |\tilde{u}_y(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \\ & + \frac{\alpha^2}{6} s^3(t) - \frac{1}{2\gamma^2} (s(t)b^2(t)) \\ \leq & \frac{1}{2}s_0 \left| \tilde{u}_0 - \frac{b(0)}{\gamma} \right|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{\alpha^2}{6} s_0^3 + \frac{1}{2\gamma^2} \int_0^t s^3(\tau) |b_t(\tau)|^2 d\tau \\ & + \frac{b^*}{\gamma^2} \int_0^t s(\tau) |b_t(\tau)| d\tau + \frac{1}{2\beta\gamma^3} \int_0^t |s(\tau)|^2 |b_t(\tau)|^2 d\tau \text{ for } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

この結果に Gronwall の不等式を適用することで、目的の有界性を示す不等式を得ることができる:

$$s(t) \leq \left( s_0^3 + \frac{6}{\alpha^2} (\text{定数}) \right)^{1/3} := M.$$

ここで特に注目すべきは、 $M \propto 1/\alpha^{2/3}$  という依存性を持つということである (実際には  $M \propto (b^*)^{1/2}$  という依存性も持っている). つまり抑制力  $\alpha$  が小さいほど、また外部濃度  $b^*$  が大きいほど、内部への浸透が進むことを定量的に表しており、実験で観察される現象と対応している.

補題 5 の結果を用いることで、解が時間大域的に存在することも保証できる。

**定理 6** (時間大域的な解の存在と一意性). (A1)-(A3) の下、問題{(2.6)-(2.10)}は時間大域的に一意解を持つ、すなわち、任意の  $T > 0$  に対して、区間  $[0, T]$  上で{(2.6)-(2.10)}は一意解  $(s, \tilde{u})$  を持つ。

この定理の証明は、時間局所解を延長するという方法に基づいている。証明のアイデアは、補題 5 で得られた有界性の結果を活用することである。

(証明の概略)  $T^*$  を解の最大存在時刻とすると、補題 3 の結果から  $|\tilde{u}(t)|_{L^2(0,1)} \leq u^*$  かつ  $|\tilde{u}(t)|_{L^\infty(0,1)} \leq u^*$  が成り立つ。したがって、 $t \rightarrow T^*$  のとき、 $\tilde{u}(t)$  の  $L^2(0,1)$  における弱収束先かつ  $L^\infty(0,1)$  における汎弱収束先  $\tilde{u}_{T^*} \in L^\infty(0,1)$  が存在することがわかる。また、自由境界  $s(t)$  については (2.9) 式から次の評価が得られる:

$$|s_t(t)| = a_0 |\tilde{u}(t, 1) - \alpha s(t)| \leq a_0 (u^* + \alpha M) \text{ for a.e. } t \in [0, T^*),$$

この評価より、 $\{s(t)\}_{t \in [0, T^*)}$  が  $\mathbb{R}$  上のコーシー列であることから、 $t \rightarrow T^*$  のときの  $\mathbb{R}$  における収束先  $s_{T^*} \in \mathbb{R}$  が存在することもわかる。このことから、

$$\begin{aligned} s(T^*) &= \lim_{t \rightarrow T^*} s(t) \geq \lim_{t \rightarrow T^*} e^{-a_0 \alpha t} > 0, \\ \tilde{u}(T^*) &= \lim_{t \rightarrow T^*} \tilde{u}(t) \geq 0 \end{aligned}$$

がわかる。したがって、 $s(T^*)$  と  $\tilde{u}(T^*)$  を新たな初期条件として局所解の構成方法を再適用することで、解を  $T^*$  より先に延長することが可能となる。

解の長時間での挙動を理解するために、溶液内の拡散物質の濃度  $b(t)$  が時間無限大で一定値に収束する場合を考察する。具体的には以下である。

**定理 7** (解の長時間挙動). 仮定 (A1), (A2) および修正された仮定 (A3)

$$\begin{aligned} & b \in W_{loc}^{1,2}([0, \infty)), \quad b_t \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty) \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = b_\infty, \quad b - b_\infty \in L^1(0, \infty), \quad 0 \leq b \leq b^* \text{ on } (0, \infty). \end{aligned}$$

を仮定する. また,  $(s, \tilde{u})$  を  $[0, \infty)$  上の  $\{(2.6)-(2.10)\}$  の解とする. このとき,

$$s(t) \rightarrow \frac{b_\infty}{\alpha\gamma} \text{ in } \mathbb{R} \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

もし  $b_\infty > 0$  ならば,

$$\tilde{u}(t) \rightarrow \frac{b_\infty}{\gamma} \text{ in } X^*, \text{ weakly in } L^2(0, 1) \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

この結果は, 最終的な浸透深度が外部濃度の極限值  $b_\infty$  と物理パラメータ  $\alpha, \gamma$  によって決定されることを意味している. さらに,  $b_\infty > 0$  の場合には, 材料内部の濃度が一様に  $b_\infty/\gamma$  に近づくことを示している.

特別なケースとして,  $b_\infty = 0$  の場合は  $s(t) \rightarrow 0$  となり, 拡散物質の占める領域が最終的に消失することがわかる. この場合, 濃度分布  $\tilde{u}$  の長時間挙動については明らかではなく, 現在のところ完全には解明されていない理論的課題として残されている. こうした解の長時間挙動の導出は, 一般的に解の時間によらない一様評価が必要となる. この問題に対しては次のような評価が成り立つ.

**補題 8** (解の一様評価). 仮定 (A1), (A2), (A3)' の下,  $(s, \tilde{u})$  を  $[0, \infty)$  上の  $\{(2.6)-(2.10)\}$  の解とする. このとき, 以下が成り立つ:

(解の大域的有界性) 各パラメータ  $\beta, \gamma, \alpha$  と  $\hat{b} := \max\{b^*, \gamma|u_0|_{L^\infty(0, s_0)}\}$ ,  $s_0, |b_t|_{L^1(0, \infty)}, |b_t|_{L^2(0, \infty)}$  に依存する正定数.  $L$  と  $C > 0$  が存在して,

$$(i) \ 0 \leq s(t) \leq L \text{ for } t > 0, \quad (2.14)$$

$$(ii) \ 0 \leq \tilde{u}(t) \leq \max\{\alpha L, \frac{\hat{b}}{\gamma}\} \text{ for } t > 0 \left( \hat{b} := \max\{b^*, \gamma|u_0|_{L^\infty(0, s_0)}\} \right) \quad (2.15)$$

(解の大域的評価)  $C > 0$  が存在して,

$$\begin{aligned} & s(t) \left| \tilde{u}(t) - \frac{b_\infty}{\gamma} \right|_{L^2(0, 1)}^2 + \int_0^t \frac{1}{s(\tau)} |\tilde{u}_y(\tau)|_{L^2(0, 1)}^2 d\tau \\ & + \int_0^t \tilde{u}(\tau, 1) |s_t(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t s(\tau) |s_t(\tau)|^2 d\tau \\ & + \int_0^t \left| \tilde{u}(\tau, 0) - \frac{b_\infty}{\gamma} \right|^2 d\tau \leq C \text{ for } t > 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

この補題を補題 4 と比較すると, 有限時刻では自由境界  $s(t)$  は正の下限を持ち, 拡散物質の占める領域が確保されているが, 時間無限大まで考慮すると, 下限は 0, すなわち拡散物質の占める領域が消失する可能性を持つことがわかる. この違いにより, 自由境界の長時間挙動を考察するために必要とされる評価

$$\int_0^t |s_t(\tau)|^2 d\tau < \infty \text{ for } t > 0$$

を直接得ることができないことが技術的な困難点となっている. しかしながら, 上記の重み付き評価を利用することで,  $s^2$  に関する以下の評価を導出することが可能である:

$$\left| s^2(t) - \left( \frac{b_\infty}{\alpha\gamma} \right)^2 \right|_{L^2(0, t)} \leq M_1 \text{ for } t > 0, \quad (2.17)$$

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \left| \left( s^2(t) - \left( \frac{b_\infty}{\alpha\gamma} \right)^2 \right)_t \right|_{L^2(t, t+1)} \leq M_2. \quad (2.18)$$

上記の評価において,  $M_1$  と  $M_2$  は時刻  $t$  に依存しない定数である. ここで, 以下の補題に着目する:

**補題 9.**  $\eta$  を  $[0, \infty)$  上の関数とし,  $t > 0$  に対して  $\eta \in W^{1,2}(0, t)$  であるとする. もし, 時間によらない  $C_1 > 0, C_2 > 0$  が存在して, 以下の条件を満たすならば:

$$|\eta|_{L^2(0,t)} \leq C_1 \text{ for any } t > 0, \quad \sup_{t \in [0, \infty)} |\eta_t|_{L^2(t, t+1)} \leq C_2,$$

$t \rightarrow \infty$  のとき,  $\eta(t) \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}$  が成り立つ.

この補題を  $s^2 - (b_\infty/\alpha\gamma)^2$  に対して適用することにより,  $t \rightarrow \infty$  のとき  $s^2(t)$  が  $(b_\infty/\alpha\gamma)^2$  に  $\mathbb{R}$  で収束することがわかる. この結果は,  $t \rightarrow \infty$  のとき自由境界  $s(t)$  が  $b_\infty/\alpha\gamma$  に収束することを意味している.

(評価式 (2.17) と (2.18) の具体的な導出) (2.18) については,  $(s^2(t) - (b_\infty/\alpha\gamma)^2)_t = 2s(t)s_t(t)$  であることに注意して, 評価式 (2.16) を用いることで容易に得られる. ここでは, (2.17) の導出のみを詳しく紹介する.

まずはじめに, 以下のように3つの項に分ける.

$$\begin{aligned} & \left| s^2(t) - \left( \frac{b_\infty}{\alpha\gamma} \right)^2 \right| \\ & \leq \left| s^2(t) - \frac{1}{\alpha^2} \tilde{u}^2(t, 1) \right| + \left| \frac{1}{\alpha^2} (\tilde{u}^2(t, 1) - \tilde{u}^2(t, 0)) \right| + \left| \frac{1}{\alpha^2} \tilde{u}^2(t, 0) - \left( \frac{b_\infty}{\alpha\gamma} \right)^2 \right| \\ & = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

以下,, 各項の評価を順次考える.  $I_1$  については, (2.9) 式から得られる関係式

$$s_t(t) \left( \frac{1}{\alpha} \tilde{u}(t, 1) + s(t) \right) = a_0 \alpha \left( \frac{1}{\alpha^2} \tilde{u}^2(t, 1) - s^2(t) \right).$$

を用いると, 次のような評価が可能である:

$$\begin{aligned} I_1(t) & = \left| s^2(t) - \frac{1}{\alpha^2} \tilde{u}^2(t, 1) \right| = \left| \left( s(t) + \frac{1}{\alpha} \tilde{u}(t, 1) \right) \frac{1}{a_0 \alpha} s_t(t) \right| \\ & \leq \left[ |s(t)| + \frac{1}{\alpha} |\tilde{u}(t, 1)| \right] \frac{1}{a_0 \alpha} |s_t(t)|. \end{aligned}$$

したがって, 解の大域的评价 (2.14) と (2.15) と評価式 (2.16) を組み合わせることで,  $I_1$  に関する積分評価を得ることができる:

$$\begin{aligned} \int_0^t |I_1(\tau)|^2 d\tau & \leq \frac{2}{(a_0 \alpha)^2} \left( \int_0^t (|s(\tau)|^2 + \frac{1}{\alpha^2} |\tilde{u}(\tau, 1)|^2) |s_t(\tau)|^2 d\tau \right) \\ & \leq \frac{2}{(a_0 \alpha)^2} \left( L \int_0^t |s(\tau)|^2 |s_t(\tau)|^2 d\tau + \frac{u^*}{\alpha^2} \int_0^t |\tilde{u}(\tau, 1)|^2 |s_t(\tau)|^2 d\tau \right) \\ & \leq \frac{2}{(a_0 \alpha)^2} \left( L + \frac{u^*}{\alpha^2} \right) C \text{ for } t > 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

$I_2$  については, 基本的な関係式

$$\tilde{u}(t, 1) - \tilde{u}(t, 0) = \int_0^1 \tilde{u}_y(t, y) dy$$

と評価式 (2.14) を用いることで, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 |\tilde{u}_y(\tau, y)|^2 dy d\tau & = \int_0^t s(\tau) \int_0^1 \frac{1}{s(\tau)} |\tilde{u}_y(\tau, y)|^2 dy d\tau \\ & \leq L \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{s(\tau)} |\tilde{u}_y(\tau, y)|^2 dy d\tau \leq LC \text{ for } t > 0. \end{aligned}$$

この結果と (2.15), (2.16) より,  $I_2$  に関する評価を得ることができる:

$$\begin{aligned} \int_0^t |I_2(\tau)|^2 d\tau &\leq \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^2 \int_0^t \left( (|\tilde{u}(\tau, 1)| + |\tilde{u}(\tau, 0)|)^2 \int_0^1 |\tilde{u}_y(\tau, y)|^2 dy \right) d\tau \\ &\leq \left(\frac{2u^*}{\alpha^2}\right)^2 LC \text{ for } t > 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

最後に, (2.15) と (2.16) より  $I_3$  に関する評価も得ることができる:

$$\begin{aligned} \int_0^t |I_3(\tau)|^2 d\tau &\leq \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^2 \int_0^t \left( (|\tilde{u}(\tau, 0)| + \frac{b_\infty}{\gamma})^2 \left| \tilde{u}(\tau, 0) - \frac{b_\infty}{\gamma} \right|^2 \right) d\tau \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha^2}(u^* + \frac{b_\infty}{\gamma})\right)^2 C \text{ for } t > 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

最終的に, (2.19), (2.20), (2.21) を組み合わせることで, 求める評価式 (2.17) が成り立つことがわかる.

(定理 7 の関数  $\tilde{u}$  の挙動)  $b_\infty \neq 0$  の場合は,  $t \rightarrow \infty$  のときに自由境界  $s(t)$  が  $b_\infty/\alpha\gamma$  に収束することから,  $s(t)$  が大域的な下限を持つことを示すことができる:

$$s(t) \geq s_* \text{ for } t > 0.$$

ここで,  $s_*$  は時刻  $t$  には依存しない定数である. この結果を (2.16) に適用することで, より強い評価を見出すことができる:

$$\begin{aligned} &s_* \left| \tilde{u}(t) - \frac{b_\infty}{\gamma} \right|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{L} \int_0^t |\tilde{u}_y(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \\ &+ s_* \int_0^t |s_t(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t \left| \tilde{u}(\tau, 0) - \frac{b_\infty}{\gamma} \right|^2 d\tau \leq C \text{ for } t > 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

さらに, 弱形式 (S2) より  $z \in H^1(0, 1)$  に対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} &|\langle \tilde{u}_t(t), z \rangle| \\ &= \left| -\frac{1}{s^2(t)} \int_0^1 \tilde{u}_y(t) z_y dy - \frac{1}{s(t)} \tilde{u}(t, 1) s_t(t) z(1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s(t)} \beta(b(t) - \gamma \tilde{u}(t, 0)) z(0) + \int_0^1 \frac{y s_t(t)}{s(t)} \tilde{u}_y(t) z dy \right| \\ &\leq \frac{1}{s_*^2} |\tilde{u}_y(t)|_{L^2(0,1)} |z_y|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{s_*} u^* |s_t(t)| |z(1)| \\ &\quad + \frac{1}{s_*} \beta |b(t) - \gamma \tilde{u}(t, 0)| |z(0)| + \frac{u^*}{s_*} |s_t(t)| |z(1)| \\ &\quad + \frac{1}{s_*} (|s_t(t)| |\tilde{u}(t)|_{L^2(0,1)} |z_y|_{L^2(0,1)} + |s_{nt}(t)| |\tilde{u}(t)|_{L^2(0,1)} |z|_{L^2(0,1)}), \end{aligned}$$

この不等式の区間  $(0, T)$  上の積分に対して, 定理 7 における重み付き評価 (2.16) を用いることで,  $\tilde{u}$  の時間微分に関する大域的な評価を得ることができる:

$$\int_0^t |\tilde{u}_t|_{(H^1(0,1))^*}^2 dt < \infty \text{ for } t > 0. \quad (2.23)$$

(2.22) と (2.23) で得られた関数  $\tilde{u}$  に対する評価から, 適切な関数空間において,  $t \rightarrow \infty$  のときの収束先  $\tilde{u}_\infty$  が存在することがわかる. そこで, 弱形式 (S2) において極限移行  $t \rightarrow \infty$  を行うことによって,  $\tilde{u}_\infty$  と  $s_\infty = b_\infty/\alpha\gamma$  が以下の等式を満たすことがわかる.

$$\frac{1}{s_\infty^2} (\tilde{u}_{\infty y}, z_y)_{L^2(0,1)} - \frac{1}{s_\infty} \beta (b_\infty - \gamma \tilde{u}_\infty(0)) z(0) = 0 \text{ for } z \in H^1(0, 1).$$

したがって、上記の等式で  $z$  を  $(0, 1)$  にサポートをもつような無限回微分可能な関数に限定すると、 $\frac{1}{s_\infty^2}(\tilde{u}_{\infty y}, z_y)_{L^2(0,1)} = 0$  であること、すなわち、 $-\frac{1}{s_\infty^2}\tilde{u}_{\infty yy} = 0$  であることがわかる。

また  $z \in H^1(0, 1)$  で  $z(0) \neq 0$  もしくは  $z \in H^1(0, 1)$  で  $z(1) \neq 0$  に限定すると、 $\tilde{u}_{\infty y}(1) = 0$  かつ  $-\tilde{u}_{\infty y}(0) = \frac{1}{s_\infty}\beta(b_\infty - \gamma\tilde{u}_\infty(0))$  が従う。特に、 $\tilde{u}_{\infty yy} = 0$  より  $(0, 1)$  上で積分することで、 $\tilde{u}_{\infty y}(1) = \tilde{u}_{\infty y}(0)$  とならなければならないことから、 $\tilde{u}_{\infty y}(0) = 0$ 、すなわち  $\tilde{u}_\infty(0) = \frac{b_\infty}{\gamma}$  となる。

一方で、 $-\tilde{u}_{\infty yy} = 0$  on  $(0, 1)$  かつ  $\tilde{u}_{\infty y}(0) = \tilde{u}_{\infty y}(1) = 0$  であることは、 $\tilde{u}$  が  $[0, 1]$  上で一定であることを意味するため、 $\tilde{u}_\infty = \frac{b_\infty}{\gamma}$  がわかる。したがって、定理 7 における関数  $\tilde{u}$  に関する結果を得る。

### 3 拡散物質浸透モデルの応用

1次元での厳密な理論を基礎として、実際の3次元材料における浸透現象を記述する多次元システムへ応用することができる。このシステムは、溶液領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  における拡散方程式と、各点  $x \in \Omega$  での1次元浸透過程を結合したものである。

$$\begin{cases} b_t - \Delta b = -\beta(b(t, x) - \gamma u(t, x, 0)) & \text{for } (t, x) \in Q(T) := (0, T) \times \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial n} = 0 & \text{on } S(T) := (0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} u_t - u_{zz} = 0 & \text{on } Q_s(T) := Q(T) \times (0, s(t, x)) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} -u_z(t, x, 0) = \beta(b(t, x) - \gamma u(t, x, 0)) & \text{for } (t, x) \in Q(T) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} -u_z(t, x, s(t, x)) = u(t, x, s(t, x))s_t(t, x) & \text{for } (t, x) \in Q(T) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} s_t(t, x) = a_0(u(t, x, s(t, x)) - \varphi(s(t, x))) & \text{for } (t, x) \in Q(T) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} b(0, x) = b_0(x), s(0, x) = s_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} u(0, x, z) = u_0(x, z) & \text{for } (x, z) \in Q_{s_0}(\Omega) := \Omega \times [0, s_0] \end{cases} \quad (3.8)$$

ここで、 $\partial\Omega$  は領域  $\Omega$  の境界を表す。このシステムでは、方程式 (3.1) が溶液内で拡散物質が点別に吸収されながら拡散することを記述し、方程式系 (3.2) から (3.6) が各点  $x$  における垂直方向の浸透過程を表している。重要な点は、2つの異なる過程が境界条件を通じて相互に結合していることである。

多次元モデルの核心となるアイデアは、各点  $x \in \Omega$  において独立な1次元浸透過程が進行し、それらが溶液中の拡散方程式を通じて結合されるという概念である。この点別浸透モデルにより、複雑な3次元形状を持つ材料への拡散物質浸透を、1次元理論の厳密な結果を活用しながら予測することが可能になる。

多次元問題の解法 (cf. [15]) においては、2段階の反復的アプローチを採用している。第1段階では、与えられた溶液中の濃度分布  $b(t, x)$  に対して、各点  $x$  における1次元浸透問題を解く：

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(t, x, y) - \frac{k}{s^2(t, x)}\tilde{u}_{yy}(t, x, y) = \frac{ys_t(t, x)}{s(t, x)}\tilde{u}_y(t, x, y) & \text{for } (t, y) \in Q(T) \times (0, 1), \\ -\frac{k}{s(t, x)}\tilde{u}_y(t, x, 0) = \beta(b(t, x) - \gamma\tilde{u}(t, x, 0)) & \text{for } t \in (0, T), \\ -\frac{k}{s(t, x)}\tilde{u}_y(t, x, 1) = \tilde{u}(t, x, 1)s_t(t, x) & \text{for } t \in (0, T), \\ s_t(t) = a_0(\tilde{u}(t, x, 1) - \varphi(s(t, x))) & \text{for } t \in (0, T), \\ s(0, x) = s_0(x), \tilde{u}(0, x, y) = u_0(ys(0, x)) := \tilde{u}_0(x, y) & \text{for } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

この問題は先に解析した (2.6)-(2.10) と同様に、(3.1)-(3.6) を固定領域  $(0, T) \times (0, 1)$  に変換したものである。各点  $x$  において、この1次元問題を解くことで解  $(s(t, x), \tilde{u}(t, x, z))$  を求める。第2段階では、得られ

た浸透解を用いて放物型問題を解く:

$$\begin{cases} b_t - \Delta b = -\beta(b(t, x) - \gamma \tilde{u}(t, x, 0)) & \text{in } Q(T) \\ \frac{\partial b}{\partial n} = 0 & \text{on } S(T) \\ b(0, x) = b_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

このプロセスによって, 新しい濃度分布  $b(t, x)$  を決定し, これを第一段階にフィードバックすることで全体系の解を構成する.

この反復解法における最も重要な技術的課題は, 境界値  $u(t, x, 0)$  の空間変数  $x$  に関する可測性の保証である. 第2段階の放物型問題において, 方程式の右辺の項  $u(t, x, 0)$  が例えば領域  $\Omega$  上で積分可能でなければ, 解  $b(t, x)$  を見つけることができない. そのことを示すためには,  $\tilde{u}(t, x, 0)$  が  $x \in \Omega$  に関して可測関数でなければならない. しかし,  $u$  は各点  $x$  における1次元浸透問題の解として定義されているため,  $x$  の関数としての可測性は自明ではない. この点は,  $\Omega$  上の偏微分方程式と各  $x \in \Omega$  における垂直方向の問題を結合したシステムに特有の問題であるが, 点別浸透モデルの  $\Omega$  上における正則性理論 [14] により解決される.

(可測性の保証) 簡単のため,  $s_0 \in C(\bar{\Omega})$  かつ  $u_0 \in C(\overline{Q_{s_0}(\Omega)})$  とする. このとき, 変換後の関数  $\tilde{u}_0 \in C(\overline{\Omega \times (0, 1)})$  となる. この仮定は,  $s_0$  は  $\Omega$  上で連続,  $\tilde{u}_0$  は  $\Omega \times (0, 1)$  で連続であることを意味している. 定理6を用いることで, 各  $x \in \bar{\Omega}$  における1次元浸透問題の解  $(s(t, x), \tilde{u}(t, x, z))$  の存在がわかる. よって,  $x \in \bar{\Omega}$  における解を  $(s(x), \tilde{u}(x)) = (s(t, x), \tilde{u}(t, x, z))$ ,  $x' \in \bar{\Omega}$  における解を  $(s(x'), \tilde{u}(x')) = (s(t, x'), \tilde{u}(t, x', z))$  おくと, これらの解の差に対する方程式

$$\begin{aligned} & (\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x'))_t - \left[ \frac{k}{s^2(x)} \tilde{u}_{yy}(x) - \frac{k}{s^2(x')} \tilde{u}_{yy}(x') \right] \\ &= \frac{ys_t(x)}{s(x)} \tilde{u}_y(x) - \frac{ys_t(x')}{s(x')} \tilde{u}_y(x') \end{aligned}$$

から次の不等式が得られる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x')|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{k}{s^2(x)} |\tilde{u}_y(x) - \tilde{u}_y(x')|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq \left( \frac{k}{s(x)} \tilde{u}_y(x)(t, 1) - \frac{k}{s(x')} \tilde{u}_y(x')(t, 1) \right) (\tilde{u}(x)(t, 1) - \tilde{u}(x')(t, 1)) \\ & \quad - \left( \frac{k}{s(x)} \tilde{u}_y(x)(t, 0) - \frac{k}{s(x')} \tilde{u}_y(x')(t, 0) \right) (\tilde{u}(x)(t, 0) - \tilde{u}(x')(t, 0)) \\ & \quad - \int_0^1 \left( \frac{k}{(s(x))^2} - \frac{k}{(s(x') - a)^2} \right) \tilde{u}_y(x') (\tilde{u}_y(x) - \tilde{u}_y(x')) dy \\ & \quad + \int_0^1 \left( \frac{ys_t(x)}{s(x)} - \frac{ys_t(x')}{s(x')} \right) \tilde{u}_y(x) (\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x')) dy \\ & \quad + \int_0^1 \frac{ys_t(x')}{s(x')} (\tilde{u}_y(x) - \tilde{u}_y(x')) (\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x')) dy \end{aligned}$$

この不等式の右辺の各項をそれぞれ評価することで, 以下の重要な評価式を得ることができる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x')|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |s(x) - s(x')|^2 \\ & \quad + \frac{k}{2M^2} |\tilde{u}_y(x) - \tilde{u}_y(x')|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq C_1 |b(x, t) - b(x', t)|^2 + C_2 |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x')|_{L^2(0,1)}^2 + C_3 |s(x) - s(x')|^2. \end{aligned}$$

ここで、 $M$  は補題 5 における定数、 $C_1, C_2, C_3$  はそれぞれ正定数である。この結果に対して Gronwall の不等式を適用することで

$$\begin{aligned} & |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x')|_{L^2(0,1)}^2 + |s(x) - s(x')|^2 \\ & \leq \left[ |\tilde{u}_0(x) - \tilde{u}_0(x')|_{L^2(0,1)}^2 + |s_0(x) - s_0(x')|^2 \right. \\ & \quad \left. + C_1 \int_0^t |b(x, \tau) - b(x', \tau)|^2 d\tau \right] e^{2(C_2+C_3)T} \end{aligned}$$

が  $t \in [0, T]$  および  $x, x' \in \bar{\Omega}$  に対して成り立つ。 $s_0 \in C(\bar{\Omega})$  と  $\tilde{u}_0 \in C(\bar{\Omega} \times (0, 1))$  であることから、この結果は  $\tilde{u}(x)$  が  $\Omega$  上で  $L^2(0, 1)$  に関して連続であること、および  $s(x)$  が  $\Omega$  上で連続であることを意味している。これより、 $\tilde{u}(x)$  と  $s(x)$  が  $\Omega$  上で可測であることがわかる。

実際の応用では、 $s_0 \in C(\bar{\Omega})$  と  $\tilde{u}_0 \in C(\bar{\Omega} \times (0, 1))$  という条件は強い要請となるため、一般的な設定として  $s_0 \in L^2(\Omega)$  と  $\tilde{u}_0 \in L^2\Omega \times (0, 1)$  を考える。この場合、 $j \rightarrow \infty$  のとき、 $s_{0j} \rightarrow s_0$  in  $L^2(\Omega)$  かつ  $\tilde{u}_{0j} \rightarrow \tilde{u}_0$  in  $L^2(\Omega \times (0, 1))$  となるような近似関数  $\{s_{0j}\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$  と  $\{\tilde{u}_{0j}\} \subset C^\infty(\bar{\Omega} \times (0, 1))$  をとる。このもとで、以下の近似問題

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(t, x, y) - \frac{k}{s^2(t, x)} \tilde{u}_{yy}(t, x, y) = \frac{ys_t(t, x)}{s(t, x)} \tilde{u}_y(t, x, y) & \text{for } (t, y) \in Q(T) \times (0, 1), \\ -\frac{k}{s(t, x)} \tilde{u}_y(t, x, 0) = \beta(b_j(x, t) - \gamma \tilde{u}(t, x, 0)) & \text{for } t \in (0, T), \\ -\frac{k}{s(t, x)} \tilde{u}_y(t, x, 1) = \tilde{u}(t, x, 1) s_t(t, x) & \text{for } t \in (0, T), \\ s_t(t) = a_0(\tilde{u}(t, x, 1) - \varphi(s(t, x))) & \text{for } t \in (0, T), \\ s(0) = s_{0j}, \quad \tilde{u}(0, y) = \tilde{u}_{0j}(y) & \text{for } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

を考えることで、近似解 ( $s_\varepsilon(x), \tilde{u}_\varepsilon(x)$ ) の  $\Omega$  上における連続性、すなわち  $\Omega$  上で可測であることが保証される。したがって、近似解の極限移行  $\varepsilon \rightarrow 0$  を行うことで、各点  $x$  における 1 次元浸透問題の解 ( $s(x), \tilde{u}(x)$ ) を保証するとともに、可測関数の極限が可測であるという基本的な事実から、 $\tilde{u}(t, x, 0)$  が  $x \in \Omega$  に関して可測関数であることが結論できる。

こうした手続きと上記の 2 段階のプロセスを経て、[15] において 3 次元材料における浸透現象を記述する多次元システムの解の存在と一意性を示した。本講演では、ステファン問題を出発点として、拡散物質浸透モデルに対する数学的結果と応用について発表する。

## 参考文献

- [1] J. R. Cannon and J. Douglas, *The stability of the boundary in a Stefan problem*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche, vol. 21 (1967), no. 1, 83-91.
- [2] J. R. Cannon, C. Hill Denson and M. Primicerio, *The one-phase Stefan problem for the heat equation with boundary temperature specification*, Arch. Rat. Mech. Anal, vol 39 (1970), 270-274.
- [3] J. R. Cannon and M. Primicerio, *Remarks on the one-phase Stefan problem for the heat equation with the flux prescribed on the fixed boundary*, J. Math. Anal. Appl., vol. 35 (1971), 361-373.
- [4] J. Douglas and T.M. Gallie, *On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition*, Duke Math. J., vol. 22 (1955), 557-572.
- [5] G. W. Evans II, *A note on the existence of a solution to a problem of Stefan*, Quart. Appl. Math., vol. 9 (1951), 185-193.

- [6] A. Fasano and M. Primicerio, *General free boundary problems for the heat equation*, J. Math. Anal. Appl., vol 57 (1977), 694-723.
- [7] A. Friedman, *Free boundary problems for parabolic equation I. Melting of Solids*, J. Math. Mech., vol. 8 (1959), 499-518.
- [8] N. Kenmochi, *Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications*, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., vol. 30 (1981), 1-87.
- [9] K. Kumazaki and A. Muntean, *Local weak solvability of a moving boundary problem describing swelling along a halfline*, Netw. Heterog. Media, vol. 14 (2019), 445-496.
- [10] K. Kumazaki and A. Muntean, *Global weak solvability, continuous dependence on data, and large time growth of swelling moving interfaces*, Interfaces Free bound., vol. 22 (2020), 27-49.
- [11] T. Aiki, K. Kumazaki and A. Muntean, *A free boundary problem describing migration into rubbers - quest of the large time behavior*, Z. Angew. Math. Mech., vol. 102 (2022), no.7, e20210134.
- [12] K. Kumazaki, T. Aiki and A. Muntean, *Local existence of a solution to a free boundary problem describing migration into rubber with a breaking effect*, Networks and Heterog. Media, vol. 18 (2022),
- [13] K. Kumazaki, *Large time behavior of a solution to a free boundary problem describing migration into rubbers with a breaking effect*, Adv. Math. Sci. Appl., vol. 32, no.2 (2023), 273-289.
- [14] K. Kumazaki, *Measurability of a solution to a free boundary problem describing swelling phenomenon in porous materials*, Adv. Math. Sci. Appl., vol. 33 (2024), no.1, 55-76.
- [15] K. Kumazaki and A. Muntean, *A two-scale model describing swelling in porous materials with elongated internal structures*, Quart. Appl. Math., vol. 83 (2025), no.3, 507-532.
- [16] S. Nepal, R. Meyer, N. H. Kroger, T. Aiki and A. Muntean *A moving boundary approach of capturing diffusants penetration into rubber*, Kaustschuk Gummi und Kunststoffe, vol. 5 (2020), 61-69.
- [17] S. Nepal, Y. wondmagegne and A. Mutean *Analysis of a fully discrete approximation to a moving-boundary problem describing rubber exposed to diffusants*, Appl. Math. comput. vol. 442 (2023), Paper No.127733.

# Recent developments in the spectral theory for the layer potential operators

宮西 吉久 (信州大学)\*

## 1. はじめに

本稿では, Layer Potential Operators のスペクトル理論と応用について紹介したい. 定義の詳細は後述することにして, Layer Potential Operators は, 境界付き多様体  $\Omega$  の (Lipschitz) 境界  $\partial\Omega$  において定義される Boundary Integral Operators の一例になっていて, これら一般化された作用素のスペクトルと応用を考える礎にもなっている. ここで Boundary Integral Operators とは, 積分核<sup>1</sup> となる関数  $F: \partial\Omega \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  と適切に定義された  $\partial\Omega$  上の関数空間  $\mathcal{H}(\partial\Omega)$  を考え,  $\psi \in \mathcal{H}(\partial\Omega)$  に対し,

$$T[\psi](x) := \int_{\partial\Omega} F(x, y)\psi(y) dS_y$$

のように定義される線形作用素  $T: \mathcal{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\partial\Omega)$  のことである. ただし,  $S_y$  は  $\partial\Omega$  上の適当な測度を表している.

ここで, 積分核  $F$ , 境界  $\partial\Omega$  と測度  $S_y$  に応じて, 線形写像  $T: \mathcal{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\partial\Omega)$  はそれなりに定義できているとする. その上で 線形作用素  $T$  のスペクトル を考えて, 応用することが我々の目的である<sup>2</sup>.

ただし, これだけでは  $\Omega$  と  $\partial\Omega$  の関係が全くない. 広い応用を持つ有意義な問題では,  $\Omega$  上にも適切に定義された空間  $\mathcal{H}(\Omega)$  を考え,  $\mathcal{H}(\Omega)$  と  $\mathcal{H}(\partial\Omega)$  の間に対応関係があることが多い. 仮にこの対応  $S: \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\partial\Omega)$  が, 一対一線形写像だったとすると,

$$S^{-1}TS \text{ on } \mathcal{H}(\Omega) \cong T \text{ on } \mathcal{H}(\partial\Omega)$$

となっている. 例えば,  $T$  のスペクトルを調べるなら,  $S^{-1}TS$  のスペクトルを調べることになる. 実際, このような手続きは 一般的な枠組でも研究されてきた (例えば, [31, 51, 74] などが参考になる). ただし, 一般論ではまだまだ詳細に分からないことも多く, 茫洋とするため, 本稿では上記設定の雛形となる作用素として, 境界上の Layer Potential Operators と呼ばれるものを考えて, スペクトルなどの性質を紹介したい. 具体的には,  $\Omega$  上の調和関数からなる関数空間を  $\mathcal{H}(\Omega)$  を考えることにする<sup>3</sup>. つまり, 境界上の関数  $\psi \in \mathcal{H}(\partial\Omega)$  を境界条件<sup>4</sup>として, 領域  $\Omega$  の調和関数  $S\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$  を対応させる.  $T$  については, 一重層ポテンシャル作用素 や 二重層ポテンシャル作用素 と呼ばれる, 境界で定義される作用素について紹介したい.

この講演で紹介する講演者の成果群は, 科研費 (課題番号: JP19K14553, 19H01799, 20K03655, 21K13805, 25K07032, 25K07081) の助成を受けたものである. また, 本講演原稿は, (2023 年 日本数学会 (秋) 関数方程式論分科会 特別講演) “Layer Potential Type Operator のスペクトル理論 とその応用に向けて” [82] を基に拡充して作成した.

2010 Mathematics Subject Classification: 47A45 (primary), 31B25 (secondary)

キーワード: layer potential type operator, Neumann-Poincaré operator, spectrum

\* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 理学部数学科 A 棟 5 階 519

e-mail: miyanishi@shinshu-u.ac.jp

web: <http://math.shinshu-u.ac.jp/~miyanishi/>

<sup>1</sup> 積分核  $F$  は一般に, ベクトル値関数なども考えることが出来る ([42, 74, 107] など, 膨大に文献あり).

<sup>2</sup> 問題の well-definedness, 作用素の有界性なども (例. 特異積分作用素), 一般に明らかでない.

<sup>3</sup> 少し一般には, 様々な線形偏微分方程式の解.

<sup>4</sup> 境界条件; Dirichlet や Neumann 境界条件, 第 3 種境界条件など

とくに二重層ポテンシャル作用素は、筆者含めて多くの先行研究があることと、雛型としても把握しやすいので、応用例も含め主に紹介したい。

## 2. Layer Potential Operators

さらにイメージしやすくするために<sup>5</sup>、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) を有界な Lipschitz 領域とする。境界  $\partial\Omega$  上の適当な関数  $\phi$  に対して、§1 で紹介した Boundary Integral Operators の例として、一重層ポテンシャル作用素と呼ばれる作用素  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$  と、二重層ポテンシャル作用素  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  を紹介したい。具体的には、境界上の作用素として以下のように定義する。

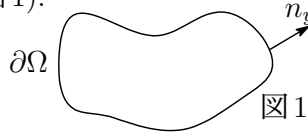
$$\mathcal{S}_{\partial\Omega}[\phi](x) := \int_{\partial\Omega} \phi(y) E(x, y) ds_y, \quad x \in \partial\Omega \quad (1)$$

$$\mathcal{K}_{\partial\Omega}[\phi](x) := \int_{\partial\Omega} \phi(y) \cdot \partial_{n_y} E(x, y) ds_y, \quad x \in \partial\Omega \quad (2)$$

ただし、

$$E(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x - y|, & \text{if } n = 2, \\ \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}, & \text{if } n = 3 \end{cases}$$

はラプラス作用素の基本解。また、 $ds_y$  は境界  $\partial\Omega$  の線素 もしくは 面素を表し、 $\partial_{n_y}$  は (外向き) 法線微分<sup>6</sup> である (図1)。



このとき、様々な関数空間  $\wp := \wp(\partial\Omega)$  に対して、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega} : \wp \rightarrow \wp$  は有界作用素になり [11, 33, 34, 107], さらに境界  $\partial\Omega$  が  $C^{1,\alpha}$  級 ( $\alpha > 0$ ) ならば、コンパクト作用素になることが分かっている (例えば, [78, Theorem 7.3.2], [11]などを参照)。さらに最近になって、 $\partial\Omega$  が  $C^1$  級でありさえすれば、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  は適切な関数空間  $\wp(\partial\Omega)$  上コンパクトになることも分かってきた [55]<sup>7</sup>。

一重層ポテンシャル作用素  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$  についても勿論、調べられている ([115] など参照)。例えば、一重層ポテンシャル作用素  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$  は、境界に代数的な cusp を含んでいても、 $L^2(\partial\Omega)$  上コンパクトになることが知られている。

上記のような、ラプラス作用素に対応する層ポテンシャル作用素に限っても、大量の結果と応用があるので (例えば [74, 107] の本や本中の文献など)、本稿ではさらに的を絞って、最近、筆者が研究している二重層ポテンシャル作用素  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  について述べておきたい。ここで、二重層ポテンシャル作用素は、先駆的な研究を行っている C. Neumann と H. Poincaré の名前を取って [86, 91], ノイマン・ポアンカレ作用素とも呼ばれているので、以下、二重層ポテンシャル作用素をノイマン・ポアンカレ作用素  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  と呼び、意味を述べたうえで、作用素のスペクトル構造と境界形状の関係を見ることにしたい。空間次元に応じて、スペクトルの挙動が劇的に変化することも紹介する。加えて、スペクトルの挙動は物理現象にも影響し、応用例として Transmission Problem や Cloaking と呼ばれる現象、Dirichlet–Neumann map との関係、さらに、代数的な問題 Partition Problem についても触れておきたい。

<sup>5</sup> 勿論、境界付きの多様体や様々な線形偏微分作用素に対する Layer Potential Type Operator を定義することも出来ている ([2, 84]などを参照)。

<sup>6</sup> 境界に角がある場合、法線微分は境界上で殆ど至る所定義されるものとする (Rademacher's theorem)。

<sup>7</sup> さらに詳しく、regular Semmes–Kenig–Toro domains, もしくは、 $VMO_1$  と呼ばれる領域  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  の場合まで、コンパクト性が分かっている (非常に難解)。

### 3. ノイマン・ポアンカレ作用素の意味

#### 3.1. 境界値問題への利用 (歴史的な背景から)

ノイマン・ポアンカレ作用素は、歴史的には線形偏微分方程式の境界値問題の可解性に関して多くの研究がなされてきた ([28, 32, 64, 76, 86, 91, 114] など). 例えば、ラプラス方程式の境界値問題として、

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 2 \text{ or } 3; \quad u|_{\partial\Omega} = \psi \in L^2(\partial\Omega) \quad (3)$$

を考えてみる. もし、 $\Omega$ が $C^{1,\alpha}$ 級の有界領域<sup>8</sup>ならば、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Omega[\phi](x) &:= \int_{\partial\Omega} E(x, y)\phi(y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \mathcal{D}_\Omega[\phi](x) &:= \int_{\partial\Omega} \phi(y) \cdot \partial_{n_y} E(x, y)ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega \end{aligned}$$

とし<sup>9</sup>, ここで  $u(x) = \mathcal{D}_\Omega[\phi](x)$  とすれば、ラプラス作用素の基本解を用いているので、自動的に  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  を満たす. 方程式 (3) で境界条件の整合性を保つためには、Jump formula [11]

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Omega[\phi]|_{\pm}(x) &:= \left( \mp \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega} \right) [\phi](x) \quad a.e. x \in \partial\Omega \\ \partial_{n_y} \mathcal{S}_\Omega[\phi]|_{\pm}(x) &:= \left( \pm \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^* \right) [\phi](x) \quad a.e. x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

を利用<sup>10,11</sup>して、 $\mathcal{D}_\Omega[\phi]|_{-}(x) = (\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega})[\phi](x) = \psi(x)$  を満たすように  $\phi(x)$  を見つければ良い. 実際、ノイマン・ポアンカレ作用素  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  がコンパクトであり、スペクトルが  $(-1/2, 1/2)$  に含まれることから [11, 64, 65, 90], Fredholm の定理 (Neumann 級数)[41] によって、 $\phi(x) \in L^2(\partial\Omega)$  の存在が分かる.

ノイマン境界値問題

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2 \text{ or } 3; \quad \partial_n u|_{\partial\Omega} = \psi \in L_0^2(\partial\Omega) \text{ on } \partial\Omega \quad (4)$$

についても、 $u = \mathcal{S}_\Omega[\phi]$  を考えれば、 $\partial_{n_y} \mathcal{S}_\Omega[\phi]|_{\pm}(x) := (\pm \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)[\phi](x) = \psi(x)$  であるから、同様にして境界値問題の可解性を示すことが出来る<sup>12</sup>. 以下では通例にならない、ノイマン境界条件を解く際に利用した随伴作用素  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$  も ノイマン・ポアンカレ作用素と呼ぶことにする<sup>13</sup>.

#### 3.2. 物理現象への応用 (Transmission problem, Cloakings etc.)

Jump formula は、最近流行りのメタマテリアルと呼ばれる疑似物質の定式化、逆問題への利用、ディリクレ・ノイマン写像<sup>14</sup>へも応用されている. 例えば、plasmon eigenvalue と呼ばれる定数  $\epsilon$  を用いて、メタマテリアルは定式化されている.

<sup>8</sup> Lipschitz 領域の場合には、[37, 109] など

<sup>9</sup>  $\mathcal{S}_\Omega : \mathcal{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$  と  $\mathcal{D}_\Omega : \mathcal{H}(\partial\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$  は、境界  $\partial\Omega$  上の関数を  $\Omega$  上の関数を対応させる.

<sup>10</sup>  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$  は、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  の  $L^2(\partial\Omega)$  での随伴作用素. なお、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  は、 $L^2(\partial\Omega)$  上で一般に自己共役でない.

<sup>11</sup> 記号  $|_{\pm}$  は、+ が領域の外側からの (non-tangential) 極限. - が内側からの (non-tangential) 極限.

<sup>12</sup> ノイマン境界条件の場合には、 $\psi \in L_0^2(\partial\Omega) := \{\psi \in L^2 \mid \int_{\partial\Omega} \psi ds = 0\}$  に対して可解となる.

関数空間が  $C(\Gamma)$  や  $H^{-1/2}(\Gamma)$  などの場合にも、可解性を示すことが出来ている. さらに詳しい内容と文献については、[76, 111] を参照.

<sup>13</sup> 実は、境界がある程度滑らかなら、 $L^2$  自己共役でないにも関わらず  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  と  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$  の固有値は一致する.

<sup>14</sup> ディリクレ・ノイマン写像  $\Lambda$  は、Jump formula [11] を使うと  $\Lambda = (-\frac{1}{2} + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)\mathcal{S}_{\partial\Omega}^{-1}$  と表せる.

(メタマテリアル)  $\nabla(\sigma\nabla)u + \omega^2u = 0$ ,  $\omega \approx 0$  (quasi-static)

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \\ \epsilon & \text{in } \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} u|_+ = u|_- & \text{(Continuity of potential)} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_+ = \epsilon \frac{\partial u}{\partial \nu}|_- & \text{(Continuity of flux)} \end{cases}$$

実際, メタマテリアルの方程式は  $h(x) \approx 0$  を  $\mathbb{R}^n$  上の調和関数とすれば, 解を  $u(x) = h(x) + S[\psi](x)$  と表すことができる. さらに境界  $\partial\Omega$  上で (Continuity of flux) を満たすので,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} S[\psi]|_+ = \epsilon \frac{\partial}{\partial \nu} S[\psi]|_- \quad (5)$$

となっている. Jump formula を利用すれば,  $\frac{\partial}{\partial \nu} S[\psi]|_{\pm} = (\pm \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)[\psi]$  on  $\partial\Omega$  となり, (5) に代入して整理することで,

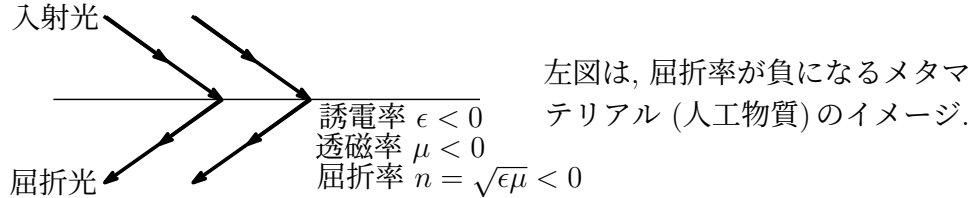
$$\left( \frac{\epsilon + 1}{2(\epsilon - 1)} I - \mathcal{K}_{\partial\Omega}^* \right) [\psi] = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

を得る. つまり,  $\frac{\epsilon+1}{2(\epsilon-1)}$  はノイマン・ポアンカレ作用素の固有値  $\lambda(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)$  と見なせて, 次の関係式が分かる.

$$-\frac{1}{2} < \lambda(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*) = \frac{\epsilon + 1}{2(\epsilon - 1)} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \epsilon < 0. \quad (6)$$

関係式 (6) を言い換えると, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有関数  $\psi$  を境界におけば, 誘電率  $\epsilon$  があたかも負になるように出来ることを意味している. このようにメタマテリアルと呼ばれる疑似物質は, 負の誘電率や負の透磁率が現れるモデルとして定式化されている ([9, 10, 12, 20, 29] など).

ここで固有値  $\lambda(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)$  に対応して表れた値  $\epsilon$  は, plasmon eigenvalue と呼ばれている.



### 3.3. Cloaking

メタマテリアルには, スーパーレンズなど物理や工学への莫大な応用があるので, 一つだけ最近の応用例で, 数理物理レベルの結果を載せる形で, Cloaking と呼ばれる現象について記載しておく. 例えば, §3.2 で述べたメタマテリアルの plasmon eigenvalues について, 関係式 (6) を用いれば, 物質近傍における電磁場の漸近挙動を求めることが出来る事が分かっている [12]. さらに, 散逸  $\delta > 0$  とするとき, 誘電率  $\epsilon$  を

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_c + i\delta & \text{in } \Omega, \\ \epsilon_m & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (7)$$

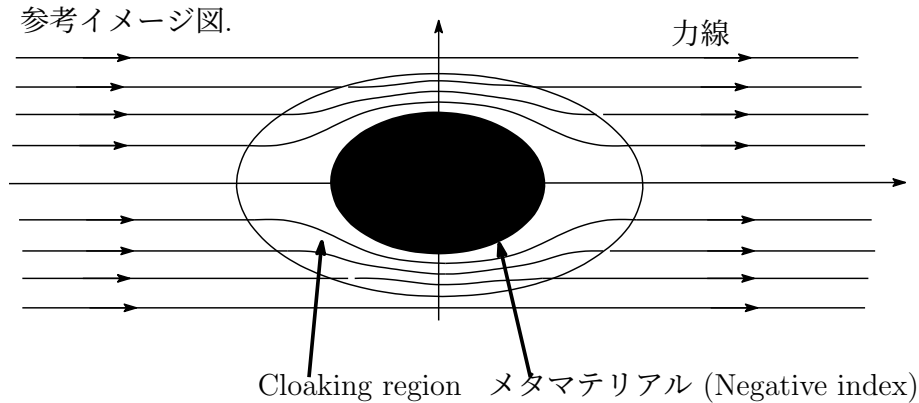
と表すと, Cloaking の定式化は, 次の方程式で与えられている [9, 12, 29, 60, 61, 73, 77].

$$\begin{cases} \nabla \cdot \epsilon \nabla u = a \cdot \nabla \delta_z & \text{in } \mathbb{R}^d, \\ u(x) = O(|x|^{-2}) & \text{as } |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (8)$$

ただし,  $a \neq 0$  は定ベクトル, 外部領域の点  $z \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$  に対してデルタ関数を  $\delta_z$  としている. 方程式 (8) に対し,

$$\|\nabla u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty \quad \text{as } \delta \downarrow 0. \quad (9)$$

となるときに, Cloaking が起きると呼ぶ. Cloaking とはその名の通り, 隠れ蓑を意味しており, plasmon eigenvalue  $\epsilon$  に対応して Cloaking が発生する [12]. さらに,  $\epsilon_c = -\epsilon_m$  のときに Cloaking が発生することもあり, このとき, Cloaking by anomalous localized resonance (CALR) と呼ばれる. 例えば 2次元の場合,  $\partial\Omega$  が特別な楕円ならば (CALR) が起きる. 3次元で  $\partial\Omega$  が球面ならば, (CALR) は起こらないことが分かっていた [12].



上記 参考イメージ図は, 二次元平面の中央に楕円形のメタマテリアル (上図塗りつぶされた部分) を置くと, その周りに Cloaking region (少し大きい楕円で囲まれた領域の内部) が発生する様子の模式図である. この現象は, Cloaking region に場を乱す物体 (双極子など) を置いても見えなくなる様子を表している (外部の場に影響が殆どない).

メタマテリアルや Cloaking 現象は, 波動を伴う現象であれば理論的にいつでも考えられ, 現実にメタマテリアル (人工物質) が作成可能な現象 (電磁気現象, 音響現象や弾性体など) ならば実現されつつある. これら物理現象としてのメタマテリアルや Cloaking については余りにも文献が多いので, 本講演では物理系の Review として [59] を紹介するの留めておく<sup>15</sup>.

勿論, 数理物理レベルの厳密な研究も行われていて, 答の一つとして, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の漸近挙動を用いることで, 本講演者も共同研究者と共に次を得ている.

**定理 3.1.** [18]  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  を狭義凸な滑らかな領域とする.  $\text{Ker}(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = \emptyset$  のとき, (CALR) は起こらない. すなわち, ある定数  $C > 0$  が存在して

$$\|\nabla u_\delta\|_{L^2(\Omega)} < C \quad \text{as } \delta \rightarrow 0. \quad (10)$$

このように, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値・固有関数に関係した応用も計算できるようになって来た. 形状に応じた精緻な物理現象の解析と厳密な証明も可能になって来た.

#### 4. ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル

前節までに, ノイマン・ポアンカレ作用素とスペクトルの利用などを述べたが, スペクトルの構造は数学としても興味深い. ここでも, 詳細は関連文献に譲ることにして, 良

<sup>15</sup> 参考文献 [59] には, 200 を超える文献が掲載されているので, 興味に応じて参照頂きたい.

く使われる空間を一例だけ紹介して、スペクトルに関する結果は抜粋して述べるだけにしたい.<sup>16</sup>

#### 4.1. ノイマン・ポアンカレ作用素で良く使われる空間 $\wp(\partial\Omega) = \mathcal{H}$

ここでは、後で利用するノイマン・ポアンカレ作用素の性質を述べる。まず、一重層ポテンシャルについては、 $\mathcal{S}_{\partial\Omega} : H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$  が知られており<sup>17</sup>、Plemeljの原理[90]と呼ばれる

$$\mathcal{S}_{\partial\Omega} \mathcal{K}_{\partial\Omega}^* = \mathcal{K}_{\partial\Omega} \mathcal{S}_{\partial\Omega} \quad (11)$$

を満たしている<sup>18</sup>。2次元の場合には領域 $\Omega$ をスケール変換したと考えると、3次元の場合はそのままとすれば、 $-\mathcal{S}_{\partial\Omega}$ はpositive definiteな作用素になることも分かっている。つまり、新たな内積を $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} := \langle u, -\mathcal{S}_{\partial\Omega} v \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$ とおくと、 $\mathcal{H}$ はヒルベルト空間になり、 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} \approx \|\cdot\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$ となっている。この $\mathcal{H}$ はエネルギー空間と呼ばれ、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ は $\mathcal{H}$ 上ならば自己共役作用素となる。つまり、スペクトルは実数になっている<sup>19</sup>。

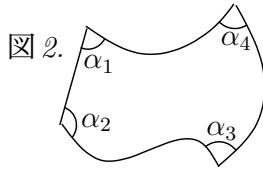
さらに、境界が $C^{1,\alpha}$  ( $\alpha > 0$ )の場合、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ には正則性があり、ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値は、 $L^2(\partial\Omega)$ 上で考えても、 $\mathcal{H}$ 上で考えたものと一致する。さらに、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ と $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ の固有値も一致する<sup>20</sup>。この事実から多くの文献で、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*$ も $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ 同様に、ノイマン・ポアンカレ作用素と呼ばれている。

#### 4.2. 角のある領域 (領域が2次元)

区分的に $C^{1,\alpha}$ で、有限個の0より大きい角 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を持つ $\partial\Omega$ については、ノイマン・ポアンカレ作用素は $L^2(\partial\Omega)$ ,  $C(\partial\Omega)$ や $\mathcal{H}$ 上で有界であってもコンパクトでないことが分かっている。まずは、エネルギー空間 $\mathcal{H} \approx H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 上においては、前節4.1で述べたように、ノイマン・ポアンカレ作用素は自己共役になり、さらにessential spectrum (連続スペクトルと固有値の集積点)も分かっている。

**定理 4.1.** [88, 89]  $\Omega$ を2次元の有界領域で、境界が区分的に $C^2$ 級となる *curvilinear polygon* (図2参照) とする。そのとき、

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \max_{j=1, \dots, n} \frac{1}{2} \left| \frac{\pi - \alpha_j}{\pi} \right| \right\} \text{ on } \mathcal{H}.$$



また、関数空間 $\wp$ として $L^2(\partial\Omega)$ や $C(\partial\Omega)$ などとする、ノイマン・ポアンカレ作用素は自己共役でないが、例えば、 $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ のessential norm<sup>21</sup>を取ってみると、

$$\|\mathcal{K}_{\partial\Omega}\|_{L^2 \text{ ess}} = \frac{1}{2} \sin \sup_i \left| \frac{\pi - \alpha_i}{2} \right|, \quad \|\mathcal{K}_{\partial\Omega}\|_{C \text{ ess}} = \frac{1}{2} \sup_i \left| \frac{\pi - \alpha_i}{\pi} \right| \quad (12)$$

<sup>16</sup> 筆者の先行研究は、[81, 82]などにも一部記載してある。

<sup>17</sup>  $H^k(\partial\Omega)$ は $k$ 階のソボレフ空間を表す。

<sup>18</sup> さらに詳しくは、[65]を参照

<sup>19</sup>  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$ については、内積 $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} := \langle u, (-\mathcal{S}_{\partial\Omega})^{-1} v \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$ を考えておけば、 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ と同値なヒルベルト空間上の自己共役作用素と考えられる。

<sup>20</sup> エネルギー空間におけるノイマン・ポアンカレ作用素の研究は [11, 12, 65, 111]などを参照。

<sup>21</sup> Essential spectral radius と考えても良い。

が示されている<sup>22</sup>[92, 102]. ここで注意すべきは, 関数空間によってスペクトル半径の挙動が変化していくことにある.  $L^p$  空間や重み付き関数空間についても, 偏微分方程式の境界値問題の可解性や数値計算で使われる Galerkin 法にも関連して膨大な研究がなされている ([74, 111] や, それらに掲載の文献参照).

### 4.3. 角のある領域 (3次元)

3次元においても, 関数空間に応じてスペクトルの構造は変化する. 3次元の場合, 例えば  $d\Omega_x(y) = \partial_{n_y} E(x, y) ds_y$  とおくと,

$$\|K_{\partial\Omega}\|_{C \text{ ess}} = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{x \in \partial\Omega} \frac{1}{4\pi} \int_{0 < |x-y| < \delta} |d\Omega_x(y)| \quad (13)$$

となっている<sup>23,24</sup>. エネルギー空間  $\mathcal{H}$  上においては,  $\partial\Omega$  を 3次元空間の中の回転対称面で, 頂点  $x \in \partial\Omega$  のみで角を持ち点  $x$  を除いて  $C^4$  級となる境界ならば, ルジャンドル陪関数を用いて本質的スペクトルが書けている [53]. さらに最近になって, 多面体もどきの図形なら, 2次元の結果に類似した結果として, 立体角や curvilinear な辺のなす角が  $\mathcal{H}$  上の本質的スペクトル  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)$  を制御していることが分かってきた (難解) [75].

### 4.4. 滑らかな境界を持つ場合

境界が  $C^{1,\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) 級の場合には, 積分核は

$$\partial_{n_y} E(x, y) \leq C|x-y|^{\alpha-n} \quad (x \neq y)$$

を満たし, ノイマン・ポアンカレ作用素は Weakly singular kernel と呼ばれる積分核を持つことになり,  $\mathcal{H}$  上でも  $C(\partial\Omega)$  上でもコンパクト作用素になり同じ固有値<sup>25</sup>になる. 勿論,  $L^2(\partial\Omega)$  上でも同じ固有値を持つことになるので, それらを多重度を含めて

$$\sigma_p(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = \{ \lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \mid |\lambda_0(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| > |\lambda_1(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \geq |\lambda_2(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \geq \dots \}$$

と書くことにする. 実は, 定数関数 1 について  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}[1] = 1/2$  であり,  $\lambda_0(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = 1/2$  は単純固有値になっている. また, 正と負の固有値がありうるので, それぞれ

$$\begin{aligned} \sigma_p^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) &= \{ \lambda_j^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \mid \lambda_0^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) > \lambda_1^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \geq \lambda_2^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \geq \dots \}, \\ \sigma_p^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) &= \{ \lambda_j^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \mid \lambda_1^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \leq \lambda_2^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \leq \lambda_3^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \leq \dots \} \end{aligned}$$

と表しておく. 境界が滑らかならば, 通常扱うような関数空間であればどの空間でも, 固有値は一致するので, 以下では  $L^2(\partial\Omega)$  理論と考えても差し支えない.

#### 4.4.1. 2次元の場合

2次元の場合には解析関数を用いることによって,  $\lambda_j^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = -\lambda_j^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) が示されている [28, 90]. さらに, 固有値はメビウス変換不変である [57, 97]. つまり, ノ

<sup>22</sup>  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  の essential norm は,  $C$  が  $\wp$  上のコンパクト作用素全体を動くときの作用素ノルム  $\|K_{\partial\Omega} - C\|_{\wp}$  の下限

$$\|K_{\partial\Omega}\|_{\wp \text{ ess}} := \inf_C \|K_{\partial\Omega} - C\|_{\wp}$$

として定義される.

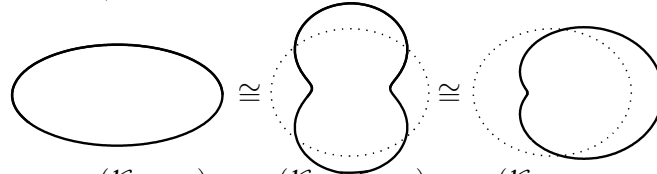
<sup>23</sup> 詳細は, [111] の参考文献を参照

<sup>24</sup> 角の近傍で回転面にならない場合, 立方体の表面なども含めて未解決になっている.

<sup>25</sup> 以下, 0 固有値は考えないことにする.

イマン・ポアンカレ作用素に対する等スペクトルな図形が表れる(下図は、楕円を円(点線)で反転変換した図形の例).

等スペクトルな図形 (ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値はメビウス変換不変)



$$\sigma_p(\mathcal{K}_{\text{Ellipse}}) = \sigma_p(\mathcal{K}_{\text{Hippopedon}}) = \sigma_p(\mathcal{K}_{\text{Limaçon de Pascal}})$$

(具体例) (楕円)  $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b)\}$  とすると,

$$\Rightarrow \sigma_p(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = \left\{ \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^j, j \in \mathbb{N} \right\}.$$

具体例をみても,  $\lambda_j^+(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) = -\lambda_j^-(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \ (j = 1, 2, \dots)$  となっている.

導入で述べたように莫大な研究があるので, ここでは, 固有値の漸近挙動に的を絞って紹介したい. 境界  $\partial\Omega$  が  $C^{k,\alpha}$  級の場合には, 一般論の応用として, 境界の滑らかさに応じて, 固有値の絶対値の多項式減衰が分かっている [45, 58, 85]. さらに, 境界が解析的な場合には, (楕円) の例のように, 固有値の指数減衰を示すことも出来ている [18].

2次元に限っても膨大な結果があり, 本講演では 4.2 で述べた角のある領域や滑らかな領域について, 著者も関連した最近の結果に触れるだけに留めたい [19, 45].

#### 4.4.2. 3次元の場合

3次元の場合, 滑らかな境界は曲面となるが, 2次元の場合とは挙動が大きく違う. 実際, 球面  $\partial\Omega = S^2$  の場合, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値は Poincaré [91] によって求められており, 並べて書いてみると

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_1, \underbrace{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}}_3, \underbrace{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}}_5, \dots, \underbrace{\frac{1}{2(2k+1)}, \dots, \frac{1}{2(2k+1)}}_{2k+1}, \dots$$

となっている. 正と負の固有値の対称性もない上, 負の固有値が現れることもない. さらに, 固有値の漸近挙動は,  $j = k^2$  番目を数えてみると

$$\lambda_j(\mathcal{K}_{S^2}) \sim \frac{1}{4} j^{-1/2} \quad (14)$$

であることが容易に分かる. 一般的に答えるために, 次のような結果を得た.

**定理 4.2.** [79]  $\Omega$  を  $C^{k,\alpha}$  級 ( $k \geq 2, \alpha > 0$ ) の有界領域とする. このとき,

$$|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \sim \left\{ \frac{3W(\partial\Omega) - 2\pi\chi(\partial\Omega)}{128\pi} \right\}^{1/2} j^{-1/2}, j \rightarrow \infty. \quad (15)$$

ただし,  $W(\partial\Omega)$  と  $\chi(\partial\Omega)$  は, それぞれ境界曲面上の Willmore energy と オイラー標数.

補足として, Willmore energy とは, 境界曲面上の平均曲率を  $H$  とするとき

$$W(\partial\Omega) := \int_{\partial\Omega} H^2(x) dS_x \quad (16)$$

で与えられる量であり, Blaschke の定理 [27, 71, 113] によって, メビウス変換不変量になることが知られている. 結局, オイラー標数は位相不変量であるから,  $|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})|$  の漸近挙動はメビウス変換不変である (有名な Willmore conjecture とその解決は [71] など).

勿論, 球面の場合  $W(S^2) = 4\pi$ ,  $\chi(S^2) = 2$  であるから,

$$|\lambda_j(\mathcal{K}_{\partial\Omega})| \sim \left\{ \frac{3W(\partial\Omega) - 2\pi\chi(\partial\Omega)}{128\pi} \right\}^{1/2} j^{-1/2} \sim \frac{1}{4} j^{-1/2} \quad (17)$$

となり, (14) と一致することも確かめられる. なお,  $\lambda_j^\pm(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$  の漸近挙動を個別に求めることもできている [83]. その結果, 非凸な図形では一般に, 正負の固有値  $\lambda_j^\pm(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$  それぞれの漸近挙動はメビウス変換不変量にはならないことが分かっている.

## 5. 応用

### 5.1. 解析学 (Cloaking や逆問題など)

§3.3 でも述べたとおり, メタマテリアル や Cloaking には, ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値や固有関数の挙動が利用されている. 数理物理に留まらず, 逆問題や偏微分方程式 (系) の可解性や 線形偏微分方程式 (系) の解構造の研究のために, ノイマン・ポアンカレ作用素は盛んに利用されている ([74, 107] など参照).

### 5.2. 幾何学 (主曲率の不等式)

§4.4.2 でも現れたように, 高次元のノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルには幾何量が随所に現れる. 二次元ならば, 複素解析に関わる量 (quasiconformal constant) によって, Fredholm 固有値 (ノイマン・ポアンカレ作用素の  $1/2$  以外の最大固有値) が決まることなども知られている [5, 97, 105].

さらに, 逆にスペクトルを用いることで, 幾何量の性質を示すことも可能になってきた. ほんの一例として, §4.4.2 で現れた Willmore energy と主曲率の関係式を得ることも出来ている.

**定理 5.1.** [16] 境界が滑らかな有界凸領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  について,

$$\kappa_- \leq \left( \frac{3W(\partial\Omega) - 4\pi}{2\text{Area}(\partial\Omega)} \right)^{1/2} \leq \kappa_+ \quad (18)$$

ただし,  $\kappa_-, \kappa_+$  はそれぞれ, 境界曲面の主曲率の最小値と最大値を表し,  $\text{Area}(\partial\Omega)$  は境界の面積を表している (等号成立は,  $\partial\Omega$  が球面するとき).

(左辺)  $\leq$  (中辺) は スペクトルを利用しない証明が出来るものの, (中辺)  $\leq$  (右辺) のスペクトルを利用しない証明は現在不明である.

(証明の流れ).  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$  や  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  は  $L^2(\partial\Omega)$  上のコンパクト作用素であり,  $-1$  階の擬微分作用素による表現が出来ることが分かっている (擬微分作用素や擬微分作用素による表現については, 例えば [3, 79, 83, 103]. ). また,  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}^{-1}\mathcal{K}_{\partial\Omega} = A$  は自己共役作用素になることから, 明らかでは全くないが [16, Theorem 5.16] より

$$\tau_- \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(\mathcal{K}_{\partial\Omega})}{\sigma_n(\mathcal{S}_{\partial\Omega})} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(\mathcal{K}_{\partial\Omega})}{\sigma_n(\mathcal{S}_{\partial\Omega})} \leq \tau_+. \quad (19)$$

ここで,  $\sigma_n(\mathcal{K}_{\partial\Omega})$  は  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  の  $n$  番目の特異値, すなわち,  $\sqrt{\mathcal{K}_{\partial\Omega}^* \mathcal{K}_{\partial\Omega}}$  の固有値<sup>26</sup>. 同様に  $\sigma_n(\mathcal{S}_{\partial\Omega})$  も  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$  の  $n$  番目の特異値で,  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$  はそもそも非負の自己共役作用素なので固有値そのものになっている. また,  $\tau_-$  と  $\tau_+$  が自己共役作用素  $A$  の本質的スペクトルの区間  $\sigma_{ess}(A) = [\tau_-, \tau_+]$  に対応する.

ここで, 定理 4.2 とほぼ同様に,  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}$  と  $\mathcal{S}_{\partial\Omega}$  の特異値の漸近挙動も計算すると,  $\sigma_n(\mathcal{K}_{\partial\Omega}) \sim \left\{ \frac{3W(\partial\Omega) - 2\pi\chi(\partial\Omega)}{128\pi} \right\}^{1/2} n^{-1/2}$  かつ  $\sigma_n(\mathcal{S}_{\partial\Omega}) \sim \left\{ \frac{\text{Area}\partial\Omega}{64\pi} \right\}^{1/2} n^{-1/2}$  となることが分かっている [83]. 結局,

$$\tau_- \leq \left( \frac{3W(\partial\Omega) - 4\pi}{2\text{Area}(\partial\Omega)} \right)^{1/2} \leq \tau_+$$

を得る. ここで,  $A$  は 0 階の擬微分作用素であり, 主シンボル  $\sigma_0(A)$  は

$$\sigma_0(A)(x, \xi) = \frac{L\xi_1^2 - 2M\xi_1\xi_2 + N\xi_2^2}{E\xi_1^2 + 2F\xi_1\xi_2 + G\xi_2^2}$$

のように, 第一基本形式と第二基本形式で表される (この計算の詳細は [79, 83] など参照). また, 0 階の擬微分作用素の本質的スペクトルは, シンボルの取り得る値 (値域) になることが知られており [1], つまり,

$$[\tau_-, \tau_+] = \sigma_{ess}(A) = \text{Ran}(\sigma_0(A)) = \{\sigma_0(A)(x, \xi) \mid (x, \xi) \in S^*(\partial\Omega)\} \quad (20)$$

である. ここで,  $S^*(\partial\Omega)$  は cosphere bundle (unit cotangent bundle  $S^*(\partial\Omega) \cong \partial\Omega \times S^2$ ) である. この値域はまさに 主曲率の最小値  $\kappa_-$  と最大値  $\kappa_+$  を用いて  $[\kappa_-, \kappa_+]$  に他ならない. よって,  $[\tau_-, \tau_+] = [\kappa_-, \kappa_+]$ .  $\square$

### 5.3. 代数学 (Partitions) (単位の奇数分割について).

さらに, 代数的な問題へも応用可能になる. ここでいう単位の奇数分割は, 1 を異なる奇数個の正数に分ける. つまり,  $\sum_{K=1}^{2N+1} L_{2N+1,K} = 1$  となるような分割を考える. 1 を 1 個, 3 個  $\dots$  と分割して, 可算個の数からなる集合  $S = \{L_{2N+1,K} \mid K = 1, 2, \dots, 2N+1, N \in \mathbb{N}\}$  を作る. このとき,  $S$  の要素を大きい順に並べることにより, 数列  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  が得られる. つまり,

$$1 = a_1 > a_2 \geq a_3 \cdots > 0$$

のように, 単調減少数列が得られる.

ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の性質ならではの結果として, 次が分かる:

**定理 5.2.** [80] 任意の  $C \geq 1/2$  に対して, ある単位の奇数分割が存在して

$$a_j \sim Cj^{-1/2}.$$

$C < 1/2$  になることはない.

定理 5.2 についても, スペクトルを利用しない証明は現在不明である.

## 6. 現時点 (2025/9/8 時点) で分かっていること

最後に, ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルに関連して, 未解決な問題を紹介しておきたい. 他にも, スペクトルゼータ関数<sup>27</sup> やエータ不変量など [16, 85], 大量に問題が残っているが, キリがないので, ごく一部問題を抜粋する形で記載しておきたい.

<sup>26</sup>  $\mathcal{K}_{\partial\Omega}^* \mathcal{K}_{\partial\Omega} : L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  は非負の自己共役作用素なので, 非負の平方根 (作用素) を定義できる.

<sup>27</sup> 例えば, 球面  $S^2$  に対するノイマン・ポアンカレ作用素スペクトルからスペクトルゼータ関数を作ると,  $\zeta_{S^2}(p) \equiv \sum_j \lambda_j^p(\mathcal{K}_{S^2}) = (1 - 2^{1-p}) \zeta(p-1)$  となっている. ただし,  $\zeta$  はリーマンゼータ関数 [85].

## 6.1. 解析

2次元の長方形領域ですら、ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルを正確に把握するのは困難である。1/2を除いたスペクトルを $\sigma(\mathcal{K}_{\partial\Omega}^*)$ と表すと、正方形( $\partial\Omega = \text{square}$ )ならば

$$\sigma(\mathcal{K}_{\text{square}}^*) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{K}_{\text{square}}^*) = [1/4, -1/4]$$

である ([88, 89, 112] の集大成. 空間は $\mathcal{H}$  (§4.1 参照) で考えている.). ところが長方形で考えたとき、高さを1に固定して、横の長さ $L$ がある一定の値を超えると突然、1/4より大きい固有値が出現する。このような長方形を $\text{rectangle}_L$ とでも表すと

$$\sigma(\mathcal{K}_{\text{rectangle}_L}^*) \neq \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{K}_{\text{rectangle}_L}^*) = [1/4, -1/4]$$

となる。 $L$ の閾値と存在範囲などは、数値計算でしか予想できていない [52]。  $L$ の存在範囲が連結かどうかすら良く分からない。ただし、 $L \rightarrow \infty$ のときのスペクトル $\sigma(\mathcal{K}_{\text{rectangle}_L}^*)$ の極限挙動については分かってきている [19]。

このような現象は、3次元の薄型領域や棒状領域などにも、似たような現象が形を変えて発生すると思われる (極限挙動は [13])。

## 6.2. 3次元 cloaking

§3.3において、2次元では楕円型領域にメタマテリアルを配置すると、cloaking が発生する結果を紹介した。3次元では狭義凸領域にメタマテリアルを配置しても、cloaking は発生しなかった (定理 3.1)。とどのつまり、3次元において、cloaking (正確には CALR) が発生する (数学的に厳密に証明された) 有界領域は見つかっていない。境界曲面 $\partial\Omega$ にガウス曲率が0になる部分の面積があるか、もしくは負の曲率があれば発生するかもしれない。あくまで推測の一つであり 詳細は不明。

現時点で、トーラスのように、ガウス曲率負の曲面を境界の一部に持つ図形に、cloaking (CALR) が発生するかは数学的に未解決になっている。物理学や工学の研究も含めて、まともな数値計算すら殆どできていないと拝察している<sup>28</sup>。

## 6.3. 幾何

2次元の図形ならば、ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトルはメビウス変換で移りあう図形で、完全に一致している (等スペクトル多様体)。3次元の図形で、ノイマン・ポアンカレ作用素に対する等スペクトル多様体は相似変換以外に見つかっていない。

例えば、球面と同じスペクトルをもてばその図形は球面に限ることは、定理 4.2から証明される。相似でない空間図形で (ノイマン・ポアンカレ作用素に対して) 等スペクトルになる例は見つかっていない。

また、ノイマン・ポアンカレ作用素が正の固有値しか持たない図形は、球面や prolate spheroid しか見つかっていない。当初の Poincaré の計算 [91] を見ても、3次元の図形ではノイマン・ポアンカレ作用素の固有値はすべて正となっていたが、1980年代以降に負の固有値が見つかり [6, 7, 8]、実は逆に正の固有値しかない図形が稀であると予想されるようになってきた (prolate spheroid のみしか見つかっていない)。ちなみに、非凸な図形には負の固有値が無限に存在する [83]。 (狭義) 凸な図形であっても、負の固有値が存在する例も見つかっている [6, 7, 8, 23]。

<sup>28</sup> 有限要素法などの数値計算を利用すると、空間3次元以上の場合、ノイマン・ポアンカレ作用素の計算量は膨大になる (有限要素法の業界では俗に“次元の悪魔”と呼ばれる困難が発生する.)。

#### 6.4. 1/2 予想と 1/6 予想

最後に、空間図形において、ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値に関する予想も紹介したい。§4.4.2でも紹介したように、球面  $\partial\Omega$  に対する ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値の集合は

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_1, \underbrace{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}}_3, \underbrace{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}}_5, \dots, \underbrace{\frac{1}{2(2k+1)}, \dots, \frac{1}{2(2k+1)}}_{2k+1}, \dots$$

であった。和が  $1/2$  となる奇数個 (1 個, 3 個, 5 個, ...) の固有値からなる組が可算個存在している。一見、偶然にしか見えないこの性質が、楕円面でも成立することが証明された [72, 93]。しかも、さらに一般の空間図形に対して成り立つ可能性がある [21]。

例えば、数値計算 (精度はかなり低い) を、4 次曲面  $\partial\Omega := \{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + 2z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  上で実行し、ノイマン・ポアンカレ作用素の固有値を上手く選んで並べると

$$\begin{aligned} &0.5 \\ &0.332\dots, 0.211\dots, -0.043\dots \\ &0.30\dots, 0.22\dots, 0.12\dots, -0.11\dots, -0.03\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

などとなっており、各組 (1 個, 3 個, 5 個, ...) の和は、それぞれ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots?$$

のように見える。一般の空間内の図形で成り立つ可能性がある (1/2 予想)。

また、 $1/2$  は一般にノイマン・ポアンカレ作用素の固有値になるので、その次の第 2 固有値が問題になっている。球面では  $1/6$  なのだが、この値は、第二固有値の最小となることが予想されている。つまり、3 次元における他の図形では **第二固有値は  $1/6$  より大きいことが予想されている (1/6 予想)**。(なお、 $1/2$  予想も  $1/6$  予想も楕円面に対しては証明されている。また、 $1/2$  予想が成り立てば、 $1/6$  予想も成り立つ [85].) **現在、 $1/2$  予想と  $1/6$  予想を、一般の空間図形で解決する方策は見当もつかない。**

#### 参考文献 (関連文献を一部抜粋)

- [1] M. R. Adams, *Spectral properties of zeroth-order pseudodifferential operators* J. Funct. Anal. **52**(3)(1983), 420—441.
- [2] M. Agranovich, *Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2015.
- [3] M. S. Agranovich, *Elliptic Operators on Closed Manifolds*, In Partial Differential Equations VI, Encyclopedia of Mathematical Sciences Volume 63, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [4] M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A.N. Sivov and N.N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin, 1999.
- [5] L. V. Ahlfors, *Remarks on the Neumann-Poincaré integral equation*, Pacific. J. Math., **2** (1952), 271—280.
- [6] J. F. Ahner, *Some spectral properties of an integral operator in potential theory*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **29** (1986), 405—411.

- [7] J. F. Ahner, *On the eigenvalues of the electrostatic integral operator II*, J. Math. Anal. Appl., **181** (1994), 328–334.
- [8] J. F. Ahner and R. F. Arenstorf, *On the eigenvalues of the electrostatic integral operator*, J. Math. Anal. Appl., **117** (1986), 187–197.
- [9] H. Ammari, G. CIAOLO, H. Kang, H. Lee and G. W. Milton. *Spectral theory of a Neumann-Poincaré-type operator and analysis of cloaking due to anomalous localized resonance*, Arch. Ration. Mech. An. **208** (2013), 667–692.
- [10] H. Ammari, Y. T. Chow and H. Liu, *Quantum ergodicity and localization of plasmon resonances*, Jour. Funct. Anal., **285**(4) (2023), 109976.
- [11] H. Ammari, H. Kang, and H. Lee, *Layer potential techniques in spectral analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, **153** American Math. Soc., Providence RI, (2009).
- [12] K. Ando and H. Kang, *Analysis of plasmon resonance on smooth domains using spectral properties of the Neumann–Poincaré operator*, J. Math. Anal. Appl. **435**(1) (2016), 162–178.
- [13] K. Ando, H. Kang, S. Lee and Y. Miyanishi, *Spectral structure of the Neumann-Poincaré operator on thin ellipsoids and flat domains*, SIAM Jour. Math. Anal., **54**(6)(2022), 6164–6185
- [14] K. Ando, H. Kang, M. Putinar and Y. Miyanishi, *Spectral analysis of Neumann-Poincaré operator*, Revue Roumaine Math. Pures Appl., **66**(3-4) (2021), 545–575.
- [15] K. Ando, H. Kang, M. Putinar and Y. Miyanishi, *Generic properties of the Neumann-Poincaré operator: simplicity of eigenvalues and cyclic vectors*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (2025), (Online ahead of print), DOI: 10.2422/2036-2145.202312\_013
- [16] K. Ando, H. Kang, M. Putinar and Y. Miyanishi, *Carleman Factorization of Layer Potentials on Smooth Domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **249**(35) (2025), (Online ahead of print), DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-025-02106-y>
- [17] K. Ando, H. Kang and Y. Miyanishi, *Elastic Neumann-Poincaré operators on three dimensional smooth domains: Polynomial compactness and spectral structure*, Int. Math. Res. Notices, rnx258, (2017).
- [18] K. Ando, H. Kang and Y. Miyanishi, *Exponential decay estimates of the eigenvalues for the Neumann–Poincaré operator on analytic boundaries in two dimensions*, J. Integral Equations Applications, **30**(4) (2018), 473–489.
- [19] K. Ando, H. Kang and Y. Miyanishi, *Spectral structure of the Neumann-Poincaré operator on thin domains in two dimensions*, Jour Anal. Math., **146**(2022), 791–800.
- [20] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi and T. Nakazawa, *Surface Localization of Plasmons in Three Dimensions and Convexity*, SIAM Jour. Appl. Math., **81**(3) (2021), 1020-1033
- [21] K. Ando, H. Kang, Y. Miyanishi and E. Ushikoshi, *The first Hadamard variation of Neumann–Poincaré eigenvalues*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 1073–1080.
- [22] K. Ando, Y. Ji, H. Kang, D. Kawagoe, and Y. Miyanishi, *Spectral structure of the Neumann–Poincaré operator on tori*, Ann. I. H. Poincaré-AN **36**(7), 1817–1828.
- [23] K. Ando, Y. Ji, H. Kang, D. Kawagoe, Y. Miyanishi and G. Rosenblum, *Negative eigenvalues of the Neumann–Poincaré operator on convex surfaces*, in preparation
- [24] A. S. Andreev, *Asymptotics of the spectrum of compact pseudodifferential operators in a Euclidean domain*, Mat. Sbornik **137** (1988), 203–223; Math. USSR Sbornik **65** (1990).
- [25] M. Birman and M. Solomyak, *Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropically homogeneous symbols*, Vestnik Leningrad Univ. **13** (1977), 13–21; English translation in Vestin. Leningr. Univ. Math. **10**, 237–247.
- [26] M. Birman, D. Yafaev, *Asymptotic behavior of the spectrum of the scattering matrix*.

- (Russian) *Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions*, 13. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **110** (1981), 3-29. English translation in: J. Sov. Math. **25** (1984), 793-814.
- [27] W. Blaschke, *Vorlesungen Über Differentialgeometrie III*, Berlin: Springer (1929)
- [28] J. Blumenfeld and W. Mayer, *Über poincaré fundamental funktionen*, Sitz. Wien. Akad. Wiss., Math.-Nat. Klasse **122**, Abt. IIa (1914), 2011–2047.
- [29] E. Bonnetier and F. Triki, *On the spectrum of Poincaré variational problem for two close-to-touching inclusions in 2D*, Arch. Ration. Mech. An. **209** (2013), 541–567.
- [30] E. Bonnetier and H. Zhang, *Characterization of the essential spectrum of the Neumann–Poincaré operator in 2D domains with corner via Weyl sequences*, Rev. Mat. Iberoam., **35**(3) (2019), 925-948.
- [31] Louis Boutet Monvel, *Boundary problems for pseudo-differential operators*, Acta Math., **126**, (1971), 11–51.
- [32] T. Carleman, *Über das Neumann-Poincarésche problem für ein gebiet mit ecken*, Almquist and Wiksells, Uppsala, 1916.
- [33] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudodifférentiels*, Asterisque **57** (1978), 1–185.
- [34] R. R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer, *L’intégrale de Cauchy Definit un Operateur Borne sur L2 Pour Les Courbes Lipschitziennes*, **116** (2) (1982), 361–387.
- [35] M. Costabel and E. Stephan, *A direct boundary integral equation method for transmission problems*. J. Math. Anal. Appl., **106** (1985), 367—413.
- [36] M. Costabel, E. Darrigand and H. Sakly, *Volume integral equations for electromagnetic scattering in two dimensions*. Comp. Math. Appl., **70**(8)(2015), 2087–2101.
- [37] B.E.J. Dahlberg: *On the Poisson integral for Lipschitz and C1-domains*, Studia Math. **66** (1979) 13–24.
- [38] J. Delgado and M. Ruzhansky, *Schatten classes on compact manifolds: Kernel conditions*, J. Funct. Anal., **267** (2014), 772–798.
- [39] D. Deturck and L. Kazdan, *Some regularity theorems in Riemannian geometry*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), **14** (3) (1981), 249–260.
- [40] M. Dostanić, *A theorem of Ky-Fan type*, Matematički Vesnik, **47** (1995), 7–10.
- [41] E. I. Fredholm, *Sur une classe d’equations fonctionnelles*, Acta Mathematica, **27** (1903), 365–390.
- [42] S. Fukushima, Y. Ji and H. Kang, *A decomposition theorem of surface vector fields and spectral structure of the Neumann-Poincaré operator in elasticity*, Trans. AMS. **377**(3)(2024), 2065–2123
- [43] S. Fukushima, Y. Ji, H. Kang and Y. Miyanishi *Spectral properties of the Neumann-Poincaré operator and cloaking by anomalous localized resonance: a review*, J. Korean Soc. Ind. Appl. Math. **27**(2)(2023), 87–108
- [44] S. Fukushima and H. Kang, *Spectral structure of the Neumann–Poincaré operator on axially symmetric functions*, J. Spectr. Theory **14**(3) (2024), 1109–1145
- [45] S. Fukushima, H. Kang and Y. Miyanishi, *Decay rate of the eigenvalues of the Neumann-Poincaré operator*, Potential Analysis, **61**(2023), 573–596
- [46] M. I. Gil’, *Lower bounds for eigenvalues of Schatten-Von Neumann operators*, J. Inequal. Pure Appl. Math., **8**(3) (2007), Art. 66.
- [47] M. I. Gil’, *Operator functions and localization of spectra*, Lectures Notes in Mathematics, vol.1830, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [48] A. Girouard and I. Polterovich, *Spectral geometry of the Steklov problem (survey article)*, J. Spectral Theory **7** (2017), 321–359.

- [49] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Trans. Mathem. Monographs, **18**: (1969) Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [50] D. Grieser, *The plasmonic eigenvalue problem*, Rev. Math. Phys. **26** (2014), 1450005.
- [51] G. Grubb, *Spectral asymptotics for nonsmooth singular green operators*, Comm. P. D. E., **39**: (2014), 530–573.
- [52] J. Helsing, H. Kang and M. Lim, *Classification of spectra of the Neumann–Poincaré operator on planar domains with corners by resonance*, Ann. I. H. Poincaré-AN., **34**(4)(2017), 991–1011.
- [53] J. Helsing and K.-M. Perfekt, *The spectra of harmonic layer potential operators on domains with rotationally symmetric conical points*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués **118** (2018), 235–287.
- [54] G. C. Hiao and W. L. Wendland, *Boundary Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences, 164, Springer Nature Switzerland AG, 2021
- [55] S. Hofmann, M. Mitrea and M. Taylor, *Singular Integrals and Elliptic Boundary Problems on Regular Semmes–Kenig–Toro Domains*, Int. Math. Res. Notices, **2010** (2010), 2567–2865
- [56] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.
- [57] Y. Ji and H. Kang, *A concavity condition for existence of a negative Neumann–Poincaré eigenvalue in three dimensions*, Proc. Amer. Math. **147** (2019), 3431–3438
- [58] Y. Jung and M. Lim, *A decay estimate for the eigenvalues of the Neumann–Poincaré operator in two dimensions using the Grunsky coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc., **148** (2020), 591–600.
- [59] M. Kadic, G. W. Milton, M. van Hecke and M. Wegener, *3D metamaterials*, Nat. Rev. Phys. **1**, 198–210 (2019). <https://doi.org/10.1038/s42254-018-0018-y>
- [60] H. Kang, K. Kim, H. Lee, J. Shin and S. Yu, *Spectral properties of the Neumann–Poincaré operator and uniformity of estimates for the conductivity equation with complex coefficients*, J. London Math. Soc. (2) **93** (2016), 519–546.
- [61] H. Kang, M. Lim and S. Yu, *Spectral resolution of the Neumann–Poincaré operator on intersecting disks and analysis of plasmon resonance*, arXiv:1501.02952, 2015.
- [62] T. Kato, *Variation of discrete spectra*, Comm. Math. Phys., **111**: (1987), 501–504.
- [63] D. Kawagoe, *Spectral analysis on the elastic Neumann–Poincaré operator (Analysis of inverse problems through partial differential equations and related topics)*, 数理解析研究所講究録 **2174** (2021), 59–72
- [64] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Dover, New York, 1953.
- [65] D. Khavinson, M. Putinar, and H.S. Shapiro, *Poincaré’s variational problem in potential theory*. Arch. Ration. Mech. Anal. **185**(1) (2007), 143–184.
- [66] S. L. Krushkal, Chapter 11 - Quasiconformal Extensions and Reflections, Editor(s): R. Kühnau, Handbook of Complex Analysis, North-Holland, **2**, (2005), 507–553
- [67] H. KÖNIG, *Eigenvalue distribution of compact operators. Operator theory: Advances and Applications*, **16**. Birkhäuser Verlag, Basel, (1986).
- [68] Ky Fan, *Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators*, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. **37**, (1951), 760–766.
- [69] W. Li, K. Perfekt and S. P. Shipman, *Infinitely Many Embedded Eigenvalues for the Neumann–Poincaré Operator in 3D*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **54**(1)(2022), 343 - 362.
- [70] W. Li and S. P. Shipman, *Embedded eigenvalues for the Neumann–Poincaré operator*, J. Integral Equations Appl., **31** (2019), 505–534.

- [71] F. C. Marques and A. Neves, *Min-Max theory and the Willmore conjecture* Anal. Math., **179**(2) (2014), 683-782.
- [72] E. Martensen, *A spectral property of the electrostatic integral operator*, J. Math. Anal. Appl., **238** (1999), 551-557.
- [73] I. D. Mayergoyz, D. R. Fredkin and Z. Zhang, *Electrostatic (plasmon) resonances in nanoparticles*, Phys. Rev. B, **72** (2005), 155412.
- [74] D. Mitrea, I. Mitrea and M. Mitrea *Geometric Harmonic Analysis I-V*, Developments in Mathematics, Springer Cham
- [75] L. Marta and K. Perfekt, *The quasi-static plasmonic problem for polyhedra*, Math. Ann., (2022), <https://doi.org/10.1007/s00208-022-02481-x>
- [76] V. G. Maz'ya, *Boundary Integral Equations*, Itogi Nauki i Techniki, Fundamental Directions, vol. 27, Analysis-4, Viniti, 1988, 131-228.
- [77] G.W. Milton and N.-A.P. Nicorovici, *On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance*, Proc. R. Soc. A **462** (2006), 3027-3059.
- [78] S. G. Mikhlin: *Mathematical Physics, an Advanced Course*. North Holland Pub. Comp., Amsterdam (1970).
- [79] Y. Miyanishi, *Weyl's law for the eigenvalues of the Neumann-Poincaré operators in three dimensions: Willmore energy and surface geometry*, Advances in Math., **406** (2022), 108547.
- [80] Y. Miyanishi, *A short note on decay rates of odd partitions: An application of spectral asymptotics of the Neumann-Poincaré operators*, Archiv der Mathematik, **121** (2023), 419-424,
- [81] 宮西 吉久, ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル理論とその応用, 2019年度 秋季総合分科会, 函数解析学分科会(金沢大学) 特別講演アブストラクト
- [82] 宮西 吉久, Layer Potential Type Operator のスペクトル理論 とその応用に向けて, 2023年度 秋季総合分科会. 函数方程式論分科会(東北大学) 特別講演アブストラクト
- [83] Y. Miyanishi and G. Rozenblum, *Eigenvalues of the Neumann-Poincaré operator in dimension 3: Weyl's law and geometry*, St. Peterusberg Jour. **31** (2) (2019), 248-268.
- [84] Y. Miyanishi and G. Rozenblum, *Spectral properties of the Neumann-Poincaré operator in 3D elasticity*, Int. Math. Res. Not., **2021** (11) (2020), 8715-8740.
- [85] Y. Miyanishi and T. Suzuki, *Eigenvalues and eigenfunctions of double layer potentials*, Trans. Amer. Math. **369** (2017), 8037-8059.
- [86] C. Neumann, *Über die Methode des arithmetischen Mittels, Erste and zweite Abhandlung*, Leipzig 1887/88, in Abh. d. Kgl. Sächs Ges. d. Wiss., IX and XIII.
- [87] C. Pechstein, *Shape-explicit constants for some boundary integral operators*, Appl. Anal. **92**(5) (2013), 949-974.
- [88] K. Perfekt and M. Putinar, *Spectral bounds for the Neumann-Poincaré operator on planar domains with corners*, J. Anal. Math. **124** (2014), 39-57.
- [89] K. Perfekt and M. Putinar, *The essential spectrum of the Neumann-Poincaré operator on a domain with corners*, Arch. Ration. Mech. Anal. **223** (2017), no. 2, 1019-1033.
- [90] J. Plemelj, *Potentialtheoretische Untersuchungen, Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen*, Gesellschaft zu Leipzig, Teubner-Verlag, Leipzig, (1911).
- [91] H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*, Acta Math. **20** (1897), 59-152.
- [92] J. Radon, *Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential*, Sitzber. Akad. Wiss. Wien **128** (1919) 1123-1167.
- [93] S. Ritter, *The spectrum of the electrostatic integral operator for an ellipsoid*, in "Inverse Scattering and Potential Problems in Mathematical Physics," (R.F.Kleinman, R.Kress,

- and E. Marstensen, Eds.), Lang, Frankfurt/Bern, (1995), 157–167.
- [94] G. Rozenblum, *Eigenvalue asymptotics for polynomially compact pseudodifferential operators*, Algebra i Analiz **33**(2)(2021), 215–233.
- [95] G. Rozenblum and G. Tashchiyan, *Eigenvalue asymptotics for potential type operators on Lipschitz surfaces*, Russ. J. Math. Phys. **13** (3), (2006), 326–339.
- [96] M. Schiffer, *The Fredholm eigenvalues of plane domains*, Pacific J. Math. **7** (1957), 1187–1225.
- [97] M. Schiffer, *Fredholm eigenvalues and conformal mapping*, Autovalori e autosoluzioni, C.I.M.E. Summer Schools **27**, Springer (2011), 203–234.
- [98] G. SCHÖBER, *Neumann’s lemma*, Proc. AMS **19**, (1968), 306–311.
- [99] R. Seeley, *Singular integrals and boundary value problems*, American Journal of Mathematics, **88** (4), 1966, 781–809.
- [100] H. S. Shapiro, *The Schwarz function and its generalization to higher dimensions*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, **9**. A Wiley Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, (1992).
- [101] H. Shahgholian, *A characterization of the sphere in terms of single-layer potentials*, Proc. Amer. Math. Soc., **115** (1992), 1167–1168.
- [102] V. Yu. Shelepov, *On the index of an integral operator of the potential type in the space  $L_p$* , Sov. Math., Dokl. 10/A, (1969), 754–757.
- [103] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory (Second Edition)*, Springer, (2001).
- [104] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, 2nd ed., Amer. Math. Soc. (2005).
- [105] G. Springer, *Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping*, Acta. Math., **111**(1964), 121–141
- [106] O. Steinbach and W. L. Wendland, *On C. Neumann’s method for second-order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries*, J. Math. Anal. Appl. **262** (2001), 733–748.
- [107] M. E. Taylor, *Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators, and Layer Potentials*, Mathematical Surveys and Monographs, **81** American Math. Soc., Providence RI, (2000).
- [108] F. G. Tricomi, *Integral Equations*, Wiley, New York (1957).
- [109] G.C. Verchota, *Layer potentials and boundary value problems for Laplace’s equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 572–611.
- [110] S. Warschawski, *On the solution of Lichtenstein-Gersgorin integral equation in conformal mapping: I. Theory*, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. **42**, (1955), 7–29
- [111] W. L. Wendland, *On the Double Layer Potential*, In: Cialdea A., Ricci P.E., Lanzara F. (eds) Analysis, Partial Differential Equations and Applications. Operator Theory: Advances and Applications, **193** (2009) Birkhäuser Basel
- [112] S. Werner, *SPIEGELUNGSKOEFFIZIENT UND FREDHOLMSCHER EIGENWERT FÜR GEWISSE POLYGONE*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, **22** (1997), 165–186
- [113] J. H. White, *A global invariant of conformal mappings in space*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 162–164.
- [114] S. Zaremba, *Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 10 (1904), 395–444.
- [115] Seyed Zoalroshd, *On Spectral Properties of Single Layer Potentials* (2016), USF Tampa Graduate Theses and Dissertations.

# ISOMETRIC GELFAND TRANSFORMS OF COMPLETE PICK SPACES

荒神健太 (KENTA KOJIN)

概要. プレプリント [15] に基づき, 乗算代数 (multiplier algebra) の Gelfand 変換が等長になる (または非可換 Shilov 境界が可換環になる) 完全 Pick 空間は, 単位円盤上の Hardy 空間に限ることを示す.

## 1. 導入

本講演では [15] を紹介する. タイトルにある完全 Pick 空間という名称は有名な Pick 補間定理 [20] に由来する. まずこの定理の主張を述べる.  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  を開単位円盤,  $H^\infty(\mathbb{D})$  を  $\mathbb{D}$  上の有界正則関数全体の成す Banach 環とする. ノルムは  $\|\phi\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{D}} |\phi(z)|$  を考える.

**定理 1.1** (Pick 補間定理).  $\mathbb{D}$  上の  $n$  個の異なる点  $z_1, \dots, z_n$  と  $n$  個の複素数  $w_1, \dots, w_n$  が与えられた時,  $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$  で  $\|\phi\|_\infty \leq 1$  かつ  $\phi(z_i) = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすものが存在するための必要十分条件は,  $n \times n$  行列

$$\left[ \frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \right]_{i,j=1}^n$$

が半正定値になることである.

この結果は正則関数の挙動が半正定値行列で理解できることを示唆しており, 複素関数論のみならず作用素論の立場からも興味深い [4, 5]. また,  $H^\infty$  制御理論においても重要な役割を果たしたことはよく知られている (例えば [16]). 1967 年, Sarason [23] は  $H^\infty(\mathbb{D})$  が  $\mathbb{D}$  上の Hardy 空間  $H^2$  の乗算代数  $\text{Mult}(H^2)$  と同一視できることを用いて, 定理 1.1 の作用素論的な証明を与えた. その後, Agler [1] は Pick 型の補間定理が成り立つ再生核ヒルベルト空間を探し, Agler [1], McCullough [17, 18], Quiggin [21] によって, 行列値の Pick 補間定理が成り立つ再生核ヒルベルト空間の特徴付けが与えられた. このような空間を完全 Pick 空間と呼び, Hardy 空間, Dirichlet 空間, 実軸上の Sobolev 空間などが基本的な例である. さらに, Agler–McCarthy [3] が任意の既約完全 Pick 空間はあるヒルベルト空間  $\mathcal{E}$  に対する Drury–Arveson 空間  $H_\mathcal{E}^2$  に埋め込めることを示した. ここで,  $H_\mathcal{E}^2$  はヒルベルト空間  $\mathcal{E}$  の開単位球  $\mathbb{B}_\mathcal{E}$  上で定義された多変数の Hardy 空間である. Agler–McCarthy の定理は完全 Pick 空間が Hardy 空間と類似の性質を多数持ち得ることを示唆し, 多くの研究者がそれを実証してきた. 実際, Beurling の定理や inner-outer 分解など Hardy 空間論の様々な結果が完全 Pick 空間の設定に一般化できる. すなわち, 完全 Pick 空間は Hardy 空間の適切な一般化の一つである. 完全 Pick 空間の標準的な教科書は [4] であり, サーベイ論文 [12] では比較的最近の結果も紹介されている.

用語の定義は後の章で行うことにして, 本研究の動機となった結果を述べる.

Date: August 25, 2025.

- (1) Hartz [10] は任意の乗算作用素がハイポ正規であるような完全 Pick 空間は本質的に Hardy 空間に限ることを示した.
- (2) 講演者 [14, Theorem 3.9] は任意の乗算作用素  $\phi$  に対して  $\|\phi\|_\infty = \|\phi\|_{\text{Mult}(H_k)}$  が成り立つ完全 Pick 空間は本質的に Hardy 空間に限ることを示した.

上記の結果 (1), (2) のいずれかの仮定を満たすとき, 乗算代数  $\text{Mult}(H_k)$  の Gelfand 変換は等長になる (詳細は 3 章). また, 講演者が John E. McCarthy 氏の下に滞在中, Michael Hartz 氏がメールで共有して下さった次の予想も本研究の動機である:

**予想 1.2** (Hartz–Clouâtre, 2015). 乗算代数の非可換 Shilov 境界 ( $C^*$ -envelope) が可換環になる完全 Pick 空間は, 本質的に Hardy 空間に限る. つまり, 乗算代数が一樣環になる時, 通常の Shilov 境界と非可換 Shilov 境界が一致する完全 Pick 空間は Hardy 空間に限る.

この予想に関連して, Clouâtre–Timko [6, Theorem 2.4] は, ヒルベルト空間  $H$  上の有界作用素全体  $B(H)$  の単位的ノルム閉部分代数<sup>1</sup>  $\mathcal{A} \subset B(H)$  に対し,  $\mathcal{A}$  の非可換 Shilov 境界が可換環になるための必要十分条件は,  $\mathcal{A}$  の Gelfand 変換が完全等長写像になることという事実を示した<sup>2</sup>. 以上から, 乗算代数の Gelfand 変換が等長であるような完全 Pick 空間の特徴付けを与えることは自然である.

## 2. 完全 PICK 空間

集合  $X$  上で定義された複素数値関数の成すヒルベルト空間  $H_k$  が**再生核ヒルベルト空間 (再生核ヒルベルト空間)** であるとは, 任意の点  $x \in X$  に対して,  $H_k$  のベクトル  $k_x$  がただ一つ存在して

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle_{H_k} \quad (f \in H_k)$$

を満たす時をいう. この時,  $H_k$  の再生核  $k: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  は

$$k(x, y) = \langle k_y, k_x \rangle_{H_k} \quad (x, y \in X)$$

で定義される. より一般に, 関数  $k: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  が再生核 (または半正定値) であるとは, 任意の  $n$  点  $x_1, \dots, x_n \in X$  と  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  に対して,

$$\sum_{i,j} \bar{c}_i c_j k(x_i, x_j) \geq 0$$

を満たすことである. この条件は  $n \times n$  行列

$$[k(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

が半正定値であることと同値である. 再生核ヒルベルト空間は再生核によって決定される. 再生核ヒルベルト空間  $H_k$  が**既約**であるとは, 次の二つを満たすことをいう: (1) 異なる  $x, y \in X$  に対し,  $k_x$  と  $k_y$  は一次独立, (2) 任意の  $x, y \in X$  に対して  $k(x, y) \neq 0$ . 本稿では既約な再生核ヒルベルト空間のみを考える.

次に, 再生核ヒルベルト空間に作用する作用素を定義する.  $H_k$  を集合  $X$  上の再生核ヒルベルト空間とした時, その**乗算代数 (multiplier algebra)** は

$$\text{Mult}(H_k) = \{\phi: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{任意の } f \in H_k \text{ に対して, } \phi f \in H_k\}$$

で定義される. 閉グラフ定理から, 任意の  $\phi \in \text{Mult}(H_k)$  は  $H_k$  上の有界線形作用素  $M_\phi: f \mapsto \phi f$  を定める. そこで,  $\phi$  と  $M_\phi$  を同一視すると,  $\|\phi\|_{\text{Mult}(H_k)} = \|M_\phi\|_{B(H_k)}$  によって  $\text{Mult}(H_k)$  は作用素代数となる. すなわち,  $\text{Mult}(H_k)$  は  $B(H_k)$  の単位的閉

<sup>1</sup> $a \in \mathcal{A}$  のとき  $a^* \in \mathcal{A}$  とは限らない.

<sup>2</sup>完全等長ならば等長である.

部分代数とみなせる<sup>3</sup>. なお, 任意の  $\phi \in \text{Mult}(H_k)$  に対して,  $\|\phi\|_\infty \leq \|\phi\|_{\text{Mult}(H_k)}$  が成り立つ. 特に, 任意の乗算作用素は有界関数である.

再生核ヒルベルト空間の基本的かつ重要な例の一つは開単位円盤  $\mathbb{D}$  上の **Hardy 空間**

$$H^2 = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \right\}$$

である. ここで,  $\mathcal{O}(\mathbb{D})$  は  $\mathbb{D}$  上の正則関数全体,  $\hat{f}(n)$  は  $f$  の原点での  $n$  次 Taylor 係数である. ゆえに,  $H^2$  は数列空間  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  と自然に同一視できる. Hardy 空間の再生核は Szegő 核

$$k^S(z, w) = \frac{1}{1 - z\bar{w}} \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

である. また,  $\text{Mult}(H^2) = H^\infty(\mathbb{D})$  であり, 任意の  $\phi \in \text{Mult}(H^2) (= H^\infty(\mathbb{D}))$  に対して  $\|\phi\|_{\text{Mult}(H^2)} = \|\phi\|_\infty$  が成り立つ. これらの事実を用いると, 定理 1.1 は次の様に再生核ヒルベルト空間の言葉で書き換えられる:

**定理 2.1** (Pick 補間定理).  $\mathbb{D}$  上の  $n$  個の異なる点  $z_1, \dots, z_n$  と  $n$  個の複素数  $w_1, \dots, w_n$  が与えられた時,  $\phi \in \text{Mult}(H^2)$  で  $\|\phi\|_{\text{Mult}(H^2)} \leq 1$  かつ  $\phi(z_i) = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすものが存在するための必要十分条件は,  $n \times n$  行列

$$[(1 - w_i \bar{w}_j) k^S(z_i, z_j)]_{i,j=1}^n$$

が半正定値になることである.

Hardy 空間は昔からよく研究されており, 興味深い理論が展開されている (基本的なことは [4, 22] などを見よ). そこで, Hardy 空間と同様の性質が多く成り立つ再生核ヒルベルト空間を探することは自然であり, その答えの一つが完全 Pick 空間だといえる. 完全 Pick 空間は行列値の Pick 補間定理が成り立つ空間である.

**定義 2.2.**  $H_k$  を集合  $X$  上の関数が成す再生核ヒルベルト空間とする.  $H_k$  が**完全 Pick 空間**であるとは, 異なる  $n$  点  $x_1, \dots, x_n \in X$  および  $n$  個の  $m \times m$  行列  $W_1, \dots, W_n$  に対して

$$[(I - W_i W_j^*) k(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

が半正定値ならば,  $\Phi \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \text{Mult}(H_k) \subset B(\mathbb{C}^m \otimes H_k)$  で  $\|\Phi\|_{\mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \text{Mult}(H_k)} \leq 1$  かつ  $\Phi(x_i) = W_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすものが存在する時を言う. ここで,  $\Phi \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \text{Mult}(H_k)$  は  $\text{Mult}(H_k)$  の元が成分の  $m \times m$  行列  $\Phi = [\phi_{i,j}]_{i,j=1}^m$  と考えてよい.

**例 2.3.** (1) 実数  $t \in \mathbb{R}$  に対し,  $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$  上の関数を  $k_t(z, w) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^t z^n \bar{w}^n$  ( $z, w \in \mathbb{D}$ ) で定める. すると,  $k_t$  は再生核になるので, 各  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $\mathbb{D}$  上の正則関数が成す再生核ヒルベルト空間  $H_{k_t}$  が定まる<sup>4</sup>. 特に,  $H_{k_{-1}}$  は Dirichlet 空間,  $H_{k_0}$  は Hardy 空間,  $H_{k_1}$  は Bergman 空間である.  $t \leq 0$  の時,  $H_{k_t}$  は完全 Pick 空間になる [4, Lemma 7.38], [11, Lemma 2.3]. なお,  $t \geq 0$  の時  $\text{Mult}(H_{k_t}) = H^\infty(\mathbb{D})$  かつ  $\|\cdot\|_{\text{Mult}(H_{k_t})} = \|\cdot\|_\infty$  が成り立つ.

(2) 単位球  $\mathbb{B}_d = \{z \in \mathbb{C}^d \mid \|z\|_{\mathbb{C}^d} < 1\}$  上の再生核ヒルベルト空間を考える. 実数  $t \in \mathbb{R}$  に対し,  $\mathbb{B}_d \times \mathbb{B}_d$  上の関数を  $k_t(z, w) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^t \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^d}^n$  ( $z, w \in \mathbb{B}_d$ ) で定義

<sup>3</sup> $M_\phi^* \in \text{Mult}(H_k)$  とは限らない

<sup>4</sup>再生核  $k(z, w)$  が  $z$  について正則,  $w$  について反正則なら  $H_k$  は正則関数の成す空間になる.

する. すると,  $k_t$  は再生核になるので, 各  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $\mathbb{B}_d$  上の正則関数が成す再生核ヒルベルト空間  $H_{k_t}$  が定まる. 特に,  $H_{k_{-1}}$  は Dirichlet 空間,  $H_{k_0}$  は Drury–Arveson 空間である.  $t \leq 0$  の時,  $H_{k_t}$  は完全 Pick 空間になる [4, Lemma 7.38], [11, Lemma 2.3].

(3) 閉区間  $[0, 1]$  上の絶対連続関数で

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 dx < \infty$$

を満たすもの全体を Sobolev 空間という. Sobolev 空間は再生核ヒルベルト空間であり, その再生核は

$$k(x, y) = \begin{cases} \operatorname{cosech}(1) \cosh(1-x) \cosh(y) & (y \leq x) \\ \operatorname{cosech}(1) \cosh(1-y) \cosh(x) & (x \leq y). \end{cases}$$

で与えられる. Sobolev 空間は完全 Pick 空間である [2] ([4, 21] などとも参考になる).

集合  $X$  上の関数が成す既約な再生核ヒルベルト空間  $H_k$  を考える. 点  $x_0 \in X$  に対し,  $k(x, x_0) = 1$  ( $x \in X$ ) が成り立つとき,  $H_k$  は  $x_0$  で正規化されているという. 実は, 既約な再生核ヒルベルト空間はある点  $x_0 \in X$  で正規化されているとして一般性を失わない (詳細は [4, Section 2.6]). 完全 Pick 空間について, 次の特徴付けが知られている.

**定理 2.4** (Agler–McCarthy [3]).  $H_k$  を集合  $X$  上の関数が成す  $x_0 \in X$  で正規化された既約な再生核ヒルベルト空間とする. この時, 以下は同値である:

- (1)  $H_k$  は完全 Pick 空間である.
- (2)  $1 - \frac{1}{k(x, y)}$  は  $X$  上の再生核である.
- (3) ヒルベルト空間  $\mathcal{E}$  と, 単射  $b : X \rightarrow \mathbb{B}_{\mathcal{E}} = \{z \in \mathcal{E} \mid \|z\|_{\mathcal{E}} < 1\}$  が存在して,  $b(x_0) = 0$  かつ

$$k(x, y) = \frac{1}{1 - \langle b(x), b(y) \rangle_{\mathcal{E}}} \quad (x, y \in X)$$

が成り立つ.

特に, 完全 Pick 空間の再生核の形は Hardy 空間の再生核

$$k^S(z, w) = \frac{1}{1 - z\bar{w}} \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

と類似していることがわかる. 実際, 完全 Pick 空間は Hardy 空間と同様の性質を多数持つことが明らかになってきており, 現在もよく研究されている [4, 12]. 例えば, 完全 Pick 空間に対して Beurling の定理や inner-outer 分解などが証明できる.

### 3. BANACH 環と C\*-環

$\mathbb{C}$  上の単位的多元環  $\mathcal{A}$  がノルム  $\|\cdot\|$  に関して完備であり, かつ任意の  $a, b \in \mathcal{A}$  に対して  $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$  が成り立つ時,  $\mathcal{A}$  を単位的 Banach 環という. 特に, 対合  $a \mapsto a^*$  が定義され, 任意の  $a \in \mathcal{A}$  に対して  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  が成り立つ単位的 Banach 環を単位的 C\*-環という.  $(\operatorname{Mult}(H_k), \|\cdot\|_{\operatorname{Mult}(H_k)})$  は単位的可換 Banach 環, コンパクト空間  $\Omega$  に対し  $C(\Omega)$  は単位的可換 C\*-環, ヒルベルト空間  $H$  に対して  $B(H)$  は単位的 C\*-環である.

単位的可換 Banach 環の Gelfand 変換を簡単に説明する. 単位的可換 Banach 環  $\mathcal{A}$  上の 0 でない線形汎関数  $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  が

$$\chi(1) = 1, \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \quad (a, b \in \mathcal{A})$$

を満たすとき,  $\chi$  を**指標**という.  $\mathcal{A}$  上の指標全体  $\Delta(\mathcal{A})$  は適当な位相 (weak \*-topology) でコンパクト Hausdorff 空間になる<sup>5</sup>. 任意の  $a \in \mathcal{A}$  に対し,  $\Delta(\mathcal{A})$  上の連続関数  $\hat{a} \in C(\Delta(\mathcal{A}))$  を

$$\hat{a}(\chi) := \chi(a) \quad (\chi \in \Delta(\mathcal{A}))$$

で定める. すると, 対応  $a \mapsto \hat{a}$  は準同型写像であり, さらに

$$\|\hat{a}\|_\infty := \sup_{\chi \in \Delta(\mathcal{A})} |\chi(a)| \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \quad (a \in \mathcal{A})$$

が成り立つ. この対応  $\mathcal{A} \ni a \mapsto \hat{a} \in C(\Delta(\mathcal{A}))$  を **Gelfand 変換**という. Gelfand 変換は contractive だが一般に等長とは限らない.

1 章で述べた本研究の動機について補足する. スペクトルの一般論から, 任意の  $a \in \mathcal{A}$  に対して  $\|a^2\| = \|a\|^2$  が成り立つ時, Gelfand 変換が等長, すなわち

$$\|\hat{a}\|_\infty = \|a\|_{\mathcal{A}} \quad (a \in \mathcal{A})$$

が従う. ヒルベルト空間上の有界作用素  $a \in B(H)$  がハイポ正規の時,  $\|a^n\| = \|a\|^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) が成り立つ [13, 定理 6.3.10]. したがって, 任意の  $\phi \in \text{Mult}(H_k)$  に対し  $M_\phi \in B(H_k)$  がハイポ正規ならば,  $\text{Mult}(H_k)$  の Gelfand 変換は等長である. また,  $\|\phi^2\|_\infty = \|\phi\|_\infty^2$  なので, 任意の  $\phi \in \text{Mult}(H_k)$  に対し  $\|\phi\|_{\text{Mult}(H_k)} = \|\phi\|_\infty$  が成り立つならば,  $\text{Mult}(H_k)$  の Gelfand 変換は等長である.

次に, 単位的可換  $C^*$ -環  $\mathcal{A}$  の Gelfand 変換について説明する.  $a = a^*$  を満たす  $a \in \mathcal{A}$  と任意の  $\chi \in \Delta(\mathcal{A})$  に対して,  $\chi(a) \in \mathbb{R}$  が成り立つ. さらに, 複素数と同様に任意の  $a \in \mathcal{A}$  は

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i \frac{a - a^*}{2i}$$

と自己共役元の線形結合に分解できるので,

$$\chi(a^*) = \overline{\chi(a)} \quad (a \in \mathcal{A}, \chi \in \Delta(\mathcal{A}))$$

が成り立つ. したがって, Gelfand 変換  $\mathcal{A} \ni a \mapsto \hat{a} \in C(\Delta(\mathcal{A}))$  は  $*$  準同型になる. また,  $\mathcal{A}$  が可換環ならば任意の  $a \in \mathcal{A}$  に対して  $a^*a = aa^*$  が成り立つので,  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  を用いると,

$$\|a\|^4 = \|a^*a\|^2 = \|(a^*a)^*a^*a\| = \|a^*aa^*a\| = \|a^*a^*aa\| = \|(a^2)^*a^2\| = \|a^2\|^2.$$

よって任意の  $a \in \mathcal{A}$  に対して  $\|a^2\| = \|a\|^2$  が成り立つので, 単位的可換  $C^*$ -環  $\mathcal{A}$  の Gelfand 変換は等長である. また, Stone-Weierstrass の定理から Gelfand 変換は全射になる. 以上から, 単位的可換  $C^*$ -環  $\mathcal{A}$  は  $C(\Delta(\mathcal{A}))$  と同一視できる. したがって, 単位的  $C^*$ -環はコンパクト Hausdorff 空間  $\Omega$  または  $C(\Omega)$  の “非可換版” と見做せる.

#### 4. 非可換 SHILOV 境界 ( $C^*$ -ENVELOPE)

この章では [19] に基づいて非可換 Shilov 境界 ( $C^*$ -envelope) を紹介する. ヒルベルト空間  $H$  に対し,  $B(H)$  の部分多元環  $1 \in \mathcal{A} \subset B(H)$  を**作用素代数**と呼ぶ. なお,  $a \in \mathcal{A}$  に対し  $a^* \in \mathcal{A}$  とは限らない. 例えば, 再生核ヒルベルト空間  $H_k$  に対し,  $\text{Mult}(H_k) \subset B(H_k)$  は作用素代数である. 後で説明するが, 非可換 Shilov 境界は作用素代数  $\mathcal{A}$  を含む “最小の”  $C^*$ -環である. さらに,  $\mathcal{A}$  が一様環の時は  $\mathcal{A}$  の Shilov 境界上の連続関数環と一致するので, 非可換 Shilov 境界と呼ばれる<sup>6</sup>. 作用素代数  $\mathcal{A} \subset B(H)$  と  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $M_n(\mathcal{A}) = \{[a_{i,j}]_{i,j=1}^n \mid a_{i,j} \in \mathcal{A}\}$  と定義する. すると,  $n \times n$  行列が  $\mathbb{C}^n$  上の有界作用素を定めるのと同様に,  $M_n(\mathcal{A})$  は  $B(H^n)$  の作用素代数と見

<sup>5</sup>コンパクト性は  $\mathcal{A}$  が単位的であることから従う.

<sup>6</sup> $C^*$ -envelope と呼ぶのが標準的だが, ここでは研究会の特色を踏まえて非可換 Shilov 境界と呼ぶ.

做せる. ここで,  $H^n$  は  $H$  を  $n$  回直和してできるヒルベルト空間である. 線形写像  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow B(K)$  と  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $\rho_n: M_n(\mathcal{A}) \rightarrow B(K^n)$  を

$$\rho_n([a_{i,j}]) = [\rho(a_{i,j})] \quad ([a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{A}))$$

で定める. 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $\rho_n$  が等長である時,  $\rho$  を完全等長写像という. 明らかに完全等長ならば等長である.

作用素代数  $\mathcal{A} \subset B(H)$  に対し  $\mathcal{A}$  が生成する  $C^*$ -環  $C^*(\mathcal{A}) \subset B(H)$  は  $\mathcal{A}$  を含む  $B(H)$  内で最小の  $C^*$ -環である. 一方, 完全等長準同型写像  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow B(K)$  に対し,  $\mathcal{A}$  と  $\rho(\mathcal{A})$  は同一視できるので,  $C^*(\rho(\mathcal{A})) \subset B(K)$  もまた  $\mathcal{A}$  を含む  $C^*$ -環と見做せる. また,  $C^*(\rho(\mathcal{A}))$  は  $\rho(\mathcal{A}) (\cong \mathcal{A})$  を含む  $B(K)$  内で最小の  $C^*$ -環である. つまり, 同型を無視すると,  $\mathcal{A}$  を含む最小の  $C^*$ -環  $C^*(\mathcal{A})$  は器である  $B(K)$  の選び方に依存する. そこで,  $\{C^*(\rho(\mathcal{A})) \mid \rho \text{ は } \mathcal{A} \text{ 上の完全等長準同型写像}\}$ <sup>7</sup> の中で最小のものを非可換 Shilov 境界と呼ぶ. 厳密には, 以下の条件を満たす  $C^*$ -環  $C_e^*(\mathcal{A}) \subset B(K)$  と完全等長準同型写像  $\iota: \mathcal{A} \rightarrow B(K)$  の組を非可換 Shilov 境界 (または  $C^*$ -envelope) という:

- (1)  $C^*(\iota(\mathcal{A})) = C_e^*(\mathcal{A})$ .
- (2) 任意の完全等長準同型写像  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow B(L)$  に対し, 全射  $*$ -準同型写像  $\pi: C^*(\rho(\mathcal{A})) \rightarrow C_e^*(\mathcal{A})$  で  $\pi(\rho(a)) = \iota(a)$  ( $a \in \mathcal{A}$ ) を満たすものが存在する.

つまり, 任意の完全等長準同型写像  $\rho: \mathcal{A} \rightarrow B(L)$  に対し,  $C^*(\rho(\mathcal{A}))/\ker \pi \cong C_e^*(\mathcal{A})$  である.  $C_e^*(\mathcal{A})$  が存在するならば  $*$ -同型を除いて一意に定まるが, その存在は Hamana [9] が示した:

**定理 4.1** ([9]). 任意の作用素代数  $\mathcal{A}$  に対して  $C_e^*(\mathcal{A})$  が存在する.

より一般に単位的  $C^*$ -環  $\mathcal{B}$  の部分多元環  $1 \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  を作用素代数と呼ぶ. 一般の作用素代数  $\mathcal{A}$  に対しても同様にして非可換 Shilov 境界  $C_e^*(\mathcal{A})$  が定義できる. 実際, 任意の  $C^*$ -環  $\mathcal{B}$  は Gelfand–Naimark の定理によって, ある  $B(H)$  の  $C^*$ -部分代数と等距離  $*$ -同型になる. さらに,  $C^*$ -ノルムは一意に定まるので, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $M_n(\mathcal{B}) \subset B(H^n)$  と考えて良い.

$\Omega$  をコンパクト Hausdorff 空間,  $\mathcal{A} \subset C(\Omega)$  を一様環とする. ノルムは  $\|\cdot\|_\infty$  を考える.

**定理 4.2** ([19, Theorem 15.17 and Corollary 15.18]). 一様環  $\mathcal{A} \subset C(\Omega)$  に対し,  $C_e^*(\mathcal{A}) = C(\partial_S \mathcal{A})$  が成り立つ. ここで,  $\partial_S \mathcal{A} \subset \Omega$  は  $\mathcal{A}$  の Shilov 境界である. すなわち,  $\partial_S \mathcal{A}$  は以下を満たすコンパクト集合である:

- (1)  $\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \sup_{x \in \partial_S \mathcal{A}} |f(x)|$  ( $f \in \mathcal{A}$ ).
- (2) もし閉集合  $Y \subset \Omega$  が上記 (1) を満たすならば,  $\partial_S \mathcal{A} \subset Y$  が成り立つ.

**注意 4.3.** 上記の定理から, 作用素代数の Gelfand 変換  $\mathcal{A}$  が完全等長であれば  $C_e^*(\mathcal{A}) = C(\partial_S \mathcal{A})$  が成り立つ. 可換作用素代数  $\mathcal{A}$  の Gelfand 変換が等長だとしても完全等長とは限らないと考えられるが, 少なくとも講演者は具体的な反例を知らない<sup>8</sup>.

予想 1.2 に関して, 以下の結果は有用である.

**定理 4.4** ([6, Theorem 2.4]). 可換なノルム閉作用素代数  $\mathcal{A} \subset B(H)$  に対して, 以下は同値である:

<sup>7</sup>簡単のために形式的に集合の記号を用いたが, ヒルベルト空間全体は集合にならないので, この族も集合にならない.

<sup>8</sup>もし構成できればお知らせください. なお, completely contractive は [19, Theorem 3.9] から従う.

- (1)  $C_e^*(\mathcal{A})$  は可換.
- (2)  $\mathcal{A}$  の Gelfand 変換は完全等長.
- (3) ある両側閉イデアル  $J \subset C^*(\mathcal{A})$  が存在して,  $C^*(\mathcal{A})/J$  が可換で, さらに商写像  $q: C^*(\mathcal{A}) \rightarrow C^*(\mathcal{A})/J$  が  $\mathcal{A}$  上では完全等長になる.

非可換 Shilov 境界は近年急速に発展している非可換 Choquet 理論の文脈で理解できる [7, 8].

## 5. 主定理

集合  $A \subset \mathbb{D}$  について,  $f(z) = 0$  ( $z \in A$ ) を満たす関数  $f \in H^2$  が  $f = 0$  に限る時,  $A$  は  $H^2$  の一意性集合という. 例えば, 一致の定理から  $\mathbb{D}$  内の開集合は  $H^2$  の一意性集合である.

次が本講演の主定理である.

**定理 5.1** ([15, Theorem 1.2]).  $H_k$  を集合  $X$  上の関数が成す既約完全 Pick 空間とする. さらに,  $H_k$  は点  $x_0 \in X$  で正規化されているとする. この時, 以下は同値である:

- (1)  $\text{Mult}(H_k)$  の Gelfand 変換が等長.
- (2)  $\text{Mult}(H_k)$  の Gelfand 変換が完全等長.
- (3)  $C_e^*(\text{Mult}(H_k))$  が可換.
- (4)  $H^2$  の一意性集合  $A \subset \mathbb{D}$  と全単射写像  $j: X \rightarrow A$  が存在して,  $j(x_0) = 0$  と

$$k(x, y) = \frac{1}{1 - j(x)\overline{j(y)}} \quad (x, y \in X)$$

が成り立つ.

さらに, 上記のいずれかの条件 (したがって全ての条件) が成り立つ時,

$$H^2 \rightarrow H_k, \quad f \mapsto f \circ j$$

はユニタリー作用素になり,

$$H^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Mult}(H_k), \quad \phi \mapsto \phi \circ j$$

は完全等長同型写像になる.

この結果は [10] と [14, Theorem 3.9] の一般化である. また, 予想 1.2 の肯定的解決でもある.

定理 5.1 の証明の概略を述べる. 定理 5.1 で最も非自明な部分は (1)  $\Rightarrow$  (4) である. より正確には, Gelfand 変換が等長ならば, 定理 2.4 におけるヒルベルト空間  $\mathcal{E}$  が 1 次元でとれる点である. これを示すためのアイデアを述べる. 定理 2.4 を踏まえて, 簡単のために最も単純な場合である 2 次元単位球  $\mathbb{B}_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$  上の Drury–Arveson 空間について考える. 一般の場合は複雑になるが, 本質的なアイデアは変わらない. 証明で必要になるのは以下で述べる一般化された Schwarz の補題である. 古典的な Schwarz の補題は,  $\|\phi\|_\infty \leq 1$  と  $\phi(0) = 0$  を満たす正則関数  $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$  に対して,  $|\phi(z)| \leq |z|$  ( $z \in \mathbb{D}$ ) が成り立ち, さらに, ある  $z \in \mathbb{D}$  で等号が成立するならば, 実数  $\theta$  を用いて  $\phi(z) = e^{i\theta}z$  と表現できることを保証する. 重要なのは主張の後半部分の意味での一意性である. Schwarz の補題が 2 点 Pick 補間定理と同値なことを踏まえ, 完全 Pick 性を弱めた 2 点 Pick 性を定義する.

**定義 5.2.**  $H_k$  を集合  $X$  上の関数が成す再生核ヒルベルト空間とする. 異なる 2 点  $x_1, x_2 \in X$  と 2 個の複素数  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  に対して

$$\begin{bmatrix} (1 - |w_1|^2)k(x_1, x_1) & (1 - w_1\overline{w_2})k(x_1, x_2) \\ (1 - w_2\overline{w_1})k(x_2, x_1) & (1 - |w_2|^2)k(x_2, x_2) \end{bmatrix}$$

が半正定値ならば,  $\|\phi\|_{\text{Mult}(H_k)} \leq 1$  かつ  $\phi(x_i) = w_i$  ( $i = 1, 2$ ) を満たす  $\phi \in \text{Mult}(H_k)$  が存在する時,  $H_k$  を 2 点 Pick 空間と呼ぶ.

明らかに完全 Pick 空間は 2 点 Pick 空間である. 2 点 Pick 空間に対して, 一般化された Schwarz の補題が成り立つ.

**補題 5.3** ([11, Proposition 3.7]).  $H_k$  を集合  $X$  上の関数が成す既約な 2 点 Pick 空間とする. さらに,  $H_k$  は点  $x_0 \in X$  で正規化されているとする. この時,

$$\sup\{\text{Re}\phi(x) \mid \|\phi\|_{\text{Mult}(H_k)} \leq 1 \text{ and } \phi(x_0) = 0\} = \left(1 - \frac{1}{k(x, x)}\right)^{1/2}$$

が任意の  $x$  について成り立ち,  $x \neq x_0$  ならばこの値は正になる. さらに,  $x \neq x_0$  ならば, 左辺の上限を達成する  $\phi$  は一意に定まる.

$H_k = H^2$  の時, この結果は古典的な Schwarz の補題に他ならない.

では,  $\mathbb{B}_2$  上の Drury–Arveson 空間  $H_2^2$  の場合について議論しよう.  $H_2^2$  の再生核は

$$k(z, w) = \frac{1}{1 - (z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2)} \quad (z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{B}_2)$$

で与えられる. 明らかに  $H_2^2$  は原点  $(0, 0)$  で正規化されている. 座標関数  $z_1, z_2$  について,  $z_1, z_2 \in \text{Mult}(H_2^2)$  であり, さらに

$$I - M_{z_1}M_{z_1}^* - M_{z_2}M_{z_2}^* \geq 0 \quad (5.1)$$

が成り立つ. これは非自明だが,  $H_2^2$  が  $\mathbb{B}_2$  上の自然な再生核ヒルベルト空間であること,  $(z_1, z_2) \in \mathbb{B}_2$  に対して  $1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \geq 0$  が成り立つことから直感的には納得できると思う. 特に  $I - M_{z_1}M_{z_1}^* \geq 0$  なので,  $\|z_1\|_{\text{Mult}(H_2^2)} \leq 1$  である.  $0 < \alpha < 1$  を満たす正の実数  $\alpha \in \mathbb{R}$  をひとつ固定して,  $(\alpha, 0) \in \mathbb{B}_2$  に対して補題 5.3 を考察する. 補題における記号を用いると,  $x = (\alpha, 0)$ ,  $x_0 = (0, 0)$  の場合を考える. 簡単な計算から,

$$\left(1 - \frac{1}{k(x, x)}\right)^{1/2} = \alpha$$

がわかるので,  $\text{Re}z_1(x) = \alpha = \left(1 - \frac{1}{k(x, x)}\right)^{1/2}$ ,  $z_1(x_0) = 0$  が成り立つ. 補題 5.3 における一意性から,  $\text{Mult}(H_2^2)$  の Gelfand 変換が等長という仮定の下で, 以下の性質を満たす  $z_1 \neq \phi \in \text{Mult}(H_2^2)$  を構成できれば矛盾が得られる:

- (1)  $\|\phi\|_{\text{Mult}(H_2^2)} \leq 1$ ,
- (2)  $\phi(x_0) = 0$ ,
- (3)  $\text{Re}\phi(x) = \left(1 - \frac{1}{k(x, x)}\right)^{1/2} = \alpha$ .

$\phi(z_1, z_2) = z_1 + \frac{1}{2}z_2^2$  とおく. 明らかに  $\phi(x_0) = 0$ ,  $\text{Re}\phi(x) = \alpha$  が成り立つ.  $\text{Mult}(H_2^2)$  の Gelfand 変換が等長と仮定する. この時,

$$\|\phi\|_{\text{Mult}(H_2^2)} = \sup_{\chi \in \Delta(\text{Mult}(H_2^2))} |\chi(M_\phi)|$$

が成り立つ. 式 (5.1) から

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{z_1} & M_{z_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{z_1} & M_{z_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} I - M_{z_1}M_{z_1}^* - M_{z_2}M_{z_2}^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

が成り立つ。よって,  $\left\| \begin{bmatrix} M_{z_1} & M_{z_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \leq 1$  がわかる. [22, Theorem 9.21] と [19, Proposition 3.8] から, 任意の  $\chi \in \Delta(\text{Mult}(H_2^2))$  に対して

$$\left\| \begin{bmatrix} \chi(M_{z_1}) & \chi(M_{z_2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} M_{z_1} & M_{z_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \leq 1$$

が成り立つので,

$$|\chi(M_{z_1})|^2 + |\chi(M_{z_2})|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \chi(M_{z_1}) & \chi(M_{z_2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(M_{z_1}) & \chi(M_{z_2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \right\| \leq 1 \quad (5.2)$$

を得る<sup>9</sup>. したがって, 任意の  $\chi \in \Delta(\text{Mult}(H_2^2))$  に対して,

$$\begin{aligned} |\chi(M_\phi)| &\leq |\chi(M_{z_1})| + \frac{1}{2} |\chi(M_{z_2})|^2 \leq |\chi(M_{z_1})| + \frac{1}{2} (1 - |\chi(M_{z_1})|^2) \quad (\text{by (5.2)}) \\ &\leq 1 \quad (\text{by } |\chi(M_{z_1})| \leq 1). \end{aligned}$$

いま,  $\text{Mult}(H_2^2)$  の Gelfand 変換は等長だと仮定しているので,  $\|M_\phi\| \leq 1$  が成り立つ. よって, 補題 5.3 における一意性に矛盾する. 一般の設定でも同様の議論によって, 定理 2.4 におけるヒルベルト空間  $\mathcal{E}$  が 1 次元でとれることが示せる.

#### REFERENCES

- [1] J. Agler, Some interpolation theorems of Nevanlinna–Pick type, preprint, 1988.
- [2] J. Agler, Nevanlinna–Pick interpolation on Sobolev space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **108**, 341–351, 1990.
- [3] J. Agler and J. E. McCarthy, Complete Nevanlinna–Pick kernels, *J. Funct. Anal.*, **175**(1), 111–124, 2000.
- [4] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [5] J. Agler, J. E. McCarthy and N. Young, *Operator Analysis Hilbert Space Methods in Complex Analysis*, Cambridge University Press, 2020.
- [6] R. Clouâtre and E. Timko, Gelfand transforms and boundary representations of complete Nevanlinna–Pick quotients, *Transactions of the American Mathematical Society*, **374**(3), 2107–2147, 2021.
- [7] K. R. Davidson, *Functional Analysis and Operator Algebras*, CMS/CAIMS Books in Mathematics Series vol. 13, Springer, 2025.
- [8] K. R. Davidson and M. Kennedy, Noncommutative Choquet theory: a survey, preprint, arXiv:2412.09455, 2024.
- [9] M. Hamana, Injective envelopes of operator systems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **15**, 773–785, 1979.
- [10] M. Hartz, Nevanlinna–Pick spaces with hyponormal multiplication operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **143**(7), 2905–2912, 2015.
- [11] M. Hartz, On the isomorphism problem for multiplier algebras of Nevanlinna–Pick spaces, *Canad. J. Math.*, **69**(1), 54–106, 2017.
- [12] M. Hartz, An invitation to the Drury–Arveson space, *Lectures on analytic function spaces and their applications*, *Fields Inst. Monogr.*, vol. 39, Springer, Cham, pp. 347–413, 2023.
- [13] 日合文雄, 柳研二郎, ヒルベルト空間と線型作用素, 数理情報科学シリーズ **10**, 牧野書店, 1995.
- [14] K. Kojin, Complex structure that admits complete Nevanlinna–Pick spaces of Hardy type, *International Mathematics Research Notices*, **2024**(22), 13840–13854, 2024.
- [15] K. Kojin, Isometric Gelfand transforms of complete Nevanlinna–Pick spaces, preprint, <https://arxiv.org/abs/2502.06240>.
- [16] J. E. McCarthy, Pick’s theorem—What’s the big deal?, *The American mathematical monthly*, **110** (1), 36–45, 2003.

<sup>9</sup>このノルム評価は Michael Hartz 氏のアプローチであり, 講演者のアプローチと異なる. 講演者のオリジナルのアプローチは, 適当な作用素代数の同型を作り, 指標が具体的に理解できる設定に問題を落とすというものである. この定理を証明するだけなら Hartz 氏のアプローチを用いた方が早い.

- [17] S. McCullough, Carathéodory interpolation kernels, *Integral Equations Operator Theory*, **15**(1), 43-71, 1992.
- [18] S. McCullough, the local de Branges-Rovnyak construction and complete Nevanlinna-Pick kernels, *Algebraic methods in operator theory*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 15-24, 1994.
- [19] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [20] G. Pick, Über die Beschränkungen analytischer Funktion, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, *Math. Ann.*, **77**, 7-23, 1916.
- [21] P. Quiggin, For which reproducing kernel Hilbert spaces is Pick's theorem true?, *Integral Equations Operator Theory*, **16**(2), 244-266, 1993.
- [22] W. Rudin, *Real and Complex Analysis Third Edition*, McGraw-Hill, Singapore, 1987.
- [23] D. Sarason, Generalized interpolation in  $H^\infty$ , *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127**, 179-203, 1967.

LIBERAL ARTS, JAPAN COAST GUARD ACADEMY, KURE, 737-0832, JAPAN  
 Email address: k-koujin@jcga.ac.jp

# 完全積分可能系の積分変換と多変数特殊函数

安達 駿弥 (宇都宮大学)\*

## 1 はじめに

複素領域における微分方程式は解析学や特殊函数論をはじめとして、数論や微分幾何学、数理物理学や統計学といった幅広い分野に現れる。中でも Gauss の超幾何函数

$$(1.1) \quad {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

が満たす微分方程式 (Gauss の超幾何微分方程式)

$$(1.2) \quad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

のように解の大域挙動が明示的にわかる方程式は応用の幅も広く、様々な数理科学の発展に貢献している。したがって、微分方程式の大域解析の手法を整備して大域挙動が明示的にわかる方程式を増やしていくことは重要な研究テーマの一つである。

講演者はこのテーマに対して **Katz 理論** の視点から研究を進めている。Katz 理論とは N. Katz [14] によって構築された、Fuchs 型方程式に対する理論である。Fuchs 型方程式とは複素射影直線  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の線形常微分方程式であって特異点として確定特異点のみを持つものことで、一般に

$$(1.3) \quad \frac{du}{dx} = \left( \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{x - a_i} \right) u, \quad A_i \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$$

という連立 1 階型 (システム) の形で表される。後述するように、Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) も未知関数ベクトルを適切に設定することでこの形に書き直すことができる。Katz はこの形の方程式に対して Euler 変換 (ベキ関数による畳み込み)

$$f(x) \mapsto \int_{\Delta} f(t)(x-t)^\lambda dt$$

に由来する middle convolution という変換を導入し、Fuchs 型方程式の研究に新たな展開をもたらした。この変換は Fuchs 型方程式を Fuchs 型方程式に移す可逆変換で、一般に方程式の階数を変化させる。さらに解の大域挙動を記述する接続係数、モノドロミーといった量が変換によってどう変化するかが明示的に追跡できる ([5], [17]) ことから、高階の微分方程式の大域解析をより階数の低い方程式の大域解析に帰着させることが可能となる。これにより大域解析可能な Fuchs 型方程式の範囲は大きく広がった。加えて middle convolution に関連して Katz が導入した諸概念は Fuchs 型方程式に対する新たな視点を与え、Painlevé 方程式、共形場理論をはじめとする様々な分野の研究に大きなインパクトを与えた (cf. [12], [3])。同時に Katz 理論自体も Fuchs 型とは限らない一般の線形常微分方程式へ拡張されている ([15, 18, 19])。

\* 〒321-8505 栃木県宇都宮市峰町 350 宇都宮大学 共同教育学部  
e-mail: sadachi@a.utsunomiya-u.ac.jp  
第 64 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集原稿

以上に述べたことは常微分方程式に対する結果であるが、原岡 [6] は Katz 理論の枠組が偏微分方程式の解析にも有用であることを見抜き、完全積分可能系と呼ばれる線形偏微分方程式系に対して middle convolution を多変数化することで高次元 Katz 理論の基盤を与えた。この結果は多変数超幾何微分方程式をはじめとする重要な偏微分方程式系の解析に有用だけでなく、これまで知られていなかった大域解析可能な完全積分可能系のクラスの新たな発見も可能にするものであった ([16])。高次元 Katz 理論の視点に基づいた完全積分可能系およびその解として特徴付けられる特殊函数の研究は現在活発に進められている。こうした背景の下で、講演者は超平面配置に沿って特異性を持つ完全積分可能系に対して middle Laplace transform と呼ばれる Katz 理論的な積分変換を導入し、その基本的な性質を証明した ([1])。これは不確定特異性を持つ方程式も自然に扱える枠組みであり、大域解析に対しても有効に働くことを期待している。

本稿では、この研究の動機となった Katz 理論の概略を本講演に関係する部分に絞って (おそらく講演中には触れられないであろう内容も含めて) 紹介する。続いて高次元 Katz 理論や論文 [1] の内容の一部を、主に多変数超幾何函数に関連する具体的な方程式を通して概説する。

## 2 (一変数) Katz 理論

まずは Fuchs 型方程式に対する Katz 理論の概略を具体例を交えながら述べる (詳細については原岡 [7] やその英訳版 [8], 廣恵 [11] をご参照ください)。§1 で述べたように Fuchs 型方程式とは複素射影直線  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  上の線形常微分方程式であって特異点として確定特異点のみを持つものことで、一般に

$$(2.1) \quad \frac{du}{dx} = A(x)u, \quad A(x) = \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{x - a_i}, \quad A_i \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$$

という連立 1 階型 (システム) の形で表される。この方程式は  $\{a_0 = \infty, a_1, \dots, a_q\} \subset \mathbb{P}^1$  に特異点を持つ。右辺に現れる行列  $A_i$  は  $x = a_i$  における解の局所的な情報を持っている行列で、**留数行列**と呼ばれる。また  $t = 1/x$  として方程式 (2.1) を書き換えると  $t = 0$  ( $\Leftrightarrow x = \infty$ ) における留数行列が

$$A_0 := -(A_1 + A_2 + \dots + A_q)$$

になることがわかる。簡単のため本稿を通して以下の仮定をおく:

各  $A_i$  ( $0 \leq i \leq q$ ) の固有値は全て 0 以外の整数差を持たない。

この仮定を**非共鳴的** (non-resonance) と呼ぶこともある。

**例 2.1.** Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) は  $\{0, 1, \infty\}$  に確定特異点を持つ Fuchs 型方程式である。これを (2.1) の形に表すためには次のようにすれば良い: 未知関数ベクトルを

$$u = \begin{pmatrix} y \\ \frac{xy'}{\beta} \end{pmatrix}$$

とする。するとこれは

$$(2.2) \quad \frac{du}{dx} = \left( \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} \right) u$$

を満たす。ここで

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 - \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & \gamma - \alpha - \beta - 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = -(A_1 + A_2) \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

である。

ここで確定特異点という概念について簡単に説明しておく。これは非常に大雑把に言えば、その点の周りで解が分岐する、つまり複素ベキ関数  $(x-a)^\rho$  ( $\rho \in \mathbb{C}$ ) に近い振る舞いをするような特異点のことである。実際 (2.1) は  $x = a_i$  の周りで

$$(2.3) \quad U(x) = G(x)(x-a)^{A_i}, \quad G(x) = I + O(x-a_i)$$

という形の基本解行列 (解空間の基底を並べてできる行列) を持つ。ここで  $G(x)$  は  $x = a_i$  の近傍で収束する行列係数のベキ級数であり、 $(x-a)^{A_i}$  は行列の指数関数を用いて

$$(2.4) \quad (x-a)^{A_i} = e^{A_i \log(x-a_i)}$$

で定義される多価関数である (つまり関数として値を確定させるためには分枝を固定する必要がある)。この表示 (2.3) を使うと方程式 (2.1) の  $x = a_i$  における局所挙動、すなわち局所モノドロミーが次のようにして求められる。  $\Gamma$  を  $x = a_i$  の周りを正の向きに一周する閉曲線として、 $\Gamma$  に沿って基本解行列  $U(x)$  を解析接続することを考える。するとこの解析接続の結果 (2.4) における  $\log(x-a_i)$  が  $\log(x-a_i) + 2\pi i$  となることから  $U(x)$  は

$$U(x) \mapsto U(x)e^{2\pi i A_i}$$

という変化を受ける。つまり方程式 (2.1) の基本解行列 (2.3) の特異性は

$$e^{2\pi i A_i}$$

という定数行列によって記述されるのである。基本解行列 (2.3) の取り方には右から可逆行列をかける任意性があり、それによる基本解行列の取り替えは  $e^{2\pi i A_i}$  に対する相似変換を引き起こすことに注意して、次のように局所モノドロミーを定義する。

**定義 2.2.**  $e^{2\pi i A_i}$  の  $GL(N, \mathbb{C})$  の作用による共役類  $[e^{2\pi i A_i}]$  を、方程式 (2.1) の  $x = a_i$  における局所モノドロミーという。

このように、一つの確定特異点における解の構造や多価性は比較的よくわかり、それらは本質的に留数行列  $A_i$  によって記述される。一方、複数の特異点をまたぐような解析、例えばある特異点の周りで基本解行列を別の特異点の近くに解析接続したときの振る舞い (接続問題) や、別の特異点を一周して戻ってくるように解析接続したときの振る舞い (モノドロミー表現) を調べる問題は**大域解析**と呼ばれ、限られたクラス (例えば rigid, これについては後述) に属する方程式を除いて我々は一般的な解析方法を手に入っていない。

## 2.1 Fuchs 型方程式に対する middle convolution

Katz は  $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$  上の局所系 (Fuchs 型方程式のモノドロミー表現と等価な対象) に対して addition と middle convolution という 2 つの操作を定義した ([14])。その定義は偏屈層を用いたもので、(少なくとも講演者にとっては) 複雑なものであったが、その後 Dettweiler–Reiter が Katz の定義を Fuchs 型方程式のモノドロミー表現に対する線形代数的操作として再定式化し、さらにその操作とマッチするように Fuchs 型方程式に対する addition と middle convolution を定義した ([4], [5])。ここでは Dettweiler–Reiter による Fuchs 型方程式に対する addition と middle convolution の定義を紹介する。

**定義 2.3.**  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{C}^q$  として、Fuchs 型方程式 (2.1) に対して Fuchs 型方程式

$$\frac{dv}{dx} = B(x)v, \quad B(x) = \sum_{i=1}^q \frac{A_i + \alpha_i}{x - a_i}$$

を対応させる変換を  $\alpha$  による **addition** といい、 $add_\alpha$  で表す。ここで  $A_i + \alpha_i$  は  $A_i + \alpha_i I_N$  を意味する (以下この記法を断りなく使う)。方程式と係数関数を同一視して  $add_\alpha(A(x)) = B(x)$  と書くこともある。

middle convolution の定義には少し準備が要る. まず  $\lambda \in \mathbb{C}$  をパラメータとして, 方程式 (2.1) に対して

$$(2.5) \quad G_i = \begin{pmatrix} O_N & \cdots & \cdots & \cdots & O_N \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ A_1 & \cdots & A_i + \lambda & \cdots & A_q \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ O_N & \cdots & \cdots & \cdots & O_N \end{pmatrix} (i$$

という  $qN \times qN$  行列を考える ( $1 \leq i \leq q$ ). すると簡単な計算で

$$\mathcal{K}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}^N)^q \mid v_i \in \ker A_i (1 \leq i \leq q) \right\}, \quad \mathcal{K}_\infty := \ker(G_1 + G_2 + \cdots + G_q)$$

はいずれも  $(G_1, G_2, \dots, G_q)$  不変であることが確かめられる. したがって  $(G_1, G_2, \dots, G_q)$  は商空間  $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$  への作用を引き起こす. その作用を与える行列の組を  $(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_q)$  として以下のように定義する.

**定義 2.4.**  $\lambda \in \mathbb{C}$  とする. Fuchs 型方程式 (2.1) に対して Fuchs 型方程式

$$(2.6) \quad \frac{dv}{dx} = B(x)v, \quad B(x) = \sum_{i=1}^q \frac{\bar{G}_i}{x - a_i}$$

に対応させる操作を  $\lambda$  による **middle convolution** といい,  $mc_\lambda$  で表す. これも addition 同様, 方程式と係数関数を同一視して  $mc_\lambda(A(x)) = B(x)$  と表すこともある.

この定義からすぐにわかることとして,

- addition, middle convolution は特異点の位置を変えない.
- addition は方程式の階数 (係数行列のサイズ) を変えない ( $N \rightarrow N$ ).
- middle convolution は方程式の階数を一般に変える ( $N \rightarrow qN - \dim(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$ ).
- middle convolution の表示は商空間  $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$  の基底の取り方に依存する.

といったことが挙げられる.

**例 2.5.** Gauss の超幾何微分方程式 (2.2) に対して middle convolution を施してみる. 簡単のために

$$(2.7) \quad \alpha, \beta, \gamma, \gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta, \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$$

を仮定する.  $\lambda \in \mathbb{C}$  をパラメータとすると

$$G_1 = \begin{pmatrix} A_1 + \lambda & A_2 \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma + \lambda & -\alpha & \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} O & O \\ A_1 & A_2 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \gamma & -\alpha & \gamma - \alpha - \beta - 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

となる. 次に  $\mathcal{K}_0$  を求める.

$$\ker A_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \ker A_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

より

$$\mathcal{K}_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる.  $\mathcal{K}_\infty$  は  $\lambda$  の取り方に依存するが

$$\mathcal{K}_\infty = \begin{cases} \{0\} & (\lambda \neq 0, \alpha, \beta) \\ \mathcal{K}_0 & (\lambda = 0) \\ \left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \right\rangle & (\lambda = \alpha) \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle & (\lambda = \beta) \end{cases}$$

となる. ここでは  $\lambda = \beta$  としてみる. すると

$$(2.8) \quad \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma - \alpha - \beta - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる. 商空間  $\mathbb{C}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$  に対する  $G_1, G_2$  の作用  $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  を取り出すためには次のようにすればよい. まず (2.8) にベクトルを補って  $\mathbb{C}^4$  の基底を作り, それらを並べた行列を作る. 例えば  ${}^t(0, 0, 0, 1)$  を補って

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha - \beta + \gamma - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

としよう. この  $P$  を用いて  $G_1, G_2$  を相似変換すると

$$P^{-1}G_1P = \left( \begin{array}{ccc|c} \beta & 0 & 0 & -\alpha - \beta + \gamma - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha - \beta + \gamma - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - \gamma + 1 \end{array} \right), \quad P^{-1}G_2P = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha + \gamma - 1 \end{array} \right),$$

というように同時ブロック三角化される (これは  $\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty$  が  $(G_1, G_2)$  不変であることによる). この右下部分に出てくるブロックがそれぞれ  $\bar{G}_1, \bar{G}_2$  である. つまり  $\bar{G}_1 = \beta - \gamma + 1, \bar{G}_2 = -\alpha + \gamma - 1$ . 従って  $\beta$  をパラメータとする middle convolution  $mc_\beta$  の結果として階数 1 の方程式

$$\frac{dv}{dx} = \left( \frac{\beta - \gamma + 1}{x} + \frac{-\alpha + \gamma - 1}{x - 1} \right) v$$

が得られた. middle convolution によって方程式の階数が変化することがこの例からも見て取れる.

次に addition, middle convolution の解析的な意味を紹介する. まず addition については, (2.1) の解に対してゲージ変換

$$v(x) = u(x) \prod_{i=1}^q (x - a_i)^{\alpha_i}$$

を施すことに対応する.

続いて middle convolution について考える. これは解析的には次の 3 ステップで実現される.

**Step 1 (方程式の拡大).** 方程式 (2.1) の解  $u(x)$  を用いて

$$U(x) = {}^t \left( \frac{u(x)}{x-a_1}, \frac{u(x)}{x-a_2}, \dots, \frac{u(x)}{x-a_q} \right)$$

という  $qN$  ベクトルを考えると, これは以下の方程式を満たすことが確かめられる.

$$(2.9) \quad (x-T) \frac{dU}{dx} = (A-I)U$$

ただし

$$T = \begin{pmatrix} a_1 I_N & & & \\ & a_2 I_N & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_q I_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_q \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_q \end{pmatrix}$$

である. この方程式 (2.9) は多項式係数の方程式になっていることに注意しておく. このタイプの方程式は**大久保型**と呼ばれ, 後に middle Laplace transform を考える際にも重要な役割を果たす.

**Step 2 (Euler 変換).** 続いて  $U(x)$  に対して  $\lambda$  をパラメータとする Euler 変換

$$V(x) = \int_{\Delta} U(t)(x-t)^\lambda dt$$

を考える (積分路  $\Delta$  は状況に応じて適切に設定する. 例えば  $\{a_1, \dots, a_q, \infty\}$  のうち 2 点を結ぶように取ることが多い). するとこれは作用素の変換

$$(2.10) \quad \begin{cases} x \frac{d}{dx} \mapsto x \frac{d}{dx} - \lambda - 1, \\ \frac{d}{dx} \mapsto \frac{d}{dx} \end{cases}$$

を引き起こす. このことから  $V(x)$  は

$$(x-T) \frac{dV}{dx} = (A+\lambda)V$$

を満たすことがわかる (標語: Euler 変換は大久保型方程式をスカラーシフトする). この方程式の両辺の左側から  $(x-T)^{-1}$  をかけると

$$(2.11) \quad \frac{dV}{dx} = \left( \sum_{i=1}^q \frac{G_i}{x-a_i} \right) V$$

となる. ここで留数行列  $G_i$  は (2.5) で与えられる  $qN \times qN$  行列.

**Step 3 (商空間  $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$  への射影).** 方程式 (2.11) を商空間  $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty)$  へ射影することで既約成分を取り出すことを考える. まず  $\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty$  の基底を  $u_1, u_2, \dots, u_m$  としてそこに  $v_{m+1}, \dots, v_{qN}$  を補って  $\mathbb{C}^{qN}$  の基底を作る. これらを並べて

$$P = (u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_{qN})$$

とする. すると  $\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_\infty$  が  $(G_1, G_2, \dots, G_q)$  不変なことから

$$G_i P = P \left( \begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & \bar{G}_i \end{array} \right)$$

となる. ここで右辺の行列の分割は  $(m, qN - m) \times (m, qN - m)$  である. この  $P$  を用いて

$$V = PV_0$$

とすると  $V_0$  は

$$\frac{dV_0}{dx} = \left( \sum_{i=1}^q \frac{P^{-1}G_i P}{x - a_i} \right) V_0$$

を満たす. ここで

$$V_0 = \begin{pmatrix} * \\ v \end{pmatrix}$$

とする. ここでベクトルの分割は  $(m, qN - m)$  である. もしくは同じことだが

$$v = (O_{qN-m, m}, I_{qN-m}) V_0$$

とすれば  $v$  は

$$\frac{dv}{dx} = \left( \sum_{i=1}^q \frac{\tilde{G}_i}{x - a_i} \right) v$$

を満たす. これは方程式 (2.1) に  $mc_\lambda$  を施して得られる方程式 (2.6) に他ならない. したがって (2.6) の解  $v(x)$  が (2.1) の解  $u(x)$  を用いて

$$v(x) = Q \int_{\Delta} U(t)(x-t)^\lambda dt$$

と積分表示できることがわかった. ここで  $Q = (O_{qN-m, m}, I_{qN-m})P^{-1}$ . つまり middle convolution は方程式 (2.1) の解を拡大し, そこに Euler 変換と線形変換 (射影) を施すことに対応しているのである.

次に middle convolution の性質について述べる. そのためにまずは必要な記号・概念を準備しよう.

**定義 2.6.** Fuchs 型方程式 (2.1) が既約であるとは  $(A_1, A_2, \dots, A_q)$ -不変部分空間が自明なもの, つまり  $\{0\}$  と  $\mathbb{C}^N$  しかない場合をいう.

**定義 2.7.** 2つの Fuchs 型方程式

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= A(x)u, & A(x) &= \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{x - a_i}, & A_i &\in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) \\ \frac{dv}{dx} &= B(x)v, & B(x) &= \sum_{i=1}^q \frac{B_i}{x - a_i}, & B_i &\in \text{Mat}(N, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

に対して, ある  $P \in \text{GL}(N, \mathbb{C})$  が存在して

$$(B_1, B_2, \dots, B_q) = (P^{-1}A_1P, P^{-1}A_2P, \dots, P^{-1}A_qP)$$

が成り立つとき, 2つの方程式は同値であるといい,  $A(x) \sim B(x)$  と表す. これは2つの方程式が定数行列によるゲージ変換

$$(2.12) \quad v = Pu, \quad P \in \text{GL}(N, \mathbb{C})$$

によって移り合うことと対応している.

既約な Fuchs 型方程式と同値な方程式もまた既約であることに注意しておく. 以上の準備のもとで, middle convolution の性質は次のように述べられる.

**定理 2.8** (Katz [14], Dettweiler–Reiter [4]). Fuchs 型方程式 (2.1) が既約であるとする. このとき

- 任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して  $mc_\lambda(A(x))$  は既約
- $mc_0(A(x)) \sim A(x)$
- 任意の  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  に対して  $mc_\lambda \circ mc_\mu(A(x)) \sim mc_{\lambda+\mu}(A(x))$

が成り立つ.

## 2.2 Fuchs 型方程式の rigidity

Katz 理論のもう一つの中心的概念である rigidity (変形可能性) を紹介する<sup>\*1</sup>. ここでいう変形可能性とは, 各特異点における局所挙動を固定したときに方程式をどれだけ変形できるか, ということを目指している.

Fuchs 型方程式 (2.1) の特異点  $x = a_i$  における局所挙動は留数行列  $A_i$  で記述されることはすでに説明した. 局所モノドロミーのときと同様, 基本解行列の任意性を考えると,  $x = a_i$  における局所挙動を表すデータとしては留数行列  $A_i$  そのものではなく  $GL(N, \mathbb{C})$  による共役類  $\mathcal{O}_i := [A_i]$  を考えるのが自然である. したがって特異点の位置と各特異点における局所挙動が固定された Fuchs 型方程式の moduli 空間として

$$\mathcal{M} = \left\{ (A_0, A_1, \dots, A_q) \in \mathcal{O}_0 \times \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_q \mid \sum_{i=0}^q A_i = O \right\} / \sim$$

というものが考えられる. ここで  $\sim$  は定義 2.7 から導かれる, 留数行列の組に関する同値関係

$$(A_0, A_1, \dots, A_q) \sim (P^{-1}A_0P, P^{-1}A_1P, \dots, P^{-1}A_qP), \quad P \in GL(N, \mathbb{C})$$

である.

**定義 2.9.** Fuchs 型方程式 (2.1) から定まる moduli 空間  $\mathcal{M}$  が 1 点のみからなるとき, 微分方程式 (2.1) は rigid であるという.

つまり Fuchs 型方程式 (2.1) が rigid であるということは, 各特異点における局所挙動のみから方程式全体がゲージ変換を除いて一意に決まってしまうことである. rigid ではない場合は局所挙動とは独立なパラメータ (すなわち  $\mathcal{M}$  の座標を与えるパラメータ) が方程式 (2.1) に存在する. そのパラメータのことを **アクセサリー・パラメータ** という.

**例 2.10.** 仮定 (2.7) の下で Gauss の超幾何微分方程式 (2.2) は rigid である.

このとき Katz の主定理は次で与えられる.

**定理 2.11** (Katz [14]). Fuchs 型方程式 (2.1) が既約かつ rigid ならば, addition と middle convolution を有限回合成することで階数 1 の方程式  $u' = 0$  へ変換できる.

上で説明した通り addition と middle convolution はそれぞれ解に対しては冪函数によるゲージ変換と Euler 変換を施すことに対応している. このことから既約 rigid な Fuchs 型方程式には冪函数の積を被積分関数とする多重積分で表示できる解が存在することが帰結される (原岡-浜口 [9]). そのような積分表示は Euler(-Selberg 型) 積分表示と呼ばれ, 大域解析に非常に有用であることに注意しておく.

<sup>\*1</sup> rigidity について講演中に詳しく触れる余裕はないかもしれませんが, Katz 理論における重要な概念なのでここで (大まかに) 紹介させていただきます.

### 3 高次元 Katz 理論

原岡 [6] は超平面配置に沿って対数的特異性 (確定特異性) を持つ  $n$  変数の完全積分可能系 (線形 Pfaff 系)

$$(3.1) \quad du = \Omega u, \quad \Omega = \sum_{H \in \mathcal{A}} A_H d \log f_H, \quad A_H \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$$

に対して middle convolution を拡張し, 高次元 Katz 理論の基盤を与えた. ここで  $\mathcal{A}$  は  $\mathbb{C}^n$  における超平面配置,  $f_H$  は  $H \in \mathcal{A}$  の定義多項式である. これは Fuchs 型方程式 (2.1) の多変数化にあたるものである. 一般論については原岡 [6], 講演者 [1] による原論文を参照していただくことにして, 本稿では多変数超幾何関数に関わる具体例を用いて Katz 理論の高次元化や middle Laplace transform の定式化へのアイデアを説明することにする\*2.

$\mathbb{C}^2$  の座標を  $(x, y)$  として,  $\mathbb{C}^2$  内の超平面配置  $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$  を

$$H_1 = \{x = 0\}, \quad H_2 = \{x = 1\}, \quad H_3 = \{x = y\}, \quad H_4 = \{y = 0\}, \quad H_5 = \{y = 1\}$$

で定義する. すると  $\mathcal{A}$  に沿って対数的特異性を持つ線形 Pfaff 系は

$$(3.2) \quad du = \Omega u, \quad \Omega = A_{H_1} \frac{dx}{x} + A_{H_2} \frac{dx}{x-1} + A_{H_3} \frac{d(x-y)}{x-y} + A_{H_4} \frac{dy}{y} + A_{H_5} \frac{dy}{y-1}$$

という形で書ける. またこの方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{A_{H_1}}{x} + \frac{A_{H_2}}{x-1} + \frac{A_{H_3}}{x-y} \right) u \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{A_{H_3}}{y-x} + \frac{A_{H_4}}{y} + \frac{A_{H_5}}{y-1} \right) u \end{cases}$$

と表すこともでき, Fuchs 型方程式 (2.1) の自然な多変数化になっていることもわかる. しかし Fuchs 型方程式の場合と違って, この線形 Pfaff 系 (3.2) が解を持つためには行列  $A_{H_1}, \dots, A_{H_5}$  が**完全積分可能条件**

$$(3.3) \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

を満たす必要がある (これは外微分の性質  $d^2 u = 0$  から導かれる). 逆に  $A_{H_1}, \dots, A_{H_5}$  が条件 (3.3) を満たすときは特異点集合に属さない任意の点において初期値問題の解の一意存在定理が成り立つ (cf. 原岡 [8]). 実際に (3.2) の完全積分可能条件 (3.3) を行列  $A_{H_1}, \dots, A_{H_5}$  に対する条件として書き下してみると

$$(3.4) \quad \begin{aligned} [A_{H_1}, A_{H_5}] &= [A_{H_2}, A_{H_4}] = O, \\ [A_{H_1}, A_{H_3} + A_{H_4}] &= [A_{H_3}, A_{H_4} + A_{H_1}] = [A_{H_4}, A_{H_1} + A_{H_3}] = O, \\ [A_{H_2}, A_{H_3} + A_{H_5}] &= [A_{H_3}, A_{H_5} + A_{H_2}] = [A_{H_5}, A_{H_2} + A_{H_3}] = O \end{aligned}$$

という可換条件となる. ここで  $[A, B] = AB - BA$  である.

**注意 3.1.** 一般に線形 Pfaff 系 (3.1) の完全積分可能条件 (3.3) は行列  $A_H$  に対する可換条件として書き下すことができる (cf. 原岡 [6]).

つまり完全積分可能系においては, まず意味のある具体例を与えることからして難しい. この事情が完全積分可能系の研究を難しく, しかしそれ以上に面白くしている.

\*2 特に [1] は記号がやや複雑なので, 本稿の記述が論文を読む際の助けになれば幸いである.

注意 3.2. Gauss の超幾何関数

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n, \quad (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

を 2 変数に拡張した Appell の超幾何関数  $F_1, F_2, F_3, F_4$  というものがある:

$$\begin{aligned} F_1 \left( \begin{matrix} \alpha; \beta_1, \beta_2 \\ \gamma \end{matrix}; x, y \right) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \\ F_2 \left( \begin{matrix} \alpha; \beta_1, \beta_2 \\ \gamma_1, \gamma_2 \end{matrix}; x, y \right) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n m! n!} x^m y^n, \\ F_3 \left( \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2 \\ \gamma \end{matrix}; x, y \right) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_n (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \\ F_4 \left( \begin{matrix} \alpha; \beta \\ \gamma_1, \gamma_2 \end{matrix}; x, y \right) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n}}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n m! n!} x^m y^n. \end{aligned}$$

これらも例 2.1 のように適切に未知関数ベクトルを作ることで, (3.2) の形の線形 Pfaff 系を満たすことが知られている\*3. ただし  $F_1$  の場合は  $N = 3$  で,  $F_2, F_3, F_4$  の場合は  $N = 4$  である.

### 3.1 確定特異点型線形 Pfaff 系に対する middle convolution

原岡 [6] は middle convolution の解析的実現 (§2.1 で説明した 3 ステップ) に着目して middle convolution を多変数化した. その基本的なアイデアはある変数に関する方程式に対して Katz の middle convolution を施したとき, 他の変数に関する方程式がどう変わるかを追跡するというものである. ここでは方程式 (3.2) を用いてこのアイデアをどう実現するかを説明し,  $x$  方向の middle convolution を定義する. ただしこの後の middle Laplace transform の説明のしやすさも考えて, 原論文 [6] とは少し違う方法で説明することにする (どう違うかは後の注意 3.4 で述べる).

Step 1. 方程式 (3.2) の解  $u(x, y)$  を用いて

$$U(x, y) = {}^t \left( \frac{u(x, y)}{x}, \frac{u(x, y)}{x-1}, \frac{u(x, y)}{x-y} \right) =: (U_1, U_2, U_3)$$

とすると, §2.1 で説明したようにこれは  $x$  方向に関して大久保型方程式

$$(x-T) \frac{\partial U}{\partial x} = (A-I)U$$

を満たす. ただし

$$(3.5) \quad T = \begin{pmatrix} O_N & & \\ & I_N & \\ & & yI_N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{H_1} & A_{H_2} & A_{H_3} \\ A_{H_1} & A_{H_2} & A_{H_3} \\ A_{H_1} & A_{H_2} & A_{H_3} \end{pmatrix}.$$

である. 続いて  $U(x, y)$  が  $y$  方向に満たす方程式を求めるために各成分の偏微分  $\partial U_1 / \partial y, \partial U_2 / \partial y, \partial U_3 / \partial y$  を計算する. まず

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u(x, y)}{x} \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{A_{H_3}}{y-x} + \frac{A_{H_4}}{y} + \frac{A_{H_5}}{y-1} \right) u \end{aligned}$$

\*3  $F_4$  は変数の二次変換も必要 (加藤 [13]).

となるが、右辺の最初の項に対して部分分数分解

$$\frac{1}{x} \frac{1}{y-x} = \frac{1}{y} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-y} \right)$$

を用いて整理すると

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial y} &= \frac{A_{H_3}}{y} \left( \frac{u(x,y)}{x} - \frac{u(x,y)}{x-y} \right) + \frac{A_{H_4}}{y} \frac{u(x,y)}{x} + \frac{A_{H_5}}{y-1} \frac{u(x,y)}{x} \\ &= \frac{1}{y} \{ (A_{H_3} + A_{H_4})U_1 - A_{H_3}U_3 \} + \frac{A_{H_5}}{y-1} U_1 \end{aligned}$$

を得る. 同様の計算で

$$(3.7) \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{A_{H_4}}{y} U_2 + \frac{1}{y-1} \{ (A_{H_3} + A_{H_5})U_2 - A_{H_3}U_3 \}$$

も得られる. 最後に  $\partial U_3 / \partial y$  については

$$\frac{\partial U_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u(x,y)}{x-y} \right) = \frac{1}{x-y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u(x,y)}{(x-y)^2}$$

と

$$\frac{\partial U_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u(x,y)}{x-y} \right) = \frac{1}{x-y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u(x,y)}{(x-y)^2}$$

を組み合わせて

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial y} &= \frac{1}{x-y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial U_3}{\partial x} \\ &= \frac{1}{x-y} \left( \frac{A_{H_1}}{x} + \frac{A_{H_2}}{x-1} + \frac{A_{H_4}}{y} + \frac{A_{H_5}}{y-1} \right) u - \frac{\partial U_3}{\partial x} \\ &= \frac{A_{H_1}}{y} \left( -\frac{u(x,y)}{x} + \frac{u(x,y)}{x-y} \right) + \frac{A_{H_2}}{y-1} \left( -\frac{u(x,y)}{x-1} + \frac{u(x,y)}{x-y} \right) + \frac{A_{H_4}}{y} U_3 + \frac{A_{H_5}}{y-1} U_3 - \frac{\partial U_3}{\partial x} \\ &= \frac{A_{H_1}}{y} (-U_1 + U_3) + \frac{A_{H_2}}{y-1} (-U_2 + U_3) + \frac{A_{H_4}}{y} U_3 + \frac{A_{H_5}}{y-1} U_3 - \frac{\partial U_3}{\partial x} \end{aligned}$$

より

$$\frac{\partial U_3}{\partial y} = \frac{1}{y} \{ -A_{H_1}U_1 + (A_{H_1} + A_{H_4})U_3 \} + \frac{1}{y-1} \{ -A_{H_2}U_2 + (A_{H_2} + A_{H_5})U_3 \} - \frac{\partial U_3}{\partial x}$$

となる. これと (3.6), (3.7) を合わせて次が示せた.

**命題 3.3.**  $3N$  ベクトル  $U(x, y)$  は次の方程式を満たす.

$$(3.8) \quad \begin{cases} (x-T) \frac{\partial U}{\partial x} = (A-I)U \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \left( \frac{G_{H_4}}{y} + \frac{G_{H_5}}{y-1} \right) U - G_{xy} \frac{\partial U}{\partial x} \end{cases}$$

ここで

$$(3.9) \quad G_{H_4} = \begin{pmatrix} A_{H_3} + A_{H_4} & O & -A_{H_3} \\ O & A_{H_4} & O \\ -A_{H_1} & O & A_{H_1} + A_{H_4} \end{pmatrix}, \quad G_{H_5} = \begin{pmatrix} A_{H_5} & O & O \\ O & A_{H_3} + A_{H_5} & -A_{H_3} \\ O & -A_{H_2} & A_{H_2} + A_{H_5} \end{pmatrix}$$

と

$$G_{xy} = \begin{pmatrix} O & & \\ & O & \\ & & I \end{pmatrix}$$

である.

**Step 2.** 方程式 (3.8) に対して,  $\lambda \in \mathbb{C}$  をパラメータとする  $x$  方向の Euler 変換

$$(3.10) \quad V(x, y) = \int_{\Delta} U(t, y)(x-t)^\lambda dt$$

に対応する作用素の変換 (2.10) を施す. すると  $x$  方向の方程式は常微分方程式の場合同様スカラーシフトして

$$(x-T) \frac{\partial V}{\partial x} = (A + \lambda)V \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \left( \frac{G_{H_1}}{x} + \frac{G_{H_2}}{x-1} + \frac{G_{H_3}}{x-y} \right) V$$

となる. ここで

$$G_{H_1} = \begin{pmatrix} A_{H_1} + \lambda & A_{H_2} & A_{H_3} \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}, G_{H_2} = \begin{pmatrix} O & O & O \\ A_{H_1} & A_{H_2} + \lambda & A_{H_3} \\ O & O & O \end{pmatrix}, G_{H_3} = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ A_{H_1} & A_{H_2} & A_{H_3} + \lambda \end{pmatrix}$$

である.  $y$  方向の方程式については

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \left( \frac{G_{H_4}}{y} + \frac{G_{H_5}}{y-1} \right) V - G_{xy} \frac{\partial V}{\partial x} \\ &= \left( \frac{G_{H_4}}{y} + \frac{G_{H_5}}{y-1} \right) V - G_{xy} \left( \frac{G_{H_1}}{x} + \frac{G_{H_2}}{x-1} + \frac{G_{H_3}}{x-y} \right) V \\ &= \left( \frac{G_{H_3}}{y-x} + \frac{G_{H_4}}{y} + \frac{G_{H_5}}{y-1} \right) V \end{aligned}$$

となるので, 結局  $V(x, y)$  の満たす  $3N$  階線形 Pfaff 系

$$(3.11) \quad dV = C_\lambda^x(\Omega)V, \quad C_\lambda^x(\Omega) = G_{H_1} \frac{dx}{x} + G_{H_2} \frac{dx}{x-1} + G_{H_3} \frac{d(x-y)}{x-y} + G_{H_4} \frac{dy}{y} + G_{H_5} \frac{dy}{y-1}$$

を得る.

**注意 3.4.** 原岡 [6] は命題 3.8 のように  $U(x, y)$  の満たす  $y$  方向の方程式は求めておらず, 積分 (3.10) の偏微分を直接計算することで (3.11) を導出している. やっていることは本質的には同じだが, 後で middle Laplace transform を考える際には  $U(x, y)$  の  $y$  方向の方程式を使う方が便利かつ変換の構造が見やすいので本稿では命題 3.8 を経由する方法をとった (論文 [1] を書く中でこの定式化の方法に気づけたのが, 自分の中の一つのブレークスルーであった).

**Step 3.** 常微分方程式の場合同様

$$(3.12) \quad \mathcal{K}_0^x := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}^N)^3 \mid v_i \in \ker A_{H_i} (1 \leq i \leq 3) \right\}, \quad \mathcal{K}_\infty^x := \ker(G_{H_1} + G_{H_2} + G_{H_3})$$

と定義する. するとこれらの部分空間は一変数のときに説明したように  $(G_{H_1}, G_{H_2}, G_{H_3})$  の作用で不変である. さらに完全積分可能条件 (3.4) の下で  $(G_{H_4}, G_{H_5})$  の作用でも不変であることがわかる. 従って  $(G_{H_1}, G_{H_2}, G_{H_3}, G_{H_4}, G_{H_5})$  は商空間  $\mathbb{C}^{qN}/(\mathcal{K}_0^x + \mathcal{K}_\infty^x)$  への作用を引き起こす. その作用を表す行列を  $(\bar{G}_{H_1}, \bar{G}_{H_2}, \bar{G}_{H_3}, \bar{G}_{H_4}, \bar{G}_{H_5})$  と表して次のように定義する.

**定義 3.5.**  $\lambda \in \mathbb{C}$  とする. 線形 Pfaff 系 (3.2) に対して線形 Pfaff 系

$$(3.13) \quad dv = mc_\lambda^x(\Omega)v, \quad mc_\lambda^x(\Omega) = \bar{G}_{H_1} \frac{dx}{x} + \bar{G}_{H_2} \frac{dx}{x-1} + \bar{G}_{H_3} \frac{d(x-y)}{x-y} + \bar{G}_{H_4} \frac{dy}{y} + \bar{G}_{H_5} \frac{dy}{y-1}$$

を対応させる操作を  $\lambda$  による  $x$  方向の **middle convolution** といい,  $mc_\lambda^x$  で表す.

ここまでに紹介してきた変換同様, 方程式 (3.13) の解は

$$v(x, y) = Q \int_{\Delta} U(t, y)(x-t)^{\lambda} dt$$

というように (3.2) の解  $u(x, y)$  を拡大して作ったベクトル  $U(x, y)$  を用いて表示できることにも注意しておく. ここで  $Q$  は商空間  $\mathbb{C}^N / (\mathcal{K}_0^x + \mathcal{K}_{\infty}^x)$  への射影に対応する線形変換である.

**注意 3.6.** 完全積分可能な線形 Pfaff 系を具体的に与えることは難しい問題であると先に述べたが, この middle convolution は具体的に線形 Pfaff 系を既存の Pfaff 系から構成する方法を与えている. 例えば  $du = 0$  という自明な方程式に対して middle convolution や addition (定義 2.3 を線形 Pfaff 系に自然に拡張する) を次々合成することで完全積分可能な線形 Pfaff 系を具体的に量産することができる.

**注意 3.7.** 変換前の方程式 (3.2) における  $A_{H_4}$  や  $A_{H_5}$  は  $O$  であっても構わない. その場合方程式 (3.2) は  $H_4$  や  $H_5$  を特異点集合に含まない. しかし変換の過程に現れる  $G_{H_4}, G_{H_5}$  の表示 (3.9) を見ると  $A_{H_4}$  や  $A_{H_5}$  が  $O$  だとしても  $G_{H_4}, G_{H_5}$  は  $O$  にはならない. これは変換によって  $H_4, H_5$  が新たに特異点集合に加わる, つまり **middle convolution によって特異点集合が真に増える場合がある**ことを意味している (商空間への射影をとった結果  $\bar{G}_{H_4}$  や  $\bar{G}_{H_5}$  が  $O$  になる場合は増えない). この現象は一変数の場合には見られない多変数特有のものである.

**例 3.8.**  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とする. 階数 1 の線形 Pfaff 系

$$(3.14) \quad du = \left( \alpha_1 \frac{dx}{x} + \alpha_2 \frac{dx}{x-1} + \alpha_3 \frac{d(x-y)}{x-y} \right) u$$

に対して,  $\lambda \in \mathbb{C}$  をパラメータとする  $x$  方向の middle convolution を考えると階数 3 の方程式

$$(3.15) \quad dV = \left( G_1 \frac{dx}{x} + G_2 \frac{dx}{x-1} + G_3 \frac{d(x-y)}{x-y} + G_4 \frac{dy}{y} + G_5 \frac{dy}{y-1} \right) V$$

が得られる. ここで

$$G_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 + \lambda & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \lambda \end{pmatrix}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad G_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

である (この場合  $\mathcal{K}_0^x = \mathcal{K}_{\infty}^x = \{0\}$  であるので **Step 3** は不要であることに注意). これは注意 3.2 で述べた Appell の  $F_1$  の満たす方程式と本質的に等価である.

また方程式 (3.14) は  $u(x, y) = x^{\alpha_1}(x-1)^{\alpha_2}(x-y)^{\alpha_3}$  という解を持つことから, 方程式 (3.15) の解の積分表示も同時に得られる:

$$V(x, y) = \int_{\Delta} t^{\alpha_1}(t-1)^{\alpha_2}(t-y)^{\alpha_3}(x-t)^{\lambda} \vec{\eta}, \quad \vec{\eta} = t \left( \frac{dt}{t}, \frac{dt}{t-1}, \frac{dt}{t-y} \right).$$

これは超幾何関数  $F_1$  の積分表示を与えている. この積分を解析することで方程式 (3.15) の大域解析 (接続問題, モノドロミーの導出) が可能になる. ここからさらに addition や middle convolution を合成することで  $F_2, F_3, F_4$  の満たす方程式とその積分表示を構成することができる.

Middle convolution の基本的な性質として定理 2.8 や定理 2.11 の多変数版が成り立つ.

**定理 3.9** (原岡 [6]). 線形 Pfaff 系 (3.2) (より一般には (3.1)) の  $x$  方向の方程式が既約であるとき, 次が成り立つ.

- 任意の  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して  $dv = mc_\lambda^x(\Omega)v$  の  $x$  方向の方程式は既約.
- $mc_0^x(\Omega) \sim \Omega$
- 任意の  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  に対して  $mc_\lambda^x \circ mc_\mu^x(\Omega) \sim mc_{\lambda+\mu}^x(\Omega)$
- $x$  方向の方程式が rigid ならば,  $x$  方向の addition と middle convolution を有限回合成することで階数 1 の線形 Pfaff 系へ変換できる.

ただし同値関係  $\sim$  は常微分方程式の場合同様, 定数行列によるゲージ変換 (2.12) によって方程式が移り合うことと定義する.

### 3.2 線形 Pfaff 系に対する middle Laplace transform

一変数, 多変数のいずれの場合も middle convolution のキーは **Step 1** で与えられた方程式を大久保型方程式

$$(x - T) \frac{\partial u}{\partial x} = Au$$

へ変換することであった (ここで  $T$  は成分が  $x$  によらない対角行列,  $A$  は定数行列). 大久保型方程式は  $T$  の固有値と  $x = \infty$  を確定特異点とする Fuchs 型方程式であり, 特に多項式係数の形で書けていることから種々の積分変換と相性が良い. つまり middle convolution は大久保型方程式と Euler 変換の相性の良さを活かした変換であると言える. このとき自然に次の疑問が生まれる.

**疑問 3.10.** middle convolution の **Step 2** における Euler 変換を他の積分変換に取り替えると何が起こるだろうか?

この疑問を線形 Pfaff 系 (3.2) に当てはめて, Laplace 変換の場合に実行してみよう.

**Step 1.** 先ほどと同様だが再掲する. 方程式 (3.2) の解  $u(x, y)$  を用いて

$$U(x, y) = {}^t \left( \frac{u(x, y)}{x}, \frac{u(x, y)}{x-1}, \frac{u(x, y)}{x-y} \right) =: (U_1, U_2, U_3)$$

とするとこれは方程式系 (3.8), すなわち

$$\begin{cases} (x - T) \frac{\partial U}{\partial x} = (A - I)U \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \left( \frac{G_{H_4}}{y} + \frac{G_{H_5}}{y-1} \right) U - G_{xy} \frac{\partial U}{\partial x} \end{cases}$$

を満たす. ここで  $T, A$  はそれぞれ (3.5) で与えられる.

**Step 2.** 方程式系 (3.8) に対して  $x$  方向の Laplace 変換

$$V(x, y) := \int_{\Delta} U(t, y) e^{-tx} dt$$

を考えてみる (積分路  $\Delta$  は積分が収束するようにとる). これはよく知られているように作用素の変換

$$(3.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \mapsto x, \\ x \mapsto -\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

を引き起こす. すると  $x$  方向の方程式は

$$x \frac{\partial V}{\partial x} = -(A + xT)V$$

と変化する. この方程式は  $x$  に関する常微分方程式とみると  $x = 0$  に確定特異点,  $x = \infty$  に不確定特異点を持つ. つまり Fuchs 型ではないことに注意しよう. 両辺を  $x$  で割って

$$(3.17) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = - \left( T + \frac{A}{x} \right) V$$

と表しておく. この形の方程式は **Birkhoff 標準形**と呼ばれる.

続いて (3.8) の  $y$  方向の方程式の変換を考えよう. 作用素の変換 (3.16) を考えると  $y$  方向の方程式は

$$(3.18) \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{G_{H_4}}{y} + \frac{G_{H_5}}{y-1} \right) V - G_{xy}(xV)$$

と変化する. この方程式も  $y$  に関する常微分方程式とみたときに  $y = 0, 1$  に確定特異点,  $y = \infty$  に不確定特異点を持つ方程式である.

よって (3.17) と (3.18) をまとめて  $V(x, y)$  の満たす階数  $3N$  の線形 Pfaff 系

$$dV = L^x(\Omega)V, \quad L^x(\Omega) = -T dx - A \frac{dx}{x} - xG_{xy} dy + G_{H_4} \frac{dy}{y} + G_{H_5} \frac{dy}{y-1}$$

が得られる. ここで

$$G_x = \begin{pmatrix} O_N & & \\ & I_N & \\ & & O_N \end{pmatrix}$$

とおくと  $T = G_x + xG_{xy}$  と表せることに注意する. まずこの考察を通してわかることとして, Euler 変換に関して Laplace 変換を考えると

- 特異点集合の形状が変わる
- 不確定特異性が現れる (Fuchs 型で閉じない)
- Laplace 変換を考えない変数 (今の場合  $y$ ) の方向の方程式についても不確定特異性が現れる

ということがわかる.

**Step 3.** middle convolution の場合と同様に商空間への射影によって既約成分を取り出す (方程式の階数を落とす) 操作ができるかどうか考えると, 次が成り立つことがわかる.

**命題 3.11.** 完全積分可能条件 (3.4) を満たす線形 Pfaff 系 (3.2) に対して  $\mathcal{K}_0^x$  を (3.12) で定義する. すなわち

$$\mathcal{K}_0^x := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}^N)^3 \mid v_i \in \ker A_{H_i} \ (1 \leq i \leq 3) \right\}$$

とする. すると  $\mathcal{K}_0^x$  は  $(G_x, G_{xy}, A, G_{H_4}, G_{H_5})$  不変である.

従って行列の組  $(G_x, G_{xy}, A, G_{H_4}, G_{H_5})$  は商空間  $\mathbb{C}^{3N}/\mathcal{K}_0^x$  への作用を引き起こす. その作用を表す行列の組を  $(-\bar{B}_x, -\bar{B}_{xy}, -\bar{B}_{H_1}, \bar{B}_{H_4}, \bar{B}_{H_5})$  と表わして次のように定義する:

**定義 3.12.** 線形 Pfaff 系 (3.2) に対して線形 Pfaff 系

$$(3.19) \quad dv = \mathcal{ML}^x(\Omega)v, \quad \mathcal{ML}^x(\Omega) = (\bar{B}_x + y\bar{B}_{xy}) dx + x\bar{B}_{xy} dy + \bar{B}_{H_1} \frac{dx}{x} + \bar{B}_{H_4} \frac{dy}{y} + \bar{B}_{H_5} \frac{dy}{y-1}$$

を対応させる操作を  $x$  方向の **middle Laplace transform** といい,  $\mathcal{ML}^x$  で表す.

ここまでに紹介してきた変換同様, 方程式 (3.19) の解は

$$v(x, y) = Q \int_{\Delta} U(t, y) e^{-tx} dt$$

というように (3.2) の解  $u(x, y)$  を拡大して作ったベクトル  $U(x, y)$  を用いて表示できることにも注意する. ここで  $Q$  は商空間  $\mathbb{C}^{qN}/\mathcal{K}_0^x$  への射影に対応する線形変換である.

**注意 3.13.** Step 2 の最後に述べたように middle Laplace transform は middle convolution と違って確定特異点型方程式に対して閉じていない. 従って middle Laplace transform がどのようなクラスで閉じている変換なのかを調べるのも一つの問題となる.

注意 3.13 に関連して, 論文 [1] で扱った一般論について少し述べておく. この論文では

$$(3.20) \quad du = \Omega u, \quad \Omega = (A_x + yA_{xy})dx + (A_y + xA_{xy})dy + \sum_{H \in \mathcal{A}} A_H d \log f_H,$$

という形をした線形 Pfaff 系 ( $A_x, A_{xy}, A_y, A_H \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ ) であって

- (i)  $A_x$  と  $A_{xy}$  はいずれも対角化可能
- (ii)  $\mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_y \neq \emptyset$  ならば  $A_{xy} = O$ . ここで  $\mathcal{A}_x = \{H \in \mathcal{A} \mid (f_H)_x \neq 0\}$ ,  $\mathcal{A}_y = \{H \in \mathcal{A} \mid (f_H)_y \neq 0\}$ .

という条件を満たすものに対して上記と同様の方法で  $x$  方向の middle Laplace transform を定義し, さらにこの条件を満たす方程式 (3.20) 全体が変換によって閉じていることを示した (本当はより深いことも言えるがここでは省略する). また条件 (i), (ii) を満たす方程式 (3.20) に対して, middle Laplace transform の Step 2 を逆 Laplace 変換

$$(3.21) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \mapsto -x, \\ x \mapsto \frac{\partial}{dx} \end{cases} \leftrightarrow W(x) = \int_{\Delta} U(t) e^{xt} dt$$

に取り替えることで inverse middle Laplace transform  $\mathcal{ML}^{-x}$  も定義した. ただしこの段階で逆変換の関係

$$(3.22) \quad \mathcal{ML}^x \circ \mathcal{ML}^{-x}(\Omega) \sim \Omega, \quad \mathcal{ML}^{-x} \circ \mathcal{ML}^x(\Omega) \sim \Omega,$$

は明らかではない. 作用素の変換 (3.16) と (3.21) はそれぞれ方程式の階数を変えず, また互いに逆変換になっていることは明らかであるが, middle Laplace と inverse middle Laplace はそれぞれ Step 1, Step 3 で方程式の階数を上下させているからである. そこで論文 [1] では次を証明した.

**定理 3.14** ([1]). 条件 (i), (ii) を満たす方程式 (3.20) の  $x$  方向の方程式が既約であるとする. このとき逆変換公式 (3.22) が成り立つ. また  $\mathcal{ML}^x(\Omega)$ ,  $\mathcal{ML}^{-x}(\Omega)$  の  $x$  方向の方程式はいずれも既約である.

**注意 3.15.** Middle Laplace transform を使えば, middle convolution を不確定特異性を許した線形 Pfaff 系 (3.20) にまで拡張することができる (詳細は [1] をご参照ください). 不確定特異点を持つ常微分方程式については川上 [15], 竹村 [18], 山川 [19] らがそれぞれの方法で middle convolution を定義しており, 講演者の方法は彼らの結果の多変数化を与えているとみなせる.

### 3.3 具体例としての多変数特殊函数

#### 3.3.1 Humbert の超幾何函数 $\Phi_1$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とする. 階数 1 の線形 Pfaff 系

$$du = \left( \alpha_1 \frac{dx}{x} + \alpha_2 \frac{dx}{x-1} + \alpha_3 \frac{d(x-y)}{x-y} \right) u$$

に対して  $x$  方向の middle Laplace transform を考えると階数 3 の方程式

$$(3.23) \quad dV = \left[ -(G_x + yG_{xy}) dx - A \frac{dx}{x} - xG_{xy} dy + G_4 \frac{dy}{y} + G_5 \frac{dy}{y-1} \right] V$$

が得られる (この場合  $\mathcal{K}_0^x = \{0\}$  なので **Step 3** は不要であることに注意). ここで

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad G_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

である. これは Humbert の 2 変数合流型超幾何函数  $\Phi_1$  の満たす線形 Pfaff 系と本質的で等価である. また変換の作り方から解の積分表示

$$V(x, y) = \int_{\Delta} t^{\alpha_1} (t-1)^{\alpha_2} (t-y)^{\alpha_3} e^{-tx} \vec{\eta}, \quad \vec{\eta} = t \left( \frac{dt}{t}, \frac{dt}{t-1}, \frac{dt}{t-y} \right)$$

も同時に得られる.

#### 3.3.2 原岡の合流型超幾何函数 $cF_4$

線形 Pfaff 系 (3.23) にさらに変換を合成してみよう.  $(-\alpha_1 - \alpha_3, -\alpha_2 - \alpha_3) \in \mathbb{C}^2$  をパラメータとする  $y$  方向の addition

$$W = add_{(-\alpha_1 - \alpha_3, -\alpha_2 - \alpha_3)}^y(V)$$

を施すと, 方程式 (3.23) は

$$dW = \left[ -(G_x + yG_{xy}) dx - A \frac{dx}{x} - xG_{xy} dy + (G_4 - \alpha_1 - \alpha_3) \frac{dy}{y} + (G_5 - \alpha_2 - \alpha_3) \frac{dy}{y-1} \right] W$$

と変化する. ここに  $y$  方向の inverse middle Laplace transform を施す. この場合の  $\mathcal{K}_0^y$  は

$$\mathcal{K}_0^y = \ker(G_4 - \alpha_1 - \alpha_3) \oplus \ker(G_5 - \alpha_2 - \alpha_3)$$

であり, 計算すると  $\dim \mathcal{K}_0^y = 2$  であることがわかる. 従って得られる方程式の階数は  $3 \times 2 - 2 = 4$  となる. 実際に計算すると階数 4 の線形 Pfaff 系

$$(3.24) \quad dv = \left[ B_x dx + B_y dy + B_1 \frac{dx}{x} + B_2 \frac{d(x-y)}{x-y} + B_3 \frac{dy}{y} \right] v$$

が得られる. ここで

$$\begin{aligned}
 B_x &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} -\alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) & 0 & 0 \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) & -\alpha_1 - \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) & 0 \\ 0 & \alpha_2 + \alpha_3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_1 + \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である. この方程式は原岡 [10] で扱われた, 超幾何関数  $F_4$  の満たす方程式からの合流で得られる 2 変数超幾何微分方程式 (便宜的に  $cF_4$  と記した) と本質的に一致する. また解の積分表示として

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad v(x, y) &= Q \int_{\Delta} t^{\alpha_1} (t-1)^{\alpha_2} (t-s)^{\alpha_3} s^{-(\alpha_1+\alpha_3)} (s-1)^{-(\alpha_2+\alpha_3)} e^{-tx} e^{sy} \vec{\psi}, \\
 \vec{\psi} &= \left( \vec{\eta} \wedge \frac{ds}{s}, \vec{\eta} \wedge \frac{ds}{s-1} \right)
 \end{aligned}$$

が得られる. ここで  $Q$  は商空間  $\mathbb{C}^6 / \mathcal{K}_0^y \cong \mathbb{C}^4$  への射影を表す  $4 \times 6$  行列.

このように middle Laplace transform や addition を次々合成することで完全積分可能な線形 Pfaff 系の解の積分表示とセットで大量に構成できる. その中には古典的に知られていなかったものも含まれており, それらは新しい多変数特殊関数を定義していると考えられる.

## 4 おわりに

最後に今後の展望を述べて, 本稿を閉じることとする.

### 4.1 middle Laplace transform の大域解析への応用

Balsler-Jurkat-Lutz [2] は常微分方程式の研究の中で, Laplace 変換による大久保型方程式と Birkhoff 標準形の間に対応

$$(x-T) \frac{du}{dx} = Au \quad \xleftrightarrow{L} \quad \frac{dv}{dx} = - \left( T + \frac{A+I}{x} \right) v$$

において, 大久保型方程式 (左側) の確定特異点間の接続係数と Birkhoff 標準形 (右側) の  $x = \infty$  における Stokes 係数 (不確定特異点近傍における解の挙動を表す量) がダイレクトに対応していることを証明した. Balsler-Jurkat-Lutz の結果は先鋭的なものであったが, 一変数, そして大久保型方程式の Laplace 変換にしか適用できない. 一方 middle Laplace transform は多変数の線形 Pfaff 系に対して定義されており, 1 つの方向に関する方程式を一旦大久保型方程式に変換 (**Step 1**) して, そこに Laplace 変換を施す (**Step 2**) 構造になっている. 従って **Step 2** において [2] の手法を応用すれば, その結果を線形 Pfaff 系 (3.20) へ拡張できる. これは不確定特異性を持つ完全積分可能系に対する middle Laplace transform を用いた大域解析の基本的な手法の一つになると期待される.

また方程式 (3.24) は  $(x, y) = (\infty, \infty)$  に不確定特異性を持つが, 原岡 [10] は強漸近展開と呼ばれる多変数版の漸近展開を用いて  $(x, y) = (\infty, \infty)$  における Stokes 係数を求めている. この結果を middle Laplace transform の立場から見直すことも興味深い問題の一つである.

## 4.2 線形 Pfaff 系に対する種々の変換との組み合わせ

今回定義した middle Laplace transform や一般化された middle convolution を、線形 Pfaff 系に対する既存の変換の中に位置付けることは重要な問題である。ここでは我々の変換と特異点集合への制限という操作を絡めたときの興味深い例を紹介する。線形 Pfaff 系 (3.24) は  $\{x = y\}$  という超平面に沿って確定特異性を持つが、そこにおける留数行列  $B_3$  は

$$B_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 2\alpha_3 \end{pmatrix}$$

を満たしている。これは方程式 (3.24) の  $x = y$  の近傍における解空間 (4次元) のうち、 $x = y$  で正則な解が 3次元分、特異解 (特性指数  $2\alpha_3$ ) の解が 1次元分あることを意味している。そこで  $x = y$  で正則な独立解を  $v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y)$ 、特異性を持つ解を  $v_4(x, y)$  とする。  $v_4(x, y)$  は  $x = y$  で特異性を持つので  $y = x$  を代入することはできないが、  $v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y)$  には  $y = x$  を代入することができる。こうして得られた 1変数関数  $v_1(x, x), v_2(x, x), v_3(x, x)$  は  $x$  に関する 3階の微分方程式の独立解となることがわかる。この  $x$  に関する微分方程式を取り出すことを、**特異点集合  $\{x = y\}$  への制限**と呼ぶ (この操作自体は解の情報を一切使わずに方程式 (3.24) を見るだけで行うことができる)。具体的な操作については例えば原岡 [8] を参照していただくことにして結果のみを書くと、方程式 (3.2) の  $\{x = y\}$  への制限として  $x = 0$  に確定特異点、  $x = \infty$  に不確定特異点を持つ 3階の常微分方程式

$$(4.1) \quad \frac{du}{dx} = \left( D_0 + \frac{D_1}{x} \right) u$$

が得られる。ここで

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) & \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) \\ -2 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & 0 \\ 2 & 0 & -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

この方程式は常微分方程式として rigid ではない。そのため一変数 Katz 理論のみ (つまり常微分方程式として見ているだけ) では階数 1 の方程式に帰着できず、大域解析が困難な方程式と言える。しかし今回は導出の仕方から、この方程式には制限前の線形 Pfaff 系 (3.24) の解の積分表示 (3.25) に由来する解の積分表示が存在することがわかり、それをを用いることで解の大域解析 (モノドロミー表現、接続係数、Stokes 係数の導出) が可能になる。大域解析の詳細については現在論文準備中ということもあり別の機会に譲るが、この例は高次元 Katz 理論的変換 (middle Laplace transform, middle convolution) と線形 Pfaff 系に対する既存の変換との組み合わせがこれまで知られていなかった大域解析可能な方程式の発見を可能にすることを示唆する興味深い具体例である\*4。

線形 Pfaff 系に対しては、今回取り上げた middle Laplace transform や middle convolution, 特異点集合への制限の他にも特異点集合への延長 (制限の逆操作, すなわち階数の大きい線形 Pfaff 系への埋め込み) や特異点の合流・開折, 座標変換などの様々な操作が定義され、それら全体を集めたものは線形 Pfaff 系の空間に作用する群をなしている。この群の作用を解析し、そして §4.1 で述べた方向性と組み合わせで大域挙動が明示的に計算できる完全積分可能系を組織的に増やしていくことが今後の講演者の大きな目標である。

\*4 ちなみに方程式 (4.1) は共形場理論に現れる Dotsenko-Fateev 方程式という Fuchs 型方程式に対して特異点の合流操作を施すことでも得られることが後で分かったので、講演者は**合流型 Dotsenko-Fateev 方程式**と呼んでいる。

謝辞. この度は第 64 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムでの講演の機会を与您にいただき, 同シンポジウム委員の先生方および会場責任者の先生方に心より御礼申し上げます. また本稿を読んで有益なコメントをくださった信川喬彦氏 (皇學館大学), 野本慶一郎氏 (株式会社光電製作所), 松本孝文氏 (北九州工業高等専門学校) にも感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 JP24K22826 の助成を受けています.

## 参考文献

- [1] S. Adachi, Middle Laplace transform and middle convolution for linear Pfaffian systems with irregular singularities, [arXiv:2502.01263](https://arxiv.org/abs/2502.01263).
- [2] W. Balser, W. B. Jurkat and D. A. Lutz, On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities I, *SIAM J. Math. Anal.*, **12** (1981), 691–721.
- [3] V. Belavin, Y. Haraoka and R. Santachiara, Rigid Fuchsian Systems in 2-Dimensional Conformal Field Theories, *Commun. Math. Phys.* **365**, (2019) 17–60.
- [4] M. Dettweiler and S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Comput.* **30**, no. 6 (2000), 761–798.
- [5] M. Dettweiler and S. Reiter, Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra.* **318**, (2007), 1–24.
- [6] Y. Haraoka, Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements *Adv. Stud. Pure Math.* **62** (2012), 109–136.
- [7] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015.
- [8] Y. Haraoka, *Linear differential equations in the complex domain –from classical theory to forefront*, Lecture Notes in Mathematics, **2271**, Springer, 2020.
- [9] Y. Haraoka and S. Hamaguchi, Topological theory for Selberg type integral associated with rigid Fuchsian systems. *Math. Ann.* **353** (2012), 1239–1271.
- [10] Y. Haraoka, Asymptotic analysis for confluent hypergeometric function in two variables given by double integral, *Opuscula Math.*, **44**, no. 4 (2024), 505–541.
- [11] 廣惠一希, 重点解説 微分方程式とモジュライ空間, サイエンス社, 2022.
- [12] K. Hiroe, H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai, 4-dimensional Painlevé type equations, *MSJ memoirs* **37**, 2018.
- [13] M. Kato, Connection formulas for Appell’s system  $F_4$  and some applications, *Funkcial. Ekvac.* **38** (1995), 243–266.
- [14] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton (1996).
- [15] H. Kawakami, Generalized Okubo systems and the middle convolution, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2010** (2010), no. 17, 3394–3421.
- [16] S.-J. Matsubara-Heo and T. Oshima, Generalized hypergeometric functions with several variables, *Indag. Math.*, **36**(2) (2025), 507–566.
- [17] T. Oshima, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, *MSJ Memoirs* **28**, 2012.
- [18] K. Takemura, Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities, *New trends in quantum integrable systems*, (2011), 393–420.
- [19] D. Yamakawa, Middle convolution and Harnad duality, *Math. Ann.*, **349** (2011), 215–262.

# 局所コンパクト群上の Young の畳み込み不等式の最適定数

理化学研究所・数理創造研究センター (iTHEMS) 里見 貴志\*

Takashi Satomi

Center for Interdisciplinary Theoretical and Mathematical Sciences,  
RIKEN

## 概要

$1/p_1 + 1/p_2 = 1 + 1/p$  となるような  $1 \leq p_1, p_2, p \leq \infty$  に対し、局所コンパクト群  $G$  上の Young の畳み込み不等式の最適定数  $Y(p_1, p_2; G)$  を

$$Y(p_1, p_2; G) := \sup\{\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p'})\|_p \mid \phi_1, \phi_2: G \rightarrow \mathbb{C}, \|\phi_1\|_{p_1} = \|\phi_2\|_{p_2} = 1\}$$

で定義する ( $p'$  は  $p$  の Hölder 共役,  $\|\cdot\|_p$  は左 Haar 測度に関する  $L^p$  ノルム,  $\Delta: G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  はモジュラー関数). このとき、本稿の主結果は任意の閉部分群  $H \subset G$  に対し  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; H)$  となることである. この不等式より、連結線型 Lie 群や連結可解 Lie 群などの半単純成分の中心が有限群となるような連結 Lie 群  $G$  に対し、 $r(G)$  を  $G$  の極大コンパクト群の次元とすると  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - r(G)}$  となることが従う.

## 1 初めに

本稿では著者の以前の論文 [Sat24] の概要をまとめる. 局所コンパクト群  $G$  上の Young の畳み込み不等式の最適定数 (両辺の最適な比) を  $Y(p_1, p_2; G)$  とすると、任意の閉部分群  $H \subset G$  に対し  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; H)$  となることが本稿の主結果である (定理 1.2). この系として、Beckner [Bec75], Fournier [Fou77], Klein–Russo [KR78], Nielsen [Nie94] などによる  $Y(p_1, p_2; G)$  の上からの評価を連結線型 Lie 群や連結可解 Lie 群などの半単純成分の中心が有限群となるような連結 Lie

---

\* E メールアドレス: takashi.satomi@riken.jp

群  $G$  上に拡張した. すなわち,  $G$  の極大コンパクト群の次元を  $r(G)$  とすると,  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - r(G)}$  となる (系 1.3).

$1 \leq p \leq \infty$  の Hölder 共役  $1 \leq p' \leq \infty$  を

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

で定める. 局所コンパクト群  $G$  上の左 Haar 測度を  $dg$  に関する  $L^p$  ノルムを  $\|\cdot\|_p$  と書き, 可測関数  $\phi_1, \phi_2: G \rightarrow \mathbb{C}$  の畳み込み  $\phi_1 * \phi_2$  を

$$\phi_1 * \phi_2(g') := \int_G \phi_1(g) \phi_2(g^{-1}g') dg$$

で定める. また, ある連続準同型  $\Delta: G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  がただ一つ存在し

$$\int_G \phi(g^{-1}) dg = \int_G \frac{\phi(g)}{\Delta(g)} dg \quad (1.1)$$

となる. この  $\Delta$  を  $G$  のモジュラー関数という. このとき, Young の畳み込み不等式の最適定数  $Y(p_1, p_2; G)$  を次のように定める.

**定義 1.1** ([KR78, Section 2] [Nie94]). 局所コンパクト群  $G$  と

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geq 1 \quad (1.2)$$

をみたすような  $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$  に対し, 最適定数  $Y(p_1, p_2; G)$  を

$$Y(p_1, p_2; G) := \sup\{\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p_1})\|_p \mid \phi_1, \phi_2: G \rightarrow \mathbb{C}, \|\phi_1\|_{p_1} = \|\phi_2\|_{p_2} = 1\},$$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p} \quad (1.3)$$

で定める.

本稿の主結果は次の定理である.

**定理 1.2.**  $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$  が式 (1.2) をみたすとする. このとき, 任意の局所コンパクト群  $G$  の任意の閉部分群  $H \subset G$  に対し  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; H)$  となる.

$H$  が  $G$  の正規部分群のとき, 定理 1.2 は本質的に知られている. すなわち, Cowling–Martini–Müller–Parcet は

$$Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; H)Y(p_1, p_2; G/H) \quad (1.4)$$

となることを示した [Cow+19 Proposition 2.2]. 古典的な Young の畳み込み不等式 (例 2.1 (1)) より  $Y(p_1, p_2; G/H) \leq 1$  なので, 式 (1.4) から定理 1.2 が従う. 式 (1.4) は  $G$  が可換のときに本質的に Beckner が [Bec75, Section IV.5] (事実 2.3 も参照),  $G$  が  $H$  と  $G/H$  の半直積のときに Klein–Russo が証明している [KR78 Lemma 2.4].

定理 1.2 はいくつかの面白い例を含んでいる. 例えば, 定理 1.2 内の  $H$  に自明群を適用すると古典的な Young の畳み込み不等式が示せる (例 2.1 (1)). また, 定理 1.2 より  $G$  の単位元成分  $G_0 \subset G$  が開集合 (例えば  $G$  が Lie 群) ならば  $Y(p_1, p_2; G) = Y(p_1, p_2; G_0)$  となる (例 2.1 (2)). したがって, Lie 群  $G$  に対し  $Y(p_1, p_2; G)$  の値を決定するには, 単位元成分のみ考えればよい. また, 定理 1.2 から開かつコンパクトな部分群を持たないような局所コンパクト群  $G$  に対し  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})$  となることが従い, この結果は Fournier, Nielsen や著者の以前の結果の改良・拡張にあたる (系 2.2).

定理 1.2 の系として, 連結線型 Lie 群や連結可解 Lie 群などの半単純成分の中心が有限群となるような連結 Lie 群  $G$  に対し, 極大コンパクト群の次元  $r(G)$  を用いて  $Y(p_1, p_2; G)$  を上から評価できる. すなわち, 群  $G$  の元の個数を  $\#G$  と書き,  $G$  の中心を  $Z(G)$  と書くと, 次の系が成り立つ.

**系 1.3.** 連結 Lie 群  $G$  の根基 (最大の連結可解閉正規部分群) を  $R \triangleleft G$  とし,  $G$  の極大コンパクト群の次元を  $r(G)$  とする. このとき,  $\#Z(G/R) < \infty$  ならば, 式 (1.2) をみたすような任意の  $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$  に対し

$$Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - r(G)} \quad (1.5)$$

となる.

$Y(p_1, p_2; \mathbb{R})$  の値は Beckner により明示的に与えられている (事実 2.3) ので, 系 1.3 は  $Y(p_1, p_2; G)$  の明示的な上からの評価を与えている. 系 1.3 はいくつかの  $G$  の場合にはすでに知られていた (表 2.2) が, 著者の知る限り

$$Y(p_1, p_2; SL_2(\mathbb{R})) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^2 \quad (1.6)$$

は新しい結果である. また, 連結コンパクト Lie 群 (系 2.2) や連結冪零 Lie 群 (事実 2.5) などのいくつかの連結 Lie 群に対し式 (1.5) の等号が成立することが知られている. 系 1.3 の証明には Jing–Tran–Zhang による Brunn–Minkowski の不等式の Lie 群への一般化 [JTZ23 Theorem 1.1] と似た議論を用いる [Sat24 Corollary 1.3].

ここで、本稿の構成を説明する。2節では、定理1.2や系1.3と知られている結果を比較する。3節では、定理1.2の証明の概要を説明する。4節では、定理1.2とJing–Tran–Zhangの議論を用いて系1.3を証明する。

## 2 最適定数に関する知られている結果との比較

### 2.1 定理1.2と知られている結果の比較

この節では、定理1.2と知られている結果の関連を見る。まず、定理1.2のいくつかの例を見る。

**例 2.1.** (1) 単位元  $e \in G$  のみからなる自明群  $\{e\} \subset G$  は  $G$  の閉部分群なので、定理1.2から  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \{e\})$  が従う。定義より  $Y(p_1, p_2; \{e\}) = 1$  なので、古典的な Young の畳み込み不等式

$$Y(p_1, p_2; G) \leq 1 \tag{2.1}$$

が成り立つ。式(2.1)は少なくとも次の2つの証明が知られている。

- (i) Riesz–Thorin の定理を用いて  $p_1 = 1, p_2'$  の場合に帰着する方法。
- (ii) Hölder の不等式を繰り返し用いる直接的な方法。

それぞれの証明は表2.1の文献で述べられている。Terp は  $G$  がユニモジュラーでない場合も(ii)の手法で式(2.1)が証明できることを述べているが、証明は書いていない。Terp は式(2.1)を用いて、Hausdorff–Young の不等式を一般の局所コンパクト群上へ拡張した [Ter17 Theorem 5.2]。3節内の定理1.2の証明は(ii)の手法の拡張とみなせる。

表 2.1 式(2.1)の証明が述べられている文献

	$G$ : ユニモジュラー	$G$ : 一般
(i)	Weil [Wei40]	Klein–Russo [KR78, Lemma 2.1]
(ii)	Hewitt–Ross [HR79, Theorem 20.18]	(Terp [Ter17, Lemma 1.1])

(2)  $G$  の単位元成分を  $G_0 \subset G$  とすると、定理1.2より  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; G_0)$  となる。 $G_0$  が開集合 (例えば  $G$  が Lie 群) ならば  $G_0$  の Haar 測度と  $G$  の Haar

測度は一致するので、 $Y(p_1, p_2; G) \geq Y(p_1, p_2; G_0)$  となる。したがって、 $G_0$  が開集合ならば  $Y(p_1, p_2; G) = Y(p_1, p_2; G_0)$  となる。

定理 1.2 を用いると、 $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})$  となるための必要十分条件が分かる。すなわち、次の系が成り立つ。

**系 2.2.** 不等式

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1 \quad (2.2)$$

をみたすような  $1 < p_1, p_2 < \infty$  に対し、局所コンパクト群  $G$  に関する次の条件 (1)–(8) がすべて同値となる。

- (1)  $G$  は開かつコンパクトな部分群を持たない。
- (2)  $G$  の単位元成分  $G_0 \subset G$  はコンパクトでない。
- (3)  $G$  は位相群として  $\mathbb{R}$  と同型な閉部分群を持つ。
- (4)  $G_0$  は位相群として  $\mathbb{R}$  と同型な閉部分群を持つ。
- (5)  $Y(p_1, p_2; G) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})$  となる。
- (6)  $Y(p_1, p_2; G_0) \leq Y(p_1, p_2; \mathbb{R})$  となる。
- (7)  $Y(p_1, p_2; G) \neq 1$  となる。
- (8)  $Y(p_1, p_2; G_0) \neq 1$  となる。

$G$  がユニモジュラーのときは、(1)  $\iff$  (7) は Fournier [Fou77 Theorem 1 and Theorem 3] によって証明され、さらに筆者が以前の論文で本質的に (1)  $\iff$  (2)  $\iff$  (5)  $\iff$  (6)  $\iff$  (7)  $\iff$  (8) を示した [Sat23 Corollary 1.3 and Remark 2.2].

$G$  はユニモジュラーとは限らないとき、(3)  $\iff$  (4) は  $\mathbb{R}$  の連結性から従う。(2)  $\implies$  (4) は Iwasawa の結果 [Iwa49 Theorem 13] と Gleason–Yamabe の定理 [Gle51 [Yam53, Theorem 5]] から従う。(1)  $\iff$  (7) は Nielsen が証明した [Nie94, Theorem 1]. (1)  $\iff$  (2) は Hewitt–Ross の結果 [HR79] を用いて筆者が以前の論文で示した [Sat22, Remark 2.4 (3)]. (4)  $\implies$  (6)  $\implies$  (5) は定理 1.2 から従う。(8)  $\implies$  (7) は定理 1.2 と例 2.1 (1) から従う。(5)  $\implies$  (7) と (6)  $\implies$  (8) は  $Y(p_1, p_2; \mathbb{R}) < 1$  に帰着される。Beckner は  $Y(p_1, p_2; \mathbb{R}^n)$  の値を明示的に与えているので、本質的に  $Y(p_1, p_2; \mathbb{R}) < 1$  を証明している。すなわち、次の事実が成り立つ。  
**事実 2.3** (Beckner [Bec75 Theorem 3]). 任意の  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  と式 (1.2) をみたすような任

意の  $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$  に対し,  $1 \leq p \leq \infty$  を式 (1.3) で定めると

$$Y(p_1, p_2; \mathbb{R}^n) = \left( \frac{B(p_1)B(p_2)}{B(p)} \right)^{n/2}, \quad B(p) := \begin{cases} \frac{p^{1/p}}{p^{1/p'}} & \text{if } 1 < p < \infty \\ 1 & \text{if } p = 1, \infty \end{cases}$$

となる.

**注意 2.4.** 事実 (2.3) (やその拡張である Brascamp–Lieb の不等式 [BL76, Theorem 1]) は様々な証明が知られている.

(1) Beckner は Minkowski の積分不等式を用いて事実 (2.3) を関数方程式

$$\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) = \nu_1(x_1 + x_2)\nu_2(x_1 - x_2) \quad (2.3)$$

の可積分な解を求める問題に帰着した. Beckner は Riesz–Sobolev の再配分不等式を用いて回転不変な極値関数の存在を示し, 式 (2.3) の解で回転不変なものが Gauss 関数の組のみとなることを使って事実 (2.3) を証明した. Lieb は関数が回転不変とは限らない場合も式 (2.3) の解は Gauss 関数のみとなること (Darmois–Skitovich の定理 [Dar53, Ski53]) を暗に用いて Brascamp–Lieb の不等式を証明した [Lie90, Theorem 6.2].

(2) Brascamp–Lieb は  $Y(p_1, p_2; \mathbb{R}^n) = Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^n$  を示し,  $n \rightarrow \infty$  のときの  $Y(p_1, p_2; \mathbb{R}^n)$  の上界の振る舞いを評価することで事実 (2.3) を証明した [BL76, Section 2.5]. さらに, Brascamp–Lieb は同様の議論を用いて事実 (2.3) を Brascamp–Lieb の不等式に拡張した.

(3) Barthe は Henstock–Macbeath による変数変換 [HM53, Section 5] と重み付き相加相乗平均の不等式を使ったより直接的な証明を与えた [Bar98b, Theorem 1]. さらに, Barthe は Brascamp–Lieb の不等式でも同様の証明が成り立つことを示した [Bar98a, Theorem 1].

(4) Carlen–Lieb–Loss は熱拡散方程式の解の積の積分は時間が経過するにつれて増大することを使って階数 1 の Brascamp–Lieb の不等式を証明した [CLL04, Theorem 3.1]. Cordero-Erausquin–Ledoux はこの単調増大性を Shannon の微分エントロピーの評価を用いて証明した [CL10, Theorem 6].

他にも事実 (2.3) や Brascamp–Lieb の不等式には関連する様々な結果 [Bal89

[Ben+08] [Val08] [BB09] [Ben+10] [Val10] [Bar+11] [Led14] [Leh14] [IV15] [Ben+17] [Bra17] [Gar+18] [Ben+20] やサーベイ [Gar02] [Car07] [Ben14] がある。

## 2.2 系 1.3 と知られている結果の比較

この節では、系 1.3 と知られている結果の関連を見る。表 2.2 ではいくつかの  $G$  について系 1.3 を証明した著者をまとめている。  $G$  がコンパクトのとき、  $G$  はユニモジュラーで系 1.3 は式 (2.1) と一致する。したがって、系 1.3 は本質的に Weil により証明されている (例 2.1 (1))。また、任意の連結 Lie 群  $G$  に対し系 2.2 の同値条件 (1)-(8) は  $r(G) < \dim G$  と同値になる。したがって、  $\#Z(G/R) < \infty$  となるような連結 Lie 群  $G$  に対し、系 1.3 は系 2.2 より強い  $Y(p_1, p_2; G)$  の上からの評価を与えている。ここで、Nielsen は次の事実を証明した。

**事実 2.5** (Nielsen [Nie94, Corollary (a) and (b)]).  $1 < p_1, p_2 < \infty$  が式 (2.2) をみたすとする。  $G$  が単連結可解 Lie 群または連結冪零 Lie 群のとき

$$Y(p_1, p_2; G) = Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - \text{rank}(\ker(\tilde{G} \rightarrow G))}$$

となる。ここで、  $\tilde{G}$  は  $G$  の普遍被覆群である。

任意の連結可解 Lie 群  $G$  に対し  $r(G) = \text{rank}(\ker(\tilde{G} \rightarrow G))$  となる [Sat24, Example 5.2 (2)]。したがって、  $G$  が単連結可解 Lie 群または冪零 Lie 群ならば、事実 2.5 から系 1.3 が従う。

表 2.2 いくつかの  $G$  について系 1.3 を証明した著者

連結 Lie 群 $G$	著者
コンパクト群	Weil (例 2.1 (1))
$\mathbb{R}^n$	Beckner (事実 2.3)
単連結冪零 Lie 群	Klein–Russo [KR78, Corollary 2.5’]
単連結可解 Lie 群・冪零 Lie 群	Nielsen (事実 2.5)

また、台が十分小さいような関数に限ると、次の事実のように系 1.3 より強い上からの評価ができることを Bennett–Bez–Buschenhenke–Cowling–Flock は証明した。

**事実 2.6** (Bennett–Bez–Buschenhenke–Cowling–Flock [Ben+20, Corollary 2.4]). 式 (1.2) をみたすような  $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$  に対し、  $1 \leq p \leq \infty$  を式 (1.3) で定める。この

とき, 任意の Lie 群  $G$  と任意の  $Y' > Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G}$  に対し, ある空でない開部分集合  $V \subset G$  が存在し, 台が  $V$  に含まれるような任意の可測関数  $\phi_1, \phi_2: G \rightarrow \mathbb{C}$  に対し

$$\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p_1})\|_p \leq Y' \|\phi_1\|_{p_1} \|\phi_2\|_{p_2} \quad (2.4)$$

となる.

Bennett–Bez–Buschenhenke–Cowling–Flock の元の論文では連結性を仮定している. しかし,  $V \subset G_0$  となるように取り直せるのでこの仮定がなくても事実 2.6 が成り立つ. Cowling–Martini–Müller–Parcet の結果 [Cow+19, Proposition 2.4 (i)] より事実 2.6 内の  $Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G}$  は最適である.

台が十分小さいという条件のもとで, 事実 2.6 は定理 1.2 より強い評価を与えている. 例えば,  $G = SL_2(\mathbb{R})$  のとき,  $\dim G = 3$  かつ  $r(G) = \dim SO(2) = 1$  なので式 (1.6) が成り立つ. 一方, 事実 2.6 より任意の  $Y' > Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^3$  に対しある空でない開部分集合  $V \subset SL_2(\mathbb{R})$  が存在し, 台が  $V$  に含まれるような任意の可測関数  $\phi_1, \phi_2: SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  に対し式 (2.4) をみたく.

### 3 定理 1.2 の証明

この節では定理 1.2 を証明する. 3.1 節では, 閉部分群  $H \subset G$  上の左 Haar 測度を用いて  $G$  の左 Haar 測度を表示する補題 (補題 3.1) を準備する. 3.2 節では Hölder の不等式 (事実 3.3) を適用することで定理 1.2 の証明に用いる不等式を与える (例 3.4). 3.3 節では 3.1 節と 3.2 節を用いて定理 1.2 の証明を完結させる.

#### 3.1 閉部分群を用いた Haar 測度の表示

$X := H \backslash G$  とし,  $g \in G$  の右剰余類を  $\bar{g} := Hg \in X$  と書く.

**補題 3.1.**  $H \subset G$  を局所コンパクト群  $G$  の閉部分群とする.

(1)  $\delta|_H$  が  $H$  のモジュラー関数となるようなある連続関数  $\delta: G \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  が存在して, 任意の可測関数  $\phi: G \rightarrow \mathbb{C}$  に対し

$$\int_H \phi(hg) dh \delta(g)$$

が左  $H$ -不変になる.

(2)  $(1)$  の  $\delta$  を固定する. このとき, 任意の可積分関数  $\phi: G \rightarrow \mathbb{C}$  に対し

$$\int_X \int_H \phi(hg) dh \delta(g) d\bar{g} = \int_G \phi(g) dg$$

となるような  $X$  上の Borel 測度  $d\bar{g}$  が存在する.

ここで, 定理  $1.2$  を証明するため, 補題  $3.1$  のいくつかの例を見る.

**例 3.2.**  $\phi_1, \phi_2: G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を可測関数とする.  $1 < p_1, p_2, p < \infty$  が式  $(1.3)$  をみたすと  
する.

(1)  $g \in G, h \in H$  に対し  $s(h, g) := \phi_1(hg) \delta(g)^{1/p_1}$  とする. 補題  $3.1(1)$  より

$$S(\bar{g}) := \int_H s(h, g)^{p_1} dh = \int_H \phi_1(hg)^{p_1} dh \delta(g)$$

は well-defined であり, 補題  $3.1(2)$  より

$$\int_X S(\bar{g}) d\bar{g} = \|\phi_1\|_{p_1}^{p_1}$$

となる.

(2)  $g, g' \in G$  に対し  $t(g, g') := (\phi_2(g^{-1}g')^{p_2} \delta(g'))^{1/p}$  とする. 任意の  $h' \in H$  に対し

$$\int_H t(h^{-1}h'g, g')^p dh = \int_H t(h^{-1}g, g')^p dh$$

となるので, 補題  $3.1(1)$  より

$$T(\bar{g}, \bar{g}') := \int_H t(h^{-1}g, g')^p dh = \int_H \phi_2(g^{-1}hg')^{p_2} dh \delta(g')$$

は well-defined である. したがって, 補題  $3.1(2)$  より

$$\int_X T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g}' = \int_X \int_H \phi_2(g^{-1}hg')^{p_2} dh \delta(g') d\bar{g}' = \int_G \phi_2(g^{-1}g')^{p_2} dg' = \|\phi_2\|_{p_2}^{p_2}$$

となる.

(3)  $g, g' \in G, h \in H$  に対し

$$u(g, h, g') := \left( \frac{\phi_2(g^{-1}hg')^{p_2} \Delta(g^{-1}hg') \delta(g)}{\delta(h)} \right)^{1/p_1}$$

とする. 補題 3.1 (1) より  $\delta|_H$  は  $H$  のモジュラー関数なので, 式 (1.1) より

$$\begin{aligned}\int_H u(g, h, h'g')^{p'_1} dh &= \int_H \frac{\phi_2(g^{-1}hh'g')^{p_2} \Delta(g^{-1}hh'g') \delta(g)}{\delta(h)} dh \\ &= \int_H \phi_2(g^{-1}h^{-1}h'g')^{p_2} \Delta(g^{-1}h^{-1}h'g') dh \delta(g) \\ &= \int_H \phi_2(g^{-1}h^{-1}g')^{p_2} \Delta(g^{-1}h^{-1}g') dh \delta(g)\end{aligned}\quad (3.1)$$

は  $h' \in H$  によらない. したがって, 補題 3.1 (1) より

$$U(\bar{g}, \bar{g}') := \int_H u(g, h, g')^{p'_1} dh$$

は well-defined である. 式 (1.1), 式 (3.1), 補題 3.1 (2) より, 任意の  $g' \in G$  に対し

$$\begin{aligned}\int_X U(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g} &= \int_X \int_H \phi_2(g^{-1}h^{-1}g')^{p_2} \Delta(g^{-1}h^{-1}g') dh \delta(g) d\bar{g} \\ &= \int_G \phi_2(g^{-1}g')^{p_2} \Delta(g^{-1}g') dg = \int_G \phi_2(g^{-1})^{p_2} \Delta(g^{-1}) dg \\ &= \int_G \phi_2(g)^{p_2} dg = \|\phi_2\|_{p_2}^{p_2}\end{aligned}$$

となる.

(4)  $s, t, u$  をそれぞれ (1), (2), (3) で定める. 補題 3.1 より, 任意の  $h' \in H, g' \in G$  に対し

$$\begin{aligned}&\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p'_1})(h'g') \\ &= \int_G \phi_1(g) \phi_2(g^{-1}h'g') \Delta(g^{-1}h'g')^{1/p'_1} dg \\ &= \int_X \int_H \phi_1(hg) \phi_2(g^{-1}h^{-1}h'g') \Delta(g^{-1}h^{-1}h'g')^{1/p'_1} dh \delta(g) d\bar{g} \\ &= \int_X \int_H \frac{s(h, g) t(h'^{-1}hg, g') u(g, h^{-1}h', g') \delta(h^{-1}h')^{1/p'_1}}{\delta(g')^{1/p}} dh d\bar{g}\end{aligned}$$

となる.

(5) 補題 3.1 より

$$\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p'_1})\|_p^p = \int_X \int_H \phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p'_1})(h'g')^p dh' \delta(g') d\bar{g}'$$

となる. よって

$$F(g, h', g') := \int_H s(h, g) t(h'^{-1}hg, g') u(g, h^{-1}h', g') \delta(h^{-1}h')^{1/p'_1} dh.$$

とすると, (4) より

$$\|\phi_1 * (\phi_2 \Delta^{1/p'_1})\|_p^p = \int_X \int_H \left( \int_X F(g, h', g') d\bar{g} \right)^p dh' d\bar{g}'$$

となる.

### 3.2 Hölder の不等式

**事実 3.3** (Hölder の不等式).  $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  とし  $i = 1, \dots, k$  と  $j = 1, \dots, l$  に対し  $p_{i,j}, c_i > 0$  とする. このとき, 測度空間  $G$  上の任意の可測関数  $\phi_1, \dots, \phi_l: G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  に対し

$$\begin{aligned} & \left( \int_G \phi_1(g)^{p_1} \cdots \phi_l(g)^{p_l} dg \right)^c \\ & \leq \left( \int_G \phi_1(g)^{p_{1,1}} \cdots \phi_l(g)^{p_{1,l}} dg \right)^{c_1} \cdots \left( \int_G \phi_1(g)^{p_{k,1}} \cdots \phi_l(g)^{p_{k,l}} dg \right)^{c_k} \end{aligned}$$

となる. ここで,  $j = 1, \dots, l$  に対し

$$c := c_1 + \cdots + c_k, \quad p_j := \frac{p_{1,j}c_1 + \cdots + p_{k,j}c_k}{c}$$

とする.

**例 3.4.**  $\phi_1, \phi_2, S, t, T, u, U$  を例 (3.2) のように定める.  $1 < p_1, p_2, p < \infty$  が式 (1.3) をみたすとする.

(1)式 (1.3) より

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{p_2} \quad (3.2)$$

となるので, 事実 (3.3) より

$$\left( \int_H (t(h^{-1}g, g')u(g, h, g'))^{p_2} dh \right)^{1/p_2} \leq T(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p} U(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p'_1}$$

となる.

(2)式 (1.3) より

$$p \left( \frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} \right) + 1 = p \left( 2 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p} \right) = p$$

となり, 式 (3.2) と同様に  $1/p + 1/p'_2 = 1/p_1$  となる. よって, 例 3.2(1)(3) と事実 3.3 より

$$\begin{aligned} & \left( \int_X S(\bar{g})^{1/p_1} T(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p} U(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p'_1} d\bar{g} \right)^p \\ & \leq \left( \int_X S(\bar{g}) d\bar{g}^{1/p'_2} \int_X U(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g}^{1/p'_1} \right)^p \int_X S(\bar{g}) T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g} \\ & = \left( \|\phi_1\|_{p_1}^{p_1/p'_2} \|\phi_2\|_{p_2}^{p_2/p'_1} \right)^p \int_X S(\bar{g}) T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g} \end{aligned}$$

となる.

### 3.3 証明の完結

この節では, 例 3.2 と例 3.4 を用いて定理 1.2 の証明を完結させる. 定理 1.2 の証明の本質は  $1 < p_1, p_2, p < \infty$  のときなので, この場合に示す.

**定理 1.2 の証明**  $\|\phi_1\|_{p_1} = \|\phi_2\|_{p_2} = 1$  をみたすような  $\phi_1, \phi_2: G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  に対し  $s, S, t, T, u, U$  を例 3.2,  $F$  を例 3.2(5) のように定める. このとき, 例 3.2(5) より

$$\int_X \int_H \left( \int_X F(g, h', g') d\bar{g} \right)^p dh' d\bar{g}' \leq Y(p_1, p_2; H)^p \quad (3.3)$$

を示せばよい. Minkowski の積分不等式より

$$\int_H \left( \int_X F(g, h', g') d\bar{g} \right)^p dh' \leq \left( \int_X \left( \int_H F(g, h', g')^p dh' \right)^{1/p} d\bar{g} \right)^p \quad (3.4)$$

となる. 補題 3.1(1) より  $\delta|_H$  は  $H$  のモジュラー関数なので, 例 3.4(1) より

$$\begin{aligned} \left( \int_H F(g, h', g')^p dh' \right)^{1/p} & \leq Y(p_1, p_2; H) S(\bar{g})^{1/p_1} \left( \int_H (t(h^{-1}g, g')u(g, h, g'))^{p_2} dh \right)^{1/p_2} \\ & \leq Y(p_1, p_2; H) S(\bar{g})^{1/p_1} T(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p} U(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p'_1} \end{aligned}$$

となる. したがって, 式 (3.4) より

$$\int_H \left( \int_X F(g, h', g') d\bar{g} \right)^p dh' \leq \left( Y(p_1, p_2; H) \int_X S(\bar{g})^{1/p_1} T(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p} U(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p'_1} d\bar{g} \right)^p$$

となる.  $\|\phi_1\|_{p_1} = \|\phi_2\|_{p_2} = 1$  と例 3.4(2) より

$$\left( \int_X S(\bar{g})^{1/p_1} T(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p} U(\bar{g}, \bar{g}')^{1/p'_1} d\bar{g} \right)^p \leq \int_X S(\bar{g}) T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g}$$

となるので

$$\int_H \left( \int_X F(g, h', g') d\bar{g} \right)^p dh' \leq Y(p_1, p_2; H)^p \int_X S(\bar{g}) T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g}$$

となる。したがって

$$\int_X \int_H \left( \int_X F(g, h', g') d\bar{g} \right)^p dh' d\bar{g}' \leq Y(p_1, p_2; H)^p \int_X \int_X S(\bar{g}) T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g} d\bar{g}'$$

となる。  $\|\phi_1\|_{p_1} = \|\phi_2\|_{p_2} = 1$  と例 [3.2\(1\)](#) [\(2\)](#) より

$$\int_X \int_X S(\bar{g}) T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g} d\bar{g}' = \int_X \int_X T(\bar{g}, \bar{g}') d\bar{g}' S(\bar{g}) d\bar{g} = \int_X S(\bar{g}) d\bar{g} = 1$$

となるので、式 [\(3.3\)](#) を得る。 □

## 4 系 [1.3](#) の証明

この節では、定理 [1.2](#) と Jing–Tran–Zhang [JTZ23](#) の議論を用いて系 [1.3](#) を証明する。系 [1.3](#) の仮定をみたます（すなわち半単純成分の中心が有限群となる）ような連結 Lie 群  $G$  全体を  $\mathcal{A}$  とする。任意の連結可解 Lie 群は  $\mathcal{A}$  に含まれることに注意する。連結 Lie 群  $G$  の極大コンパクト群の次元を  $r(G)$  とする。系 [1.3](#) を証明するため、次の補題を示す。

**補題 4.1.** 各  $G \in \mathcal{A}$  ごとに実数  $d(G)$  が定まっているとする。  $G/H \in \mathcal{A}$  となるような  $G \in \mathcal{A}$  の任意の連結閉正規部分群  $H \in \mathcal{A}$  に対し

$$d(G) \geq d(H) + d(G/H) \tag{4.1}$$

となるとする。任意の  $G \in \mathcal{A}$  に対し不等式  $I(G)$  を

$$d(G) \geq d(\mathbb{R}) \dim G + (d(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) - d(\mathbb{R}))r(G)$$

で定める。

- (1)  $G \in \mathcal{A}$  の閉正規部分群  $H \in \mathcal{A}$  が  $G/H \in \mathcal{A}$  をみたますとする。このとき、  $I(H)$  と  $I(G/H)$  をみたますならば、  $I(G)$  もみたます。
- (2) 任意の非自明連結可解 Lie 群  $G$  は  $I(G)$  をみたます。

(3)さらに, 任意の  $G \in \mathcal{A}$  と  $G$  の任意の連結閉部分群  $H \in \mathcal{A}$  に対し

$$d(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 0 \leq d(H) \leq d(G) \quad (4.2)$$

となるとする. このとき, 任意の  $G \in \mathcal{A}$  は  $I(G)$  をみたす, すなわち

$$d(G) \geq d(\mathbb{R})(\dim G - r(G)) \quad (4.3)$$

となる.

Jing–Tran–Zhang は本質的に補題 4.1 を用いて Brunn–Minkowski の不等式の Lie 群上への一般化を与えた [JTZ23, Theorem 1.1]. ここで, 補題 4.1(2) の例を見る.

**例 4.2.** (1)任意の  $G \in \mathcal{A}$  と  $G$  の任意の連結閉正規部分群  $H \in \mathcal{A}$  に対し式 (4.1) の等号が成立するとき, 任意の連結可解 Lie 群  $G$  に対し  $I(G)$  の等号が成立することを示す.  $G$  が非自明ならば,  $d(G)$  を  $-d(G)$  に置き換えて補題 4.1(2) を適用することで条件  $I(G)$  の等号が成立することが示せる.  $G$  が自明群ならば, 式 (4.1) の等号が成立することより  $d(G) = d(G) + d(G)$  となる. したがって,  $d(G) = r(G) = 0$  となるので  $I(G)$  の等号が成立する.

(2)連結 Lie 群  $G$  に対し  $d(G) := \text{rank}(\ker(\tilde{G} \rightarrow G))$  とする. ここで,  $\tilde{G}$  は  $G$  の普遍被覆群とする. このとき, 任意の連結可解 Lie 群  $G$  に対し  $d(G) = r(G)$  となることを示す. ここで,  $\tilde{G}$  は  $G$  の普遍被覆群である.  $\ker(\tilde{G} \rightarrow G)$  は  $G$  の基本群  $\pi_1(G)$  と同型である [HN12, Theorem 9.5.4]. 任意の  $G \in \mathcal{A}$  と  $G$  の任意の連結閉正規部分群  $H \in \mathcal{A}$  に対し  $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G)$  は単射で  $\pi_1(G)/\pi_1(H)$  は  $\pi_1(G/H)$  と同型なので [HN12, Remark 11.1.17]

$$d(G) = \text{rank}(\pi_1(G)) = \text{rank}(\pi_1(H)) + \text{rank}(\pi_1(G/H)) = d(H) + d(G/H)$$

となる. したがって, (1) より任意の連結可解 Lie 群  $G$  に対し  $I(G)$  の等号が成立する. このとき,  $d(\mathbb{R}) = 0$  かつ  $d(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 1$  なので

$$d(G) = d(\mathbb{R}) \dim G + (d(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) - d(\mathbb{R}))r(G) = r(G)$$

となる.

補題 4.1 を証明するため, 次の補題を示す.

**補題 4.3.**  $G$  を連結 Lie 群とする.

- (1) 任意の閉正規部分群  $H \triangleleft G$  に対し  $r(G) = r(H) + r(G/H)$  となる。  
(2)  $\dim G \geq 2$  かつ  $G$  が可解 Lie 群ならば, 次の条件 (i) をみたす。  
(i)  $G/H \in \mathcal{A}$  かつ  $1 \leq \dim H < \dim G$  となるような  $G$  の閉正規部分群  $H \in \mathcal{A}$  が存在する。  
(3)  $G \in \mathcal{A}$  かつ  $\dim G \geq 2$  とする。このとき,  $G$  が (i) をみたさないならば,  $\dim H < \dim G$  となるような  $G$  のある閉部分群  $H \in \mathcal{A}$  が存在して

$$\dim H - r(H) = \dim G - r(G) \quad (4.4)$$

となる。

**証明** (1)  $K \subset G$  を  $G$  の極大コンパクト群とすると,  $K \cap H$  と  $K/(K \cap H)$  はそれぞれ  $H$  と  $G/H$  の極大コンパクト群である [HN12, Theorem 14.3.13 (i) (a)]. したがって

$$r(G) = \dim K = \dim(K \cap H) + \dim(K/(K \cap H)) = r(H) + r(G/H)$$

となる。

- (2)  $G$  は可解 Lie 群なので  $\dim(G/H) = 1$  となるような連結可解閉正規部分群  $H \triangleleft G$  が存在する。このとき,  $\dim G \geq 2$  と

$$\dim G = \dim H + \dim(G/H) \quad (4.5)$$

より  $1 \leq \dim H < \dim G$  となる。  $\dim(G/H) = 1$  より  $G/H$  は可換 Lie 群なので,  $G/H \in \mathcal{A}$  となる。したがって,  $G$  は (i) をみたす。

- (3)  $G$  の根基 (最大可解連結閉正規部分群) を  $R \triangleleft G$  とする。  $\dim G \geq 2$  かつ  $G$  は (i) をみたさないので, (2) より  $G$  は可解 Lie 群ではない。したがって,  $\dim R < \dim G$  となる。  $G \in \mathcal{A}$  より  $G/R \in \mathcal{A}$  となるので,  $G$  が (i) をみたさないことより  $G$  は半単純 (すなわち  $\dim R = 0$ ) となる。  $G = KAN$  を岩澤分解とすると, 閉部分群  $H := AN \subset G$  は単連結可解 Lie 群である [Kna02, Theorem 6.46]. したがって,  $\dim H < \dim G$ ,  $H \in \mathcal{A}$ , かつ,  $r(H) = 0$  となる。  $G \in \mathcal{A}$  より  $K \subset G$  は  $G$  の極大コンパクト群なので [Kna02, Theorem 6.31 (g)]

$$\dim H - r(H) = \dim G - \dim K = \dim G - r(G)$$

となる.

□

**補題 4.1 の証明** (1)  $I(H)$ ,  $I(G/H)$ , および, 式 (4.1) より

$$d(G) \geq d(\mathbb{R})(\dim H + \dim(G/H)) + (d(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) - d(\mathbb{R}))(r(H) + r(G/H))$$

となる. したがって, 式 (4.5) と補題 4.3 (1) から  $I(G)$  が従う.

(2)  $\dim G$  に関する帰納法で示す.  $\dim G = 1$  ならば  $G = \mathbb{R}$  または  $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  となる.  $r(\mathbb{R}) = 0$  より  $I(\mathbb{R})$  をみだし, 同様に  $r(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 1$  より  $I(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  をみだす.

$\dim G \geq 2$  とする. 次元が  $\dim G$  未満のときに結論が成り立つとし,  $I(G)$  を示す.  $G$  は可解 Lie 群なので, 補題 4.3 (2) より条件 (i) をみだす. このとき  $H$  と  $G/H$  は連結可解 Lie 群なので, 帰納法の仮定より  $I(H)$  と  $I(G/H)$  が成り立つ. したがって, (1) より  $I(G)$  も成り立つ.

(3)  $\dim G$  に関する帰納法で示す.  $\dim G = 0$  ならば  $r(G) = 0$  なので

$$d(G) \geq 0 = d(\mathbb{R})(\dim G - r(G))$$

となる.  $\dim G = 1$  のとき  $G$  は可解 Lie 群である. このとき, (2) より  $I(G)$  をみだす.

$\dim G \geq 2$  とする. 次元が  $\dim G$  未満のときに結論が成り立つとし,  $I(G)$  を示す.  $G$  が条件 (i) をみだすときは (1) から従うので, 条件 (i) をみださないときに  $I(G)$  を示せばよい. このとき, 補題 4.3 (3) より  $\dim H < \dim G$  となるような  $G$  のある閉部分群  $H \in \mathcal{A}$  が存在して式 (4.4) をみだす. 帰納法の仮定より  $I(H)$  をみだすので, 式 (4.2) と式 (4.3) より

$$d(G) \geq d(H) \geq d(\mathbb{R})(\dim H - r(H))$$

となる. したがって, 式 (4.4) から  $I(G)$  を得る.

□

**系 1.3 の証明** 任意の局所コンパクト群  $G$  に対し  $d(G) := -\ln(Y(p_1, p_2; G))$  とすると, 任意の連結閉正規部分群  $H \triangleleft G$  に対し式 (1.4) より

$$\begin{aligned} d(G) &:= -\ln(Y(p_1, p_2; G)) \\ &\geq -\ln(Y(p_1, p_2; H)Y(p_1, p_2; G/H)) \\ &= -\ln(Y(p_1, p_2; H)) - \ln(Y(p_1, p_2; G/H)) \\ &= d(H) + d(G/H) \end{aligned}$$

となり式 (4.1) をみたま。任意の閉部分群  $H \subset G$  に対し定理 1.2 より

$$d(G) := -\ln(Y(p_1, p_2; G)) \geq -\ln(Y(p_1, p_2; H)) = d(H) \quad (4.6)$$

となる。例 2.1 (1) より

$$d(H) := -\ln(Y(p_1, p_2; H)) \geq 0 \quad (4.7)$$

となり、系 2.2 より  $H := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ならば等号が成立する。式 (4.6) と式 (4.7) より式 (4.2) が成り立つので、補題 4.1 (3) より  $G \in \mathcal{A}$  に対し式 (4.3) をみたま。したがって

$$Y(p_1, p_2; G) = e^{-d(G)} \leq e^{-d(\mathbb{R})(\dim G - r(G))} = Y(p_1, p_2; \mathbb{R})^{\dim G - r(G)}$$

を得る。 □

## 参考文献

- [Bal89] K. Ball. “Volumes of sections of cubes and related problems”. *Geometric aspects of functional analysis (1987–88)*. Vol. 1376. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1989, pp. 251–260.
- [Bar98a] F. Barthe. “On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality”. *Invent. Math.* 134.2 (1998), pp. 335–361.
- [Bar98b] F. Barthe. “Optimal Young’s inequality and its converse: a simple proof”. *Geom. Funct. Anal.* 8.2 (1998), pp. 234–242.
- [Bar+11] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin, M. Ledoux, and B. Maurey. “Correlation and Brascamp-Lieb inequalities for Markov semigroups”. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 10 (2011), pp. 2177–2216.
- [Bec75] W. Beckner. “Inequalities in Fourier analysis”. *Ann. of Math. (2)* 102.1 (1975), pp. 159–182.
- [Ben14] J. Bennett. “Aspects of multilinear harmonic analysis related to transversality”. *Harmonic analysis and partial differential equations*. Vol. 612. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, pp. 1–28.
- [BB09] J. Bennett and N. Bez. “Closure properties of solutions to heat inequalities”. *J. Geom. Anal.* 19.3 (2009), pp. 584–600.

- [Ben+20] J. Bennett, N. Bez, S. Buschenhenke, M. G. Cowling, and T. C. Flock. “On the nonlinear Brascamp-Lieb inequality”. *Duke Math. J.* 169.17 (2020), pp. 3291–3338.
- [Ben+17] J. Bennett, N. Bez, M. G. Cowling, and T. C. Flock. “Behaviour of the Brascamp-Lieb constant”. *Bull. Lond. Math. Soc.* 49.3 (2017), pp. 512–518.
- [Ben+08] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, and T. Tao. “The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals”. *Geom. Funct. Anal.* 17.5 (2008), pp. 1343–1415.
- [Ben+10] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, and T. Tao. “Finite bounds for Hölder-Brascamp-Lieb multilinear inequalities”. *Math. Res. Lett.* 17.4 (2010), pp. 647–666.
- [BL76] H. J. Brascamp and E. H. Lieb. “Best constants in Young’s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions”. *Advances in Math.* 20.2 (1976), pp. 151–173.
- [Bra17] S. Brazitikos. “Brascamp-Lieb inequality and quantitative versions of Helly’s theorem”. *Mathematika* 63.1 (2017), pp. 272–291.
- [Car07] A. Carbery. “The Brascamp-Lieb inequalities: recent developments”. *NAFSA 8—Nonlinear analysis, function spaces and applications. Vol. 8.* Czech. Acad. Sci., Prague, 2007, pp. 8–34.
- [CLL04] E. A. Carlen, E. H. Lieb, and M. Loss. “A sharp analog of Young’s inequality on  $S^N$  and related entropy inequalities”. *J. Geom. Anal.* 14.3 (2004), pp. 487–520.
- [CL10] D. Cordero-Erausquin and M. Ledoux. “The geometry of Euclidean convolution inequalities and entropy”. *Proc. Amer. Math. Soc.* 138.8 (2010), pp. 2755–2769.
- [Cow+19] M. G. Cowling, A. Martini, D. Müller, and J. Parcet. “The Hausdorff-Young inequality on Lie groups”. *Math. Ann.* 375.1-2 (2019), pp. 93–131.
- [Dar53] G. Darmais. “Analyse générale des liaisons stochastiques. Etude particulière de l’analyse factorielle linéaire”. *Rev. Inst. Internat. Statist.* 21 (1953), pp. 2–8.

- [Fou77] J. J. F. Fournier. “Sharpness in Young’s inequality for convolution”. *Pacific J. Math.* 72.2 (1977), pp. 383–397.
- [Gar02] R. J. Gardner. “The Brunn-Minkowski inequality”. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 39.3 (2002), pp. 355–405.
- [Gar+18] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson. “Algorithmic and optimization aspects of Brascamp-Lieb inequalities, via operator scaling”. *Geom. Funct. Anal.* 28.1 (2018), pp. 100–145.
- [Gle51] A. M. Gleason. “The structure of locally compact groups”. *Duke Math. J.* 18 (1951), pp. 85–104.
- [HM53] R. Henstock and A. M. Macbeath. “On the measure of sum-sets. I. The theorems of Brunn, Minkowski, and Lusternik”. *Proc. London Math. Soc. (3)* 3 (1953), pp. 182–194.
- [HR79] E. Hewitt and K. A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I. Second. Vol. 115.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979, pp. ix+519.
- [HN12] J. Hilgert and K.-H. Neeb. *Structure and geometry of Lie groups.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2012, pp. x+744.
- [IV15] P. Ivanisvili and A. Volberg. “Hessian of Bellman functions and uniqueness of the Brascamp-Lieb inequality”. *J. Lond. Math. Soc. (2)* 92.3 (2015), pp. 657–674.
- [Iwa49] K. Iwasawa. “On some types of topological groups”. *Ann. of Math. (2)* 50 (1949), pp. 507–558.
- [JTZ23] Y. Jing, C.-M. Tran, and R. Zhang. “A nonabelian Brunn-Minkowski inequality”. *Geom. Funct. Anal.* 33.4 (2023), pp. 1048–1100.
- [KR78] A. Klein and B. Russo. “Sharp inequalities for Weyl operators and Heisenberg groups”. *Math. Ann.* 235.2 (1978), pp. 175–194.
- [Kna02] A. W. Knaapp. *Lie groups beyond an introduction.* Second. Vol. 140. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002, pp. xviii+812.
- [Led14] M. Ledoux. “Remarks on Gaussian noise stability, Brascamp-Lieb and Slepian inequalities”. *Geometric aspects of functional analysis.* Vol. 2116. Lecture Notes in Math. Springer, Cham, 2014, pp. 309–333.

- [Leh14] J. Lehec. “Short probabilistic proof of the Brascamp-Lieb and Barthe theorems”. *Canad. Math. Bull.* 57.3 (2014), pp. 585–597.
- [Lie90] E. H. Lieb. “Gaussian kernels have only Gaussian maximizers”. *Invent. Math.* 102.1 (1990), pp. 179–208.
- [Nie94] O. A. Nielsen. “Sharpness in Young’s inequality for convolution products”. *Canad. J. Math.* 46.6 (1994), pp. 1287–1298.
- [Sat22] T. Satomi. “An inequality for the compositions of convex functions with convolutions and an alternative proof of the Brunn-Minkowski-Kemperman inequality”. *Tr. Mat. Inst. Steklova* 319 (2022), pp. 280–297.
- [Sat23] T. Satomi. “An Inequality for the Convolutions on Unimodular Locally Compact Groups and the Optimal Constant of Young’s Inequality”. *J. Fourier Anal. Appl.* 29.1 (2023), Paper No. 13.
- [Sat24] T. Satomi. “Inequality on the optimal constant of Young’s convolution inequality for locally compact groups and their closed subgroups”. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 203.2 (2024), pp. 805–821.
- [Ski53] V. P. Skitovič. “On a property of the normal distribution”. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 89 (1953), pp. 217–219.
- [Ter17] M. Terp. “ $L^p$  Fourier transformation on non-unimodular locally compact groups”. *Adv. Oper. Theory* 2.4 (2017), pp. 547–583.
- [Val08] S. I. Valdimarsson. “Optimisers for the Brascamp-Lieb inequality”. *Israel J. Math.* 168 (2008), pp. 253–274.
- [Val10] S. I. Valdimarsson. “The Brascamp-Lieb polyhedron”. *Canad. J. Math.* 62.4 (2010), pp. 870–888.
- [Wei40] A. Weil. *L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 869. Hermann et Cie., Paris, 1940.
- [Yam53] H. Yamabe. “A generalization of a theorem of Gleason”. *Ann. of Math. (2)* 58 (1953), pp. 351–365.

# 非加法的集合関数の加法的表現について

成川康男 (玉川大工)\*

## 1. はじめに

空集合の値が0で単調な非加法的集合関数は、経済学、決定理論、人工知能で使用されており、協力ゲーム、容量、ファジィ測度など、さまざまな名称で呼ばれている。本論文では、Denneberg [4] に従い、これらを非加法的測度と呼ぶことにする。非加法的測度に関しては様々な積分概念が提案されており、それぞれに理論・応用の両面で研究が進められている。その中で最も基本的なものと考えられるのはChoquet積分で、これは意思決定、画像処理などの [8, 10, 25] の基本的な道具になる。

非加法的測度を加法的集合関数で表すことは、古くから研究されてきた。その中で最も普及したのはRota[19]によるとされる包除原理を利用したメビウス変換の理論である。 $X$  を有限集合として  $2^X$  上の非加法的集合関数を  $\mu$  とするとき集合関数  $\nu$  を  $\nu(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B)$  で定める。この  $\nu$  を  $\mu$  のメビウス変換という。このとき、 $\mu(A) = \sum_{B \subset A} \nu(B)$  が成り立つ。この式を非加法的測度  $\mu$  の加法的表現ということにする。この関係式は、古くは1950年代のShapley[23]の論文にもみられる。また、Dempster-Shafer [22] ではBelief関数の基本確率割り当てという名前を与えられ証拠の理論の主要な概念となっている。

これらを拡張することも以前から試みられている。室伏と菅野 [13, 14, 15] は、セミフィルターと普遍枠という概念を提示し非加法的測度とChoquet積分の加法表現定理を示し非加法測度とその非加法性を通じて部分集合間の相互作用を表現するという解釈を提案した。成川 [17] はコンパクト凸集合の要素の積分表示に関するChoquetの定理 [2, 3] の応用として類似の定理が得られることを示した。なお、Choquetの定理については最近Phelps[18]のモノグラフが出版され河邊 [11] による書評が雑誌「数学」に掲載されている。

一方,Denneberg[5]はTilde operator という概念を集合や集合族に導入し、非加法的測度の加法的表現の拡張を示した。これは1950年代のRuvuz[20]の論文でも触れられていたものであるが、のちに、証明に誤りがありそれを修正したとの論文 [9] も出されている。また、Dennebergの論文はゲーム理論の分野でのGilboa、Schmeidler [6, 7] やMarinacci[12]の成果を統一し、一般化したものである。

本論文では、これらの加法的表現の方法や結果を概観し、それらの本質的に同じ部分と相違部分を明確にすることを目的とする。

## 2. 非加法的測度とChoquet積分

この章では、非加法的測度とそれに関するChoquet積分の定義と記号を定め、最も基本的な結果を示す。

**定義 1**  $X$  を全体集合とし、 $\mathcal{X}$  をその  $\sigma$ -集合体、すなわち、 $(X, \mathcal{X})$  を可測空間とする。非加法的測度  $\mu$  とは、実数値集合関数  $\mu : \mathcal{X} \rightarrow R^+$  ( $R^+ = [0, \infty)$ ) で次の性質をもつものである。

本研究は科研費 (課題番号 : 25K15266) の助成を受けたものである。

\* e-mail: nrkwy@eng.tamagawa.ac.jp

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) (単調性)  $A \subset B, A, B \in \mathcal{X}$  であるとき  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

$(X, \mathcal{X}, \mu)$  を非加法的測度空間という。

$\mu(X) = \infty$  でも問題ない場合もあるがここでは  $0 < \mu(X) < \infty$  であるものとする。  
このとき、非加法的測度  $\mu$  の共役  $\mu^c$  を  $\mu^c(A) = \mu(X) - \mu(A^c)$  for  $A \in \mathcal{X}$  で定義する。

ここで、有界な可測関数の集合を  $B$  とかき、非負で有界な可測関数の集合を  $B^+$  とかくことにする。

**定義 2** [1, 13]  $\mu$  を  $(X, \mathcal{X})$  上の非加法的測度とする。

1.  $f \in B^+$  の  $\mu$  に関する Choquet 積分は

$$(C) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu_f(r) dr$$

で定義される。ここで  $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$  である。

2.  $\mu(X) < \infty$  であるとき、 $f \in B$  の  $\mu$  に関する Choquet 積分は

$$(C) \int f d\mu = (C) \int f^+ d\mu - (C) \int f^- d\mu^c$$

で定義される。ここで  $f^+ = f \vee 0$ ,  $f^- = -(f \wedge 0)$  である。

非加法的測度  $\mu$  に関する可測関数  $f$  の Choquet 積分を  $C_f(\mu)$  とかくこともある。

**定義 3**  $\mathcal{X}$  上の集合関数  $\mu$  が  $k$  単調 ( $k$ -monotone) ( $k \geq 2$ ) であるとは  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{X}$  に対して

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + \sum_{I \subset \{1, \dots, k\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \mu\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \geq 0.$$

が成り立つことをいう。

特に、 $k = 2$  のとき、2-単調集合関数は

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

となる。このとき、超モジュラー (Super modular) ということもある。

また、 $\mu$  が全単調 (Totally monotone) とは単調かつすべての  $k \geq 2$  に対して  $k$  単調であることをいう。もし、 $\mu(X) = 1$  で  $\mu$  が全単調であるとき、 $\mu$  は Dempster Shafer 理論 [22] の Belief 関数である。

$(X, \mathcal{X})$  上の非加法的測度の集合を  $\mathcal{FM}^+$  とかく。次に  $\mathcal{FM} := \{\mu - \nu | \mu, \nu \in \mathcal{FM}^+\}$  と  $\mathcal{FM}^1 := \{\mu \in \mathcal{FM}^+ | \mu(X) = 1\}$  とする。

$f \in B^+$  に対して、写像  $C_f: \mathcal{FM} \rightarrow R$  を  $C_f(\mu) := (C) \int f d\mu$  で定義する。

$A \in \mathcal{X}$  に対して  $C_A = C_{1_A}$  とかくことにする。どの  $f \in B^+$  を固定しても  $C_f$  は  $\mathcal{FM}$  上の線形写像である。

**定義 4**  $\mathcal{FM}$  上の位相を考える。すべての  $A \in \mathcal{X}$  に対して  $C_A$  を連続するもっと粗い位相を  $\mathcal{X}$ -topology という、また、すべての  $f \in B^+$  に対して  $C_f$  を連続にするもっとも粗い位相を  $B^+$ -topology という。

**定義 5**  $X$  をベクトル空間とし、 $A \subset X$  とする。 $A$  の凸包  $c(A)$  は

$$c(A) = \cap \{Y | A \subset Y, Y \text{ is a convex set}\}.$$

で定義される。

$x_1, x_2 \in A$  に対して  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2; x_1, x_2 \in X, 0 \leq \lambda \leq 1$  ならば  $x_1 = x_2 = x$  が成り立つとき、 $x \in A$  は  $A$  の端点という。 $A$  の端点の集合を  $\mathcal{E}(A)$  とかく。

**定義 6** すべての  $A \in \mathcal{X}$  に対して、0 または 1 の値をとる非加法的測度を 0-1 非加法的測度という。 $\mathcal{X}$  上の 0-1 非加法的測度全体の集合を  $\mathcal{FM}_0^1$  とかく。すなわち、

$$\mathcal{FM}_0^1 = \{\mu | \mu \in \mathcal{FM}^+, \mu : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}\}.$$

### 3. セミフィルターの理論

この章では、室伏・菅野 [13, 14, 15] にしたがって、セミフィルターとインタープリターによる表現を紹介する。

**定義 7**  $(X, \mathcal{X})$  と  $(Y, \mathcal{Y})$  を可測空間とする。

1. 次の条件を満たす写像  $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  を  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{Y}$  へのインタープリターという。
  - (a)  $H(\emptyset) = \emptyset$ ,
  - (b)  $A \subset B, A, B \in \mathcal{X}$  ならば  $H(A) \subset H(B)$ .
2.  $H$  が  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{Y}$  へのインタープリターであるとき、 $(Y, \mathcal{Y}, H)$  を  $(X, \mathcal{X})$  の枠という。
3.  $H$  は  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{Y}$  へのインタープリター、 $m$  は  $(Y, \mathcal{Y})$  上の (古典的な) 加法的測度として  $\mu = m \circ H$  が成り立つとき、 $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$  は  $\mu$  のインタープリター表現という。

$(X, \mathcal{X})$  を可測空間とし、 $\mu$  を非加法的測度とする。 $Y$  を実軸の开区間  $(0, \mu(X))$  とする。すなわち、 $Y = (0, \mu(X))$ 。さらに  $\mathcal{Y}$  を  $Y$  のボレル集合体、 $m$  は  $\mathcal{Y}$  上のルベグ測度とする。ここで、インタープリター  $H : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  を  $H(A) = (0, \mu(A))$ 、 $A \in \mathcal{X}$  で定義する。

このとき、 $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$  は  $\mu$  のインタープリター表現となる。

すなわち以下の定理が成り立つ。

**定理 1**  $(X, \mathcal{X})$  を可測空間とし、 $\mu$  を非加法的測度とする。 $\mu$  のインタープリター表現が存在する。

非加法的測度のインタープリター表現は複数考えられるが、室伏 [15] では同値の概念を導入した。

**定義 8**  $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$  が非加法的測度のインタープリター表現であるとき  $\{H(A) | X \in \mathcal{X}\}$  で生成される  $\sigma$  集合体を  $\hat{\mathcal{Y}}$  とかく。ここで、1つの非加法的測度に対する2つのインタープリター表現を  $R_1 = (Y_1, \mathcal{Y}_1, m_1, H_1)$ ,  $R_2 = (Y_2, \mathcal{Y}_2, m_2, H_2)$  とする。 $R_1$  と  $R_2$  が同値であるとは、 $(\mathcal{Y}_1, m_1)$  から  $(\mathcal{Y}_2, m_2)$  への同型写像  $T$  が存在し  $T \circ H_1 = H_2$  が成り立つことをいう。

**定義 9**  $(X, \mathcal{X})$  を可測空間とする。

1.  $(X, \mathcal{X})$  上のセミフィルター  $\theta$  とは空でない  $\mathcal{X}$  の部分集合 ( $\theta \subset \mathcal{X}$ ) で次の性質を満たすものをいう。

(1)  $\emptyset \notin \theta$ , (2)  $A \in \theta$  かつ  $A \subset B \in \mathcal{X}$  であるならば  $B \in \theta$ .

$(X, \mathcal{X})$  上のすべてのセミフィルターの集合を  $S_X$  とし、写像  $H_X : \mathcal{X} \rightarrow 2^{S_X}$  を  $H_X(A) := \{\theta \in S_X | A \in \theta\}$ . で定義する。

ここで  $\{H_X(A) | A \in \mathcal{X}\}$ . によって生成される  $\sigma$ -集合体を  $\mathcal{S}_X$  とかく。

2.  $(S_X, \mathcal{S}_X, H_X)$  を  $(X, \mathcal{X})$  の表現のための普遍枠という。

以下で有限の場合の例を見ておこう。

**例 10**  $X = \{x_1, x_2\}$  のとき  $\mathcal{X} = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$  である。

このとき、セミフィルターは

$$\theta_1 = \{\{x_1, x_2\}\},$$

$$\theta_2 = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$$

$$\theta_3 = \{\{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$$

$$\theta_4 = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$$

の4つである。したがって、 $S_X = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$  となる。

このとき  $H_X(\{x_1\}) = \{\theta_2, \theta_4\}$ ,  $H_X(\{x_2\}) = \{\theta_3, \theta_4\}$ ,  $H_X(\{x_1, x_2\}) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ , となる。

$H_X(\{x_1\}) \cap H_X(\{x_2\}) = \{\theta_4\}$ , であることから、 $\mathcal{S}_X$  は  $S_X$  のべき集合である。すなわち、 $\mathcal{S}_X = 2^{S_X}$  である。

ここで、 $(X, \mathcal{X})$  上の非加法的測度  $\mu$  を

$$\mu(\{x_1\}) = m_0 + m_1$$

$$\mu(\{x_2\}) = m_0 + m_2$$

$$\mu(\{x_1, x_2\}) = m_0 + m_1 + m_2$$

としよう。このとき  $\mathcal{S}_X$  上の加法的測度  $m$  を

$$m(\{\theta_1\}) = m_0, m(\{\theta_2\}) = m_1, m(\{\theta_3\}) = m_2, m(\{\theta_4\}) = m_3,$$

とすることができる。

非加法的測度のインタープリター表現は複数考えられるが、室伏 [15] では同値の概念を導入した。

**定義 11**  $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$  が非加法的測度のインタープリター表現であるとき  $\{H(A) | X \in \mathcal{X}\}$  で生成される  $\sigma$  集合体を  $\hat{\mathcal{Y}}$  とかく。ここで、1つの非加法的測度に対する2つのインタープリター表現を  $R_1 = (Y_1, \mathcal{Y}_1, m_1, H_1)$ ,  $R_2 = (Y_2, \mathcal{Y}_2, m_2, H_2)$  とする。

$R_1$  と  $R_2$  が同値であるとは、 $(\mathcal{Y}_1, m_1)$  から  $(\mathcal{Y}_2, m_2)$  への同型写像  $T$  が存在し  $T \circ H_1 = H_2$  が成り立つことをいう。

**定理 2**  $(X, \mathcal{X})$  上の非加法的測度  $\mu$  に対して  $\mathcal{S}_X$  上の加法的測度  $m$  が存在し、 $R_s = (S_X, \mathcal{S}_X, m, H_X)$  は  $\mu$  のインタープリター表現となる。また、任意のインタープリター表現  $R$  は  $R_s$  と同値である。

次に積分に関して見ていこう。まず、被積分関数から考える。

**定義 12** 非加法的測度空間  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  のインタープリター表現を  $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$  とする。 $X$  上の非負可測関数  $f$  に対して、 $Y$  上の関数  $i_f$  を  $i_f(y) := \sup\{r | y \in H(\{f \geq r\})\}$  で定義する。 $i_f$  を  $H$  により生成された可測関数  $f$  のインタープリターと呼ぶ。

Choquet 積分に関しては以下の表現定理が成り立つ。

**定理 3**  $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$  を非加法的測度空間  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  のインタープリター表現、 $i_f$  を  $H$  により生成された非負値可測関数  $f$  のインタープリターとすると、

$$(C) \int f d\mu = \int i_f dm.$$

が成り立つ。

定理 2 と定理 3 から以下の定理が成り立つ。

**定理 4** (Interpreter representation theorem)  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  を非加法的測度空間とすると、 $\mathcal{S}_X$  上の古典的 (加法的) 測度  $m$  が存在し任意の  $f \in B^+$  に対して

$$(C) \int f d\mu = \int i_f dm$$

が成り立つ。

ここで、例 10 での積分の様子を見てみよう。

**例 13**  $X = \{x_1, x_2\}$  として  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, y_1 \leq y_2$  とする。

このとき、

$$H(\{f \geq y_1\}) = H(X) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\},$$

$$H(\{f \geq y_2\}) = H(\{x_2\}) = \{\theta_3, \theta_4\}$$

であり、

$$i_f(\theta_1) = y_1, i_f(\theta_2) = y_1, i_f(\theta_3) = y_2, i_f(\theta_4) = y_2$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned} m(\{\theta_1, \theta_2\}) &= m(\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}) - m(\{\theta_3, \theta_4\}) \\ &= m(H_X(\{x_1, x_2\})) - m(H_X(\{x_2\})) \quad , \\ &= \mu(\{x_1, x_2\}) - \mu(\{x_2\}) \end{aligned}$$

$$m(\{\theta_3, \theta_4\}) = m(H_X(\{x_2\})) = \mu(\{x_2\})$$

となるので

$$\begin{aligned}
\int i_f dm &= y_1 m(\{\theta_1, \theta_2\}) + y_2 m(\{\theta_3, \theta_4\}) \\
&= f(x_1)(\mu(\{x_1, x_2\}) - \mu(\{x_2\})) + f(x_2)\mu(\{x_2\}) \\
&= (C) \int f d\mu
\end{aligned}$$

である。

室伏・浜田 [16] はデータの可視化を目標にして、インタープリター表現に基づいた非加法的測度の図による表示に取り組んでいる。

#### 4. Choquet の定理に基づいた表現

本章では、コンパクト凸集合の要素の積分表示に関する Choquet の定理を利用して非加法的測度と Choquet 積分の表現を紹介する。

以下、Choquet の名著として知られる [2] にしたがって基本的な概念を概観しよう。

$E$  をハウスドルフ局所凸空間とし、 $Y \subset E$  はコンパクトで凸であるとする。 $Y$  上の連続な凸関数の集合を  $S(Y)$  とおき、 $A(Y) := S(Y) \cap (-S(Y))$  とする。 $K(E, R)$  をコンパクトな台をもつ連続関数  $f : E \rightarrow R$  の集合とする。 $K(E, R)$  上には  $f \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$  for all  $x \in E$  で順序を定める。

$E$  上のラドン測度  $\mu$  は線形写像  $\mu : K(E, R) \rightarrow R$  で任意のコンパクト集合  $Y \subset E$  に対して、 $M_Y > 0$  が存在して、 $f \in K(E, R)$  かつ  $\text{supp}(f) \subset Y$  ならば  $\mu(f) \leq M_Y \|f\|$  が成り立つものをいう。ここで、 $\text{supp}(f)$  は  $f$  の台であり、 $\|\cdot\|$  は sup ノルムである。

$E$  上のラドン測度の集合を  $\mathcal{R}(E)$  とかき、 $\mathcal{R}(E)$  に  $\mu \geq 0 \Leftrightarrow$  if and only if  $\mu(f) \geq 0$  for all  $f \geq 0, f \in K(E, R)$  で順序を定める。

この順序により定められた正のラドン測度の集合を  $\mathcal{R}^+(E)$  とかく。 $\mathcal{R}^+(Y)$  上の順序  $\prec$  とかく、すなわち  $\mu \prec \nu \Leftrightarrow \mu(f) \leq \nu(f)$  for all  $f \in S(Y)$  である。 $\prec$  に関する極大元  $m \in \mathcal{R}^+(Y)$  が存在し、これを極大測度という。

$\mu \in \mathcal{R}(E)$  に対して  $\|\mu\| := \sup\{\mu(f) \mid f \in K(E, R), \|f\| \leq 1\}$ . とし、 $\mathcal{R}^1 := \{\mu \in \mathcal{R}^+(E) \mid \|\mu\| = 1\}$ . とする。

**定義 14**  $E$  は Hausdorff 局所凸空間、 $X \subset E$  は凸集合でコンパクトとする。 $a \in E$  が  $\mu \in \mathcal{R}(X)$  のリザルタント (resultant) とは、任意の  $E$  から  $R$  への連続線形写像  $\ell$  に対して

$$\ell(a) = \mu(\ell)$$

が成り立つときを言う。

任意の  $\mu \in \mathcal{R}(X)$  に対してリザルタントは唯一存在する [2]。  $\mu \in \mathcal{R}(X)$  にたいするリザルタントを  $r(\mu)$  とかく。

以下が Choquet の定理である。

**定理 15** (Choquet Theorem)

$E$  は Hausdorff 局所凸空間、 $X \subset E$  は凸集合でコンパクトとする。任意の  $x \in X$  に対して極大測度  $\mu \in \mathcal{R}^1(X)$  が存在して、

$$x = r(\mu)$$

そして、任意の  $f \in S(X)$  に対して

$$\mu(X \setminus X_f) = 0$$

$X$ が距離づけ可能のとき

$$\mu(X \setminus \mathcal{E}(X)) = 0$$

$f$  を有界な実数値関数とし  $\hat{f}(Y) := \inf\{g(x) \mid g \in (-S(Y)), g \geq f\}$  とする。

$Y_f$  が  $f$  の境界集合とは  $Y_f = \{x \in Y \mid f(x) = \hat{f}(x)\}$  であることをいう。

ここで、 $\mathcal{FM}$  に  $B^+$  - topology を導入しすると、これはハウスドルフ局所凸空間であり、 $\mathcal{FM}^1$  はコンパクト凸である。

$f \in B^+$  に対して関数  $h_f : \mathcal{FM}^1 \rightarrow \mathbb{R}$   $h_f(\mu) = C_f(\mu)$  で定める。

このとき、 $h_f$  は線形で連続である。ここで Choquet の定理 (定理 15) により、極大ラドン測度  $m \in \mathcal{R}(\mathcal{FM}^1)$  が存在し  $h_f = m(h_f)$  が成り立つ。さらに  $m(\mathcal{FM}^1 \setminus G_A) = 0$  ここで  $G_A := \{\mu \in \mathcal{FM}^1 \mid \mu(A) = 0 \text{ or } \mu(A) = 1\}$ ,  $A \in \mathcal{X}$ . である。

リースの表現定理を利用すると次の定理が得られる。

**定理 5** 任意の  $\mu \in \mathcal{FM}^1$ , に対して、極大ラドン測度が存在し  $m \in \mathcal{R}^1$

$$(C) \int f d\mu = \int h_f dm,$$

for all  $f \in B^+$  が成り立つ。また、すべての  $A \in \mathcal{X}$  に対して  $m(\mathcal{FM}^1 \setminus G_A) = 0$  である。

もし、 $\mathcal{FM}^1$  が距離づけ可能のとき、 $m(\mathcal{FM}^1 \setminus \mathcal{FM}_0^1) = 0$  が成り立つ。

$(h_f, m)$  を  $(f, \mu)$  の Choquet 表現であるという。

$\mathcal{FM}^1$  の距離づけ可能性について次の命題が成立する。

**命題 1**  $B^+$  が可分であれば、 $\mathcal{FM}^1$  は可分かつ距離づけ可能である。

次に、Choquet 表現の一意性を検討する。まず、Choquet 単体を定義する。 $Y \subset E$  をコンパクトな凸集合とする。

$\tilde{Y} = \{(\lambda x, \lambda) \mid x \in Y, \lambda > 0\}$  および  $\hat{Y} = \tilde{Y} - \tilde{Y}$  とする。

$Y$  が Choquet 単体であるとは、 $x_1, x_2 \in \hat{Y}$  に対して  $\sup(x_1, x_2)$  が存在することである。ここで、ここで順序関係  $\prec$  は次のように定義される  $x_1 \prec x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 \in \tilde{Y}$ .

Choquet 表現が一意であることは、 $\mathcal{FM}^1$  が Choquet 単体であることと同値である [2]。しかし  $\mathcal{FM}^1$  は一般に Choquet 単体ではない。したがって、Choquet 表現は常に一意ではない。

## 5. Denneberg の理論

Denneberg は初めに  $X$  の集合代数 (algebra)  $\mathcal{A}$  から始めて、これを  $\sigma$ - 集合体に拡張するというアプローチをとっている。まず補題として使うのは集合に関する次の公式である。

**補題 16**  $k$  は自然数として、 $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{X}$  に対して

$$1_{\cup_{i=1}^k A_i} + \sum_{I \subset \{1, \dots, k\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} 1_{\cap_{i \in I} A_i} = 0$$

が成り立つ。

$A$  上の  $\{0, 1\}$  の値をとる集合関数を  $\eta$  とおくと  $\mathcal{S}_\eta = \{A \in \mathcal{A} | \eta(A) = 1\}$  とする。

**定義 17**  $A \in \mathcal{A}$  に対する一致ゲーム (unanimity game)  $u_A \in \mathcal{FM}_0^1$  は

$$u_A(B) = \begin{cases} 1 & A \subset B \\ 0 & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

で定義される非加法的測度である。

Denneberg はこれをゼータ関数と呼んでおり、これはファジィの文脈では、 $0-1$  必然性測度と呼ばれることもある。 $u_A$  は超モジュラーである。

**命題 1**  $A$  上の  $\{0, 1\}$  の値をとる集合関数  $\eta$  で  $\eta(X) = 1$  であるとする。 $\eta$  が超モジュラーであることと  $\mathcal{S}_\eta$  がフィルターであることは同値である。また、 $\eta$  が加法的であることと  $\mathcal{S}_\eta$  が超フィルターであることは同値である。

$u_A$  に関する Choquet 積分に関しては次の式が成り立つことがよく知られている。

**命題 2**  $A \in \mathcal{A}$  として、 $f$  は可測関数とすると、

$$(C) \int f du_A = \inf_{x \in A} f(x).$$

**定義 18**  $\mathcal{FM}_0^1$  は、 $(X, \mathcal{A})$  上の  $0-1$  非加法的測度の集合を表すことにする。

$(X, \mathcal{A})$  上のすべての一致ゲームの集合を  $\mathcal{FM}_{0u}^1$  で表し、すべての超モジュラー  $0-1$  非加法的測度の集合を  $\mathcal{FM}_{0s}^1$  と表す。

明らかに  $\mathcal{FM}_{0u}^1 \subset \mathcal{FM}_{0s}^1 \subset \mathcal{FM}_0^1$  である。また、 $\mathcal{A}$  が有限の時は  $\mathcal{FM}_{0u}^1 = \mathcal{FM}_{0s}^1$  となる。

**例 19**  $X = \{x_1, x_2\}$  とする。このとき、 $\mathcal{A} = 2^X$  で  $\mathcal{FM}_0^1$  は下の表の 4 つである。

	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1, x_2\}$
$\eta_1$	0	0	1
$\eta_2$	1	0	1
$\eta_3$	0	1	1
$\eta_4$	1	1	1

このとき、 $\mathcal{FM}_{0u}^1 = \mathcal{FM}_{0s}^1 = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  である。

ここで Tilde operator を定義する。

**定義 20** これは可測関数  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  に対して

$$\tilde{f}(\eta) := (C) \int f d\eta, \eta \in \mathcal{FM}_0^1.$$

$A \in \mathcal{A}$  として  $f = 1_A$  とすると、 $\tilde{f}(\eta) = \tilde{1}_A = \eta(A)$  である。

$A \in \mathcal{A}$  に対して、 $\tilde{A}$  を次のように定義する。

$$\tilde{A} := \{\eta \in \mathcal{FM}_0^1 | \eta(A) = 1\}.$$

また、 $\mathcal{T} \subset 2^X$  であるクラスに対して  $\tilde{\mathcal{T}} := \{\tilde{A} | A \in \mathcal{T}\}$ , とかく。

**例 21** 例 19 のもとで、 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, (y_1 < y_2)$  に対して、命題 2 より、  
 $\widetilde{f}(\eta_1) = y_1, \widetilde{f}(\eta_2) = y_1, \widetilde{f}(\eta_3) = y_2, \widetilde{f}(\eta_4) = y_2$  となる。  
 また、 $\widetilde{\{x_1\}} = \{\eta_2, \eta_4\}, \widetilde{\{x_2\}} = \{\eta_3, \eta_4\}, \widetilde{\{x_1, x_2\}} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$  となり、  
 $\widetilde{A} = \{\{\eta_2, \eta_4\}, \{\eta_3, \eta_4\}, \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}\}$  である。

Tilde operator に関する基本的な性質は以下のとおりである。

**命題 3**  $c \geq 0$  として  $f, g$  は  $\mathcal{A}$ -可測関数とする。

1.  $\widetilde{cf} = c\widetilde{f}$
2.  $-\widetilde{f}(\eta) = -\widetilde{\eta^c}$
3.  $f \leq g$  ならば  $\widetilde{f} \leq \widetilde{g}$
4.  $\widetilde{f+c} = \widetilde{f} + c$
5.  $\eta \in \mathcal{FM}_{0s}^1$  のとき、  
 $\widetilde{f+g}(\eta) \geq \widetilde{f}(\eta) + \widetilde{g}(\eta)$
6.  $f, g$  が共単調 ( $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0, x, y \in X$ ) のとき  $\widetilde{f+g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$
7.  $f \geq 0, \eta \in \mathcal{FM}_{0s}^1$  のとき  $\widetilde{f1_A}(\eta) = (\widetilde{f})1_{\widetilde{A}}(\eta)$
8.  $\widetilde{f \wedge g} \leq \widetilde{f} \wedge \widetilde{g}$
9.  $\widetilde{f \vee g} \leq \widetilde{f} \vee \widetilde{g}$
10.  $\widetilde{f \wedge g}(\eta) = (\widetilde{f} \wedge \widetilde{g})(\eta)$  for  $\eta \in \mathcal{FM}_{0s}^1$

**命題 4**  $f: X \rightarrow R$  を  $\mathcal{A}$ -可測関数とする。  $\mathcal{M}_f$  を、 $f$  の上方集合  $\{x \in X | f(x) \geq \alpha\}$  のクラスとする。

1.  $a \in R$  について  $\{\widetilde{f} \geq a\} = \widetilde{\{f \geq a\}}$
2.  $\mathcal{M}_{\widetilde{f}} = \widetilde{\mathcal{M}_f}$

一般に  $\mathcal{A}$  が集合代数であっても  $\widetilde{\mathcal{A}}$  は  $2^{\mathcal{FM}_0^1}$  上の集合代数ではない。そこで、以下のような定義が必要となる。

**定義 22**  $\mathcal{D} \subset 2^{\mathcal{FM}_0^1}, \mathcal{D}_u \subset 2^{\mathcal{FM}_{0u}^1}$  および  $\mathcal{D}_s \subset 2^{\mathcal{FM}_{0s}^1}$  は、 $\widetilde{X}$  が  $2^{\mathcal{FM}_0^1}, 2^{\mathcal{FM}_{0u}^1}$  および  $2^{\mathcal{FM}_{0s}^1}$  に属する集合によって  $\widetilde{\mathcal{A}}$  で生成される集合代数を表す。

$\mathcal{FM}_{0\bullet}^1$  を  $\mathcal{FM}_0^1, \mathcal{FM}_{0u}^1$  または  $\mathcal{FM}_{0s}^1$  のいずれかの集合を表す変数として使用し、 $\mathcal{D}_\bullet$  を  $\mathcal{D}, \mathcal{D}_u$  または  $\mathcal{D}_s$  として使用する。

**例 23** 例 19 のもとで、 $\mathcal{FM}_{0u}^1$  に制限すると、

$$\widetilde{\{x_1\}} = \{\eta_2\}, \widetilde{\{x_2\}} = \{\eta_3\}, \widetilde{\{x_1, x_2\}} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\} \text{ となり、}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\{\eta_2\}, \{\eta_3\}, \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}\} \text{ となる。}$$

$$A_1 = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}, A_2 = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\} \text{ とすると } \mathcal{D} = 2^{A_1} \text{ であり } \mathcal{D}_u = 2^{A_2} \text{ である。}$$

**定義 24**  $\mathcal{A}$  のカーネル関数  $\kappa$  とは  $\kappa : \mathcal{FM}_{0\bullet}^1 \times \mathcal{A} \rightarrow [0, b]$ ,  $(\eta, A) \mapsto \kappa_\eta(A)$  で、次の 2 つの条件をを満たすものである。

1.  $\kappa_\eta$  は  $\mathcal{X}$  上の非加法的測度であり、 $\eta \in \mathcal{FM}_{0\bullet}^1$  である。
2. 固定した  $A \in \mathcal{A}$  に対して、 $\mathcal{FM}_{0\bullet}^1$  上での実数値関数  $\kappa_\bullet(A)$  は  $\mathcal{D}_\bullet$ -可測である。

**定義 25**  $\kappa$  を  $\mathcal{A}$  のカーネル関数とする。

1.  $f \in B$  として  $f^\kappa(\eta) = (C) \int f(x) d\kappa_\eta(x)$  を  $f$  の  $\kappa$ -拡大という。
2.  $A \in \mathcal{A}$  として、 $\mathcal{D}_\bullet$  上の加法的集合関数  $\nu$  に対して  $\mu(A) = \int \kappa_\eta(A) d\nu(\eta)$  とすると  $\mu$  は  $\mathcal{A}$  上の非加法的測度である。 $\mu$  のことを  $\nu$  の  $k$ -変換という。

**例 26** 例 19 のもとで、 $\mathcal{FM}_{0u}^1 = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  であるから、

カーネル関数  $\kappa : \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\} \times \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\} \rightarrow \{0, 1\}$  を  $\kappa_\eta(A) = \eta(A)$  で定めたものが下の表である。

$\kappa$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1, x_2\}$
$\eta_1$	0	0	1
$\eta_2$	1	0	1
$\eta_3$	0	1	1

このとき、 $f$  の  $\kappa$ -拡大は  $\tilde{f}$  になる。

ここで、 $\mathcal{D}_u$  上の加法的測度を  $\nu$  とし、 $\nu(\{\eta_1\}) = a_1$ ,  $\nu(\{\eta_2\}) = a_2$ ,  $\nu(\{\eta_3\}) = a_3$ , とする。

$\nu$  の  $k$  変換は次のようになる。

$$\mu(\{x_1\}) = \nu(\widetilde{\{x_1\}}) = \nu(\{\eta_1\}) = a_1$$

$$\mu(\{x_2\}) = \nu(\widetilde{\{x_2\}}) = \nu(\{\eta_2\}) = a_2$$

$$\mu(\{x_1, x_2\}) = \nu(\widetilde{\{x_1, x_2\}}) = \nu(\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}) = a_1 + a_2 + a_3$$

これより、 $\mu$  が与えられたとき  $a_1, a_2, a_3$  の値を定めることができる。

**命題 5**  $A \in \mathcal{A}, \eta \in \mathcal{FM}_{0\bullet}^1$  に対して  $k_\eta(A) = \eta(A)$  とする。

1.  $k_\eta(A)$  はカーネル関数である。
2.  $\nu$  の  $k$ -変換  $\mu$  について  $\mu(A) = \nu(\tilde{A})$  が成り立つ。
3.  $f^\kappa(\eta) = \tilde{f}$
4.  $(C) \int f d\mu = \int \tilde{f} d\nu$

ここで、 $k_\eta = \eta$  を  $\mathcal{A}$  のゼータ関数といい、 $\mu$  を  $\nu$  のゼータ変換という。

命題5を一般化して次の定理が得られる。

**定理 6**  $\kappa_i$  を  $\mathcal{A}$  のカーネル関数,  $\nu$  を  $\mathcal{D}_\bullet(\mathcal{A})$  上に定義された単調かつ加法的な集合関数とする。

$\mu$  を  $\nu$  の  $k$  変換とする.  $f \in \mathcal{C}$  であるとき、

$$(C) \int f d\mu = \int f^k d\nu$$

である。

$\mathcal{A}$  を  $X$  の集合代数として  $\tilde{\mathcal{A}} \subset 2^{\mathcal{F}\mathcal{M}_0^1}$  より生成される集合代数を  $\mathcal{D}_s$  とおく。

**補題 27**  $W$  を  $\mathcal{D}_u$  上の単純関数より生成される線形空間とする。ここで、 $\mathcal{F} := \{1_{\tilde{A}} \mid A \in \mathcal{A}, A \neq \emptyset\}$  とすると、 $\mathcal{F}$  は  $W$  の基である。

$\tilde{\mathcal{A}}$  は  $\mathcal{F}\mathcal{M}_0^1$  上で  $\cap$  について閉じているので、 $\mathcal{D}_s$  の任意の要素は  $\tilde{B} \setminus (\cup_{i=1}^n \tilde{A}_i)$  の形の有限個の共通部分のない和集合として表すことができる。

ここで、 $D = \tilde{B} \setminus (\cup_{i=1}^n \tilde{A}_i)$  とすると、

$$\begin{aligned} 1_D &= 1_{\tilde{B}} - 1_{\cup_{i=1}^n \tilde{A}_i} \\ &= 1_{\tilde{B}} + \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} 1_{\cap_{i \in I} \tilde{A}_i} \end{aligned}$$

これより、 $1_D \in W$  となるので  $\mu$  を  $\mathcal{A}$  の非加法的測度とすると線形写像  $M : W \rightarrow R$  を  $M(1_{\tilde{A}}) = \mu(A)$  で定義することができる。

また、 $M(1_D)$  を  $\mathcal{D}_u$  上の加法的集合関数として  $\nu(D) = M(1_D)$  と表せば、任意の  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  に対して  $\nu(\tilde{A}) = \mu(A)$  が成り立つ。

このとき、 $\nu$  は  $\mu$  により一意的に定義できることになる。

このことから、以下の定理が成り立つ

**定理 7** 任意の  $\mathcal{A}$  上の非加法的測度  $\mu$  に対して  $\mathcal{D}_s$  上の加法的測度  $\nu$  が一意的に存在して  $\mu(A) = \nu(\tilde{A})$  が成り立つ。

さらに、 $\mu$  は  $\nu$  のゼータ変換である。また、この  $\nu$  を  $\mu$  のメビウス変換といい  $\nu^\mu$  とかく。

この後、極限操作をすることで集合代数  $\mathcal{D}_s$  を  $\sigma$ -集合体へと拡張し、それに合わせて  $\nu$  を  $\sigma$ -集合体上の集合関数へと拡張することになる。

## 6. 比較

ここでは、 $0-1$  非加法的測度の集合から  $2^X$  への写像  $\varphi$  を考える。

ここで、 $\varphi(\eta) = \{A \in \mathcal{A} \mid \eta(A) = 1\}$  とすると、 $\varphi(\eta)$  はセミフィルタになる。さらに、 $\varphi$  は全単射であることも示される。

**定理 8**  $\mathcal{F}\mathcal{M}_0^1$  を  $0-1$  非加法的測度の集合とし、 $S_X$  を  $X$  のセミフィルタの集合とする。このとき、全単射  $\varphi : \mathcal{F}\mathcal{M}_0^1 \rightarrow S_X$  が存在する。

この定理における全単射  $\varphi$  を表現の媒介と呼ぶことにする。

次の定理は  $h_f$  の定義から従う。

**定理 9**  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  を非加法的測度空間とし、 $(S_X, \mathcal{S}_X, m, H_X)$  をインタープリター表現とし、 $(h_f, m)$  を  $(f, \mu)$ ,  $f \in B^+$  に対する Choquet 表現とする。このとき、

$$h_f(\nu) := \sup\{r \mid \nu \in H_X(\{x \mid f(x) \geq r\})\},$$

すなわち、 $h_f = i_f$  である。

次に、インタープリター表現およびメビウス変換を用いた表現について、次の定理を紹介する。

**定理 10**  $i$  を  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{S}_X$  へのインタープリター、 $\tau$  を  $\mathcal{X}$  から  $\tilde{\mathcal{X}}$  への Tilde operator、 $\varphi$  を表現の媒介とする。 $H_X : \mathcal{X} \rightarrow 2^{S_X}$  を  $H_X(A) := \{\theta \in S_X \mid A \in \theta\}$  で定義する。このとき、次の2つが成り立つ。

1.  $H_X(A) = \varphi(\tilde{A})$   $A \in \mathcal{X}$ 。
2.  $i_f \circ \varphi = \tau(f)$  とする。ここで  $f \in B^+$  である。

上で示したように、表現される被積分関数は同値である。

一方、表現する測度に関して、インタープリター表現では測度は単調であり一意性は必ずしも成立しない。メビウス変換を用いた表現では測度は常に単調ではなく存在は一意である。有限集合  $X$  における Belief 関数に関して、この2つの定理は完全に同一である。

## 参考文献

- [1] G.Choquet . "Theory of capacities." *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 5, 1955, pp 131-295.
- [2] G.Choquet . "Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts." *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* , 10. 1960, pp 333-344
- [3] G.Choquet . *Lectures on analysis* . W. A. Benjamin. inc., London, Third printing, 1976
- [4] D. Denneberg, *Non additive measure and Integral*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [5] D.Denneberg, "Representation of the Choquet integral with the  $\sigma$ -additive Möbius transform," *Fuzzy Sets and Systems*, 92, 1997, pp 139-156.
- [6] I. Gilboa and D. Schmeidler, "Additive representations of non additive measures and the Choquet integral." *Ann. Oper. Res.* 52, 1994, pp 43-65.
- [7] I. Gilboa and D. Schmeidler, "Canonical representations of set functions." *Math. Oper. Res.* 20, 1995, pp 197-212.
- [8] M. Grabisch, H.T. Nguyen and E. A. Walker, *Fundamentals of uncertainty calculi with applications to fuzzy inference*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [9] J.E. Honeycutt, On an abstract Stieltjes measure, *Ann. Inst. Fourier* 21.3 (1971) 143-154.
- [10] M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno, eds. *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, Physica Verlag, Berlin, 2000.
- [11] 河邊淳, 書評「R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem. 2nd ed.,」数学,70,3,2018,pp.325-329.
- [12] M. M. Marinacci, "Decomposition and representation of coalitional games," *Math. Oper. Res.* 21, 1996, pp 1000-1015.

- [13] T. Murofushi and M. Sugeno, "An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure," *Fuzzy Sets and Systems*, 29, 1989, pp 201-227.
- [14] T. Murofushi and M. Sugeno, "A theory of Fuzzy Measures: Representations, the Choquet integral, and Null Sets," *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 159 (2), 1991, pp 532-549.
- [15] T. Murofushi, Two approaches to fuzzy measure theory: integrals based on pseudo-addition and Choquet's integral, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1987.
- [16] 室伏俊明, 浜田英嗣. ファジィ測度を読む技術 (II) 視覚的表示. 第9回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 689 - 692, 札幌, 1993
- [17] Y. Narukawa, *A Study of Fuzzy Measure and Choquet Integral* (in Japanese), Master Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1990.
- [18] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [19] G.-C. Rota, On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verwandte Gebiete* 2 (1964) 340-368.
- [20] A. Revuz, Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés, *Ann. Inst. Fourier* 6 (1955) 187-269.
- [21] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer verlag, New York, Fifth printing, 1986.
- [22] G. Shafer, *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton and London, 1976,
- [23] L.S. Shapley, A value for n-person games, in: Kuhn and Tucker (Eds.), *Contributions in the Theory of Games*, *Annals of Mathematics Studies*, vol. 28, 1953, pp. 307-317.
- [24] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [25] V. Torra, Y. Narukawa. Modeling decisions: information fusion and aggregation operators. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007.

# Multilinear embedding theorem for fractional sparse operators and my recent research

田中 仁 (筑波技術大学)\*

## 概 要

荷重の理論は作用素の荷重付ノルム不等式を統制するための理論です。作用素の評価を荷重 (weight) 付きというより一般化された設定の下で研究することは、基本的であり応用上も重要視されています。それは、作用素の値域に関する情報を陽的に与えるものであると解釈できて、作用素のより深い理解に繋がるものです。

- 測度論に基づく解析学は、Lebesgue 以来 125 年間、**可算個の測度 0 の集合を捨て去ること**により発展してきました。**捨て去ることのできない測度 0 の集合**から立ち現れる種々の問題について、荷重の理論という視点から概観します。
- 2 進立方体を用いた解析は長い歴史を持ち、豊かな内容を持っています。しかしそれは単純なモデル (toy model) を与えるものとされて、それゆえ実験的な考察のための、もしくは最良の定数を決定するための、補助的なものとしての位置づけのみをこれまで与えられてきたように思われます。ところが、**荷重の理論の進展**を受けて、この分野で基本的かつ重要な作用素の一つである特異積分作用素が、この 2 進立方体を作る sparse 型作用素によって、各点において支配されることが発見され、2 進立方体を用いた解析はその重要性が再認識されるようになりました。これまで筆者が進めてきたこの 2 進立方体を用いた正作用素の理論に基づいて、入れ子構造を持たないために手だての少なく困難な 2 進立方体を用いた直方体型分数積分作用素の荷重の理論を紹介します。
- **作用素の sparse 族を用いた表現** 及び **荷重の分数冪平均を用いた表示** の二つの視点から荷重の理論を概観して、Schrödinger 作用素  $(-\Delta)^{\alpha/2} + v$  に対する無限小相対有界定理を紹介します。
- 基盤研究 (A)、研究課題：「ユニット造形システムを用いた視覚障害者向け立体感知能力向上プログラムの研究開発」に関連して、彫刻家の松尾 光伸氏の作品である **立方体の不思議な分割** について、数学的視点からの一つの分析を紹介します。

## 1. これまでの研究の概要と展望

### 1.1. 初めに

筆者は見えない数学者です。思えば、幸運にも東北数学雑誌に掲載された修士論文以来、30 年間、好きな数学の勉強を続けることができている、researchmap には 72 本の論文が確認できます。さらに、2024 年度 (第 23 回) 日本数学会解析学賞を「直積型

本研究は科研費 (課題番号:19K03510) 及び科研費 (課題番号:23H00064) の助成を受けたものです。

2010 Mathematics Subject Classification: 42B25, 42B35.

キーワード: Carleson-type embedding; Decomposition of a cube; Fefferman–Phong-type condition; Kakeya problem;  $M$ -linear embedding theorem; rectangular fractional integral operator; rectangular doubling weight.

\* 〒 305-8521 茨城県つくば市春日 4-12-7 筑波技術大学共生社会創成学部

e-mail: htanaka@k.tsukuba-tech.ac.jp

分数冪積分作用素の重み付きノルム不等式や掛谷問題に関連する最大作用素などの実解析学的研究」により受賞しています。自分のことながら見えないのに割合頑張っているなどと思っています。

筆者は **実関数論的手法による調和解析** を専門としています。この分野は、日本では歴史的に人口が少なく、そのさらなる減少と高齢化の問題に直面しています。一般に微分方程式は適切な境界と境界値を設定してから解くものだと思います。しかしこれに比してこの分野の立ち位置は、例えば **除去可能集合の理論** のように、まず方程式を立てて、その境界と境界値がどのような性質を持つべきかを問題にします。 **より根源的な問い** を大事にする分野なのだと思います。

## 1.2. 掛谷問題

$N \gg 1$  を非常に大きな整数とします。単位円板  $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  の周を  $N$  等分してそれを原点と結ぶことから  $N$  個の錐が得られます。この  $N$  個の錐について、**その方向は変えることなく平行移動及び重なりのみを許すこと** にして、できるだけ小さなエリアに押し込めます。有名な掛谷問題は、この小さな押し込められたエリアの面積が  $N \rightarrow \infty$  としたときに0となることを主張します。すなわち、 $\mathbb{R}^2$  に**すべての方向の単位線分を含み測度0の集合** の存在を主張します。

当初この事実は、測度0の集合を捨て去って良い積分論において、捨て去ってしまったものの多様性を思い起こすことのみに寄与していました。しかし、フーリエ級数の a.e. 収束が示された1966年の所謂 Carleson ショックを経て、1970年代に  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , における **フーリエ変換の収束に関する質的研究** が進み、測度0の掛谷集合の  $0 < \delta \ll 1$  近傍の大きさを精密に知ることが要請されました。

実は上の  $N$  個の錐は  $\approx 1/\log N$  の面積を持つ小さなエリアに押し込めることができます。<sup>1</sup>

このことは  $\mathbb{R}^2$  のフーリエ変換の収束に関する質的研究を完全なものにしました。そして、同様なことは  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 2$ , においても成立することが強く期待されています。これは有名な未解決問題です。<sup>2</sup>

この未解決問題を含む一連の問題は **掛谷問題** と呼ばれています。素晴らしいことに、2025年2月24日、[7]において、この問題は  $d = 3$  での解決を見ました。おそらく Hong Wang 女史はフィールズ賞を受賞するでしょう。この問題解決に用いられた中心的な手法 (two-ends-reduction) が早世した天才 T. Wolff により示された1995年から、ちょうど30年かかったこととなります。この T. Wolff の1995年の論文 [8] は筆者にとっても重要なものです。筆者はこの論文で示された、掛谷最大作用素に対するノルム評価に対応する、荷重付きノルム評価に成功しています [4]。確かに、**two-Ends-reduction** だけは荷重を積むときに適用できず大変難しいものでした。それにしても解決まで30年を要するとは思いませんでした。

[7] は127ページにわたる大論文です。荷重を積む評価は、荷重を  $\equiv 1$  とせば、通常の評価となりますから、それは通常の評価の **証明の質** を高めることに繋がります。

<sup>1</sup> この場合重なりは平均して  $\approx \log N$  であることに注意してください。本質的には近傍が  $\delta^\varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , よりも真に大きいということが必要とされています。

<sup>2</sup>  $\mathbb{R}^2$  では三角形の等分割とその適切な圧縮を可算回繰り返すアルゴリズムによって証明されます。これは言わば1次元的な順序を持ったアルゴリズムです。しかしそのようなアルゴリズムを次元が増えて順序の見出しえない  $\mathbb{R}^d$ ,  $d > 2$ , において与えることは困難でしょう。  $N^{d-1}$  個の錐をその重なり平均が  $\approx (\log N)^{d-1}$  の小さなエリアへ押し込めることが期待されています。

難しいかもしれませんが、[7] の証明の洗練を図り、分かりやすく短くして、できれば荷重を積みたいと思っています。

### 1.3. 直方体型分数冪積分作用素に対する Hardy-Littlewood-Sobolev の定理

$d$  を次元を表すための自然数として  $0 < \alpha < d$  とします。  $\alpha$  次分数冪積分作用素は

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy, \quad f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

により定義されます。良く知られているように

$$I_1(\nabla f) \approx f, \quad I_2(\Delta f) \approx f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

が成立します。有界性については Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式として知られている

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad q > p > 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d},$$

が成立します。これらより例えば

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} &\lesssim \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \\ \|f\|_{L^6(\mathbb{R}^6)} &\lesssim \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^6)}, \end{aligned}$$

等が分かります。標語的には **分数冪積分作用素の有界性から関数の大きさをその微分の乗法でコントロールできる** こととなります。近年筆者は 2 進直方体解析を発展させて、Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式の **本質的な一般化** に成功しました。以下用語を少し準備します。

$N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を正整数として  $N = \sum_{i=1}^n N_i$  とおきます。ユークリッド空間  $\mathbb{R}^N$  を

$$\mathbb{R}^N = \prod_{i=1}^n \mathbb{R}^{N_i}$$

とみることにして  $x = (x_i)$  ( $x_i \in \mathbb{R}^{N_i}$ ) と表すことにします。  $\mathbb{R}^N$  の直方体全体が作る集合を以下で表します。

$$\mathcal{R}(\mathbb{R}^N) := \prod_{i=1}^n \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{N_i}).^3$$

$0 < \alpha < N$  と  $\mathbb{R}^N$  のダブリング荷重<sup>4</sup>  $\mu$  に対して、直方体型分数冪積分作用素を次で定義します。

$$R_\alpha^\mu f(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \mu(R(x, y))^{\frac{\alpha}{N}-1} f(y) d\mu(y), \quad f \in L^1_{\text{loc}}(\mu), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

ここで  $R(x, y) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^N)$  は  $x, y$  ( $x_i \neq y_i, i = 1, 2, \dots, n$ ) を含む **最小の直方体** とします。

<sup>3</sup>  $\mathbb{R}^d$  の立方体は各辺が各座標軸に平行なものとし、この立方体全体が作る集合を  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$  と表します。

<sup>4</sup> 各軸についての 2 進ダブリング荷重 (正の可測関数) とします。

### 1.3.1. 直方体型分数冪積分作用素に対する Hardy-Littlewood-Sobolev の定理 (2023, [5])

$0 < \alpha < N$  とする.  $\mu$  を  $\mathbb{R}^N$  のダブリング荷重として, 指数  $1 < p < q < \infty$  が Sobolev 指数  $1/q = 1/p - \alpha/N$  にあるとする. このとき次の直方体型分数冪積分作用素に対する Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式が成立する.

$$\|R_\alpha^\mu f\|_{L^q(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

この定理の立方体バージョンは L. I. Hedberg により見出された次の手法により証明されています. まず  $f$  を正規化して積分を高さ方向に書き換えて, 各点において立方体型分数冪積分作用素を Hardy-Littlewood の最大関数の  $p/q$  乗したもので上からコントロールします. 次に Hardy-Littlewood の最大関数の  $L^p(\mu)$  有界性に問題を帰着させます. この直方体バージョンでは, まず  $\mu$  が逆ダブリング条件を満たすことに依拠することで, 直方体型分数積分作用素の離散化が可能となり, 次に 2 進グリッドを切って筆者らが見出した 2 進直方体に対する荷重の理論へ帰着させます [6].

この定理は明らかに非常に良い結果です. もっと早く確認されていて良いはずの定理です. 分数冪積分作用素に対する荷重の理論, 特に 2 進立方体解析・2 進直方体解析等の分析を経ることで, ここに簡明な証明が与えられました. これは人々の知性の集約により与えられたものです. 偏微分方程式論への適切な応用をぜひ見出したいと思っています. この定理を導いた手法は, その有用性が実際に示された訳ですが, さらに洗練させて他の結果への適応を図って行きます.

### 1.4. Schrödinger 作用素 $(-\Delta)^{\alpha/2} + v$ に対する無限小相対有界定理

#### 1.4.1. 定理 (Cao, Deng and Jin, 2024, [1])

$1 < p < \infty, 0 < \alpha < d, -d/p < a < \infty$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある定数  $C(\varepsilon) > 0$  が存在して, すべての  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  についてノルム不等式

$$\| |x|^\alpha \varphi \|_{L^p(dx)} \lesssim \varepsilon \| (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi \|_{L^p(dx)} + C(\varepsilon) \|\varphi\|_{L^p(dx)}$$

が成立するための必要十分条件は  $-\alpha < a \leq 0$  である.

ナイーブに考えれば

$$\| |x|^\alpha \varphi \|_{L^p(dx)} \leq \| |x|^\alpha \|_{L^\infty(dx)} \cdot \|\varphi\|_{L^p(dx)} = \infty, \quad -\alpha < a < 0$$

となります. しかしこの定理は  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  の **滑らかさ** によって, この左辺が

$$\varepsilon \| (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi \|_{L^p(dx)} + C(\varepsilon) \|\varphi\|_{L^p(dx)}$$

で評価できるとしています. これは  $|x|^\alpha$  の原点付近での大きさが  $\varphi$  の滑らかさによって削られて  $C(\varepsilon)$  程度となり, その僅かな削りくずとして  $\varepsilon \| (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi \|_{L^p(dx)}$  が現れているように思われます. この定理は以下の二つの事実により確認されます.

- $0 < \alpha < d, 0 < \lambda < \infty$  とする.  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  上の恒等写像  $I$  は次のように分解できる.

$$\begin{aligned} I &= (\lambda^2 I - \Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \circ (\lambda^2 I - \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} (\lambda^\alpha I + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}})^{-1} \circ (\lambda^\alpha I + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}) \\ &=: J_{\alpha, \lambda} \circ T_m \circ (\lambda^\alpha I + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}). \end{aligned}$$

- 次の荷重付きノルム不等式が成立する.

$$\| |x|^a \varphi \|_{L^p(dx)} \lesssim \| J_{\alpha,\lambda} \|_{L^p(dx) \rightarrow L^p(|x|^{ap} dx)} \left( \| (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi \|_{L^p(dx)} + \lambda^\alpha \| \varphi \|_{L^p(dx)} \right).$$

この二つの事実に依拠して,  $\max(-n/p, -\alpha) < a \leq 0$  のときに任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある大きな  $\lambda_0 > 0$  を選んで作用素ノルム  $\| J_{\alpha,\lambda_0} \|_{L^p(dx) \rightarrow L^p(|x|^{ap} dx)} < \varepsilon$  とできることから, この定理は従います. 結局この定理証明の鍵は Bessel ポテンシャル  $J_{\alpha,\lambda}$  の **trace 不等式** の作用素ノルムの評価 です. これは大変良い荷重の理論の適用例です. 筆者らは次の定理を得ています.

#### 1.4.2. 定理 ( N. Hatano, R. Kawasumi, H. Saito and H. Tanaka, 2025, [3] )

$v$  を  $A_\infty$  荷重とすれば

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \| J_{\alpha,\lambda} \|_{L^p(dx) \rightarrow L^p(v)} = 0$$

となる十分条件は

$$\max \left( \sup_{Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^d): \ell_Q \leq 1} \ell_Q^\alpha \left( \frac{v(Q)}{|Q|} \right)^{1/p}, \sup_{Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^d): \ell_Q > 1} \left( \frac{v(Q)}{|Q|} \right)^{1/p} \right) < \infty$$

及び

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^d): \ell_Q \leq 1/\lambda} \ell_Q^\alpha \left( \frac{v(Q)}{|Q|} \right)^{1/p} = 0$$

が成立することである. ここで,  $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$  は  $\mathbb{R}^d$  上の各辺が各座標軸に平行な立方体全体を表し,  $\ell_Q, |Q|$  は  $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$  の辺長, 体積をそれぞれ表す. また,  $v(Q) := \int_Q v dx$  である.

不思議なことに, 無限小相対有界定理が成立するためにポテンシャル  $v$  が満たす十分条件は, 各点においてその **分数冪平均が消えていること** でした. このような関数の族は, **vanishing Morrey spaces** と呼ばれていて, よく調べられています. さらに, この定理を得るために, 筆者らは Bessel ポテンシャル  $J_{\alpha,\lambda}$  の sparse 族を用いた表現に成功しています. この定理のさらなる拡張を進めて行きます.

#### 1.5. Bessel ポテンシャル $J_{\alpha,\lambda}$ の sparse 族を用いた表現

作用素の sparse 族を用いた表現は **荷重の理論 (Muckenhoupt weight theory)** の一つの到達地 であると言えます. この節の最後に, Bessel ポテンシャル  $J_{\alpha,\lambda}$  の sparse 族を用いた表現を示します. これが我々の研究の方向性を示すための理解の一助となれば幸いです.

$\tau \in \{0, \pm \frac{1}{3}\}^d$  に対して  $\mathbb{R}^d$  の 2 進立方体が造るグリッド  $\mathcal{D}^\tau$  を以下で定義します.

$$\mathcal{D}^\tau := \{2^{-k}(m + \tau + [0, 1)^d) : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^d\}.$$

### 1.5.1. 定義 (sparse 族)

$0 < \eta < 1$  とする.  $\mathbb{R}^d$  の 2 進立方体の族  $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}^\tau$ ,  $\tau \in \{0, \pm\frac{1}{3}\}^d$ , は次を満たすときに  $\eta$ -sparse 族 と呼ばれる.

すべての  $S \in \mathcal{S}$  に対してある可測集合  $E_S(S) \subset S$  が存在して,  $|E_S(S)| \geq \eta|S|$  を満たしさらに集合族  $\{E_S(S) : S \in \mathcal{S}\}$  は互いに共通部分を持たない.

### 1.5.2. 補題 ( N. Hatano, R. Kawasumi, H. Saito and H. Tanaka, 2025, [2] )

$0 < \alpha < d$ ,  $0 < \lambda < \infty$  とする. この時,  $f$  によって決まる適切な sparse 族  $\mathcal{S}_\tau \subset \mathcal{D}^\tau$ ,  $\tau \in \{0, \pm\frac{1}{3}\}^d$ , を選んで

$$J_{\alpha,\lambda}(f) \lesssim \sum_{\tau \in \{0, \pm\frac{1}{3}\}^d} S_{\alpha,\lambda}^\tau f, \quad f \geq 0$$

とできる. ここで

$$S_{\alpha,\lambda}^\tau f := \sum_{S \in \mathcal{S}_\tau} \frac{\min((\lambda \ell_S)^\alpha, 1)}{\lambda^\alpha |S|} \int_S f \, dx \mathbf{1}_S, \quad f \geq 0.$$

( $\mathbf{1}_S$  は  $S$  の特性関数を表す.)

Schrödinger 作用素  $(-\Delta)^{\alpha/2} + v$  に対する無限小相対有界定理 **成立の心** は,  $\ell_Q \leq 1/\lambda$  とすれば

$$\frac{\min((\lambda \ell_S)^\alpha, 1)}{\lambda^\alpha |S|} \int_S f \, dx = \frac{\ell_S^\alpha}{|S|} \int_S f \, dx$$

のように  $\lambda$  に関係しない  $f$  の分数冪平均が現れることにあります. 逆に,  $\ell_Q > 1/\lambda$  とすれば

$$\frac{\min((\lambda \ell_S)^\alpha, 1)}{\lambda^\alpha |S|} \int_S f \, dx = \frac{1}{\lambda^\alpha |S|} \int_S f \, dx$$

となって, この右辺は  $\lambda \rightarrow \infty$  のとき 0 に近づきます. これが **心** です.

## 2. On Matsuo's cube unit systems

In what follows we analyse Matsuo's cube unit systems in terms of eight atoms.

### 2.1. Formulations and results

#### 2.1.1. CUBE 1/4

The Cube 1/4 unit refers to a geometric figure that is the result of partitioning a cube into four precisely equal segments. The segment consists of polygonal parts with different shapes on each side. 132 compositions are possible with two segments, and more than 800,000 compositions are possible with four segments.

#### 2.1.2. DIAGONAL CUBE 1/4

The diagonal cube 1/4 is a unit of a cube divided into four equal parts. The top and bottom squares of the cube are divided into four parts in a face-to-face, displaced form. Each part consists of a hexagon, two rhombuses, two isosceles triangles, and two squares. It can create various shapes from dynamic forms, allowing for spatial compositions that are not typically seen. Because the squares facing each other are in a twisted position, when the parts are combined on each side, dynamic and diverse forms that are not normally seen emerge.



图 1: The "CUBE 1/4" shown as an assembled cube (left) and in various other configurations (right).

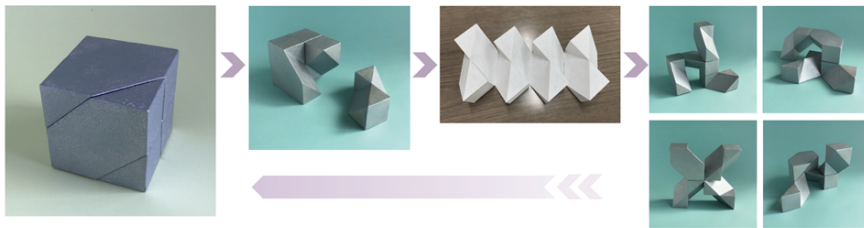


图 2: The transformation process of the "DIAGONAL CUBE 1/4". From the assembled cube (left), it is disassembled into two parts, then fully unfolded, followed by examples of reassembly.

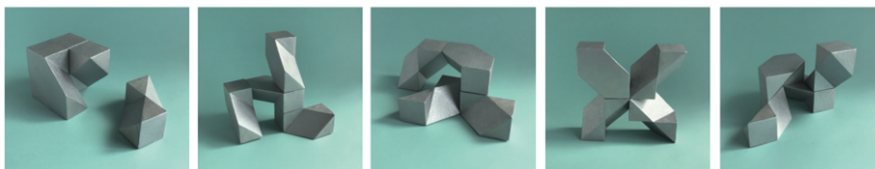


图 3: Examples of possible arrangements for the "DIAGONAL CUBE 1/4"

## 2.2. Atom

We make an *atom* as the following. Let a right isosceles triangle be with the edge lengths  $2\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$  and 4. We bend the 4 edge length side to get the top unit square, which we say *face*. We then also have *tail* which was right angle of the right isosceles triangle. This object, which we say *atom*, has the sides: two trapezoids with the common edge length 2, two right isosceles triangles with the edge lengths 1, 1 and  $\sqrt{2}$ , and one parallelogram consisting of two equilateral triangles with the edge length  $\sqrt{2}$ .

## 2.3. Rectangularsolid

For  $-1 \leq t \leq 1$ , we set four closed unit squares:

$$\begin{aligned} S_{1;t} &:= (0, 0, t), (1, 0, t), (1, 1, t), (0, 1, t), \\ S_{2;t} &:= (0, 0, t), (0, 1, t), (-1, 1, t), (-1, 0, t), \\ S_{3;t} &:= (0, 0, t), (-1, 0, t), (-1, -1, t), (0, -1, t), \\ S_{4;t} &:= (0, 0, t), (0, -1, t), (1, -1, t), (1, 0, t). \end{aligned}$$

For  $i = 1, 2, 3, 4$ , define the closed rectangularsolid by

$$T_i := \bigcup_{-1 \leq t \leq 1} S_{i;t}$$

and the cube by

$$T := \bigcup_i T_i.$$

For mathematical convension, we will use  $i + 1 = 1$  for  $i = 4$  and  $i - 1 = 4$  for  $i = 1$ .

## 2.4. Result 1

Consider two divisions of  $T_i$  with equal volumes by a plane. That is,

$$T_i = S_{i;1}^{i+1} \cup S_{i;-1}^{i-1} = S_{i;1}^{i-1} \cup S_{i;-1}^{i+1},$$

where, for example, the atom  $S_{i;1}^{i+1}$  is that, the face  $S_{i;1}$  and the tail: the ourter side coner of  $S_{i+1;-1}$ . We let

$$\begin{aligned} \text{div}_1(T_i) : T_i &\longrightarrow S_{i;1}^{i+1} \cup S_{i;-1}^{i-1}, \\ \text{div}_2(T_i) : T_i &\longrightarrow S_{i;1}^{i-1} \cup S_{i;-1}^{i+1}. \end{aligned}$$

Thus, there are  $2^4 = 16$  possible divisions of the cube  $T$ .

We want to know the forms of nontrivial congruent four molecules.

### 2.4.1. Lemma

- rm(i) We observe  $\text{div}_1(T_i) \cap \text{div}_2(T_{i+1})$ , which is  $1 \times 2$  rectangle. This  $1 \times 2$  rectangle is consisting of two parts:  $S_{i;1}^{i+1} \cap S_{i+1;1}^i$ , which is a trapezoid with the area 1.5, and  $S_{i;-1}^{i-1} \cap S_{i+1;-1}^{i+2}$ , which is a right isosceles triangle with the area 0.5.
- rm(ii) We observe  $\text{div}_2(T_i) \cap \text{div}_1(T_{i+1})$ , which is  $1 \times 2$  rectangle. This  $1 \times 2$  rectangle is consisting of two parts:  $S_{i;-1}^{i-1} \cap S_{i+1;-1}^i$ , which is a trapezoid with the area 1.5, and  $S_{i;1}^{i+1} \cap S_{i+1;1}^{i+2}$ , which is a right isosceles triangle with the area 0.5.

- (iii) We observe  $\text{div}_1(T_i) \cap \text{div}_1(T_{i+1})$ , which is  $1 \times 2$  rectangle. This  $1 \times 2$  rectangle is consisting of three parts:  $S_{i;1}^{i+1} \cap S_{i+1;-1}^i$ , which is the intersection of two trapezoids with oposit directions and its area 1,  $S_{i;-1}^{i-1} \cap S_{i+1;-1}^i$ , which is a right isosceles triangle with the area 0.5, and  $S_{i;1}^{i+1} \cap S_{i+1;1}^{i+2}$ , which is a right isosceles triangle with the area 0.5.
- (iv) We observe  $\text{div}_2(T_i) \cap \text{div}_2(T_{i+1})$ , which is  $1 \times 2$  rectangle. This  $1 \times 2$  rectangle is consisting of three parts:  $S_{i;-1}^{i+1} \cap S_{i+1;1}^i$ , which is the intersection of two trapezoids with oposit directions and its area 1,  $S_{i;1}^{i-1} \cap S_{i+1;1}^i$ , which is a right isosceles triangle with the area 0.5, and  $S_{i;-1}^{i+1} \cap S_{i+1;-1}^{i+2}$ , which is a right isosceles triangle with the area 0.5.

Lemma 2.4.1 gives us the following nontrivial congruent four molecules.

$$\begin{aligned} & \text{div}_1(T_1) \cup \text{div}_2(T_2) \cup \text{div}_1(T_3) \cup \text{div}_2(T_4) \\ &= (S_{1;1}^2 \cup S_{2;1}^1) \cup (S_{2;-1}^3 \cup S_{3;-1}^2) \cup (S_{3;1}^4 \cup S_{4;1}^3) \cup (S_{4;-1}^1 \cup S_{1;-1}^4), \end{aligned}$$

which have joining surface area 1.5.

$$\begin{aligned} & \text{div}_1(T_1) \cup \text{div}_2(T_2) \cup \text{div}_1(T_3) \cup \text{div}_2(T_4) \\ &= (S_{1;-1}^4 \cup S_{2;-1}^3) \cup (S_{2;1}^1 \cup S_{3;1}^4) \cup (S_{3;-1}^2 \cup S_{4;-1}^1) \cup (S_{4;1}^3 \cup S_{1;1}^2), \end{aligned}$$

which have joining surface area 0.5.

$$\begin{aligned} & \text{div}_1(T_1) \cup \text{div}_1(T_2) \cup \text{div}_1(T_3) \cup \text{div}_1(T_4) \\ &= (S_{1;-1}^4 \cup S_{2;-1}^1) \cup (S_{1;1}^1 \cup S_{2;1}^3) \cup (S_{3;-1}^2 \cup S_{4;-1}^3) \cup (S_{3;1}^4 \cup S_{4;1}^1), \end{aligned}$$

which have joining surface area 0.5.

## 2.5. Result 2

For  $-1 \leq t \leq 1$ , we set four closed unit squares:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{1;t} &:= (0, t, 0), (1, t, 0), (1, t, 1), (0, t, 1), \\ \tilde{S}_{2;t} &:= (0, t, 0), (0, t, 1), (-1, t, 1), (-1, t, 0), \\ \tilde{S}_{3;t} &:= (0, t, 0), (-1, t, 0), (-1, t, -1), (0, t, -1), \\ \tilde{S}_{4;t} &:= (0, t, 0), (0, t, -1), (1, t, -1), (1, t, 0). \end{aligned}$$

For  $i = 1, 2, 3, 4$ , define the closed rectangularsolid by

$$\tilde{T}_i := \bigcup_{-1 \leq t \leq 1} \tilde{S}_{i;t}.$$

For mathematical convension, we will use  $i + 1 = 1$  for  $i = 4$  and  $i - 1 = 4$  for  $i = 1$ .

Observe that

$$T = (T_1 \cup \tilde{T}_2) \cup (\tilde{T}_3 \cup T_4). \quad (\text{A})$$

Surprisingly, Matso found four congruent molecules dividing the right hand side of (A):

$$\operatorname{div}_2(T_1) \cup \operatorname{div}_1(\tilde{T}_2) = \left( S_{1,-1}^2 \cup \tilde{S}_{2,1}^3 \right) \cup \left( S_{1,1}^4 \cup \tilde{S}_{2,-1}^2 \right),$$

and

$$\operatorname{div}_1(\tilde{T}_3) \cup \operatorname{div}_2(T_4) = \left( \tilde{S}_{3,1}^4 \cup S_{4,-1}^1 \right) \cup \left( \tilde{S}_{3,-1}^2 \cup S_{4,1}^3 \right),$$

which have joining surface area 0.5.

Notice that the object  $T_1 \cup \tilde{T}_2$  can be divided by a plane through three points  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ , and this cross section is consisting of four equilateral triangles with the edge length  $\sqrt{2}$ .

## 参考文献

- [1] J. Cao, C. Deng and Y. Jin, *Characterization of infinitesimal  $L^p$ -relative boundedness of Schrödinger operators  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} + |x|^a$* , to appear in Potential Anal..
- [2] N. Hatano, R. Kawasumi, H. Saito and H. Tanaka, *On  $L^p \rightarrow L^q$  infinitesimal relative boundedness of Schrödinger operators  $(-\Delta)^{\alpha/2} + v$* , Submitted, (2025), 20pp.
- [3] N. Hatano, R. Kawasumi, H. Saito and H. Tanaka, *Multilinear embedding theorem for fractional sparse operators*, Submitted, (2025), 13pp.
- [4] H. Tanaka, *The Fefferman-Stein type inequality for the Kakeya maximal operator in Wolff's range*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 763–772.
- [5] H. Tanaka, *The rectangular fractional integral operators*, arXiv:2309.15410 (math.CA).
- [6] H. Tanaka, *Two-weight norm inequalities for product fractional integral operators*, Bull. Sci Math., **166** (2021), 13pp.
- [7] Hong Wang and Joshua Zahl, *Volume estimates for unions of convex sets, and the Kakeya set conjecture in three dimensions*, arXiv:2502.17655 (math).
- [8] T. Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Rev. Mat. Iberoamericana, **11** (1995), 651–674.

## 変動指数 LEBESGUE 空間における近似定理

出耒 光夫 (MITSUO IZUKI)

ABSTRACT. In this talk we discuss fundamental properties of Lebesgue spaces with variable exponent and approximation theorems in the spaces obtained in the new article [12]. This is a joint work with Takahiro Noi, Yoshihiro Sawano and Hirokazu Tanaka.

### 1. INTRODUCTION

Here and below, we use the following notation:

- Given a measurable set  $E$ , the characteristic function of  $E$  is denoted by  $\chi_E$ .
- The space  $C_c(\mathbb{R}^n)$  refers to the set of all continuous functions on  $\mathbb{R}^n$  with compact support.
- The space  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  denotes the set of all infinitely differentiable functions on  $\mathbb{R}^n$  with compact support.

### 2. PRELIMINARIES

In this section, we collect some preliminary facts. Section 2.1 introduces Lebesgue spaces with variable exponents, and Section 2.3 reviews the duality result.

**2.1. Lebesgue spaces with variable exponent.** Let  $\mu$  be a measure on  $\mathbb{R}^n$ , and let  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  be a  $\mu$ -measurable function. We define the following sets:

$$(2.1) \quad \Omega_\infty := \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = \infty\},$$

$$(2.2) \quad \Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = 1\},$$

$$(2.3) \quad \Omega_* := \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < p(x) < \infty\}.$$

We now recall the definition of the modular.

**Definition 2.1.** Given a  $\mu$ -measurable function  $f$ , the modular is defined as

$$(2.4) \quad \rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\Omega_1 \cup \Omega_*} |f(x)|^{p(x)} d\mu(x) + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}.$$

The variable exponent Lebesgue space  $L^{p(\cdot)}(d\mu)$  consists of all measurable functions  $f$  such that

$$(2.5) \quad \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) < \infty \quad \text{for some } \lambda > 0.$$

The norm in  $L^{p(\cdot)}(d\mu)$  is given by

$$(2.6) \quad \|f\|_{L^{p(\cdot)}(d\mu)} := \inf \{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1 \}.$$

If  $\mu$  is the Lebesgue measure, we write  $L^{p(\cdot)} := L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = L^{p(\cdot)}(d\mu)$ .

If the variable exponent  $p(\cdot)$  equals to a constant  $p$ , then  $L^{p(\cdot)}$  is the usual Lebesgue space  $L^p$ . We present the Hölder inequality in Lebesgue spaces with a variable exponent. Let  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  be a measurable function. We write its essential infimum and supremum of  $p(x)$  as follows:

$$(2.7) \quad p_- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x), \quad p_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x).$$

Furthermore, we denote by  $p'(\cdot)$  the conjugate exponent, that is  $p(\cdot)$  satisfies

$$(2.8) \quad \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

The following two lemmas present results concerning fundamental density and approximation in the variable exponent Lebesgue space  $L^{p(\cdot)}(d\mu)$ .

**Lemma 2.2.** [4, Corollary 2.73] *Let  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  be a measurable function such that  $p_+ < \infty$ . Then the space of compactly supported continuous functions  $C_c(\mathbb{R}^n)$  is dense in  $L^{p(\cdot)}(d\mu)$ .*

Given a measurable function  $f$  on  $\mathbb{R}^n$ , we define the Hardy–Littlewood maximal operator  $M$  by

$$(2.9) \quad Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y-x|<r} |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

The classical Hardy–Littlewood maximal theorem states that  $M$  is bounded on  $L^p(\mathbb{R}^n)$  for  $1 < p \leq \infty$ . Moreover,  $M$  is also bounded on  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  provided that the function  $p(\cdot)$  satisfies the following conditions:

$$(2.10) \quad \left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)} \right| \leq \frac{C}{-\log(|x-y|)}, \quad \text{for } |x-y| \leq \frac{1}{2},$$

$$(2.11) \quad \left| \frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)} \right| \leq \frac{C}{\log(e+|x|)}, \quad \text{for } |y| \geq |x|.$$

For details, we refer to [3, 5, 7, 8].

We invoke an approximation result from [4]. We recall the notion of potential-type approximate identities. Define the radial majorant of  $\varphi$  to be the function

$$\tilde{\varphi}(x) = \sup_{|y| \geq |x|} |\varphi(y)|.$$

If  $\tilde{\varphi}$  is integrable, we will say that  $\{\varphi_t\}_{t>0}$  is a *potential-type approximate identity*. (This is the case, for example, if  $\varphi$  is a bounded function of compact support.) In this case we have that for all  $x$ ,

$$(1.1) \quad \sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| \leq \frac{\|\tilde{\varphi}\|_1}{v_n} Mf(x),$$

where  $v_n$  is the volume of the unit ball and  $M$  is the (centered) Hardy–Littlewood maximal operator given by (2.9).

**Lemma 2.3.** [4, Theorem 5.11] *Let  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  satisfy*

$$(2.12) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \, dx = 1.$$

*For each  $\sigma > 0$ , define*

$$(2.13) \quad \phi_\sigma(x) := \sigma^{-n} \phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Assume that  $\{\phi_\sigma\}_{\sigma>0}$  is a potential-type approximate identity. Suppose that the exponent function  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$  satisfies  $p_+ < \infty$ . Assume further that the Hardy–Littlewood maximal operator  $M$  is bounded on  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ . Then, for every  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ , we have*

$$(2.14) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \|\phi_\sigma * f - f\|_{L^{p(\cdot)}} = 0.$$

**Remark 2.4.** Due to its role in (2.14), the system  $\{\phi_\sigma\}_{\sigma>0}$  is referred to as an approximation of the identity or an approximate identity. The concept of an identity has been studied in various function spaces; see [2, 16, 17, 19]. As an application, this framework allows us to establish universal approximation theorems in these spaces.

**2.2. A modular inequality for  $M$ .** The boundedness of  $M$  on  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  implies the norm inequality

$$(2.15) \quad \|Mf\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \quad \text{for all } f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Lerner [15] showed that if  $M$  satisfies the modular inequality

$$(2.16) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \{Mf(x)\}^{p(x)} \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} \, dx \quad \text{for all } f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n),$$

then  $p(\cdot)$  must be a constant. Note that the norm inequality (2.15) and the modular inequality (2.16) are equivalent if  $p(\cdot)$  is a constant. This result highlights a fundamental difference between constant and variable exponent Lebesgue spaces.

**2.3. Duality in Lebesgue spaces with variable exponent.** We begin by recalling Hölder’s inequality.

**Lemma 2.5.** [4, Theorem 2.26] *Let  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  be a measurable function. For all  $f \in L^{p(\cdot)}(d\mu)$  and  $g \in L^{p'(\cdot)}(d\mu)$ , we have  $fg \in L^1(d\mu)$  and*

$$(2.17) \quad \|fg\|_{L^1(d\mu)} \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(d\mu)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(d\mu)},$$

*where*

$$(2.18) \quad K_{p(\cdot)} := \left( \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+} + 1 \right) \|\chi_{\Omega_*}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_{L^\infty} + \|\chi_{\Omega_1}\|_{L^\infty}.$$

The dual space  $L^{p(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)^*$  consists of all bounded and linear functionals on  $L^{p(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)$ . In particular, for a given function  $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)$ , we define the functional

$$(2.19) \quad F_g(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) \, \mathrm{d}\mu(x), \quad \text{for } f \in L^{p(\cdot)}(\mathrm{d}\mu).$$

By virtue of Hölder's inequality (Lemma 2.5),  $F_g \in L^{p(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)^*$ .

The following lemma presents further duality properties and the Riesz representation theorem for Lebesgue spaces with variable exponent, as established in [4, Proposition 2.79 and Theorem 2.80].

The space  $L^0(\mathbb{R}^n)$  denotes the space of all equivalence classes of Borel measurable functions modulo null functions.

**Lemma 2.6.** *Let  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty]$  be a measurable function. Then the following statements hold:*

(I) *Let  $g \in L^0(\mathbb{R}^n)$ . The following conditions are equivalent:*

(i)  $F_g \in L^{p(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)^*$ .

(ii)  $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)$ .

*Furthermore, in this case, there exists a constant  $C \geq 1$ , depending only on  $p(\cdot)$ , such that*

$$(2.20) \quad C^{-1} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)} \leq \|F_g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)^*} \leq C \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)}.$$

(II) *The following conditions are equivalent:*

(iii)  $p_+ < \infty$ .

(iv) *For all  $F \in L^{p(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)^*$ , there exists a unique function  $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathrm{d}\mu)$  such that  $F = F_g$ .*

### 3. MAIN RESULTS

We focus on two results concerning  $L^p$ -approximation and extend them to the setting of variable exponent spaces.

Section 3.1 revisits a result by Hornik, Stinchcombe, and White [11]. Section 3.2 examines a result by Park and Sandberg [18] in the framework of variable exponent Lebesgue spaces. Finally, Section 3.3 considers the modular inequality, where we show that this inequality fails for variable exponents.

**3.1. Hornik–Stinchcombe–White [11] (1989).** Following [11], we introduce some definitions, notation, and concepts.

**Definition 3.1** (Squashing Function). A function  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  is called a squashing function if it satisfies the following properties:

- (1)  $\Psi$  is non-decreasing,
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) = 1$ ,
- (3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = 0$ .

Since squashing functions are non-decreasing, they are measurable.

The following lemma states a well-known property of squashing functions and some generalized results are proved. For example, Cybenko [6, Lemma 1] has proved the lemma for bounded and measurable sigmoidal functions. Hornik [10, Theorem 5] has proved it for non-constant and bounded functions. We provide an original proof using the following fact on the integrability of the Fourier transform of bounded functions in [12].

**Lemma 3.2.** *Let  $\Psi$  be a squashing function. If a complex-valued Borel signed measure  $\mu$  satisfies*

$$(3.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(w \cdot x + b) d\mu(x) = 0$$

*for all  $w \in \mathbb{R}^n$  and  $b \in \mathbb{R}$ , then  $\mu = 0$ . Here,  $w \cdot x$  denotes the Euclidean inner product of  $w \in \mathbb{R}^n$  and  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

Given a squashing function  $\Psi$  we define the following class  $\Sigma(\Psi)$ .

**Definition 3.3.** The set  $\Sigma(\Psi)$  consists of all functions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  that can be expressed in the form

$$f(x) = \sum_{j=1}^N w_j \Psi(a_j \cdot x + b_j) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

where  $N \in \mathbb{N}$ ,  $w_j \in \mathbb{R}$ ,  $a_j \in \mathbb{R}^n$ , and  $b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

In the context of probability measures, Corollary 2.2 in [11] establishes foundational results under fixed exponents. This corollary can be extended to accommodate variable exponents.

**Theorem 3.4.** *Let  $\mu$  be a probability measure supported on a compact set  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Let  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$  be a Borel-measurable function such that*

$$(3.2) \quad p_+(K) := \sup_{x \in K} p(x) < \infty.$$

*Then, for a squashing function  $\Psi$ , the set  $\Sigma(\Psi)$  is dense in the variable exponent Lebesgue space  $L^{p(\cdot)}(\mu)$ .*

In order to prove Theorem 3.4, we need the following two lemmas.

**Lemma 3.5.** *Let  $\rho \in C_c(\mathbb{R})$  and let  $\Psi$  be a squashing function. Then for every  $\varepsilon > 0$  and every compact set  $K \subset \mathbb{R}$ , there exists a function  $g \in \Sigma(\Psi)$  such that*

$$\sup_{x \in K} |\rho * \Psi(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Lemma 3.5 attributes to Hornik, Stinchcombe and White; see [11, Theorem 2.4]. The next lemma is also known as [11, Theorem 2.4]. We provide an original proof once again using Fourier analysis in [12].

**Lemma 3.6.** *Let  $\mathcal{B}$  be the Borel  $\sigma$ -algebra of  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Psi$  be a squashing function, and let  $\mu$  be a probability measure on  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ . Then  $\Sigma(\Psi)$  is uniformly dense on compacta in  $C(\mathbb{R}^n)$ . That is, for all compact subsets  $K \subset \mathbb{R}^n$ , all  $f \in C(\mathbb{R}^n)$ , and all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $g \in \Sigma(\Psi)$  such that*

$$\sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

**3.2. Park–Sandberg [18] (1993).** To describe the result of Park and Sandberg, we give the following definition:

**Definition 3.7.** Let  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be an integrable function, i.e.,  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . We define the set  $S_1$  as the collection of all functions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  that can be expressed in the form

$$(3.3) \quad f(x) = \sum_{j=1}^N w_j \phi \left( \frac{x - z_j}{\sigma_j} \right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_j > 0$ ,  $w_j \in \mathbb{R}$ , and  $z_j \in \mathbb{R}^n$  for each  $j = 1, 2, \dots, N$ .

We extend the result of [18, Proposition 1] to the setting with a variable exponent.

**Theorem 3.8.** *Let  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be a function such that  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  and satisfies*

$$(3.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \, dx = 1.$$

*Suppose that  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow (1, \infty)$  satisfies*

$$(3.5) \quad 1 < p_- \leq p_+ < \infty.$$

*Assume further that the Hardy–Littlewood maximal operator  $M$  is bounded on  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  and that  $\{\phi_\sigma\}_{\sigma>0}$ , given by (2.13), is a potential-type approximate identity. Then the set  $S_1$  is dense in  $L^{p(\cdot)}$ .*

*Proof.* Assume, for contradiction, that  $\overline{S_1} \subsetneq L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ . By the Hahn–Banach theorem, there exists  $T \in (L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))^*$  such that

$$T(\overline{S_1}) = \{0\}, \quad T(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)) \neq \{0\}.$$

By the Riesz representation theorem, there exists  $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  such that

$$(3.6) \quad T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx, \quad \text{for all } f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Fix  $z \in \mathbb{R}^n$  and  $\sigma > 0$ . Since  $T(\overline{S_1}) = \{0\}$ , we have

$$(3.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sigma^{-n} \phi \left( \frac{x - z}{\sigma} \right) g(x) dx = 0.$$

Define the function  $\tilde{\phi}_\sigma$  by

$$\tilde{\phi}_\sigma(x) = \sigma^{-n} \phi \left( \frac{-x}{\sigma} \right).$$

Then we obtain

$$(3.8) \quad (\tilde{\phi}_\sigma * g)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma^{-n} \phi\left(\frac{x-z}{\sigma}\right) g(x) dx = 0.$$

In view of (3.4), Lemma 2.3 implies that

$$(3.9) \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \left\| \tilde{\phi}_\sigma * g - g \right\|_{L^{p(\cdot)}} = 0.$$

Combining (3.8) and (3.9), we deduce that

$$g(x) = 0$$

for almost every  $x \in \mathbb{R}^n$ , implying that  $T(f) = 0$  for all  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ . This contradicts  $T(L^{p(\cdot)}) \neq \{0\}$ , completing the proof.  $\square$

**3.3. A modular inequality in  $L^{p(\cdot)}$ .** Thanks to Lemma 2.3, we can approximate each function  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  using the convolution  $\phi_\sigma * f$ . In Section 3.3, we study the boundedness of the convolution operator  $\phi_\sigma *$  given by

$$(3.10) \quad \phi_\sigma * : f \mapsto \phi_\sigma * f$$

on  $L^{p(\cdot)}$ .

Suppose  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  and  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ . To study the modular inequality for the operator  $\phi_\sigma *$ , we introduce the following class of functions:

**Definition 3.9.** A function  $\Phi$  is called *radial decreasing* if it satisfies  $\Phi(x) \geq \Phi(y) \geq 0$  for all  $x, y \in \mathbb{R}^n$  with  $|x| \leq |y|$ . The class  $\mathcal{RB}$  consists of functions  $\phi$  for which there exists a radial decreasing function  $\Phi$  such that  $|\phi(x)| \leq \Phi(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}^n$ , where  $\Phi(0) < \infty$  and  $\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Assuming  $\phi \in \mathcal{RB}$ , it follows from [9, Proposition 2.7] that

$$(3.11) \quad \sup_{\sigma > 0} |\phi_\sigma * f(x)| \leq CMf(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

Thus, if  $M$  is bounded on  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ , then  $\phi_\sigma *$  is also bounded on  $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  with an operator norm independent of  $\sigma$ . This leads to the following generalization of Lerner's result [15].

**Theorem 3.10.** Let  $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow (1, \infty)$  be a measurable function. Suppose that we have  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{RB}$ , satisfying

- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ ,
- $\phi(0) > 0$ ,
- $\phi$  is continuous on  $\mathbb{R}^n$ .

If the modular inequality

$$(3.12) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\sigma * f(x)|^{p(x)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx,$$

holds for all  $f \in L^{p(\cdot)}$  and all  $\sigma > 0$ , then  $p(\cdot)$  must be constant.

*Proof.* The proof follows arguments found in [1, 13, 14]. Assuming the modular inequality (3.12) holds for all  $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$  and all  $\sigma > 0$ , we derive a contradiction under the assumption that  $p(\cdot)$  is not constant.

By the continuity of  $\phi$  and the assumption  $\phi(0) > 0$ , there exists a constant  $C_0 > 0$  and  $j \gg 1$  such that

$$(3.13) \quad \phi(z) > C_0, \quad \text{for } |z| < 2^{-j}.$$

If  $p(\cdot)$  is not constant, then  $p_+ > p_-$  holds. Define

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{1}{3}(p_+ - p_-), \\ E &:= \{x \in \mathbb{R}^n : p_+ - \varepsilon < p(x)\}, \\ F &:= \{x \in \mathbb{R}^n : p_- + \varepsilon > p(x)\}. \end{aligned}$$

Note that  $\varepsilon > 0$ ,  $|E| > 0$  and  $|F| > 0$ . By the Lebesgue differentiation theorem,

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{|B(y_0, r) \cap E|}{|B(y_0, r)|} = 1$$

for almost all  $y_0 \in E$  and

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{|B(x_0, r) \cap F|}{|B(x_0, r)|} = 1$$

for almost all  $x_0 \in F$ . Choose  $r \in (0, 2^{-j})$ ,  $y_0 \in E$  and  $x_0 \in F$  so that

$$\frac{|B(y_0, r) \cap E|}{|B(y_0, r)|} > \frac{1}{2}, \quad \frac{|B(x_0, r) \cap F|}{|B(x_0, r)|} > \frac{1}{2}.$$

Then  $|E \cap B(y_0, r)| > 0$  and  $|F \cap B(x_0, r)| > 0$  in particular. We additionally define

$$U := E \cap B(y_0, r), \quad V := F \cap B(x_0, r),$$

so that

$$(3.14) \quad |U|, |V| \geq \frac{1}{2}|B(x_0, r)|.$$

Assume that  $\sigma > 2^j(|x_0 - y_0| + 2r)$ . Then

$$\phi_\sigma * \chi_V(x) = \frac{1}{\sigma^n} \int_V \phi\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) dy \geq \frac{C_0|V|}{\sigma^n}, \quad x \in U.$$

since

$$|x - y| \leq |x - y_0| + |y_0 - x_0| + |x_0 - y| \leq 2r + |y_0 - x_0|,$$

for every  $x \in U$  and  $y \in V$ .

With this setup in mind, taking an arbitrary constant  $R > 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} R^{p_+ - \varepsilon} \int_U \left(\frac{C_0|V|}{\sigma^n}\right)^{p(x)} dx &\leq \int_U \left(\frac{RC_0|V|}{\sigma^n}\right)^{p(x)} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (R\phi_\sigma * (\chi_V)(x))^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Applying inequality (3.12), we get

$$\begin{aligned} R^{p_+ - \varepsilon} \int_U \left( \frac{C_0 |B(x_0, r)|}{2^{jn+n} (|x_0 - y_0| + 2r)^n} \right)^{p(x)} dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (R\chi_V(x))^{p(x)} dx \\ &= C \int_V R^{p(x)} dx \\ &\leq CR^{p_- + \varepsilon} |V|. \end{aligned}$$

This contradicts the fact that  $p_+ - \varepsilon > p_- + \varepsilon$ . Hence, we conclude that  $p_+ = p_-$ , which means that the variable exponent  $p(x)$  is constant.  $\square$

**Acknowledgment.** This work was partly supported by MEXT Promotion of Distinctive Joint Research Center Program JPMXP0723833165 and Tokyo City University Start-up Support for Interdisciplinary Research.

#### REFERENCES

- [1] H. A. Aimar, A. L. Bernardis and F. J. Martín-Reyes, Multiresolution approximations and wavelet bases of weighted  $L^p$  spaces, *J. Fourier Anal. Appl.* **9** (2003), 497–510. [8]
- [2] B. Álvarez-Samaniego, W. P. Álvarez-Samaniego and D. Llerena-Montenegro, Approximate identities for the Schwartz space, *Analysis and Mathematical Physics* **11** (2021), article number 21. [3]
- [3] D Cruz-Uribe, L Diening and A Fiorenza, A new proof of the boundedness of maximal operators on variable Lebesgue spaces, *Boll. Unione Mat. Ital.* **(9) 2 (1)** (2009), 151–173. [2]
- [4] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces. Applied and Numerical Harmonic Analysis.* Birkhäuser/Springer, Heidelberg, 2013. Foundations and harmonic analysis. [2, 3, 4]
- [5] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, and C. J. Neugebauer, The maximal function on variable  $L^p$  spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **28** (2003), 223–238; **29** (2004), 247–249. [2]
- [6] G. Cybenko, Approximation by superpositions of a sigmoidal function, *Mathematics of control, signals and systems*, **2** (1989), 303–314. [5]
- [7] L. Diening, Maximal function on generalized Lebesgue spaces  $L^{p(\cdot)}$ , *Math. Inequal. Appl.* **7** (2004), 245–253. [2]
- [8] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **34** (2009), 503–522. [2]
- [9] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. [7]
- [10] K. Hornik, Approximation capabilities of multilayer feedforward networks, *Neural Networks* **4** (1991), 251–257. [5]
- [11] K. Hornik, M. Stinchcombe and H. White, Multilayer feedforward networks are universal approximators, *Neural Networks* **2** (1989), 359–366. [4, 5]
- [12] M. Izuki, T. Noi, Y. Sawano and H. Tanaka, Some density theorems in neural network with variable exponent, to appear in *Mediterranean J. Math.* [1, 5]
- [13] M. Izuki, T. Koyama, T. Noi, and Y. Sawano, Some modular inequalities in Lebesgue spaces with variable exponent on the complex plane, *Matematicheskie Zametki* **106**, no. 2 (2019): 241–247. Translation in *Mathematical Notes* **106**, no. 1-2 (2019): 229–234. [8]

- [14] M. Izuki, E. Nakai and Y. Sawano, Wavelet characterization and modular inequalities for weighted Lebesgue spaces with variable exponent, *Annal. Acad. Sci. Fenn. Math.* **40** (2015), 551–571. [8]
- [15] A. K. Lerner, On modular inequalities in variable  $L^p$  spaces, *Arch. Math.* **85** (2005), 538–543. [3, 7]
- [16] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta and T. Ohno, Approximate identities and Young type inequalities in variable Lebesgue-Orlicz spaces  $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$ , *Annal. Acad. Sci. Fenn. Math.* **35** (2010), 405–420. [3]
- [17] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Approximate identities and Young type inequalities in Musielak-Orlicz spaces, *Czechoslovak Math. J.* **63 (138)** (2013), 933–948. [3]
- [18] J. Park and I. W. Sandberg, Approximation and radial-basis-function networks, *Neural Computation* **5** (1993), 305–316. [4, 6]
- [19] J. E. Pérez-López, Approximation properties on Herz spaces, *Revista Integración* **35** (2017), 215–223. [3]

FACULTY OF LIBERAL ARTS AND SCIENCES, TOKYO CITY UNIVERSITY, 1-28-1, TAMADUTSUMI SETAGAYA-KU TOKYO 158-8557, JAPAN.

*Email address:* izuki@tcu.ac.jp

# SYMMETRY OPERATORS FOR QUANTUM RABI MODELS AND RELATED MODELS

CID REYES BUSTOS

ABSTRACT. The quantum Rabi model is one of the fundamental models of light-matter interactions in quantum optics. In addition to the physical relevance, there are a number of interesting mathematical questions related to the study of the Hamiltonian and its spectrum. One of them is the existence of the so-called hidden symmetry operators for the asymmetric version of the models, which turns out to be closely related to the presence of degenerate eigenvalues in the spectrum. In this contribution we give an overview of the topic for the quantum Rabi model and its two photon generalization.

## 1. INTRODUCTION

In quantum optics, the quantum Rabi model (QRM) is one of the models used to describe basic quantum light-matter interactions [8]. Partly due to the simplicity of its formulation, it has been applied to several areas of physics. For instance, in quantum information, the QRM describes the a qubit interacting with a single bosonic degree of freedom, and in particular it is a basic component of several candidates for the practical realization of quantum computers [5]. Concretely, the QRM models the interaction between a two-level system and a quantum harmonic oscillator. We refer to [3] for a friendly introduction to quantum interaction models and [6] for a more complete exposition.

The Hamiltonian of the QRM is given by

$$H_{\text{R}}^0 = \omega a^\dagger a + \Delta \sigma_z + g \sigma_x (a^\dagger + a),$$

where  $a^\dagger$  and  $a$  are the creation and annihilation operators of the bosonic mode, i.e.,  $[a, a^\dagger] = 1$  and

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

are the Pauli matrices,  $2\Delta$  is the energy difference between the two levels,  $g$  denotes the coupling strength between the two-level system and frequency of the harmonic oscillator  $\omega$  (subsequently, we set  $\omega = 1$  without loss of generality). The operator  $H_{\text{R}}^0$  acts densely on  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}_1$  where  $\mathcal{H}_1$  is either  $L^2(\mathbb{R})$  (or a Hilbert space isometric to it). In this setting,  $H_{\text{R}}^0$  is a self-adjoint operator with spectrum consisting only of eigenvalues.

An important feature of the spectrum is that it has an apparent symmetry realized by an operator  $J_0$  commuting with  $H_{\text{R}}^0$ . The operator  $J_0$  is given by

$$J_0 = \mathcal{P} \sigma_z$$

where  $\mathcal{P} = \exp(i\pi a^\dagger a)$  is the parity operator. It is easy to see that  $J_0$  is an involution, and its action decomposes the Hilbert space  $\mathcal{H}$  into two invariant subspaces

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_+$$

corresponding to the ‘‘positive’’ and ‘‘negative’’ (that is, the eigenvalue  $\pm 1$  of  $J_0$ ) and therefore classifying the eigenvalues of  $H_{\text{R}}^0$  into positive and negative.

In physics, it is customary to visualize the spectrum of the QRM using *spectral curves*, that is, the graph of the eigenvalues with as a function of the parameter  $g > 0$ , assuming a fixed value for  $\Delta$ . In Figure 1 we show the spectral curves of the QRM for some examples values of  $\Delta$ , obtained numerically by truncated Hamiltonian method (see e.g. [14]) The spectral curves are shown normalized, that is, they correspond to the Hamiltonian  $H_R^0 + g^2$ , to simplify the visualization.

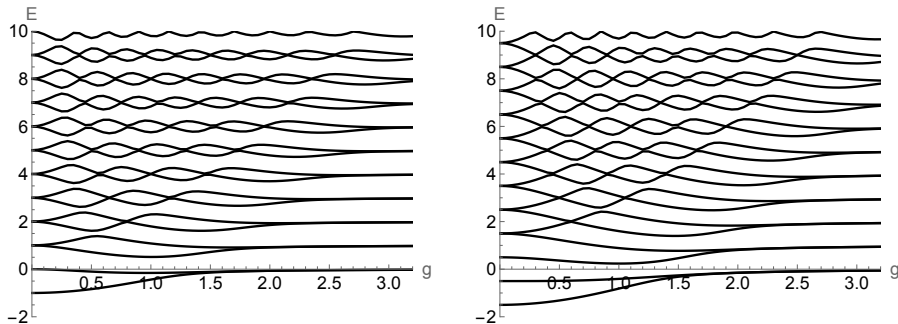


FIGURE 1. Normalized spectral curves for the QRM for  $\Delta = 1$  and  $\Delta = 3/2$ .

As it is easy apparent in the picture, the spectrum of the QRM appears to have degeneracies (i.e. eigenvalues of multiplicity 2) for particular values of parameters  $g, \Delta$ . This is actually the case as it was shown by Kuś [10]. In addition, the spectral degeneracies consist of an eigenvalue of positive and one of negative parity (in the classification induced by  $J_0$ ).

For the QRM, there is thus a clear and transparent relation between the existence of the symmetry operator  $J_0$  and the spectral degeneracies [4]. This is specially relevant in physics where it part of the discussions on the integrability of the QRM and related models (see the discussion on Braak’s breakthrough paper showing that the QRM is exactly solvable [2]).

The picture described above changes considerably when we add an additional bias term to the QRM Hamiltonian, resulting on the asymmetric QRM depending on a real parameter  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . In general, the addition of this term makes the spectrum multiplicity free and the resulting Hamiltonian does not commute with  $J_0$ . For particular values of  $\varepsilon$ , namely when  $\varepsilon$  is integer, i.e.  $\varepsilon = \ell \in \mathbb{Z}$ , the spectrum is again degenerate and a “hidden” symmetry operator  $J_\ell$  appears. The situation is considerably different than the QRM since the operator  $J_\ell$  is no longer an involution. However, this fact allows a more interesting structure for the spectrum with many open questions. In chapter 2 we describe the situation.

The situation is similar models related with the QRM, for instance, the two-photon quantum Rabi model (2pQRM). The spectral structure of the 2pQRM is more complicated since the  $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -symmetry (i.e. involutive operator  $J_0$ ) is replaced by a  $\mathbb{Z}_4$ -symmetry (inducing naturally also a  $\mathbb{Z}_2$  symmetry). In this direction, we announce recent result of the author and Masato Wakayama in Section 3

The objective of this contribution is to present a general overview of the symmetry and degeneracy picture of models in quantum interactions, so we will limit ourselves to present the main results and refer the reader to the appropriate references for the proofs.

We conclude by noting that the symmetry-degeneracy picture described here for the asymmetric versions of the QRM and the 2pQRM is likely to extend to other models, like the quantum Rabi-Stark model or the Dicke model (see e.g. [13] or [12]). We expect that

further study of this picture for other models may be helpful to elucidate the many mysteries remaining in this topic.

## 2. ASYMMETRIC QUANTUM RABI MODEL

A physically relevant generalization of the QRM is the asymmetric quantum Rabi model (AQRM), obtained by adding a bias term depending on a bias parameter. This is the simplest case where we can extend the symmetry-degeneracy picture described in the introduction for the QRM. While we are not able to replicate all the details of the symmetry operators, namely the symmetry operators for the AQRM will not be involutive, this difference hints at a rich structure underlying the spectrum of the AQRM and other related models. This section is based on prior results of the author with Kazufumi Kimoto, Masato Wakayama and Daniel Braak [9, 17].

The AQRM is the model with Hamiltonian  $H_R^\varepsilon$  given by

$$(1) \quad \begin{aligned} H_R^\varepsilon &= H_R^0 + \frac{\varepsilon}{2}\sigma_x \\ &= a^\dagger a + \Delta\sigma_z + g\sigma_x(a^\dagger + a) + \frac{\varepsilon}{2}\sigma_x, \end{aligned}$$

where  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  is the bias parameter.

Similar to the QRM (corresponding to the case  $\varepsilon = 0$ ), the spectrum of the AQRM consists only on eigenvalues for any value  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Moreover, it is known that the spectrum of  $H_R^\varepsilon$  and  $H_R^{-\varepsilon}$  are equal (see [9]), and therefore we assume  $\varepsilon \geq 0$  without loss of generality.

Since the Pauli matrices are not mutually commutative, the operator  $J_0$  does not commute with  $H_R^\varepsilon$  for  $\varepsilon \neq 0$ . On the other hand, looking at the (normalized) spectral curves in Figure 2 (left figure), we observe that for  $\varepsilon \neq \mathbb{Z}$  no degeneracies appear to be present at the spectrum. In fact, the AQRM was introduced as a symmetry-breaking version of the QRM, so these facts were not surprising at first.

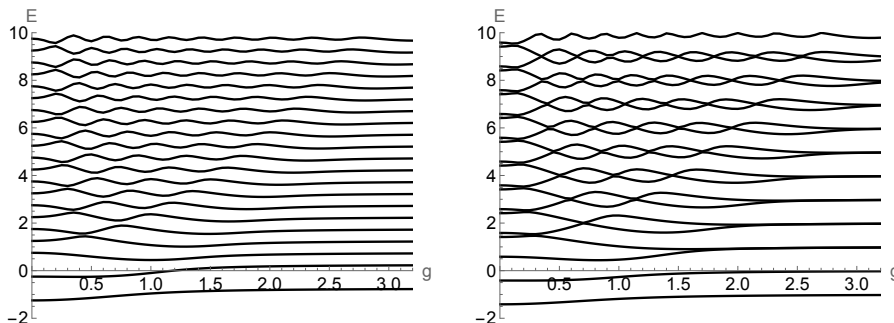


FIGURE 2. Normalized spectral curves for the AQRM for  $\varepsilon = 0.75$  and  $\varepsilon = 1$ , with fixed  $\Delta = 1$ .

It was first observed by Li and Batchelor [11] that for integer values of  $\varepsilon$ , the spectrum of the AQRM apparently becomes degenerate again, as was later proved in [9]. Therefore, in this case the first half of the symmetry-degeneracy picture of the QRM spectrum is recovered. In general, including the integer  $\varepsilon$  case, the  $H_R^\varepsilon$  does not have apparent (i.e. obvious) symmetry operators which lead physicist to call any possible commuting operators “hidden” symmetries. Moreover, the existence of such a symmetry operator was expected on physical grounds due to the presence of degeneracies (see e.g. [1]).

The hidden symmetry operators were finally discovered for small  $\varepsilon$  by Mangazeev, Batchelor and Bazhanov in [15] and a more systematic approach was given in [17], completing the symmetry-degeneracy picture. In this section we give a description of this picture and how it differs from the one of the QRM.

**2.1. Juddian solutions and spectral degeneracies.** As mentioned in the introduction, the spectrum of the QRM was known to be degenerate for a long time, even before the spectrum was shown to be fully solvable by Braak [2]. The reason is that the degenerate eigenfunctions of the QRM are of a particular class known as Juddian solutions, corresponding to eigenvalues of the form  $\lambda = N - g^2$  for  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , known as exceptional eigenvalues. Here, we describe the similar formalism for the case of the AQRM. In particular, it turns out that studying the degenerate solutions of the AQRM correspond to studying certain families of polynomials in the system parameters.

First, we introduce the following classification for the eigenvalues of the AQRM:

- **Exceptional eigenvalues:** An eigenvalue  $\lambda \in \text{Spec}(H_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$  is called exceptional if  $\lambda$  is of the form  $\lambda = N \pm \frac{\varepsilon}{2} - g^2$ .
- **Regular eigenvalue:** an eigenvalue  $\lambda \in \text{Spec}(H_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$  is regular if it is not exceptional.

In general, regular eigenvalues are non-degenerate [2]. The significance of exceptional eigenvalues comes from the fact that these correspond to Frobenius solutions in the confluent Heun ODE picture of the AQRM eigenvalue problem, that is, the difference between exponents is an integer. Moreover, these correspond to the poles of the spectral determinant, or  $G$ -function, of the AQRM (see e.g. [3] or [9]).

Among exceptional eigenvalues, there is an additional classification according to the type of eigenfunctions:

- **Juddian solutions:** the eigenfunction has a quasi-exact (polynomial) representation.
- **Non-Juddian exceptional solutions:** the eigenfunction is not quasi-exact.

In practical terms, the existence of Juddian solutions can be verified via a polynomial constraint condition on the parameters. Concretely, the eigenvalue  $\lambda = N \pm \frac{\varepsilon}{2} - g^2$  is in  $\text{Spec}(H_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$  if the parameters satisfy the equation

$$(2) \quad P_N^{(N, \pm \varepsilon)}((2g)^2, \Delta^2) = 0,$$

where  $P_N^{(N, \pm \varepsilon)}(x, y)$  is a polynomial of degree  $N$  (on  $x$  and  $y$ ) called constraint polynomial.

The constraint polynomial  $P_N^{(N, \varepsilon)}(x, y)$  is the  $N$ -th polynomial of the family  $P_k^{(N, \varepsilon)}(x, y)$  defined by three-term recurrence relation

$$\begin{aligned} P_0^{(N, \varepsilon)}(x, y) &= 1, \\ P_1^{(N, \varepsilon)}(x, y) &= x + y - 1 - \varepsilon, \\ P_k^{(N, \varepsilon)}(x, y) &= (kx + y - k(k + \varepsilon))P_{k-1}^{(N, \varepsilon)}(x, y) - k(k-1)(N-k+1)xP_{k-2}^{(N, \varepsilon)}(x, y), \end{aligned}$$

for  $k \geq 2$ .

*Remark 2.1.* The presence of an eigenvalue  $\lambda = N \pm \frac{\varepsilon}{2} - g^2$  of non-Juddian exceptional type can be verified also by a constraint condition

$$T_N^{(N, \pm \varepsilon)}((2g)^2, \Delta^2) = 0,$$

however in this case the corresponding function  $T_N^{(N, \pm \varepsilon)}(x, y)$  is not polynomial (see e.g. [3] for the QRM case or [9] for the general AQRM case).

Note that if two exceptional eigenvalues  $\lambda_1 = N_1 + \frac{\varepsilon}{2} - g^2$  and  $\lambda_2 = N_2 - \frac{\varepsilon}{2} - g^2$  are degenerate (assuming  $N_1 \geq N_2$ ), then we must have  $\varepsilon = N_1 - N_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Similar to regular eigenvalues, non-Juddian exceptional eigenvalues are not degenerate. Therefore, the only possibility for degeneracies is between two Juddian eigenvalues.

In this case, the presence of a degenerate eigenvalue  $\lambda = N \pm \frac{\ell}{2} - g^2$  in  $\text{Spec}(H_{\mathbb{R}}^{\varepsilon})$  with  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  is equivalent to the simultaneous vanishing of the two constraint polynomials

$$P_{N+\ell}^{(N+\ell, -\ell)}((2g)^2, \Delta^2) = 0, \quad \text{and} \quad P_N^{(N, \ell)}((2g)^2, \Delta^2) = 0.$$

This result is implied by the following theorem proved in [9].

**Theorem 2.1** ([9]). *for  $\ell \geq 0$  the constraint polynomials satisfy a divisibility relation*

$$(3) \quad P_{N+\ell}^{(N+\ell, -\ell)}(x, y) = A_N^{\ell}(x, y) P_N^{(N, \ell)}(x, y)$$

where  $A_N^{\ell}(x, y)$  is a polynomial satisfying  $A_N^{\ell}(x, y) > 0$  for  $x, y > 0$ .

The proof of the theorem is based on the study of the determinant expressions satisfied by the constraint polynomials and the associated three-term recurrence relations. In addition, it was shown that  $A_N^{\ell}(x, y)$  can be written as the determinant of a tridiagonal matrix. Concretely, we have

$$(4) \quad A_N^{\ell}(x, y) = \frac{(N + \ell)!}{N!} \det \text{tridiag} \begin{bmatrix} x + \frac{y}{N+i} - \ell + 2i - 1 & & & & 1 \\ & -i(\ell - i) & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq \ell}.$$

Here, we used the notation

$$\text{tridiag} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq n} := \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

for a tridiagonal matrix.

*Remark 2.2.* Note that even with Theorem 2.1 it remains to prove that the corresponding eigenfunction are linearly independent. However, since the degree of the corresponding polynomial solutions is different, this is immediate to verify in most cases and the remaining ones are not difficult to verify (see also [23] for a proof using representation theory).

Using Theorem 2.1 we can complete the degeneracy picture of the AQRM.

**Theorem 2.2.** *The spectrum of the AQRM may only be degenerate when  $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ . Moreover, in this case, an eigenvalue is degenerate if and only if its eigenfunction is a Juddian solution.*

Therefore, with respect to the spectral degeneracy the AQRM with integral bias  $\varepsilon = \ell \in \mathbb{Z}$  behaves similar to the original QRM. The key difference is the presence of the involutive symmetry operator  $J_0$ . As we will see in the next section, the AQRM with  $\ell > 0$  also has a commuting operator, but it is not involutive. However, the most interesting aspects of the AQRM spectral structure appear because of this fact.

**2.2. Symmetry operators for AQRM.** As mentioned in the introduction, from the Hamiltonian of the AQRM, the existence of a commuting operator for  $\varepsilon \neq 0$  is not obvious. This is the reason that such a (potential) operator was referred to as hidden symmetry operator, especially for the case  $\varepsilon = \ell \in \mathbb{Z}$ . Almost nothing was known about such an operator until it was first discovered by Mangazeev, Batchelor and Bazhanov in [15], giving a full description for small  $\ell$  and a heuristic algorithm based on an ansatz for the general case.

Roughly speaking, the main conclusions in [15] were that for  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , there is an operator  $J_\ell$  acting on the same Hilbert space such that

$$[H_{\mathbb{R}}^\ell, J_\ell] = 0,$$

that can be computed can be computed recursively. Unfortunately some details were missing, for instance, the algorithm was not proven to finish so the existence of the operator  $J_\ell$  could not be established in general.

An important observation in [15] is that for the explicitly computed cases, the operator  $J_\ell$  had the form

$$J_\ell = \mathcal{P}Q,$$

where  $Q \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}[a, a^\dagger])$  is a matrix with entries on the (non-commutative) Weyl algebra  $\mathbb{C}[a, a^\dagger]$ .

Using this observation, in [17] the following result was proved.

**Theorem 2.3** ([17]). *For integer  $\ell \geq 0$ , there is a self-adjoint operator  $J_\ell = \mathcal{P}Q_0^{(\ell)}$  with  $Q_0^{(\ell)} \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}[a, a^\dagger])$  such that*

$$[H_{\mathbb{R}}^\ell, J_\ell] = 0.$$

Moreover,  $J_\ell$  satisfies the operator equation

$$J_\ell^2 = p_\ell(H_{\mathbb{R}}^\ell; g, \Delta),$$

for a polynomial  $p_\ell(x; g, \Delta) \in \mathbb{Z}[x, g, \Delta]$  of degree  $\ell$ .

In addition, it was shown that  $Q_0^{(\ell)} \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}[a, a^\dagger])$  is unique in the sense that any other commuting operator of the form  $\mathcal{P}Q$  with  $Q \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}[a, a^\dagger])$  are products of  $J_\ell$  with polynomials in the Hamiltonian  $H_{\mathbb{R}}^\ell$ , and  $Q_0^{(\ell)}$  has components of minimal degree (as polynomials in  $\mathbb{C}[a, a^\dagger]$ ). There is not general expression for  $J_\ell$  since the coefficients of each component of  $Q_0^{(\ell)}$  are given as simultaneous recurrence relations.

It was also established in [17] that for  $\varepsilon \notin \mathbb{Z}$ , any commuting operator  $J_\varepsilon$  of  $H_{\mathbb{R}}^\varepsilon$  cannot be of the form  $J_\varepsilon = \mathcal{P}Q_\varepsilon$  with  $Q_\varepsilon \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}[a, a^\dagger])$  with entries of finite degree as polynomials in  $\mathbb{C}[a, a^\dagger]$ .

*Remark 2.3.* It is reasonable to impose certain limitations on the operator  $J_\varepsilon$  (for instance, being of the form  $J_\varepsilon = \mathcal{P}Q$ ) with  $Q \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}[a, a^\dagger])$ . Otherwise, it is possible to construct commuting operators to  $H_{\mathbb{R}}^\varepsilon$  for any  $\varepsilon$  but these do not provide any useful information (see the discussion in the introduction of [17]).

The mysterious equation

$$(5) \quad J_\ell^2 = p_\ell(H_{\mathbb{R}}^\ell; g, \Delta),$$

was already observed in [15]. In particular, it shows that the operator  $J_\ell$  is not an involution and therefore it does not induce naturally a subspace decomposition of the Hilbert space  $\mathcal{H}$  except for  $\varepsilon = 0$ . In [15] it was argued that the sign of the eigenvalues of  $J_\ell$  may be used to give a definite parity to the eigenvalues of  $H_{\mathbb{R}}^\ell$ , however it is not known if the kernel of  $J_\ell$  is non-trivial (otherwise there would be eigenvalues such that a parity cannot be assigned in that way).

On the other hand, the equation [5] shows that the joint eigenvalues of  $H_{\mathbb{R}}^\ell$  and  $J_\ell$  lie in the hyperelliptic curve

$$y^2 = p_\ell(x; g, \Delta),$$

allowing an algebro-geometric exploration of the spectrum. In addition, since the polynomial  $p_\ell(x; g, \Delta)$  has integer entries, a connection with number theory may also be possible (in addition to other connections of the spectrum via the spectral zeta function [18, 19]).

An initial exploration of this direction was shown in [21] and its further development is a potential area of research.

**2.3. Conjectural relation between degeneracy and symmetry.** As  $\ell$  grows large, the polynomial  $p_\ell(x; g, \Delta)$  is difficult to compute and since the proof of its existence is not constructive, there does not seem to be an algorithm that simplifies its computation. Nevertheless, by observation of explicit computed cases (up to  $\ell \leq 6$ ), in [21], the following conjecture was posed relating the polynomials  $p_\ell$  and  $A_N^\ell$ .

**Conjecture 2.4.** *For all natural numbers  $N, \ell \geq 0$ , we have*

$$(6) \quad p_\ell(N + \frac{\ell}{2} - g^2; g, \Delta) = A_N^\ell((2g)^2, \Delta^2).$$

Moreover, since  $A_N^\ell$  has a determinant expression, this conjecture immediately gives an explicit expression for  $p_\ell$ . Namely, we have

$$(7) \quad p_\ell(x; g, \Delta) = \det(\Delta^2 \mathbf{I}_\ell + \mathbf{M}_\ell(x, g)),$$

for the matrix  $\mathbf{M}_\ell(x, g)$  give by

$$\mathbf{M}_\ell(x, g) = \text{tridiag} \left[ \begin{array}{cc} ((2g)^2 - \ell + 2i - 1)(x - \frac{\ell}{2} + g^2 + i) & (x - \frac{\ell}{2} + g^2 + i) \\ -i(\ell - i)(x - \frac{\ell}{2} + g^2 + i + 1) & \end{array} \right]_{1 \leq i \leq \ell}.$$

The main significance of this conjecture is that it relates both the degeneracy of the AQRM with the existence of the hidden symmetry operator via the polynomials appearing independently in each of the settings. A proof of the conjecture at this points seems quite complicated. This is one of the motivations to study if a similar relation exists on other models related to the QRM.

### 3. TWO-PHOTON QUANTUM RABI MODEL

The two-photon quantum Rabi model (2pQRM) is another model used in quantum optics to describe light-matter interactions. As the name implies, the level changes in the two-level system now involve two photons. In addition to this, the 2pQRM has several features that separate it from the QRM. For instance, depending on the interaction strength, the spectrum may be no longer consists only on eigenvalues, that is, there may be continuous spectrum. In this section we describe how the symmetry and degeneracy picture appears in the 2pQRM and announce some new results of the author and Masato Wakayama to appear in the manuscript in preparation “Two-photon asymmetric quantum Rabi models: symmetry, degeneracy and representation theory” [22]. In this section, when we say one-photon (A)QRM we refer to the usual (A)QRM described in Section 2 above.

The Hamiltonian  $H_{2p}$  of the 2pQRM is given by

$$(8) \quad H_{2p} = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + g(a^2 + (a^\dagger)^2)\sigma_z + \Delta\sigma_x$$

where, similar to the QRM,  $2\Delta$  is the difference between the two levels,  $g$  is the coupling strength and  $a^\dagger$  and  $a$  the creation and annihilation operators for harmonic oscillators of frequency  $\omega$  (we may set  $\omega = 1$ ).

In general we assume  $g < \frac{1}{2}$ . Under this condition, the spectrum of  $H_{2p}$  to consist only of eigenvalues (see e.g. [7]), it is also known that the multiplicity of the spectrum is bounded above by 2. We note here that the structure of the spectrum for  $g \geq \frac{1}{2}$  is more complicated, for instance, it is known that continuous spectrum appears for certain cases, but it has not been verified whether embedded eigenvalues also appear.

It is immediate to verify that  $H_{2p}$  commutes directly with the parity operator  $\mathcal{P} = \exp(i\pi a^\dagger a)$  and therefore we may classify the eigenvalues according to parity (as in the QRM). In this case, the parity coincides with the parity of the corresponding eigenfunctions.

The parity symmetry in the 2pQRM actually arises from a more general  $\mathbb{Z}_4$ -symmetry, given by the operator

$$\bar{J}_0 := e^{i\pi a^\dagger a/2} \sigma_z$$

of order 4. In fact, there is another non-trivial symmetry arising from the Casimir operator of the Lie algebra  $\mathfrak{sl}_2$ , but it does not appear to induce any degeneracies [22].

The differences of the 2pQRM and the QRM can also be easily seen from the spectral curves shown in Figure 3. Similar to the QRM case, we show the normalized spectral curves here, corresponding to the eigenvalues of the operator  $H_{2p}/\sqrt{1-4g^2}$ . The color represent the parity of the eigenfunctions (black: even, red: odd).

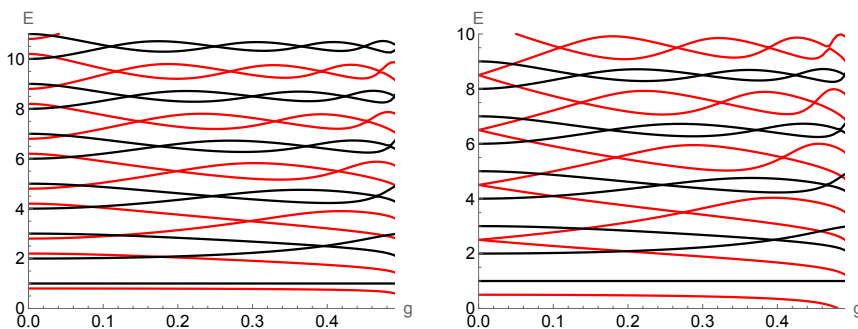


FIGURE 3. Normalized spectral curves for the QRM for  $\Delta = .7$  and  $\Delta = 1$ .

First, we note that there appear to be both crossings (that is, degenerate eigenvalues) between the spectral curves of same parity and between spectral curves of different parity. As we will see later, the analogs of QRM spectral degeneracies correspond to the ones between eigenvalues of the same parity.

*Remark 3.1.* We note that the 2pQRM is not a generalization of the QRM in the usual sense since the parameters of  $H_{2p}$  cannot be specialized to obtain the QRM Hamiltonian. However, it has been show recently in [16] (see also [20]) that we can obtain the confluent Heun picture of the QRM eigenvalue problem from the ODE picture, equivalent to a Heun ODE, of the 2pQRM via a confluence process.

In the two-photon setting, the role of the AQRM is taken by the the two-photon asymmetric QRM (2pAQRM). The 2pAQRM is the model with Hamiltonian  $H_\varepsilon$  given by

$$(9) \quad H_{2p}^\varepsilon = (a^\dagger a + \frac{1}{2}) + g(a^2 + (a^\dagger)^2)\sigma_z + \Delta\sigma_x + \tau\varepsilon\sigma_z,$$

with  $g, \Delta > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  and  $\tau = \sqrt{1-4g^2}$ . Like in the 2pQRM case, the condition  $\tau < 1$  ( $g < 1/2$ ) ensures that the spectrum of  $H_{2p}^\varepsilon$  consists only of eigenvalues. This particular form of the 2pAQRM Hamiltonian is not standard, however it allows a simpler analysis of degenerate eigenvalues and hidden symmetry operators.

The addition of a bias term to the 2pQRM breaks the  $\mathbb{Z}_4$ -symmetry, that is, it no longer commutes  $\bar{J}_0$ . However, we note that  $H_{2p}^\varepsilon$  still commutes with the parity operator  $\mathcal{P}$ , therefore, there is still a classification of eigenvalues into even an odd (according to the

eigenfunctions). This is also reflected on the spectral curves of the models, shown in Figure 4 where the degeneracies corresponding to different parities (associated with the  $\mathbb{Z}_2$  symmetry) remain while the same parity degeneracies are not present in general.

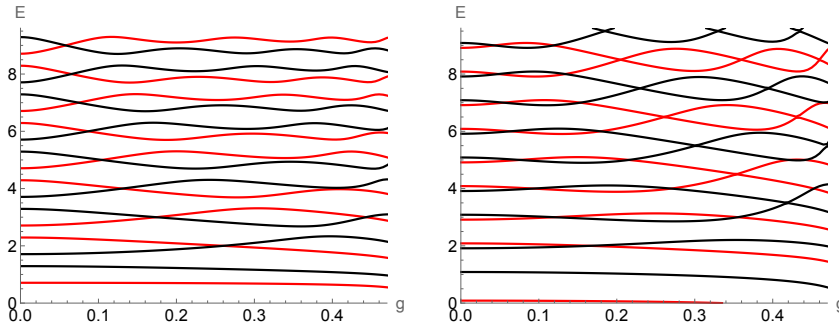


FIGURE 4. Normalized spectral curves for the 2pAQRM for  $\varepsilon = 0, 25, \Delta = .75$  and  $\varepsilon = \Delta = 1$ .

Like in the AQRM, when  $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ , then the degeneracies return and we can attempt to consider a similar discussion of symmetry and degeneracy. This was observed in [25] and it holds in general as we show in the next section.

**3.1. Spectral degeneracies.** For the 2pAQRM spectrum, we define exceptional and regular eigenvalues in a manner analogous to the one photon setting. Concretely, we have

- **Exceptional eigenvalue** if  $\lambda$  is of the form  $\lambda = \tau(2N + \rho + \frac{1}{2} \pm \varepsilon)$  for  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  and  $\rho \in \{0, 1\}$ ,
- **Regular eigenvalue** if  $\lambda$  is not exceptional.

Then, we define Juddian eigenvalues as those corresponding to polynomial solutions of the ODE picture of the 2pAQRM. We leave the details to [22], but it is worth noting that in order to obtain the appropriate description of the ODE picture, it is necessary to use a Bogoliubov transformation, or squeezing transformation, to put the Hamiltonian in an appropriate form.

The existence of Juddian solution  $\lambda = \tau(2N + \rho + \frac{1}{2} \pm \varepsilon)$  for the 2pAQRM is equivalent to the solution of the equation

$$P_N^{(N, \rho, \pm \varepsilon)}((2g)^2, \Delta^2) = 0,$$

for the constraint polynomial  $P_N^{(N, \rho, \pm \varepsilon)}((2g)^2, \Delta^2)$  defined below. It is important to note that the parameter  $\rho$  determines the parity of the constraint solution, namely  $\rho = 0$  if the eigenvalue is even and  $\rho = 1$  if it is odd. This implies directly that there are no degeneracies consisting of Juddian solutions of different parity and that  $\varepsilon \in \mathbb{Z}$  is a necessary condition for the existence of Juddian degeneracies.

The family of polynomials  $P_n^{(N, \rho, \pm \varepsilon)}(x, y)$  is given by

$$\begin{aligned} P_0^{(N, \rho, \varepsilon)}(x, y) &= 1 \\ P_1^{(N, \rho, \varepsilon)}(x, y) &= y + 2x(4N + 2\rho + 2\varepsilon - 1) - 4(1 + \varepsilon) \\ P_k^{(N, \rho, \varepsilon)}(x, y) &= (y + 2xk(4N + 2\rho - 2k + 2\varepsilon + 1) - 4k(k + \varepsilon))P_{k-1}^{(N, \rho, \varepsilon)}(x, y) \\ &\quad - 4k(k-1)(2(N-k+1) + \rho)(2(N-k+1) + \rho - 1)xP_{k-2}^{(N, \rho, \varepsilon)}(x, y). \end{aligned} \tag{10}$$

for  $k \geq 2$ . Note that the parameter  $\rho$  appears as a variable in the definition of the constraint polynomial, allowing a unified approach for both parities.

To prove the existence of degenerate Juddian eigenvalues, the process follows the general idea of the case of the AQRM. In particular, we look for the existence of a divisibility conditions between constraint polynomials of the same parity.

**Theorem 3.1** ([22]). *For  $N \geq 0$ ,  $\ell \geq 1$  and  $\rho = 0, 1$ , it holds*

$$P_{N+\ell}^{(N+\ell, \rho, -\ell)}(x, y) = A_N^{(\ell, \rho)}(x, y) P_N^{(N, \rho, \ell)}(x, y),$$

where the polynomial  $A_N^{(\ell, \rho)}(x, y)$  satisfies  $A_N^{(\ell, \rho)}(x, y) > 0$  for  $\rho = 0, 1$ .

We note that in this case we have two polynomials associated with the degeneracy, namely,  $A_N^{(\ell, 1)}(x, y)$  and  $A_N^{(\ell, 0)}(x, y)$ . We will see later that this is not significant difference and that the expectation of the symmetry-degeneracy picture holds even in this case.

We conclude this section by describing the degeneracy structure of the 2pAQRM.

**Theorem 3.2** ([22]). *For  $g, \Delta > 0$ ,  $\rho \in \{0, 1\}$  and  $\varepsilon = \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , any degenerate eigenvalue of the 2pAQRM consisting of two eigenvalues of the parity is an exceptional eigenvalue*

$$\lambda = \tau(2N + \rho + \frac{1}{2} + \ell),$$

and consists of a pair of Juddian solutions.

We note that the above does not cover the degeneracies consisting of eigenvalues of different parities. Qiong-Tao Xie shown that the corresponding eigenfunctions can be written as sums of special functions [24]. Still, these degeneracies remain mysterious and a deeper study may reveal more of the structure underlying the spectrum of the 2pAQRM.

**3.2. Symmetry operators for AQRM.** According to the reasoning we have been using, the existence of the same parity degeneracies hint to the existence of a hidden symmetry for the AQRM in the cases  $\varepsilon = \ell \in \mathbb{Z}$ . The hidden symmetry operators  $\bar{J}_\ell$  were discovered by [26] using a similar method of [15]. In particular, the main result is an algorithm for the computation of the hidden symmetry operators  $\bar{J}_\ell$  satisfying

$$[\bar{J}_\ell, H_{2p}^\ell] = 0$$

where  $\bar{J}_\ell$  is of the form

$$\bar{J}_\ell = e^{\frac{\pi i a^\dagger a}{2}} \bar{Q}_\ell,$$

where  $\bar{Q}_\ell \in \text{Mat}_2[\mathbb{C}[a, a^\dagger]]$ , where  $\mathbb{C}[a, a^\dagger]$ . The operators  $\bar{J}_\ell$  were given explicitly for small values of  $\ell$ , however the algorithm had the same omission as in [15], namely, there is no proof that the algorithm converges (i.e. that the operator exist). In addition, the authors shown that the second power of  $\bar{J}_\ell$  may be written in terms of a degree  $2\ell$  polynomial in the original  $H_{2p}^\ell$ . Since the polynomials  $A_N^{(\ell, \rho)}(x, y)$  are of degree  $\ell$ , the situation appears to be different from the AQRM case.

It turns out that  $\bar{J}_\ell$  exists for every  $\ell \geq 0$  and it enjoys similar properties of its one photon analog.

**Proposition 3.3** ([22]). *Let  $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , then there is an operator  $\bar{J}_\ell = \exp(\frac{1}{2}\pi i a^\dagger a) \bar{Q}_\ell$  with  $\bar{Q}_\ell \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}[a, a^\dagger])$ , such that*

$$(11) \quad [H_{2p}^\ell, \bar{J}_\ell] = 0,$$

such that

- (1) the entries of  $\bar{Q}_\ell$  are of total degree  $2\ell$  in  $\mathbb{C}[a, a^\dagger]$ ,
- (2)  $\bar{J}_\ell$  is self-adjoint,

(3)  $\bar{J}_\ell^2 = \exp(\pi i a^\dagger a) p_\ell(H_{2p}^\ell)$  for a polynomial  $p_\ell(x)$  of degree  $2\ell$ .

In addition,  $\bar{Q}_\ell$  is unique in the sense of the corresponding operator for the AQRМ, that is, is of minimal degree and any similar commuting operator for  $\bar{J}_\ell$  must be products of  $\bar{J}_\ell$  with polynomials in the  $H_{2p}^\ell$ . It is worth remarking that different from the proof of Theorem 3.1 the proof of Proposition 3.3 is considerable more difficult than the one photon version due to the complicated recurrence relations involved.

**Example 3.1.** Let us given and example for  $\ell = 1$ , in this case, we have

$$\bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{g} & (1 + \tau) a^2 - 4ga^\dagger a + (1 - \tau) (a^\dagger)^2 - 2g \\ -(1 - \tau) a^2 - 4ga^\dagger a - (1 + \tau) (a^\dagger)^2 - 2g & -\frac{\Delta}{g} \end{bmatrix}$$

and also we verify

$$\bar{J}_1^2 = \left( 4(H_{2p}^1)^2 + \frac{\tau^2(\Delta^2 - g^2)}{g^2} \right) e^{\pi i a^\dagger a}.$$

Note that the Hamiltonian  $H_{2p}^1$  appears as an even power. In the next section we consider a conjecture that clarifies this situation.

Another difference with the AQRМ case is the equation

$$\bar{J}_\ell^2 = p_\ell(H_{2p}^\ell) \mathcal{P},$$

which due to the presence of the parity operator  $\mathcal{P} = \exp(\pi i a^\dagger a)$  does not allow a direct generalization of the geometric picture of the AQRМ. An alternative is to use the equation

$$\bar{J}_\ell^4 = (p_\ell(H_{2p}^\ell))^2,$$

however the correct interpretation of this equation for a geometric picture is yet unclear. We note that for this same reason, the heuristic argument for assigning a ‘‘parity’’ in the one-photon case does not seem to work here (and it is not known whether the kernel  $\bar{J}_\ell$  is trivial or not).

**3.3. Conjectural relation between degeneracy and symmetry.** Let us conclude by describing the conjecture relating the polynomials appearing in the hidden symmetry and the divisibility conditions originated in the spectral determinant. As mentioned before, due the difference in degrees between the polynomials and the fact that there are two polynomials appearing in the divisibility relation (according to each parity) it appears that the situation is rather different than the one photon analog.

It turns out that the polynomials involved have several interesting properties. For instance, while the polynomials  $A_N^{(\ell, \rho)}(x, y)$  are different for  $\rho = 0, 1$ , they coincide for certain values of  $N$  when considered as variable (we wrote  $A^{(\ell, \rho)}(N, x, y)$  in this case). Concretely, by the determinant expression obtained in the proof of Theorem 3.1 (similar to (4) for the one photon case), we see that

$$A^{(\ell, 0)}\left(\frac{\lambda}{2\tau} - \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2}, (2g)^2, \Delta^2\right) = A^{(\ell, 1)}\left(\frac{\lambda}{2\tau} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2}, (2g)^2, \Delta^2\right).$$

We note that this implies that the polynomials for the two parities actually arise from a single polynomial. We denote by  $A^{(\ell)}(z)$  as the common polynomial, that is,

$$A^{(\ell)}(z) := A^{(\ell, 0)}\left(\frac{z}{\tau} - \frac{1}{4} - \frac{\ell}{2}, (2g)^2, \Delta^2\right)$$

where  $z = \frac{\lambda}{2}$ .

Also using the determinant expression, it is not difficult to see that, with respect to the variable  $z$ , the polynomial  $A^{(\ell)}(z)$  is a polynomial on  $z^2$ . With these preparations, we can

give the conjecture on the relation between the degeneracy and hidden symmetry for the 2pAQRM.

**Conjecture 3.4.** For  $\ell \geq 0$ , the polynomials  $p_\ell(x; g, \Delta)$  and  $A^{(\ell)}(\frac{x}{\tau})$  are equal up to a constant, that is,

$$(12) \quad p_\ell(x; g, \Delta) = \left(\frac{\tau}{g}\right)^{2\ell} A^{(\ell)}\left(\frac{x}{\tau}\right).$$

This conjecture clarifies the degree  $2\ell$  of the polynomial  $p_\ell(x; g, \Delta)$ . In reality, the polynomial  $A^{(\ell)}$ , and thus  $p_\ell$  assuming the conjecture, is a polynomial of degree  $\ell$  on the variable  $x^2$ , so the situation is remarkably similar to the one-photon version.

*Remark 3.2.* In the example given in [26], the polynomial corresponding to  $p_\ell(x; g, \Delta)$  is not a polynomial on  $x^2$ . This is due to the choice of Hamiltonian used there (it differ by an additive constant to ours). From this point of view, it seems that our choice of Hamiltonian  $H_{2p}^\ell$  is more natural, however both approaches are equivalent for the study of the 2pAQRM.

We also note that the constant appearing in (12) is a consequence of the choice of normalization of  $J_\ell$ , so the constant appearing in [26] is different.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The author would like to thank the organizers of the symposium 第64回実函数論・函数解析学合同シンポジウム for the kind invitation to present and prepare this contribution.

This work was supported by JSPS Grant-in-Aid for Early-Career Scientists No. 24K16941 and CREST JPMJCR2113, Japan.

#### REFERENCES

- [1] S. Ashhab: *Attempt to find the hidden symmetry in the asymmetric quantum Rabi model*, Phys. Rev. A **101** (2020), 023808.
- [2] D. Braak: *Integrability of the Rabi Model*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011), 100401.
- [3] D. Braak: *Analytical solutions of basic models in quantum optics*, in “Applications + Practical Conceptualization + Mathematics = fruitful Innovation, Proceedings of the Forum of Mathematics for Industry 2014” eds. R. Anderssen, et al., 75-92, Mathematics for Industry **11**, Springer, 2016.
- [4] D. Braak: *Symmetries in the Quantum Rabi Model*, Symmetry **11** (2019), 1259.
- [5] D. Braak, Q.H. Chen, M.T. Batchelor and E. Solano: *Semi-classical and quantum Rabi models: in celebration of 80 years*, J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016), 300301.
- [6] H.-P. Eckle: *Models of Quantum Matter: A First Course on Integrability and the Bethe Ansatz*, Oxford University Press, 2019.
- [7] F. Hiroshima and T. Shirai: *Fiber decomposition of non-commutative harmonic oscillators by 2p-quantum Rabi models*, Preprint 2024, arXiv:2408.04239.
- [8] E.T. Jaynes and F.W. Cummings: *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE **51** (1963), 89-109.
- [9] K. Kimoto, C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: *Determinant expressions of constraint polynomials and degeneracies of the asymmetric quantum Rabi model*. Int. Math. Res. Notices Vol. 2021, Issue **12**, 9458–9544 (2021). Published online April 2020.
- [10] M. Kuš: *On the spectrum of a two-level system*, J. Math. Phys., **26** (1985), 2792-2795.
- [11] Z.-M. Li and M.T. Batchelor: *Algebraic equations for the exceptional eigenspectrum of the generalized Rabi model*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015), 454005.
- [12] X. Lu, Z.-M. Li, V. V. Mangazeev and M. T. Batchelor: *Hidden symmetry in the biased Dicke model*, J. Phys. A: Math. Theor. **54**, 325202 (2021)
- [13] X. Lu, Z.-M. Li, V. V. Mangazeev and M. T. Batchelor: *Hidden symmetry operators for asymmetric generalized quantum Rabi models*, Chinese Phys. B **31**, 014210 (2022)
- [14] L. T. H. Nguyen, C. Reyes-Bustos, D. Braak and M. Wakayama: *Spacing distribution for quantum Rabi models*, J. Phys. A: Math. Theor. **57** 295201 (2024).
- [15] V. V. Mangazeev, M. T. Batchelor and V. V. Bazhanov: *The hidden symmetry of the asymmetric quantum Rabi model*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021), 12LT01.

- [16] R. Nakahama: *Equivalence between non-commutative harmonic oscillators and the two-photon Rabi models*, International Mathematics Research Notices, Volume 2025, Issue 7, (2025), rnaf066
- [17] C. Reyes-Bustos, D. Braak and M. Wakayama: *Remarks on the hidden symmetry of the asymmetric quantum Rabi model*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021), 285202.
- [18] C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: *The heat kernel for the quantum Rabi model*, Adv. Theor. Math. Phys. Volume **26** (2022) Number 5, 1347-1447
- [19] C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: *Heat kernel for the quantum Rabi model: II. Propagators and spectral determinants*, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021), 115202.
- [20] C. Reyes-Bustos, M. Wakayama: *Covering Families of the Asymmetric Quantum Rabi Model:  $\eta$ -Shifted Non-commutative Harmonic Oscillators*, Comm. Math. Phys. **403** (2023), 1429-1476.
- [21] C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: *Degeneracy and hidden symmetry for the asymmetric quantum Rabi model with integral bias*, Comm. Numb. Theor. Phys. **16** (3), (2022), 615-672.
- [22] C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: *Two-photon asymmetric quantum Rabi models: symmetry, degeneracy and representation theory*, In Preparation, 2025.
- [23] M. Wakayama: *Symmetry of asymmetric quantum Rabi models*. J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017), 174001.
- [24] Q. -T. Xie: *Exact solution of the two-mode quantum Rabi model*, Phys. Rev. Research **3**, 033057
- [25] Y.-F. Xie and Q. H. Chen: *Double degeneracy associated with hidden symmetries in the asymmetric two-photon Rabi model*, Communications in Theoretical Physics **72** 6, 065105 (2020).
- [26] Y.-F. Xie and Q.-H. Chen: *Symmetry operators of the asymmetric two-photon quantum Rabi model*, J. Phys. A: Math. Theor. **55** 425204

Cid Reyes-Bustos  
 NTT Institute for Fundamental Mathematics,  
 NTT Communication Science Laboratories,  
 NTT, Inc.  
 3-9-11, Midori-cho Musashino-shi, Tokyo, 180-8585, Japan  
 email: cid.reyes@ntt.com, math@cidrb.me

# 極大単調作用素の零点問題に対する縮小射影法の研究

茨木貴徳 (横浜国立大学 教育学部)

## 1 はじめに

$H$  を実ヒルベルト空間とし,  $A \subset H \times H$  を極大単調作用素 (maximal monotone operator) <sup>\*1</sup> とする. このとき

$$0 \in Au$$

を満たす元  $u$  を求める問題を零点問題 (zero point problem) という. また, このような元  $u$  を  $A$  の零点 (zero point) といい,  $A$  の零点全体の集合を  $A^{-1}0$  で表す. 零点問題は凸最小化問題, 均衡問題, ミニマックス問題等の多くの非線形問題を一般化した問題でもある. 零点問題を解く代表的な手法に近接点法 (proximal point algorithm) がある: 初期点を  $x_1 \in H$  とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

で点列を構成する. ただし,  $\{r_n\} \subset ]0, \infty[$  であり,  $J_r$  は極大単調作用素  $A$  と正の実数  $r$  から生成されるリゾルベント (resolvent) <sup>\*1</sup> と呼ばれる作用素である. この近接点法は 1970 年に Martinet [22] により導入され, 1976 年に Rockafellar [27] により, ヒルベルト空間において  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  かつ  $A^{-1}0 \neq \emptyset$  を仮定すれば (1.1) で定義された点列  $\{x_n\}$  は  $A^{-1}0$  の元へ弱収束することが示された. この研究以降, 近接点法の研究はヒルベルト空間やバナッハ空間等で, さまざまな形で進められてきた ([14, 15, 21, 23, 32] 等を参照).

一方, 非線形写像の不動点 (fixed point) を求める近似法に関する研究において高橋-竹内-窪田 [29] は縮小射影法 (shrinking projection method) と呼ばれる近似法を提案した.

**定理 1.1** ([29])  $H$  を実ヒルベルト空間とし,  $C$  を  $H$  の空でない閉凸部分集合とし,  $T$  を  $C$  から  $C$  への  $F(T) (= \{p \in C : p = Tp\})$  が空でない非拡大写像 (nonexpansive mapping) <sup>\*2</sup> とする. また,  $\{\alpha_n\}$  を  $[0, a]$  の実数列とする. ただし,  $0 < a < 1$  である.  $x_0$  を  $H$  の任意の元とし, 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $C_1 = C$ ,  $x_1 = P_{C_1} x_0$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x_0 \end{aligned}$$

とする. このとき, 点列  $\{x_n\}$  は  $P_{F(T)} x_0$  に強収束する. ただし,  $P_K$  は  $H$  から  $H$  の空でない閉凸部分集合  $K$  への距離射影 (metric projection) <sup>\*1</sup> とする.

本研究は科研費 (課題番号:23K25512, 24K06807) の助成を受けたものである。

<sup>\*1</sup> 第 2 節 2.1 項を参照.

<sup>\*2</sup>  $T$  が非拡大写像であるとは, 任意の  $x, y \in C$  に対して  $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$  が成立することである.

なお、高橋-竹内-窪田 [29] は、定理 1.1 より一般的な非拡大写像族の共通不動点への収束定理を得ている。定理 1.1 が示されてから、この手法は多くの研究者によってヒルベルト空間やバナッハ空間で研究が活発に行われており、さらに近接点法の研究においても、この手法を用いる研究が活発に行われてきた。特に、木村-高橋 [20] はモスコ収束という概念を用いた証明方法を提案し、空間の条件や係数条件を弱めることに成功した。さらに、これまではバナッハ空間において縮小射影法で利用する非線形射影は写像との相性で限定されていたが、この証明方法を利用すればこれまでと違った写像と非線形射影の組合せで縮小射影法を利用できることも示した。

しかし、縮小射影法は点列を構成する際に距離射影の正確な値を求める必要があるが、一般的に距離射影の値を求めるのは容易ではない。そこで、木村 [17] はこの問題を解決するために、点列に誤差を含んだ縮小射影法を測地距離空間上で提案した。近似法において誤差を認める場合には、誤差級数の収束を条件に課すことが多い。しかし、この手法は誤差級数の収束どころか、誤差数列が 0 に収束しなくても、近似法において有益な成果が得られることを提示した。さらに、木村 [18] はバナッハ空間においても、この総和不可能誤差を持つ縮小射影法において不動点への近似定理を得た。定理 1.1 と比較のためヒルベルト空間のケースで引用する ([19] も参照)。

**定理 1.2 ([18])**  $H$  を実ヒルベルト空間とし、 $C$  を  $H$  の空でない有界な閉凸部分集合とし、 $T$  を  $C$  から  $H$  への  $F(T)$  が空でない非拡大写像とする。  $\{\delta_n\}$  を非負の有界な実数列とし、  $\delta_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n$  とする。  $u$  を  $H$  の任意の元として、点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 \in C$ ,  $C_1 = C$  とし、  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$C_{n+1} = \{z \in C_n : \|Tx_n - z\| \leq \|x_n - z\|\},$$

$$x_{n+1} \in \{z \in C_{n+1} : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\}$$

とする。このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| \leq 2\sqrt{\delta_0}.$$

となる。さらに、  $\delta_0 = 0$  のとき点列  $\{x_n\}$  は  $P_{F(T)}x_0$  に強収束する。

なお、木村 [18] は、定理 1.2 より一般的な擬非拡大写像に関する近似定理を得ている。

2019 年に竹内 [30] は、木村 [17] とは違ったアプローチでこの問題を解決するための許容範囲を持つ縮小射影法をバナッハ空間で提案した。なお、定理 1.1 と比較のためヒルベルト空間のケースで引用する。

**定理 1.3 ([30])**  $H$  を実ヒルベルト空間とし、 $C$  を  $H$  の空でない閉凸部分集合とし、 $T$  を  $C$  から  $H$  への  $F(T)$  が空でない堅非拡大写像 (firmly nonexpansive mapping) <sup>\*3</sup> とす

<sup>\*3</sup>  $T$  が堅非拡大写像であるとは、任意の  $x, y \in C$  に対して  $\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle$  が成立することである。

る.  $x_0$  を  $H$  の任意の元とし,  $w_1$  を  $C$  の任意の元とする. 点列  $\{x_n\}$  と  $\{y_n\}$  を次のように構成する:  $D_1 = \{y \in C : \langle Tw_1 - y, w_1 - Tw_1 \rangle \geq 0\}$ ,  $x_1 = P_{D_1}x_0$ ,  $A_1 = C \setminus (D_1 \cup \{w_1\})$ ,  $y_1 \in A_1$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$D_{n+1} = \{y \in D_n : \langle Ty_n - y, y_n - Ty_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{D_{n+1}}x_0,$$

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq y_n\}, \quad y_{n+1} \in A_{n+1}$$

とする. このとき, 以下のいずれかが成立する.

1. すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $A_n \neq \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $\{x_n\}$  と  $\{y_n\}$  は共  $P_{F(T)}x_0$  へ強収束する.
2. ある  $k \in \mathbb{N}$  に対して  $A_k = \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $u_{k-1} \in F(T)$  または  $w_1 \in F(T)$  である.

本論文では, これらの縮小射影法と 2 つの改良された縮小射影法と近接点法を融合させた手法を扱う. はじめにヒルベルト空間での研究を示し, 次にバナッハ空間の研究も示す.

## 2 ヒルベルト空間における縮小射影法

### 2.1 準備

本論文では,  $H$  を実ヒルベルト空間 (real Hilbert space) とし, 内積 (inner product) を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  で表し, この内積から導かれるノルム (norm) を  $\|\cdot\|$  で表す. 以降, 本論文ではヒルベルト空間はすべて実空間とする.  $C$  を  $H$  の閉凸部分集合とする. このとき,  $H$  の任意の元  $x$  に対して

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

となる  $C$  の元  $x_0$  が一意に存在する. このような  $C$  の元  $x_0$  を  $P_Cx$  で表し,  $P_C$  を  $H$  から  $C$  の上への距離射影 (metric projection) と呼ぶ.

多価写像  $A \subset H \times H$  に対して,  $A$  の定義域 (domain) と  $A$  の値域 (range) は

$$D(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}, \quad R(A) = \cup\{Ax : x \in D(A)\}$$

で定義される. 多価写像  $A \subset H \times H$  が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A$  に対して

$$\langle x_1 - y_1, x_2 - y_2 \rangle \geq 0$$

が成り立つことと定義する. 単調作用素  $A$  が極大 (maximal) であるとは,  $A$  を真に含む単調作用素  $A_0 \subset H \times H$  が存在しないときいう. すなわち,  $A_0 \subset H \times H$  が単調作用素で, かつ  $A \subset A_0$  であるならば,  $A = A_0$  となるときをいう. 単調作用素  $A$  が極大であることの必要十分条件は, 任意の  $r > 0$  に対して  $R(I + rA) = H$  が成立することである. ただし,  $I$  は  $H$  上の恒等写像 (identity mapping) である.

$A \subset H \times H$  を極大単調作用素とする. このとき, 零点集合  $A^{-1}0$  は閉凸集合となる. さらに, 任意の  $x \in H$  と  $r > 0$  に対して,

$$x \in x_r + rAx_r$$

を満たす  $x_r \in D(A)$  が一意に存在することが知られている. このような点  $x_r$  を  $J_r x$  で表し,  $J_r$  は  $A$  のリゾルベント (resolvent) と呼ばれ,  $J_r = (I + rA)^{-1}$  である ([25–27] 等を参照).

## 2.2 縮小射影法

2009 年に井上-高橋-善林 [13] は縮小射影法と近接点法を融合させて極大単調作用素の零点を求める近似法を提案し, バナッハ空間において強収束定理を得た. 定理 1.1 と比較のためヒルベルト空間のケースで引用する.

**定理 2.1 ([13])**  $H$  をヒルベルト空間とし,  $A \subset H \times H$  を  $A^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とする.  $\{r_n\}$  を  $[a, \infty[$  の実数列とする. ただし,  $a > 0$  である. 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_0 = x \in H, C_0 = H$  とし,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x \end{aligned}$$

とする. このとき点列  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}x$  に強収束する.

なお, 井上-高橋-善林 [13] は定理 2.1 より一般的な, バナッハ空間において極大単調作用素の零点集合と非線形写像の不動点集合の共通要素を求める強収束定理を得ている.

2017 年に茨木 [6] は木村 [17] の提案した, 総和不可能誤差を持つ縮小射影法と近接点法を融合させ, ヒルベルト空間において極大単調作用素の零点に対しての近似定理を得た.

**定理 2.2 ([6])**  $H$  をヒルベルト空間とし,  $A \subset H \times H$  を  $A^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とする.  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とし,  $\{\delta_n\}$  を非負の実数列とし,  $\delta_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n$  とする.  $u$  を  $H$  の任意の元として, 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 \in H, C_1 = H$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle y_n - z, x_n - y_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &\in \{z \in C_{n+1} : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}^2\} \end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| \leq \delta_0.$$

となる. さらに,  $\delta_0 = 0$  のとき点列  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}u$  に強収束する.

2024年には、茨木-梶葉-中野 [9] が竹内 [30] の提案した許容範囲を持つ縮小射影法と近接点法を融合させ、ヒルベルト空間において極大単調作用素の零点を求める強収束定理を得た。

**定理 2.3 ( [9] )**  $H$  をヒルベルト空間とし,  $A \subset H \times H$  を  $A^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とする.  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とする.  $x_0$  を  $H$  の任意の元とし, 点列  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  を次のように構成する.  $C_1 = D_1 = H$ ,  $x_1 = P_{C_1}x_0$ ,  $u_1 \in D_1$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J_{r_n}u_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle y_n - z, u_n - y_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \\ D_{n+1} &= \{y \in C_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in D_{n+1} \end{aligned}$$

とする. このとき, 以下のいずれかが成立する.

1. すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $D_n \neq \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  は共に  $P_{A^{-1}0}x_0$  へ強収束する.
2. ある  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  に対して  $D_k = \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $u_{k-1} \in A^{-1}0$  である.

### 3 バナッハ空間における縮小射影法

#### 3.1 準備

$E$  を実バナッハ空間 (real Banach space) とし,  $E^*$  を  $E$  の共役空間 (dual space) とする. 以降, 本論文ではバナッハ空間はすべて実空間とする.  $E$  の元  $x$  に対し,  $E^*$  の部分集合

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像  $J$  を正規化双対写像 (normalized duality mapping) と呼ぶ. なお, ヒルベルト空間においては  $J$  は恒等写像となる. バナッハ空間  $E$  がカデック・クリー条件 (Kadec-Klee property) を満たすとは,  $E$  の点列  $\{x_n\}$  が  $x$  に弱収束し, 実数列  $\{\|x_n\|\}$  が  $\|x\|$  へ収束するときは, 常に点列  $\{x_n\}$  が  $x$  に強収束することをいう.

バナッハ空間において, ヒルベルト空間における距離射影の拡張を考える. 回帰的な狭義凸バナッハ空間においてヒルベルト空間と同様の形式で距離射影 (metric projection) が定義できる ([28] 等を参照). 次に, 別の形式での拡張を定義する.  $E$  を滑らかなバナッハ空間とする. このとき,  $E$  の元  $x, y$  に対して

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で  $E \times E$  から  $\mathbb{R}$  の関数  $V$  を定義する. この関数  $V$  関しては次のような性質が知られている ([1, 11, 16] を参照).

1.  $E$  の元  $x, y$  に対して,  $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$  である,

2.  $E$  の元  $x, y$  に対して,  $V(x, y) + V(y, x) = 2\langle x - y, Jx - Jy \rangle$  である,
3.  $E$  の元  $x, y, z$  に対して,  $V(x, y) = V(x, z) + V(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy \rangle$  である,
4.  $E$  が狭義凸ならば,  $E$  の元  $x, y$  に対して  $V(x, y) = 0$  であるための必要十分条件は  $x = y$  である.

$E$  を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし,  $C$  を  $E$  の空でない閉凸部分集合とする. このとき, 任意の  $E$  の元  $x$  に対し

$$V(x_0, x) = \min_{y \in C} V(y, x)$$

となる  $C$  の元  $x_0$  が一意に存在する. このような  $C$  の元  $x_0$  を  $\Pi_C x$  で表し,  $\Pi_C$  を  $E$  から  $C$  の上への準距離射影 (generalized projection) と呼ぶ ([1] を参照). また,  $D$  を  $E$  の空でない部分集合で,  $E^*$  で  $JD$  が閉凸集合であるとする. このとき  $E$  から  $D$  への写像  $R_D$  を

$$R_D := J^{-1} \Pi_{JD}^* J$$

で定義するとき  $R_D$  をサニー準非拡大射影と呼ぶ ([11, 21] を参照). ただし,  $\Pi_{JD}^*$  は  $E^*$  から  $JD$  の上への準距離射影である. 準距離射影とサニー準非拡大射影はヒルベルト空間で定義された距離射影のバナッハ空間での拡張概念である ([1, 11, 16] を参照). すなわち, これらの射影はヒルベルト空間では一致する. このことは, ヒルベルト空間においては  $J = I$  となることから容易に導ける.

$E$  を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とする. 多価写像  $A \subset E \times E^*$  に対して,  $A$  の定義域 (domain) と  $A$  の値域 (range) は

$$D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}, \quad R(A) = \cup\{Ax : x \in D(A)\}$$

で定義される. 多価写像  $A \subset E \times E^*$  が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の  $(x, x^*), (y, y^*) \in A$  に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. 単調作用素  $A$  が極大 (maximal) であるとは,  $A$  を真に含む単調作用素  $A_0 \subset E \times E^*$  が存在しないときいう. すなわち,  $A_0 \subset E \times E^*$  が単調作用素で, かつ  $A \subset A_0$  であるならば,  $A = A_0$  となるときをいう.

$A \subset E \times E^*, B \subset E^* \times E$  を極大単調作用素とする. このとき, 任意の  $r > 0$  に対して

$$R(I + rJ^{-1}A) = J^{-1}(R(J + rA)) = R(I + rBJ) = E$$

となることが知られている ([3, 11, 26] を参照). また,  $D(A)$  と  $D(B)$  の閉包  $\overline{D(A)}$  と  $\overline{D(B)}$  は凸集合となることも知られている ([24] を参照).

このことより次の3つの写像が定義できる. 任意の  $r > 0$  に対して

$$\begin{aligned} P_r &= (I + rJ^{-1}A)^{-1} : E \rightarrow \overline{D(A)}; \\ Q_r &= (J + rA)^{-1}J : E \rightarrow \overline{D(A)}; \\ R_r &= (I + rBJ)^{-1} : E \rightarrow \overline{D(B)}. \end{aligned}$$

これらの写像は順に, (P) 型リゾルベント (the resolvent of type (P)), (Q) 型リゾルベント (the resolvent of type (Q)) 及び (R) 型リゾルベント (the resolvent of type (R)) と呼ばれる. これら3つのリゾルベントはヒルベルト空間で定義されたリゾルベントのバナッハ空間での拡張概念である ([2, 5, 7, 11, 28] 等を参照). すなわち, これらのリゾルベントはヒルベルト空間では一致する. このことは, ヒルベルト空間においては  $J = I$  なることから容易に導ける.

### 3.2 縮小射影法

本項では, バナッハ空間において (P) 型, (Q) 型及び (R) 型のリゾルベントを用いて, 高橋-竹内-窪田 [29] の縮小射影法を扱う. 縮小射影法に用いる非線形射影は距離射影を用いた結果を中心に紹介する.

2009年に木村-高橋 [20] は (Q) 型リゾルベントを用いて, 極大単調作用素の零点への強収束定理を得た.

**定理 3.1 ([20])**  $E$  を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとし,  $A \subset E \times E^*$  を  $A^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とする.  $\{\alpha_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1]$  の実数列とし,  $\{r_n\}$  を  $\inf_{n \in \mathbb{N}} r_n > 0$  を満たす正の実数列とする.  $x$  を  $E$  の任意の元とし, 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 \in E$ ,  $C_1 = E$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1 - \alpha_n)JQ_{r_n}x_n), \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : V(z, y_n) \leq V(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}}x \end{aligned}$$

とする. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}x$  へ強収束する.

なお, 第2節2.2項で紹介した定理2.1もバナッハ空間においては (Q) 型リゾルベントを用いた縮小射影法の成果であるが非線形射影として準距離射影を用いており, 定理3.1は距離射影が用いられている.

2013年に茨木 [4] は (P) 型リゾルベントを用いた縮小射影法に関する成果を得た.

**定理 3.2 ([4])**  $E$  を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間でカデック・クリー条件を満たすとし,  $A \subset E \times E^*$  を  $A^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とする.  $\{\alpha_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1]$  の実数列とし,  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とする. 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 = x \in E$ ,  $C_1 = E$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対

して

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) P_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(x_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} x \end{aligned}$$

とする. このとき,  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}x$  へ強収束する.

(R) 型リゾルベントを用いた縮小射影法に関しては, 距離射影を用いた成果がないため, 2008 年に茨木 [12] がサニー準非拡大写像を用いた次の強収束定理を紹介する. なお, 距離射影を用いた定理も定理 3.1 及び 3.2 の証明を参考にすれば得ることが出来るだろう.

**定理 3.3 ([12])**  $E$  を一様凸バナッハ空間で一様ガトー微分可能なノルムを持つとし,  $B \subset E^* \times E$  を  $B^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とする.  $\{\alpha_n\}$  を  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1[$  の実数列とし,  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とする. 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 = x \in E$ ,  $C_1 = E$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) R_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : V(y_n, z) \leq V(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} &= R_{C_{n+1}} x \end{aligned}$$

とする. このとき,  $\{x_n\}$  は  $R_{(BJ)^{-1}0}x$  へ強収束する.

### 3.3 総和不可能誤差を持つ縮小射影法

本項では, バナッハ空間において (P) 型, (Q) 型及び (R) 型のリゾルベントを用いて, 木村 [17] の総和不可能誤差を持つ縮小射影法を扱う. 本項でも縮小射影法に用いる非線形射影は距離射影を用いた結果を中心に紹介する. まず初めに次の定理を紹介する.

**定理 3.4 ([31])**  $E$  をバナッハ空間とし,  $r$  を正の実数とする.  $B_r = \{z \in E : \|z\| \leq r\}$  としたとき以下が成立する.

- (i)  $E$  が一様凸ならば,  $\underline{g}_r(0) = 0$  となる  $[0, 2r]$  から  $[0, \infty[$  への連続で狭義単調増加な凸関数  $\underline{g}_r$  が存在し,  $B_r$  の任意の元  $x, y$  と  $[0, 1]$  の任意の実数  $\alpha$  に対して

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 \leq \alpha \|x\|^2 + (1 - \alpha) \|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha) \underline{g}_r(\|x - y\|)$$

を満たす.

- (ii)  $E$  が一様に滑らかならば,  $\bar{g}_r(0) = 0$  となる  $[0, 2r]$  から  $[0, \infty[$  への連続で狭義単調増加な凸関数  $\bar{g}_r$  が存在し,  $B_r$  の任意の元  $x, y$  と  $[0, 1]$  の任意の実数  $\alpha$  に対して

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 \geq \alpha \|x\|^2 + (1 - \alpha) \|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha) \bar{g}_r(\|x - y\|)$$

を満たす.

2016年に茨木 [5] は, 定理 3.4 で存在性が示された関数  $\bar{g}_r$  と  $\underline{g}_r$  を用いて, (P) 型および (Q) 型リゾルベントに対する総和不可能誤差を持つ縮小射影法を示した.

**定理 3.5 ( [5] )**  $E$  を滑らかな一様凸バナッハ空間とし,  $A \subset E \times E^*$  を  $A^{-1}0$  が空でなく,  $D(A)$  が有界な極大単調作用素とする.  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とし,  $r$  を  $B_r$  が  $D(A)$  を含むような正の実数とする.  $\{\delta_n\}$  を非負の実数列とし,  $\delta_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n$  とする.  $u$  を  $E$  の任意の元として, 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 = x \in \overline{D(A)}$ ,  $C_1 = \overline{D(A)}$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= P_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(x_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &\in \{z \in C_{n+1} : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}(\delta_0)$$

となる. さらに,  $\delta_0 = 0$  のとき点列  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}u$  に強収束する.

**定理 3.6 ( [5] )**  $E$  を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし,  $A \subset E \times E^*$  を  $A^{-1}0$  が空でなく,  $D(A)$  が有界な極大単調作用素とする.  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とし,  $r$  を  $B_r$  が  $D(A)$  を含むような正の実数とする.  $\{\delta_n\}$  を非負の実数列とし,  $\delta_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n$  とする.  $u$  を  $E$  の任意の元として, 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 = x \in E$ ,  $C_1 = E$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= Q_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle y_n - z, Jx_n - Jy_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &\in \{z \in C_{n+1} : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| \leq \underline{g}_r^{-1} \left( \bar{g}_r(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0)) \right)$$

となる. さらに,  $\delta_0 = 0$  のとき点列  $\{x_n\}$  は  $P_{A^{-1}0}u$  に強収束する.

なお, [5] においては, 定理 3.5 及び定理 3.6 の  $A$  の条件は極大単調作用素より弱い条件の定理を示している.

(R) 型リゾルベントを用いた総和不可能誤差を持つ縮小射影法に関しては, 2017年に茨木 [7] がサニー準非拡大写像を用いた次の近似定理を紹介する. なお, 距離射影に関しては, 実数列  $\{r_n\}$  が定数に限定した形で Ibaraki-Saejung [10] が成果を得ている.

**定理 3.7 ( [7] )**  $E$  を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし,  $B \subset E^* \times E$  を  $B^{-1}0$  が空でなく,  $D(B)$  が有界な極大単調作用素とする.  $\{r_n\}$  を  $\inf_{n \in \mathbb{N}} r_n > 0$  を満たす正の実数列とし,  $r$  を  $B_r$  が  $D(B)$  を含むような正の実数とする.  $\{\delta_n\}$  を非負の有界な実数列と

し,  $\delta_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n$  とする.  $u$  を  $E$  の任意の元として, 点列  $\{x_n\}$  を次のように構成する:  $x_1 = x \in \overline{D(BJ)}$ ,  $C_1 = \overline{D(BJ)}$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= J_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle x_n - y_n, Jy_n - Jz \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &\in \{z \in C_{n+1} : V(u, z) \leq \inf\{V(u, v) : v \in C_{n+1}\} + \delta_{n+1}\} \end{aligned}$$

とする. このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| \leq \underline{g}_r^{-1} \left( \overline{g}_r^* (\underline{g}_r^{*-1}(\delta_0)) \right).$$

となる. さらに,  $\delta_0 = 0$  のとき点列  $\{x_n\}$  は  $R_{(BJ)^{-1}0}u$  に強収束する. ただし, 関数  $\underline{g}_r^*$  と  $\overline{g}_r^*$  とは定理 3.4 を  $E^*$  で適用し, 順に (i), (ii) で得られた関数である.

### 3.4 許容範囲を持つ縮小射影法

最後に本項では, バナッハ空間において (P) 型, (Q) 型及び (R) 型のリゾルベントを用いて, 竹内 [30] の許容範囲を持つ縮小射影法を扱う. 最近, 茨木-梶葉 [8] がこれら 3 つのリゾルベントに関しての成果を得ている.

**定理 3.8 ( [8] )**  $E$  を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間でカデック・クリー条件を満たすとする.  $A \subset E \times E^*$  を  $A^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とし,  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とする.  $x_0$  を  $E$  の任意の元とし, 点列  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  を次のように構成する:  $C_1 = D_1 = E$ ,  $x_1 = P_{C_1}x_0$ ,  $u_1 \in D_1$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= P_{r_n} u_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(u_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \\ D_{n+1} &= \{y \in C_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in D_{n+1} \end{aligned}$$

とする. このとき, 以下のいずれかが成立する.

1. すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $D_n \neq \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  は共に  $P_{A^{-1}0}x_0$  へ強収束する.
2. ある  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  に対して  $D_k = \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $u_{k-1} \in A^{-1}0$  である.

**定理 3.9 ( [8] )**  $E$  を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする.  $A \subset E \times E^*$  を  $A^{-1}0$  が空でない極大単調作用素とし,  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とする.  $x_0$  を  $E$  の任意の元とし, 点列  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  を次のように構成する:  $C_1 = D_1 = E$ ,  $x_1 = P_{C_1}x_0$ ,  $u_1 \in D_1$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= Q_{r_n} u_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle y_n - z, Ju_n - Jy_n \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \\ D_{n+1} &= \{y \in C_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in D_{n+1} \end{aligned}$$

とする. このとき, 以下のいずれかが成立する.

1. すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $D_n \neq \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  は共に  $P_{A^{-1}0}x_0$  へ強収束する.
2. ある  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  に対して  $D_k = \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $u_{k-1} \in A^{-1}0$  である.

**定理 3.10 ([8])**  $E$  を回帰的な狭義凸バナッハ空間でフレッシュェ微分可能なノルムを持ち, カデック・クリー条件を満たすとする.  $B \subset E^* \times E$  を  $B^{-1}0$  空でない極大単調作用素とし,  $\{r_n\}$  を  $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$  を満たす正の実数列とする.  $x_0$  を  $E$  の任意の元とし, 点列  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  を次のように構成する.  $C_1 = D_1 = E$ ,  $x_1 = J^{-1}P_{JC_1}^*Jx_0$ ,  $u_1 \in D_1$  とし,  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\begin{aligned} y_n &= R_{r_n}u_n, \\ C_{n+1} &= \{z \in C_n : \langle u_n - y_n, Jy_n - Jz \rangle \geq 0\}, \quad x_{n+1} = J^{-1}P_{JC_{n+1}}^*Jx_0, \\ D_{n+1} &= \{y \in C_n : \|Jx_0 - Jy\| \leq \|Jx_0 - Jx_{n+1}\|, y \neq u_n\}, \quad u_{n+1} \in D_{n+1} \end{aligned}$$

とする. このとき, 以下のいずれかが成立する.

1. すべての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $D_n \neq \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $\{x_n\}$  と  $\{u_n\}$  は共に  $J^{-1}P_{B^{-1}0}^*Jx_0$  へ強収束する.
2. ある  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  に対して  $D_k = \emptyset$  が成り立つ. この場合,  $u_{k-1} \in (BJ)^{-1}0$  である.

ただし,  $P_{K^*}^*$  は  $E^*$  から  $E^*$  の空でない閉凸集合  $K^*$  の上への距離射影である.

## 4 まとめ

本論文では, 極大単調作用素の零点問題の解を求める手法である近接点法と, 不動点近似法の研究で導入された縮小射影法及び2つの改良され縮小射影法との融合をヒルベルト空間およびバナッハ空間で考察した. 近接点法には極大単調作用素から生成されるリゾルベント作用素が利用されるが, ヒルベルト空間からバナッハ空間に拡張する際に複数の拡張がある. 本論文では (P) 型, (Q) 型および (R) 型の3つのリゾルベントを扱った. また, ヒルベルト空間における縮小射影法には距離射影が用いられるが, ヒルベルト空間からバナッハ空間に拡張する際に非線形射影も複数の拡張があり, 距離射影, 準距離射影およびサニー準非拡大射影を扱った. 準距離射影とサニー準非拡大射影の2つは双対関係になっており, 準距離射影を用いて (R) 型リゾルベントを扱う際に, 非線形射影の表現としてサニー準非拡大射影が利用される. 距離射影を用いて (R) 型リゾルベントを扱った定理 3.10 と準距離射影とサニー準非拡大射影の双対関係を比較してみれば理解しやすいだろう. これらより, ヒルベルト空間からバナッハ空間への拡張は, 3つのリゾルベントと2つの非線形射影のタイプの6つの組み合わせに拡張できることがわかるだろう. 本論文では距離射影を用いた成果を中心に紹介したが, 扱っていない組み合わせも同様に導き出すことが出来る.

## 参考文献

- [1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.
- [2] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal., **10** (2009), 131–147.
- [3] F. E. Browder, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach space*, Math. Ann., **175** (1968), 89–113.
- [4] T. Ibaraki, *Strong convergence theorems for zero point problems and equilibrium problems in a Banach space*, Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis I, Yokohama Publishers, 2013, 115–126.
- [5] T. Ibaraki, *Approximation of zero point of monotone operators with nonsummable errors*, Fixed Point Theory Appl., **2016**:48 (2016), 14 pages.
- [6] T. Ibaraki, *Iterative approximation with errors of zero points of maximal monotone operators in a Hilbert space*, Linear Nonlinear Anal., **3** (2017), 171–178.
- [7] T. Ibaraki, *Iterative approximation with errors of zero points of monotone operators in a Banach space*, Yokohama Math. J., **63** (2017), 91–109.
- [8] T. Ibaraki and S. Kajiba, *Shrinking projection method with allowable ranges for zero point problems in a Banach space*, to appear.
- [9] 茨木貴徳・梶葉駿介・中野龍治, 「零点問題における許容範囲を持つ縮小射影法とその応用」京大数理解析研究所講究録 **2274** (2024), 61–70.
- [10] T. Ibaraki and S. Saejung, *On shrinking projection method for cutter type mappings with nonsummable errors*, J. Inequal. Appl., **2023**:92 (2023), 20 pages.
- [11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory, **149** (2007), 1–14.
- [12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by a hybrid method for generalized resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **9** (2008), 71–8.
- [13] G. Inoue, W. Takahashi and K. Zembayashi, *Strong convergence theorems by hybrid methods for maximal monotone operators and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Convex Anal., **16** (2009), 791–806.
- [14] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory, **106** (2000), 226–240.
- [15] S. Kamimura and W. Takahashi, *Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces*, Sci. Math., **3** (2000), 107–115.
- [16] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., **13** (2002), 938–945.
- [17] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonexpansive mapping with nonsummable errors in a geodesic space*, Proceedings of the 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, 2012, pp. 157–164.

- [18] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV (Kitakyushu, Japan), (L. Maligranda, M. Kato, and T. Suzuki eds.), 2014, 303–311.
- [19] Y. Kimura, *Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **15** (2014), 429–436.
- [20] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.
- [21] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **8** (2007), 197–209.
- [22] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives* (in French), Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelles, **4** (1970), 154–158.
- [23] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach space*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.
- [24] R. T. Rockafellar, *On the virtual convexity of the domain and range of a nonlinear maximal monotone operator*, Math. Ann., **185** (1970), 81–90.
- [25] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math., **33** (1970), 209–216.
- [26] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 75–88.
- [27] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim., **14** (1976), 877–898.
- [28] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.
- [29] W. Takahashi, Y. Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 276–286.
- [30] Y. Takeuchi, *Shrinking projection method with allowable ranges*, J. Nonlinear Anal. Optim., **10** (2019), 83–94.
- [31] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.
- [32] H. K. Xu, *Iterative algorithms for nonlinear operator*, J. London Math. Soc., **66** (2002), 240–256.