

# 第 6 3 回

## トポロジーシンポジウム

### 講演集

2016 年 (平成 28 年) 7 月 5 日～7 月 8 日  
於 神戸大学

平成 28 年度科学研究費補助金

基盤研究 (S)	研究課題/領域番号	15H05739
基盤研究 (A)	研究課題/領域番号	16H02145
基盤研究 (C)	研究課題/領域番号	16K05147

## はしがき

この講演集は 2016 年 (平成 28 年) 7 月 5 日から 7 月 8 日までの 4 日間、神戸大学において開催される第 63 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこのシンポジウムは、以下の助成により開催されたものである。

### 平成 28 年度科学研究費補助金

研究種目 基盤研究 (S)  
研究代表者 藤原 耕二 (京都大学)  
研究課題名 幾何学的群論の深化と展開  
研究課題/領域番号 15H05739

研究種目 基盤研究 (A)  
研究代表者 大槻 知忠 (京都大学)  
研究課題名 結び目と 3 次元多様体の量子トポロジー  
研究課題/領域番号 16H02145

研究種目 基盤研究 (C)  
研究代表者 佐藤 進 (神戸大学)  
研究課題名 1 次元と 2 次元の結び目の類似性と相違性に関する射影図的研究  
研究課題/領域番号 16K05147

世話人： 中西 康剛 (神戸大学)  
佐藤 進 (神戸大学)  
佐治 健太郎 (神戸大学)  
大鹿 健一 (大阪大学)  
三松 佳彦 (中央大学)

共催： 日本数学会トポロジー分科会  
神戸大学

## 第63回 トポロジーシンポジウム プログラム

日時：2016年7月5日(火)午後～7月8日(金)午前

場所：兵庫県神戸市灘区六甲台町2-1  
神戸大学出光佐三記念六甲台講堂

7月5日(火)

**15:00–16:00**

浅岡 正幸 (京都大学大学院理学研究科)

閉曲面上のハミルトン微分同相写像に対する  $C^\infty$  Closing Lemma ..... 1

**16:30–17:30**

長谷川 大 (岩手医科大学)

曲面と円柱の接触と曲面の輪郭線 ..... 13

7月6日(水)

**9:30–10:30**

村井 聡 (大阪大学大学院情報科学研究科)

多様体の単体分割の組合せ論と代数 ..... 23

**11:00–12:00**

松下 尚弘 (京都大学大学院理学研究科, JSPS)

グラフの Hom 複体と彩色数について ..... 35

**13:30–14:30**

安井 弘一 (広島大学大学院理学研究科)

4次元シュタイン多様体と結び目 ..... 45

**15:00–16:00**

Benoît Guerville-Ballé (東京学芸大学, CNRS)

A linking invariant of algebraic curves ..... 55

**16:30–17:30 企画講演**

作間 誠 (広島大学大学院理学研究科)

結び目と3次元多様体 ～幾何構造とファイバー構造を中心にして～ .... 65

7月7日(木)

**9:30–10:30**

正井 秀俊 (東京大学大学院数理科学研究科, JSPS)

写像類群上のランダムウォーク ..... 91

**11:00–12:00**

小野 薫 (京都大学数理解析研究所)

Symplectic Floer 理論の話題から ..... 101

**13:30–14:30**

太田 啓史 (名古屋大学大学院多元数理研究科)

深谷圏とミラー対称性予想 ..... 113

**15:00–16:00**

岸本 大祐 (京都大学大学院理学研究科)

ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論 ..... 127

**16:30–17:30**

下川 航也 (埼玉大学大学院理工学研究科)

結び目理論の応用について ..... 139

7月8日(金)

**9:30–10:30**

粕谷 直彦 (青山学院大学社会情報学部)

Non-Kähler complex structures on  $\mathbb{R}^4$  ..... 147

**11:00–12:00**

笠原 泰 (高知工科大)

曲面の写像類群の線型性問題の視覚化について ..... 159

# 閉曲面上のハミルトン微分同相写像に対する $C^\infty$ Closing Lemma

浅岡正幸

京都大学大学院理学研究科

## 1 Closing Lemma

$X$  を位相空間,  $\text{Homeo}(X)$  を  $X$  上の同相写像の全体のなす群とする.  $f \in \text{Homeo}(X)$  と整数  $n$  に対して,  $f^n \in \text{Homeo}(X)$  を  $f^0 = \text{Id}_X$  ( $X$  上の恒等写像),  $n \geq 1$  に対して,  $f^n = f \circ f_{n-1}$ ,  $f^{-n} = (f^n)^{-1}$  で定める.  $x \in X$  に対して, 集合  $\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  を  $f$  による  $x$  の軌道という.

$x \in X$  が  $f(x) = x$  をみたすとき,  $x$  は  $f$  の不動点であるという. また, ある  $n \geq 1$  に対して  $f^n(x) = x$  となるとき,  $x$  は  $f$  の周期点であるという.  $\text{Fix}(f)$ ,  $\text{Per}(f)$  でそれぞれ,  $f$  の不動点全体, 周期点全体のなす集合を表わす. Lefschetz の不動点定理を思い出すまでもなく,  $\text{Fix}(f)$ ,  $\text{Per}(f)$  がどのような集合であるか, その周りで  $f$  がどのような振舞いをしているかは,  $f$  の挙動を知る上で最も重要なことのひとつである<sup>1</sup>. しかし,  $X$  がコンパクト集合の場合でも, 一般に  $f$  は周期点を持つとは限らない.

**Example 1.1** (rigid rotation).  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  とする.  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して,  $R_\theta \in \text{Homeo}(S^1)$  を,  $R_\theta([x]) = [x + \theta]$  で定める ( $[x]$  は  $x \in \mathbb{R}$  が代表する  $S^1$  の元).  $\theta$  が有理数  $q/p$  のときは,  $\text{Per}(R_\theta) = \text{Fix}(R_\theta^p) = S^1$ . しかし,  $\theta$  が無理数のときは,  $R_\theta$  は周期点を持たない.

周期性よりも弱い回帰性を持つ点の集合を定義しよう.  $x \in X$  に対して,  $\alpha(x, f)$ ,  $\omega(x, f)$  をそれぞれ, 点列  $(f^{-n}(x))_{n \geq 0}$ ,  $(f^n(x))_{n \geq 0}$  の集積点全体のなす集合とする. 集合  $\overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x, f) \cup \omega(x, f)}$  を  $f$  の極限集合と言ひ<sup>2</sup>,  $L(f)$  で表わす.  $x \in L(f)$  であることは, 任意の  $x$  の近傍  $U$  に対して,  $y \in X$  で  $U \cap \mathcal{O}(y, f)$  が無限集合となるものがあることと同値である.  $X$  がコンパクト

<sup>1</sup>時間発展を研究対象とする力学系理論において, 不動点や不変集合, 不変測度といった時間発展しないものを中心的な役割を果たすことに, 筆者は諧謔のようなものを感じる時がある.

<sup>2</sup> $\overline{S}$  で  $S \subset X$  の閉包を表わす.

ならば,  $L(f)$  は空集合ではない.  $x \in X$  が非遊走点であるとは, 任意の  $x$  の近傍  $U$  に対して  $n \geq 1$  で  $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$  をみたすものが存在することを言う.  $f$  の非遊走点全体を  $\Omega(f)$  で表わす. これらの集合はみな  $f$ -不変で,

$$\text{Fix}(f) \subset \text{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f)$$

という包含関係が常に成り立つ.

**Example 1.2.**  $R_\theta$  を Example 1.1 で定義した  $S^1$  上の回転写像とすると, すべての  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して,  $L(f) = \Omega(f) = S^1$ .

$(X, d)$  がコンパクト距離空間の場合には,

$$d_{C^0}(f, g) = \sup_{x \in X} [d(f(x), g(x)) + d(f^{-1}(x), g^{-1}(x))]$$

として  $\text{Homeo}(X)$  上の  $C^0$ -距離を定めれば,  $\text{Homeo}(X)$  は位相群の構造を持つ. 回転写像の例では,  $\theta$  を有理数  $q/p$  で近似することで,  $R_\theta$  を周期点が多量にある写像  $R_{p/q}$  で ( $C^0$  位相で) 近似できる. では, 一般の場合も  $f \in \text{Homeo}(X)$  を周期点が多量にある写像で近似できるだろうか. その疑問への一つの解答が次の  $C^0$  closing lemma である.

**Theorem 1.3** ( $C^0$  closing lemma).  $M$  をコンパクトな位相多様体<sup>3</sup>,  $f$  を  $M$  からそれ自身への同相写像とする.  $x_* \in \Omega(f)$  に対して,  $f$  に  $C^0$  位相で収束する写像列  $(f_k)_{k \geq 1}$  と  $x_*$  に収束する  $M$  の点列  $(x_n)_{k \geq 1}$  で, すべての  $k \geq 1$  について  $x_k \in \text{Per}(f_k)$  となるものが存在する. 言い換えれば,  $\Omega(f)$  の点の軌道を写像を  $C^0$ -摂動することで「閉じる」ことができる.

証明は簡単である. 与えられた  $\epsilon > 0$  に対して,  $x_*$  を中心とする半径が  $\epsilon/2$  よりも小さい球体  $U$  を考える. 必要ならば  $\epsilon$  をより小さいものに取り変えることで,  $U$  はある座標近傍に入っているとしてよい.  $x_* \in \Omega(f)$  なので,  $N \geq 1$  で,  $f^n(U) \cap U = \emptyset$  ( $0 \leq n \leq N-1$ ), かつ,  $U \cap f^N(U) \neq \emptyset$  となるものがある.  $x_k \in f^{-N}(U) \cap U \neq \emptyset$  を取り,  $y_k = f^N(x_k)$  とすると,  $y_k \in U$  である.  $h \in \text{Homeo}(X)$  に対して,  $\text{supp}(h) = \{x \in X \mid h(x) \neq x\}$  を  $h$  の台と言う.  $h_k \in \text{Homeo}(X)$  で  $h_k(y_k) = x_k$ , かつ,  $\text{supp}(h_k) \subset U$  であるものを取り,  $f_k = h_k \circ f$  と置けば,  $d_{C^0}(f_k, f) = d_{C^0}(h_k, \text{Id}_M) < \epsilon$ . また,  $f^n(U) \cap \text{supp}(h_k) = \emptyset$  ( $n = 1, \dots, N-1$ ) であることから,

$$f_k^N(x_k) = (h_k \circ f)^N(x_k) = h_k \circ f^N(x_k) = h_k(y_k) = x_k.$$

すなわち,  $x_k \in \text{Per}(f_k)$  となり, Theorem 1.3 が証明できた.

$C^0$  closing lemma の系として次を示すのはそれほど難しくない<sup>4</sup>

<sup>3</sup>証明を見ればわかるようにコンパクト性は重要でない.

<sup>4</sup>後述する Pugh による  $C^1$  general density theorem の証明 ([16]) を見よ.

**Theorem 1.4** ( $C^0$  general density theorem).  $M$  をコンパクトな位相多様体とする. このとき,

$$\{f \in \text{Homeo}(M) \mid \overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)\}$$

は  $\text{Homeo}(M)$  の residual な部分集合<sup>5</sup>.

$M$  をコンパクトな (境界を持つかもしれない) 多様体とする.  $1 \leq r \leq \infty$  に対して,  $M$  からそれ自身への  $C^r$  級微分同相写像の全体のなす群  $\text{Diff}^r(M)$  は  $C^r$  位相という自然な位相を持つ. Pugh は  $r = 1$  の場合に次を示した.

**Theorem 1.5** ( $C^1$  closing lemma [15, 16]).  $f \in \text{Diff}^1(M)$  と  $x_* \in \Omega(f)$  に対して,  $f$  に  $C^1$  位相で収束する写像列  $(f_k)_{k \geq 1}$  と  $x_*$  に収束する  $M$  の点列  $(x_n)_{n \geq 1}$  で, すべての  $k \geq 1$  について  $x_k \in \text{Per}(f_k)$  となるものが存在する.

**Corollary 1.6** ( $C^1$  density theorem [16]).

$$\{f \in \text{Diff}^1(M) \mid \overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)\}$$

は  $\text{Diff}^1(M)$  の residual な部分集合.

$C^1$  closing lemma の証明の基本方針は同相写像の場合と同じであるが,  $h$  が半径  $\delta$  の球体に台を持ち,  $h$  と  $\text{Id}_M$  の  $C^1$ -距離が  $\epsilon$  以下のときには,  $d_{C^0}(h, \text{Id}_M) = O(\delta\epsilon)$  となり<sup>6</sup>. そのため,  $x_*$  のまわりの摂動だけでは周期軌道を得ることを期待できない. そこで,  $x_*$  を適切に選びなおして  $x_*, f(x_*), \dots, f^{[1/\epsilon]}(x_*)$  を中心とした半径  $\delta$  の球体における摂動が互いに干渉しあわないようにし, それらでの摂動によって  $x_*$  を  $\delta\epsilon \cdot (1/\epsilon) = \delta$  くらい動かす, というのが Pugh のアイデアである. Pugh の方法は体積を保つ  $C^1$  微分同相写像や,  $C^1$  Hamiltonian 微分同相写像に対しても有効であり, これらに対しても  $C^1$  closing lemma が証明されている ([17]).

$r \geq 2$  の場合には, 半径  $\delta$  の球体に台を持ち,  $h$  と  $\text{Id}_M$  の  $C^1$ -距離が  $\epsilon$  以下であるような  $h \in \text{Diff}^r(M)$  については,  $d_{C^0}(h, \text{Id}_M) = O(\delta^r\epsilon)$  となり, 一般には  $\delta$  が制御できないために  $C^1$  の場合の Pugh のアイデアではうまく行かない. 実際, 次に見るように,  $r \geq 2$  の flow の場合にはいくつかの状況で反例が構成されている. 多様体  $M$  上の flow  $\Phi$  に対しても, 同相写像の場合と同様に周期点集合  $\text{Per}(\Phi)$ , 非遊走点集合  $\Omega(f)$  が定義される. 次の Gutierrez の例は,  $C^0$  や  $C^1$  の場合とは異なり, 小さな台を持つ  $C^2$ -摂動では一般には新たに周期軌道を作ることができないことを示している.

<sup>5</sup>位相空間  $\mathcal{V}$  の部分集合  $\mathcal{R}$  が residual であるとは,  $\mathcal{V}$  の稠密開部分集合の列  $(U_k)_{k \geq 1}$  で,  $\bigcap_{k \geq 1} U_k \subset \mathcal{R}$  となるものがあることを言う. Baire の定理より, このとき  $\mathcal{R}$  は  $\mathcal{V}$  の稠密部分集合となる.

<sup>6</sup>例えば  $M$  が 1 次元の場合は簡単な計算からわかる.

**Theorem 1.7** (Gutierrez [4]). 2次元トーラス  $\mathbb{T}^2$  上の  $C^\infty$  級ベクトル場  $X$  で、次をみたすものが存在する：

1.  $X$  の零点集合を  $S$ ,  $X$  が生成する flow を  $\Phi$  としたとき,  $\Omega(\Phi) \setminus S \neq \emptyset$ .
2. 任意のコンパクト集合  $K \subset \mathbb{T}^2 \setminus S$  に対して, 台が  $K$  に含まれるような  $C^2$  ベクトル場  $Y$  が  $0$  に  $C^2$  位相で十分近ければ,  $X + Y$  が生成する flow は  $K$  を通る周期軌道を持たない.

一方, Herman は, Hamiltonian flow という設定においては, Pugh-Robinson による  $C^1$  closing lemma ([17]) とは対照的に,  $r \geq 7$  に対して  $C^r$  closing lemma が成り立たないことを示した. Hamiltonian flow は体積を保存するため, Poincaré の回帰定理<sup>7</sup> より,  $\Omega(f)$  は多様体全体となることに注意する.

**Theorem 1.8** (Herman [6, 7]<sup>8</sup>).  $\mathbb{T}^3$  を 3次元トーラスとし,  $\mathbb{T}^3 \times [0, 1]$  上の関数  $H$  を  $H_0(x, s) = s$  で定める.  $\mathbb{T}^3 \times [-1, 1]$  上の symplectic 形式  $\omega$  と,  $C^7(\mathbb{T}^3 \times [-1, 1])$  における  $H_0$  の  $C^7$ -近傍  $\mathcal{U}$  で, 次をみたすものが存在する： $H \in \mathcal{U}$  が生成する  $(\mathbb{T}^3 \times [-1, 1], \omega)$  上の Hamiltonian flow を  $\Phi_H$  とすると, すべての  $c \in [-1/2, 1/2]$  に対して,  $\text{Per}(\Phi_H) \cap H^{-1}(c) = \emptyset$ .

closing lemma を発展させた Mañé の  $C^1$  ergodic closing lemma [13] や, 林や Bonatti-Crovisier の  $C^1$  connecting lemma [5, 2] は,  $C^1$  級力学系の研究には欠かせないものとなっている. その一方で, 上で見たように  $C^2$  級以上の滑らかな Pugh のアイデアを使うことができず, いくつかの状況では反例もあるために, 力学系の回帰性が例外的に統制しやすい閉曲面上の flow の場合 (Peixoto [14, Lemma 4]) を除いて,  $r \geq 2$  の場合の  $C^r$  closing lemma は力学系理論における最も有名な未解決問題の一つであり続けている<sup>9</sup>.

## 2 3次元 Reeb flow に対する $C^\infty$ closing lemma

2015年に, より滑らかな力学系に対する closing lemma についての画期的な結果が入江 [10] によって与えられた. 本節ではその結果を述べ, 次節で証明のあらましを述べる.

$(2n+1)$ 次元の多様体  $M$  上の 1-形式  $\lambda$  が接触形式であるとは,  $\lambda \wedge (d\lambda)^n$  がすべての点で  $0$  でないことを言い, このとき, 組  $(M, \lambda)$  を接触多様体という.

**Example 2.1.** symplectic 多様体  $(X, \omega)$  と  $V$  の余次元 1 部分多様体  $M$  について,  $M$  の近傍で定義されたベクトル場  $X$  で,  $\mathcal{L}_X \omega = \omega$ , かつ, すべての

<sup>7</sup>例えば, [8] の 1.4 節 Theorem 3. などを参照.

<sup>8</sup>Hofer-Zehnder[8] の 4.5 節にも読みやすい証明がある.

<sup>9</sup>Smale による「21 世紀の数学の問題」[18] にも挙げられている.

$x \in M$  で  $X(x) \notin T_x M$  となるものがあるとき,  $\lambda = \iota_X \omega$  は  $M$  上の接触形式となることが知られており<sup>10</sup>, このとき,  $M$  は接触型超曲面と呼ばれる. 例えば,  $\mathbb{R}^{2n}$  上の標準的な symplectic 形式  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$  について,  $\mathbb{R}^{2n}$  のコンパクト凸領域の境界となっているような余次元 1 部分多様体  $M$  はこの条件をみたし,  $(M, \iota_X \lambda)$  は  $(2n - 1)$  次元接触多様体となる<sup>11</sup>.

$(M, \lambda)$  が接触多様体であるとき,  $M$  上のベクトル場  $X_\lambda$  で  $\iota_X \lambda = 1$ ,  $\iota_X(d\lambda) = 0$  となるものがただ一つ存在する. このベクトル場を  $\lambda$  の **Reeb** ベクトル場と呼ぶ. また, それが生成する flow を **Reeb flow** といい,  $\Phi_\lambda$  と書く. 上の symplectic 多様体  $V(V, \omega)$  の接触型超曲面  $M$  の場合には, 正則値  $c$  の逆像が  $M$  となるような  $V$  上の滑らかな関数  $H$  の Hamiltonian ベクトル場  $X_H$  を考えると,  $X_H$  は Reeb ベクトル場  $X_\lambda$  の正の定数倍となる. すなわち, この状況では  $(M, \lambda)$  の Reeb flow と  $H$  の Hamiltonian flow の  $H^{-1}(c)$  への制限は時間の取り替えを除いて一致する. Reeb flow のもう一つの重要な例は, 測地流である. 完備な Riemann 多様体  $(M, g)$  の接束  $TM$  には余接束  $T^*M$  上の自然な symplectic 構造から誘導される symplectic 構造が入る. 単位接束  $SM = \{v \in TM \mid \|v\| = 1\}$  は  $TM$  の接触型超曲面となり,  $SM$  上の Reeb flow  $\Phi_\lambda$  が定まるが,  $\Phi_\lambda$  は測地流, すなわち,  $t \mapsto \Phi^t(v)$  を  $M$  に落したものが  $v$  を初期値とする測地線であるような flow と一致することが知られている.

入江 [10] は Reeb flow に関する closing lemma を次の形で証明した.

**Theorem 2.2** (入江 [10]).  $(M, \lambda)$  を 3 次元閉接触多様体,  $f$  を  $M$  上の恒等的に 0 ではない  $C^\infty$  級非負関数とする.  $s \in [0, 1]$  に対して,  $M$  上の接触形式  $\lambda_s$  を  $\lambda_s = (1 + s \cdot f)\lambda$  で定め, その Reeb flow を  $\Phi_{\lambda_s}$  と置くと,  $s \in [0, 1]$  で,  $\text{Per}(\Phi_{\lambda_s}) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$  となるものが存在する.

$x \in M$  の近傍  $U$  と,  $C^\infty$  級 1-form のなす空間における  $\lambda$  の近傍  $\mathcal{U}$  に対して,  $f$  を  $\text{supp}(f) \subset U$ , すべての  $s \in [0, 1]$  に対して  $\lambda_s \in \mathcal{U}$  となるように取れば, 摂動の台が  $U$  に含まれるような  $\Phi_\lambda$  のある摂動  $\Phi_{\lambda_s} \in \mathcal{U}$  が  $U$  を通る周期軌道を持つ. この意味で上の定理は, Reeb flow に対する  $C^\infty$  closing lemma (のかなり強い version) と見なすことができる.

Example 2.1 でも見たように, 4 次元 symplectic 多様体の接触型超曲面上の Reeb flow はある Hamiltonian flow の等エネルギー面への制限と同一視できる. Herman の反例から, 単に Hamiltonian flow の制限であるだけでは closing lemma は成り立たない. つまり, Theorem 2.2 が成り立つためには, flow が Reeb flow であるという仮定が決定的に効いている.

Pugh が扱った  $C^1$  の場合と同様に, closing lemma の系として general density theorem が得られる.

<sup>10</sup>  $\mathcal{L}_X \omega$  は  $\omega$  の  $X$  による Lie 微分,  $\iota_X \lambda$  は内部積.

<sup>11</sup> この辺りのことについては [8] の 4.3 節を参照のこと.

**Corollary 2.3** ([10]).  $(M, \lambda)$  を 3次元閉接触多様体とする.

$$\{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid \overline{\text{Per}(\Phi_{e^f \lambda})} = M\}$$

は  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  の residual な部分集合.

測地流が単位接束上の Reeb flow であることを思い出すと, 次を得ることができる.

**Corollary 2.4** ([10]).  $(\Sigma, g)$  を 2次元閉 Riemann 多様体とする.  $f \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$  に対して, Riemann 計量  $e^f g$  に関する  $\Sigma$  上のすべての閉測地線の和集合を  $\Gamma(e^f g)$  としたとき,

$$\left\{f \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) \mid \overline{\Gamma(e^f g)} = \Sigma\right\}$$

は  $C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$  の residual な部分集合.

測地流に対する  $C^1$  closing lemma が証明されたのが 2010 年代に入ってから ([12]) であることを考えると, この測地流への応用は驚くべきものがある.

### 3 Embedded Contact Homology

本節では, Theorem 2.2 の証明のあらましを述べる. 詳しいことは本人による優れた解説 [11] がすでにあるので, そちらを, もしくは論文 [10] を参照してほしい. 入江が用いた手法は, Reeb flow に付随する embedded contact homology (ECH) とよばれる不変量と接触形式が定める多様体の体積を結びつける Cristofaro-Gardiner-Hutchings-Ramos の結果 [3] に基づくものであり, Pugh が開発した  $C^1$  closing lemma の証明とは全く異なる.

$(M, \lambda)$  を 3次元閉接触多様体,  $\Phi_\lambda$  を  $\lambda$  の Reeb flow とする.  $x \in \text{Per}(\Phi_\lambda)$  について,  $T$  をその (最小) 周期, すなわち,  $T = \min\{t > 0 \mid \Phi_\lambda^t(x) = x\}$  とすると,  $(D\Phi_\lambda^T)_x : T_x M \rightarrow T_x M$  は  $\Phi_\lambda$  の軌道方向に固有値 1 の固有ベクトルを持つ. また,  $\Phi_\lambda$  は体積形式  $\lambda \wedge d\lambda$  を保つため,  $\det(D\Phi_\lambda^T)_x = 1$  である. 従って,  $(D\Phi_\lambda^T)_x$  の残りの二つの固有値は (a) ともに実数で, その絶対値は一方が 1 より大きく, 他方は 1 より小さい, (b) ともに絶対値 1 の互いに異なる複素数で, 一方が他方の複素共役, (c) ともに 1, または, ともに  $-1$ , のいずれかとなる. 周期点  $x$  は, (a) のとき双曲型, (b) のとき楕円型といい, すべての周期点がこれらの二つの場合のいずれかであるとき,  $\Phi_\lambda$  は非退化であるという. 以下, 簡単のため,  $\Phi_\lambda$  が非退化な場合であると仮定する<sup>12</sup>.

$\Phi_\lambda$  の周期軌道の全体を  $\mathcal{P}(M, \lambda)$  と書くことにする<sup>13</sup>.  $\gamma \in \mathcal{P}(M, \lambda)$  に対して,  $[\gamma]$  で  $\gamma$  が代表する  $H_1(M, \mathbb{Z})$  の元を,  $\mathcal{A}(\gamma)$  で  $\gamma$  の最小周期を表わす. 正

<sup>12</sup>generic な接触形式に対して, Reeb flow は非退化になることが知られている.

<sup>13</sup>周期点集合ではなく  $\{\mathcal{O}(x, \Phi_\lambda) \mid x \in \text{Per}(\Phi_\lambda)\}$ .

の整数の全体を  $\mathbb{Z}_+$  と書き,  $\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{P}(M, \lambda)$  の有限部分集合  $\Gamma = \{(m_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$  で次をみたすものを **ECH** 生成元と呼ぶ:

1.  $i \neq j$  ならば,  $\alpha_i \neq \alpha_j$ .
2.  $\alpha_i$  が双曲型周期軌道ならば,  $m_i = 1$ .

ECH 生成元  $\alpha = \{(m_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$  に対して,  $[\alpha] = \sum_{i \in I} m_i [\alpha_i]$ ,  $\mathcal{A}(\alpha) = \sum_{i \in I} m_i \mathcal{A}(\alpha_i)$  と定める. 空集合も ECH 生成元で,  $[\emptyset] = 0$ ,  $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$  である.  $\Phi_\alpha$  が非退化であるという仮定から,  $L > 0$  に対して,  $\mathcal{A}(\alpha) < L$  となる ECH 生成元は有限個であることがわかる.  $\Gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$  と  $L > 0$  に対して,  $[\alpha] = \Gamma$ ,  $\mathcal{A}(\alpha) < L$  をみたす ECH 生成元たちが生成する自由  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -加群を  $ECC^L(M, \lambda, \Gamma)$  と書く. 直積  $M \times \mathbb{R} = \{(x, t) \mid x \in M, t \in \mathbb{R}\}$  は symplectic 形式  $d(e^t \lambda)$  を持つので, それに適合した  $M \times \mathbb{R}$  上の概複素構造  $J$  でよい性質のものを取ると,  $J$ -正則曲線を使って,  $\partial_J^2 = 0$  をみたす準同型  $\delta_J: ECC^L(M, \lambda, \Gamma) \rightarrow ECC^L(M, \lambda, \Gamma)$  を定めることができる. さらに, そのホモロジー群  $ECH^L(M, \lambda, \Gamma)$  は  $J$  の取り方によらないことや,  $L$  についての帰納極限  $\varinjlim ECH^L(M, \lambda, \Gamma)$  が  $\lambda$  ではなく, それが定める平面場  $\xi = \text{Ker } \lambda$  のみに依存することも示すことができる. そこでこれを  $ECH(M, \xi, \Gamma)$  と書く.

$L > 0$  に対して,  $\iota^L: ECH^L(M, \lambda, \Gamma) \rightarrow ECH(M, \xi, \Gamma)$  を自然な準同型とする.  $\sigma \in ECH(M, \xi, \Gamma) \setminus \{0\}$  に対して, **ECH** スペクトル不変量  $c_\sigma(M, \lambda)$  を

$$c_\sigma(M, \lambda) = \inf\{L > 0 \mid \sigma \in \text{Im } \iota^L\}$$

で定める<sup>14</sup>. このとき次が成り立つ.

1.  $\mathcal{A}(M, \lambda)_+ = \{0\} + \{\mathcal{A}(\gamma_1) + \dots + \mathcal{A}(\gamma_k) \mid k \geq 1, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathcal{P}(M, \lambda)\}$  と定めると, すべての  $\sigma \in ECH(M, \xi, \Gamma)$  について,  $c_\sigma(M, \lambda) \in \mathcal{A}(M, \lambda)_+$ .<sup>15</sup>
2.  $(f_k)_{k \geq 1}$  が定数関数 1 に  $C^0$  収束するならば,  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_\sigma(M, f_k \lambda) = c_\sigma(M, \lambda)$ .

$c_1(\xi)$  で  $\xi = \text{Ker } \lambda$  の第一 Chern 類を,  $\text{PD}(a)$  で  $a \in H_1(M, \mathbb{Z})$  の Poincaré 双対を表わすことにすると,  $c_1(\xi) + 2\text{PD}(\Gamma)$  が  $H^2(M, \mathbb{Z})$  のねじれ元であるときには, 自然な方法で  $ECH(Y, \xi, \Gamma)$  に (相対的な)  $\mathbb{Z}$  次数を定めることができる. このとき,  $\sigma \in ECH(Y, \xi, \Gamma)$  の斉次的な元に対してその次数を  $|\sigma|$  で表わすと,  $ECH(M, \xi, \Gamma)$  の元の斉次的な列  $(\sigma_k)_{k \geq 1}$  で,  $\sigma_k \neq 0$ ,  $|\sigma_k| \rightarrow \infty$  となるものがあることが知られている. ECH スペクトル不変量と  $\lambda \wedge d\lambda$  の積分を結びつける次の結果が, Theorem 2.2 の鍵となる.

<sup>14</sup> この不変量は Hutchings[9] によって導入された.

<sup>15</sup>  $\Phi_\lambda$  のすべての周期点が非退化ならば,  $\mathcal{A}(M, \lambda_+)$  が  $\mathbb{R}$  の閉部分集合となることから得られる.

**Theorem 3.1** (Cristofaro-Gardiner-Hutchings-Ramos).  $\text{ECH}(M, \xi, \Gamma)$  の斉次の元列  $(\sigma_k)_{k \geq 1}$  で,  $\sigma_k \neq 0, |\sigma_k| \rightarrow \infty$  となるものについて,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{\sigma_k}(M, \lambda)^2}{|\sigma_k|} = \int_M \lambda \wedge d\lambda.$$

以上の準備のもとに, Theorem 2.2 の証明のあらましを述べよう. まず,  $\mathcal{A}(M, \lambda)_+$  は  $\mathbb{R}$  の測度 0 集合であることが知られており, その事実から,  $\mathcal{A}(M, \lambda)_+$  は nowhere dense な  $\mathbb{R}$  の部分集合である. 仮にすべての  $s \in [0, 1]$  に対して,  $\text{Per}(\Phi_{\lambda_s}) \cap \text{supp}(f) = \emptyset$  であるとする,  $\Phi_{\lambda_s}$  の周期軌道に関する情報は  $\Phi_{\lambda}$  のそれと変わらず, すべての  $t \in [0, 1]$  に対して  $\mathcal{A}(M, \lambda_s)_+ = \mathcal{A}(M, \lambda)_+$  となる. スペクトル不変量の  $s$  に関する連続性と,  $\mathcal{A}(M, \lambda)_+$  が nowhere dense であることから,  $c_{\sigma}(M, \lambda_s) = c_{\sigma}(M, \lambda)$  がすべての  $s \in [0, 1]$  について成り立つ. Theorem 3.1 より,  $\lambda_s \wedge d\lambda_s$  の  $M$  上の積分は  $\lambda \wedge d\lambda$  のそれと変わらない. しかし,  $f$  が非負で  $\text{supp}(f) \neq \emptyset$  なので  $\lambda_s \wedge d\lambda_s = (1 + s \cdot f)^2 \lambda \wedge d\lambda$  の  $M$  上の積分は  $\lambda \wedge d\lambda$  のそれよりも大きくなる. これは上で見たことと矛盾しており,  $\text{Per}(\Phi_{\lambda_s}) \cap \text{supp}(f) \neq \emptyset$  となる  $s \in [0, 1]$  があることになる.

## 4 閉曲面上の Hamilton 微分同相写像に対する $C^\infty$ closing lemma

(境界を持つかもしれない)  $\Sigma$  をコンパクトな曲面,  $\omega$  をその上の symplectic 形式とする.  $\Sigma$  上の  $C^\infty$  級関数  $h$  に対して, その Hamilton ベクトル場  $X_h$  を,  $dh = -\iota_{X_h} \omega$  で定める.  $\Sigma$  からそれ自身への微分同相写像  $\varphi$  が **Hamilton 微分同相写像** であるとは,  $[0, 1] \times \Sigma$  上の関数  $H$  と  $\Sigma$  のイソトピー  $(\varphi_H^t)_{t \in [0, 1]}$  で,  $H_t(x) = H(t, x)$  と置いたとき,  $\varphi_H^0 = \text{Id}_\Sigma$ ,  $\varphi_H^1 = \varphi$ ,  $\partial_t \varphi_H^t = X_{H_t}$  ( $t \in [0, 1]$ ) となるものが存在することを言う. このような微分同相写像の全体  $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$  は  $C^\infty$  位相により位相群となる.  $f \in \text{Ham}(\Sigma, \omega)$  は symplectic 形式  $\omega$  を保つため, Poincaré の回帰定理から,  $\Omega(f) = \Sigma$  が成り立つ.

入江の Reeb flow に対する  $C^\infty$  closing lemma の応用として, 講演者と入江は閉曲面の Hamilton 微分同相写像に対する  $C^\infty$  closing lemma を得た.

**Theorem 4.1** (浅岡-入江 [1]).  $\Sigma$  を閉曲面,  $\omega$  をその上の symplectic 形式とする.  $f \in \text{Ham}(\Sigma, \omega)$  と  $x_* \in \Sigma$  に対して,  $f$  に収束する  $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$  の元の列  $(f_k)_{k \geq 1}$  と  $x_*$  に収束する  $\Sigma$  の点列  $(x_k)_{k \geq 1}$  で, すべての  $k \geq 1$  に対して  $x_k \in \text{Per}(f_k)$  となるようなものが存在する.

**Corollary 4.2** ( $C^\infty$  general density theorem [1]).  $\{f \in \text{Ham}(\Sigma, \omega) \mid \overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)\}$  は  $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$  の residual な部分集合.

証明は2つのステップに分けられる。 $\Sigma'$  を境界を持つ向きづけ可能なコンパクト曲面,  $\omega'$  をその上の symplectic 形式とする。 $\Sigma'$  上の Hamilton 微分同相写像で, 境界のある近傍では恒等写像であるようなもの全体のなす集合を  $\text{Ham}(\Sigma', \partial\Sigma', \omega')$  で表わす. 最初のステップでは, 次の  $\text{Ham}(\Sigma', \partial\Sigma', \omega')$  における  $C^\infty$  closing lemma を示す.

**Lemma 4.3.**  $f \in \text{Ham}(\Sigma, \omega)$  と空でない  $\Sigma$  の開部分集合  $U$  に対して,  $f$  に収束する  $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$  の元の列  $(f_k)_{k \geq 1}$  で, すべての  $k \geq 1$  に対して  $\text{supp}(f_k \circ f^{-1}) \subset U$ ,  $\text{Per}(f_k) \cap U \neq \emptyset$  となるようなものが存在する.

この lemma では摂動も局所化できることを主張していることに注意. 証明は  $f$  の suspension flow がある 3次元閉接触多様体の Reeb flow に  $C^\infty$  軌道同値の意味で埋め込むことができるという事実 ([1, Lemma 3.3]) を使えばそれほど難しくない. ここで,  $f$  の **suspension flow** とは, 写像トラス  $M_f = \Sigma' \times \mathbb{R}/(x, s+n) \sim (f^n(x), s)$  上の flow  $\Psi_f$  で,  $\Psi^t([x, s]) = [x, s+t]$  で定義されるものを言う. 証明においては,  $\Sigma'$  が境界を持つことが本質的に使われている. 実際, 閉曲面上の Hamiltonian 微分同相写像の suspension flow は多くの場合 Reeb flow とは軌道同値にはならない<sup>16</sup>.

2つ目のステップでは, 閉曲面  $\Sigma$  上の Hamilton 微分同相写像を変形して, 境界を持つ閉曲面の場合に帰着させる.  $f \in \text{Ham}(\Sigma, \omega)$  と取るとまず閉曲面においては Arnold 予想が解決されているため,  $f$  は不動点  $p$  を持つ.  $f$  を  $p$  の周りで摂動することで<sup>17</sup>,  $p$  の周りでは実解析的<sup>18</sup>, かつ,  $p$  は双曲型, または, 楕円型な不動点であるとしてよい. また,  $U$  を小さく取りなおして,  $p$  は  $U$  の閉包に入っていないとしてよい.  $p$  が楕円的なときは KAM 理論を,  $p$  が双曲的なときは Birkhoff の normal form の理論を用いることで,  $U$  を含むある  $\Sigma$  の  $f$ -不変な開集合  $V$  と, 境界を持つ曲面  $\Sigma'$ ,  $g \in \text{Ham}(\Sigma', \partial\Sigma', \omega')$ ,  $C^\infty$  埋め込み  $i: V \rightarrow \Sigma'$  で,  $i^*\omega' = \omega$ ,  $i \circ f = f' \circ i$  となるものを構成することができる<sup>19</sup>. 最初のステップから,  $i(U)$  における  $g$  の摂動で  $i(U)$  を通る周期軌道を作ることができるので,  $i(U)$  と  $U$  を同一視して, 同じ摂動を  $f$  にもほどこせば,  $V$  の  $f$ -不変性から  $U$  も周期軌道が通り, 証明が終わる.

## 5 いくつかの問題

閉曲面上の Hamilton 微分同相写像に対する  $C^\infty$  closing lemma の筆者たちの証明は, ダイナミクスを保つ形で曲面に穴を開けて, その suspension flow を Reeb flow に埋め込んだ後, Reeb flow に対する結果を適用する, というかな

<sup>16</sup>例えば,  $\mathbb{T}^2$  上の恒等写像の suspension flow は Reeb flow と軌道同値にはならない.

<sup>17</sup>この部分でのみ, Theorem 4.1 の closing lemma における摂動の局所性が破れる.

<sup>18</sup> $p$  が双曲型のとき, Birkhoff normal form の収束をいうのに必要.

<sup>19</sup>詳細は [1] を参照.

り回りくどいものである。閉曲面上での議論のみによる別証明を見つけることは、何が本質的に効いているのかを知る上で意味があるだろう。

**Question 5.1.** ECH スペクトル不変量にあたるものを2次元 Hamilton 微分同相写像に対して定義し、その漸近挙動を見ることで、Theorem 4.1 の証明を再構成することはできるか？

$\Sigma$  を向きづけ可能な閉曲面、 $\omega$  をその上の symplectic 形式とし、 $\text{Diff}_0(\Sigma, \omega)$  を  $\omega$  を保つ  $\Sigma$  上の微分同相写像で恒等写像とイソトピックなもの全体のなす集合とする。  $\Sigma$  が球面でないときは、 $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$  は  $\text{Diff}_0(\Sigma, \omega)$  の真部分集合であることが知られている。何が本質的に効いているのかという観点からは、次の問題も自然であろう。

**Question 5.2.**  $\text{Diff}_0(\Sigma, \omega)$  において  $C^\infty$  closing lemma は成り立つか？

最初の節で述べたように、 $C^1$  closing lemma の様々な変種は、 $C^1$  微分同相写像の研究における主要な道具となっている。ECH の理論を何らかの形で拡張することで、これらの  $C^\infty$  版を閉曲面上の Hamilton 微分同相写像に対して示すことはできるだろうか。例えば、次のような問題に答えることはできるだろうか。

**Question 5.3** ( $C^\infty$  ergodic closing lemma).  $\Sigma$  を閉曲面、 $\omega$  をその上の symplectic 形式とする。  $f \in \text{Ham}(\Sigma, \omega)$  と、 $\Sigma$  上の ergodic な  $f$ -不変確率測度  $\mu$  に対して、 $f$  に収束する  $\text{Ham}(\Sigma, \omega)$  の元の列  $(f_k)_{k \geq 1}$  と  $\Sigma$  の点列  $(x_k)_{k \geq 1}$  で次の二つの条件をみたすものを常にとることができるか？

1. すべての  $k \geq 1$  に対して、 $x_k$  は  $f_k$  の周期点。
2.  $x_k$  の軌道  $\mathcal{O}(x_k, f_k)$  上の一様分布が  $k \rightarrow \infty$  で  $\mu$  に弱収束する。

## References

- [1] M. Asaoka, K. Irie, A  $C^\infty$  closing lemma for Hamiltonian diffeomorphisms of closed surfaces, arXiv:1512.06336v1.
- [2] C. Bonatti and S. Crovisier, Récurrence et genericité, *Invent. Math.*, vol. 158 (2004), no. 1, 33–104.
- [3] D. Cristofaro-Gardiner, M. Hutchings, V. G. B. Ramos, The asymptotics of ECH capacities, *Invent. Math.*, vol. 199 (2015), 187–214.
- [4] C. Gutierrez, A counter-example to a  $C^2$  closing lemma *Ergod Th. & Dyn. Sys.*, vol.7 (1987), 509–530.

- [5] S. Hayashi, Connecting invariant manifolds and the solution of the  $C^1$ -stability and  $\Omega$ -stability conjectures for flows. *Ann. Math. (2)* vol. 145, 81–137 (1997); *Ann. Math. (2)* vol. 150, 353–356 (1999).
- [6] M. R. Herman, Differentiabilite optimale et contre-exemples á la fermeture en topologie  $C^\infty$  des orbites recurrentes de flots Hamiltoniens, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Serie I. Mathématique*, vol. 313(1991), no.1, 49–51.
- [7] M. R. Herman, Exemples de flots Hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie  $C^\infty$  n'a d'orbites periodiques sur un ouvert de surfaces d'énergies. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Serie I. Mathématique*, vol. 312(1991), no. 13, 989–994.
- [8] H. Hofer and E.Zhender, Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. Birkhäuser Advanced Texts. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
- [9] M. Hutchings, Quantitative embedded contact homology, *J. Differential Geom.*, vol. 88 (2011), 231–266.
- [10] K. Irie, Dense existence of periodic Reeb orbits and ECH spectral invariants. *J. Mod. Dyn.*, vol. 9 (2015), 357–363.
- [11] 入江慶, A  $C^\infty$  closing lemma for three-dimensional Reeb flows via embedded contact homology, 2016 年度日本数学会年会 トポロジー分科会 アブストラクト.
- [12] L. Rifford, Closing geodesics in  $C^1$  topology, *J. Differential Geom.*, vol. 91 (2012), 361–381.
- [13] R. Mañé, An ergodic closing lemma. *Ann. of Math. (2)*, vol. 116 (1982), no. 3, 503–540.
- [14] M. M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, vol. 1 (1962), no. 2, 101–120.
- [15] C. C. Pugh, *The closing lemma*, Amer. J. Math., vol. 89(1967), no. 4, 956–1009.
- [16] C. C. Pugh, *An improved closing lemma and a general density theorem*, Amer. J. Math., vol. 89 (1967), no. 4, 1010–1021.
- [17] C. C. Pugh and C. Robinson, *The  $C^1$  closing lemma, including Hamiltonians*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. vol. 3(1983), 261–313.

- [18] S.Smale, Mathematical problems for the next century. *Math. Intelligencer*, vol. 20 (1998), no. 2, 7–15. (邦訳は「数学の最先端 21 世紀への挑戦 4」(シュプリンガー・ジャパン) 所収)

# 曲面と円柱の接触と曲面の輪郭線

長谷川 大 (岩手医科大学教養教育センター)\*

## 1. 序

R. Thom は [23] において,  $D_4$  特異点の幾何的性質と  $\mathbb{R}^3$  内の正則曲面の臍点 (umbilic) との類似性を指摘した. その後, I. R. Porteous ([16], [17]) は, 曲面のいくつかの微分幾何的性質が距離 2 乗関数の特異点の観点から記述できることを示し, 距離 2 乗関数の  $A_3$  特異点に対応する峰点 (ridge) とよばれる新しい概念を導入した. また, J. Montaldi ([15]) は, 2つの多様体間の接触の概念を定義し, J. Mather ([13]) が導入した  $\mathcal{K}$ -同値との関係の特異点論の言葉による特徴付けた. このことから, 距離 2 乗関数の特異点を調べることで曲面と球面の接触が測ることができ, 臍点や峰点では曲面は球面と退化した接触を所以说える. 曲面と球面の接触の場合と同様に, 曲面と平面との接触は高さ関数で測ることができ, 放物点では曲面は平面と退化した接触をしている. 高さ関数の特異点と曲面の微分幾何的性質の関連性は [3] 等にまとめられている.

3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  内の homogeneous surface は, 群  $O(3) \times \mathbb{R}^3$  のある部分群の軌道であり, 平面, 球, および円柱の3つであることが知られている ([22]). 特異点論の観点からの曲面と平面および球面との接触による曲面の微分幾何的性質の研究は数多くなされ (例えば, [2], [8], [9], [14]), 最近では特異点を持つ曲面と平面および球面との接触の研究もされている (例えば, [6], [21]). したがって, 残された homogeneous surface である円柱と曲面の接触を考えることは自然である. 本稿第2節では, 曲面と平面および球面との接触を通して曲面の微分幾何的性質を復習し, 曲面と円柱との接触をその微分幾何的性質で記述する.

曲面と平面の  $A_1$ -接触の kernel field は双曲的領域の漸近方向を定め, その積分曲線である漸近曲線の特異点は分類されている ([1]). また, 曲面と球面の  $A_2$ -接触の kernel field は臍点以外の点での主方向を定め, その積分曲線である曲率線の特異点も分類されている ([4]). 曲面と円柱との接触では,  $A_3$ -接触の kernel field が定める方向が考えられる. その方向を円柱方向 (cylindrical direction) とよぶ. 第3節では, 円柱方向の積分曲線の特異点を紹介する.

曲面の輪郭線 (apparent contour または profile) は曲面の正射影の特異値集合であることから,  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像の特異点と深く関係している. また, 曲面の輪郭線は曲面と円柱との接触にも深く関係している. 実際に, 点  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  を通り  $\mathbf{v} \in S^2$  に平行な直線を軸とし, 半径が  $r$  であるような円柱  $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$  は

$$|\mathbf{q} - \langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - \mathbf{a}|^2 = r^2 \quad (\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = 0, r > 0) \quad (1.1)$$

を満たす点  $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  で表されることからわかる. ここで,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbb{R}^3$  の標準的な内積である. 可微分写像芽  $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  の特異点については, T. Gaffney ([5]) や J. H. Rieger ([18]) による分類や佐治氏 ([19]) や加葉田氏 ([10]) による判定法など様々な研究がなされているが, その特異値集合についての幾何学的な観点からの研究は (筆者の知る限り) ほとんど行われていない. 第4節では, 円柱方向を応用して得られた曲面の輪郭線の微分幾何的性質について述べる.

\* 〒028-3694 岩手県紫波郡矢巾町西徳田 2-1-1 岩手医科大学 教養教育センター情報科学科  
e-mail: mhase@iwate-med.ac.jp

第2節および第3節の内容は埼玉大学の福井敏純氏と中川幸一氏との共同研究 [7] に基づき、第4節の内容はサンパウロ大学の M. Salarinoghabi 氏との共同研究 [20] に基づく。

## 2. 曲面と円柱の接触

### 2.1. 接触

$X_i, Y_i$  ( $i = 1, 2$ ) を  $\mathbb{R}^n$  内の部分多様体で  $\dim X_1 = \dim X_2$  かつ  $\dim Y_1 = \dim Y_2$  を満たしているものとする。このとき、 $X_1$  と  $Y_1$  の  $x_1$  における接触が  $X_2$  と  $Y_2$  の  $x_2$  における接触と同じであるとは、微分同相写像芽  $\Phi : (\mathbb{R}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_2)$  で  $\Phi(X_1) = X_2$  かつ  $\Phi(Y_1) = Y_2$  を満たすものが存在することである。

J. Montaldi は次のように特異点論の言葉で特徴付けた：

**定理 2.1** ([15]).  $g_i : (U_i, u_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_i)$  ( $i = 1, 2$ ) をはめ込みで  $X_i = g_i(U_i)$ ,  $f_i : (\mathbb{R}^n, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  を沈めこみで  $Y_i = f_i^{-1}(0)$  となるものとする。このとき、 $X_1$  と  $Y_1$  の  $x_1$  における接触が  $X_2$  と  $Y_2$  の  $x_2$  における接触と同じであるための必要十分条件は  $f_1 \circ g_1$  と  $f_2 \circ g_2$  が  $\mathcal{K}$ -同値であることである。

ここで、可微分写像芽  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  が  $\mathcal{K}$ -同値であるとは、微分同相芽  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  と写像芽  $A : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow GL(\mathbb{R}^p)$  が存在して  $g \circ \varphi(x) = A(x)f(x)$  を満たすことである。特に本稿では、次の  $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  の  $\mathcal{K}$ -同値のクラスに対応する接触のタイプについて考える：

$$A_k^\pm : x^2 \pm y^{k+1}, \quad D_k^\pm : xy^2 \pm x^{k-1} \quad (k \geq 4).$$

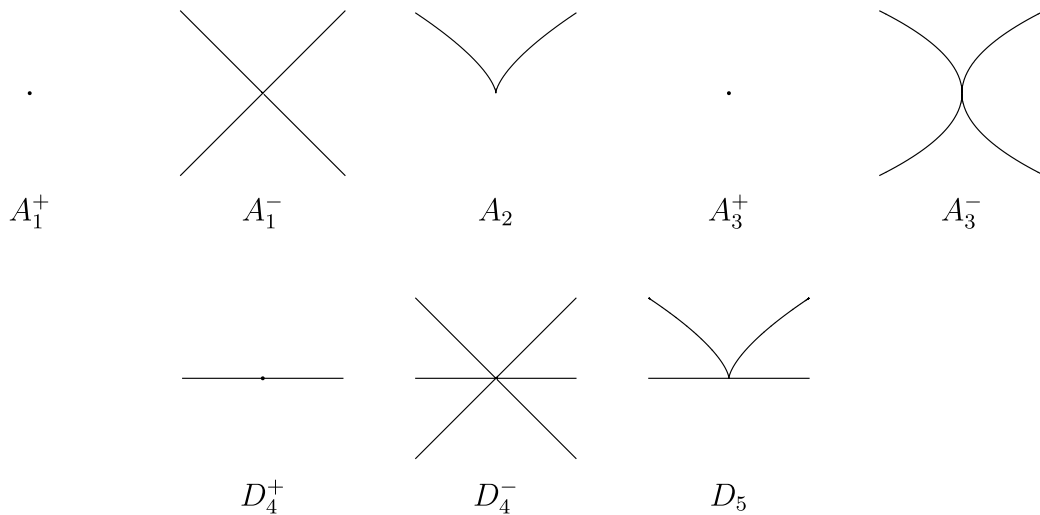


図 1:  $A_{\leq 3}, D_{\leq 5}$ -特異点の零点集合.

### 2.2. 平面との接触

$\mathbb{R}^3$  内の平面は

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle = d \quad (\mathbf{v} \in S^2) \tag{2.2}$$

を満たす  $\mathbf{q} = (x, y, z)$  によって定まる。したがって、平面のモジュライ空間は3次元となり、曲面と平面のジェネリックな接触は、 $A_1, A_2, A_3$ -接触が考えられる。

**事実 2.2.**  $\mathbb{R}^3$  内の正則曲面  $S$  と (2.2) で定まる平面  $\pi_{v,d}$  との点  $p \in S \cap \pi_{v,d}$  での接触は次のようになる。

- (1)  $A_{\geq 1}$ -接触である必要十分条件は  $v = \pm n(p)$  である。ここで、 $n(p)$  は点  $p$  における  $S$  の単位法ベクトルである。
- (2)  $A_{\geq 2}$ -接触である必要十分条件は  $v = \pm n(p)$  かつ点  $p$  が放物点 (parabolic point) (i.e., ガウス曲率  $K(p) = 0$ ) であることである。
- (3)  $A_{\geq 3}$ -接触である必要十分条件は  $v = \pm n(p)$  かつ点  $p$  が cusp of Gauss であることである。ここで、点  $p$  が cusp of Gauss であるとは、 $\kappa_i(p) = 0$ ,  $\kappa_j(p) \neq 0$ ,  $v_i \kappa_i(p) = 0$  であるときを言う。 $\kappa_i(p)$  は点  $p$  における主曲率で  $v_i \kappa_i(p)$  は点  $p$  における  $\kappa_i$  の主方向  $v_i$  に沿う方向微分係数である。また、 $v_i \kappa_i(p) = 0$  であるとき、点  $p$  は主方向  $v_i$  に関する峰点 (ridge point または単に ridge) であるという。

### 2.3. 球面との接触

$\mathbb{R}^3$  内の球面は

$$|q - a|^2 = r^2 \quad (a \in \mathbb{R}^3, r > 0) \quad (2.3)$$

を満たす  $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  によって定まる。したがって、球面のモジュライ空間は4次元となり、曲面と球面とのジェネリックな接触は、 $A_1, A_2, A_3, A_4, D_4$ -接触が考えられる。

**事実 2.3.**  $\mathbb{R}^3$  内の正則曲面  $S$  と (2.3) で定まる球面  $S_{a,r}$  との点  $p \in S \cap S_{a,r}$  での接触は次のようになる。

- (1)  $A_{\geq 1}$ -接触である必要十分条件は、点  $a$  が点  $p$  の法線上にあることである。
- (2)  $A_{\geq 2}$ -接触である必要十分条件は、点  $a$  が点  $p$  における  $\kappa_i$  に関する焦点 (focal point) (i.e.,  $a = p + n(p)/\kappa_i(p)$ ) であることである。
- (3)  $A_{\geq 3}$ -接触である必要十分条件は、点  $a$  が点  $p$  における  $\kappa_i$  に関する焦点で  $p$  が  $v_i$  に関する峰点であることである。
- (4)  $A_{\geq 4}$ -接触である必要十分条件は、点  $a$  が点  $p$  における  $\kappa_i$  に関する焦点で  $p$  が  $v_i$  に関する2次以上の峰点 (i.e.,  $v_i \kappa_i(p) = v_i^2 \kappa_i(p) = 0$ ) であることである。
- (5)  $D_{\geq 4}$ -接触である必要十分条件は、点  $p$  が臍点 (umbilic) (i.e.,  $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ ) であり、点  $a$  が点  $p$  における焦点であることである。

### 2.4. 円柱との接触

$\mathbb{R}^3$  内の円柱は (1.1) を満たす点  $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  によって定まる。したがって、円柱のモジュライ空間は5次元となり、曲面と円柱とのジェネリックな接触は  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, D_4, D_5$ -接触が考えられる。

$S$  を  $\mathbb{R}^3$  内の正則曲面、 $C_{v,a,r}$  を (1.1) で定まる円柱とする。 $p \in S \cap C_{v,a,r}$  での  $S$  と  $C_{v,a,r}$  の接触に関して以下が成り立つ。

定理 2.4 ([7]). (1)  $A_{\geq 1}$ -接触する必要十分条件は,  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$  かつ

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + \lambda \mathbf{n}(\mathbf{p})$$

となるような  $\lambda \neq 0$  が存在することである.

(2)  $A_{\geq 2}$ -接触をする必要十分条件は上の条件と次のいずれかが成り立つことである :

(I) 点  $\mathbf{p}$  は放物点ではなく,  $\mathbf{v}$  は点  $\mathbf{p}$  における漸近方向ではなく,  $\lambda = 1/\kappa_c$  となることである. ここで,  $\kappa_c$  は  $\mathbf{v}$  方向から見たときの  $S$  の輪郭線の  $\mathbf{p}$  に対応する点での曲率である.

(II) 点  $\mathbf{p}$  は臍点ではない放物点, すなわち  $\kappa_i(\mathbf{p}) = 0$  かつ  $\kappa_j(\mathbf{p}) \neq 0$  で,  $\mathbf{v}$  は  $S$  の点  $\mathbf{p}$  における漸近方向 (i.e., 点  $\mathbf{p}$  における  $\mathbf{v}$  方向の法曲率  $\kappa_n(\mathbf{v}) = 0$  となる方向) で,  $\lambda \neq 1/\kappa_j(\mathbf{p})$  となることである.

(III) 点  $\mathbf{p}$  は平坦臍点 (i.e.,  $\kappa_1(\mathbf{p}) = \kappa_2(\mathbf{p}) = 0$ ) である.

定理 2.4(2) の (I) が成り立つとき,  $S$  と  $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$  の接触は,  $\mathbf{v}$  方向から見たときの  $S$  の輪郭線の幾何で記述できる.

定理 2.5. ([7]) 定理 2.4(2) の (I) が成り立っているとす. このとき,  $S$  と  $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$  が点  $\mathbf{p}$  で  $A_k$ -接触 ( $k \geq 3$ ) する必要十分条件は  $\mathbf{v}$  方向から見たときの  $S$  の輪郭線が  $\mathbf{p}$  に対応する点で  $(k-2)$  次の頂点 (vertex) を持つことである. ここで, 平面曲線  $\gamma = \gamma(t)$  が点  $\gamma(t_0)$  で  $n$  次の頂点を持つとは,  $\gamma$  の曲率を  $\kappa(t)$  とするとき,

$$\kappa(t_0) \neq 0, \quad \kappa^{(i)}(t_0) = 0 \quad (1 \leq i \leq n), \quad \kappa^{(n+1)}(t_0) \neq 0$$

が成り立つときを言う.

定理 2.4(2) の (II) または (III) が成り立つ場合の  $A_{\geq 3}$ -接触の必要十分条件は複雑であることと, 本稿第3節以降の内容には関係ないことから, ここでは省略する. 同様に,  $D_4, D_5$ -接触の必要十分条件もここでは省略する. 詳細は [7] を参照されたい.

### 3. 円柱方向

2つの方向  $(dx_1, dy_1)$  と  $(dx_2, dy_2)$  が曲面  $S$  の点  $\mathbf{p}$  において互いに共役 (conjugate) であるとは, 点  $\mathbf{p}$  で

$$L dx_1 dx_2 + M (dx_1 dy_2 + dx_2 dy_1) + N dy_1 dy_2 = 0$$

を満たすときを言う. ここで,  $L, M, N$  は  $S$  の第二基本形式の係数である.

$S$  が Monge 標準形

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)) \quad f(x, y) = \sum_{i+j=2}^n \frac{a_{ij}}{i!j!} x^i y^j + o(n) \quad (3.4)$$

で与えられているとす. 原点が放物点でないとする.  $S$  と  $C_{\mathbf{v}, \mathbf{a}, r}$  が原点で  $A_{\geq 3}$ -接触をするとき,  $(dx, dy)$  の共役方向  $(a_{11}dx + a_{02}dy, -a_{20}dx - a_{11}dy)$  は  $f$  の3次の項  $f_3(x, y)$  の根である. すなわち,  $f_3(a_{11}dx + a_{02}dy, -a_{20}dx - a_{11}dy) = 0$  である. このとき,  $(dx, dy)$  は原点における  $S$  の円柱方向 (cylindrical direction) であると言う.

定義より，円柱方向はジェネリックに1つまたは3つある． $f_3$ の判別集合を $\Delta$ とすると， $\Delta = 0$ となる点では円柱方向は2つあり(1つは $f_3$ の重根に対応している)，円柱方向場はそこで特異点を持つ．円柱方向の積分曲線の特異点は図2のように分類される．太線は $\Delta = 0$ である．詳細な条件は[7]を参照されたい．

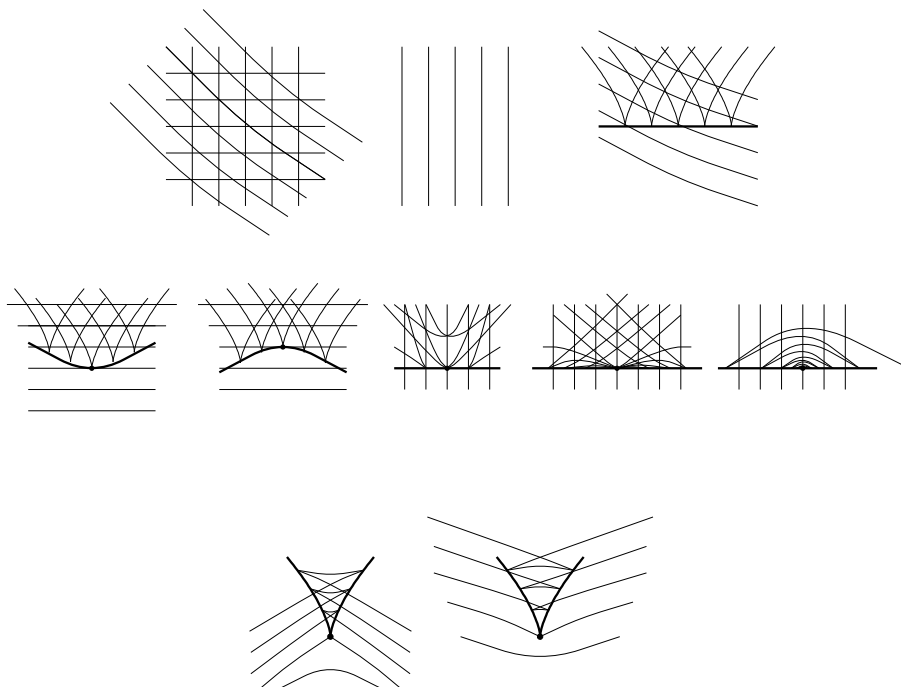


図 2: 円柱方向の積分曲線の特異点.

#### 4. 円柱方向の曲面の輪郭線への応用

2つの可微分写像芽  $f, g : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  が  $\mathcal{A}$ -同値であるとは，可微分同相写像芽  $\sigma : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m, 0, \tau : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  が存在し， $g = \tau \circ f \circ \sigma$  が成り立つときを言う．

$\mathbb{R}^3$  内の正則曲面の正射影の  $\mathcal{A}$ -同値によって分類されたジェネリックな特異点は表1で与えられている．

表 1: 曲面の正射影のジェネリックな特異点.

Name	Normal form
Fold	$(x, y^2)$
Cusp	$(x, xy + y^3)$
Lips/Beaks	$(x, y^3 \pm x^2y)$
Goose	$(x, y^3 + x^3y)$
Swallowtail	$(x, xy + y^4)$
Butterfly	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$
Gulls	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$

講演者は [20] において、正射影がジェネリックな特異点を持つときの射影方向の変化による輪郭線の変形に現れる変曲点 (inflection), カスパ (cusp) および頂点について精査した。

曲面を方向  $\mathbf{v}$  から見たときの輪郭線は、 $\mathbf{v}$  方向の正射影の特異値集合である。正射影の特異点が fold, cusp, swallowtail, butterfly の場合は、正射影の特異点集合は非特異であり、そのパラメータ表示を求めることができる。したがって、そのパラメータ表示から輪郭線のパラメータ表示を求めることができ、輪郭線の変曲点、カスパおよび頂点を調べることができる。一方、正射影の特異点が lips/beaks, goose, gulls の場合は、正射影の特異点集合は特異点を持つために輪郭線のパラメータ表示を求めることができない。本節では、特に正射影の特異点が beaks の場合の輪郭線の変形に現れる変曲点、カスパおよび頂点について述べる。

$\mathbb{R}^3$  内の正則曲面  $S$  の局所的なパラメータ表示を  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  とし、 $S$  の正射影の族を

$$P : U \times S^2 \rightarrow TS^2, \quad P(x, y, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \langle \varphi(x, y), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v})$$

とする。このとき、 $P$  の第2成分を  $P_v$  で表す。 $P_v$  は  $S$  の  $\mathbf{v}$  方向の正射影である。

$\varphi$  として Monge 標準形 (3.4) を考える。また、 $\mathbf{v}_0 \in T_p S$  とし、必要ならば座標軸を回転させることにより  $\mathbf{v}_0 = (0, 1, 0)$  であるとすると、

$$P_{\mathbf{v}_0} = (x, f(x, y))$$

と書ける。 $\mathbf{v}_0$  の近くの方法  $\mathbf{v}$  を  $\mathbf{v} = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v))$  と表す。 $S$  の正射影の族  $P$  は、 $(u, v)$  に関する座標変換  $\psi$  と  $\mathbb{R}^3$  の回転で

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, y, u, v) &= R \circ P(x, y, \psi(u, v)) \\ &= (\cos(u)x + \sin(v)y, 0, \cos(u) \sin(v)y - \sin(u) \sin(v)x + \cos(v)f(x, y)) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $P_{\mathbf{v}_0} = \tilde{P}(x, y, 0, 0)$  である。今、 $P_{\mathbf{v}_0}$  の特異点が beaks であると仮定する。すなわち、 $P_{\mathbf{v}_0}$  は beaks の normal form と  $\mathcal{A}$ -同値である。このとき、 $P_{\mathbf{v}_0}$  の特異点集合  $\Sigma(P_{\mathbf{v}_0})$  は交差する2つの正則曲線となる。さらに、 $\tilde{P}_v$  の特異点集合  $\Sigma(\tilde{P}_v)$  の変形は図3の右のようになり、 $u$  の変化に対して安定である。したがって、

$$F(x, y, v) = \tilde{P}(x, y, 0, v)$$

として、 $F$  を考える。



図 3: lips (左) と beaks (右) の特異点集合の変形のモデル。

輪郭線の変形に現れる変曲点、カスパおよび頂点を調べるために定義域において、 $F$  の特異点集合  $\Sigma(F)$  と、ある性質をもつ点の軌跡との交点を考える。まずは変曲点について考察する。J. J. Koenderink は  $\kappa_n(\mathbf{v}) \neq 0$  のとき、 $K = \kappa_n(\mathbf{v}) \kappa_c$  が成り立つことを

示した ([11], [12]). したがって,  $\kappa_n(\mathbf{v}) \neq 0$  のとき,  $K = 0$  と  $\kappa_c = 0$  は同値である. ここで,

$$I(x, y) = L(x, y)N(x, y) - M(x, y)^2$$

とすると<sup>1</sup>,  $\Sigma(F)$  と  $I(x, y) = 0$  の交点は  $\kappa_c = 0$  となる点, すなわち輪郭線の変曲点に対応している.

次にカスプについて考察する.  $\kappa_n(\mathbf{v}) = 0$  となる方向は漸近方向で, その方向に正射影したときの輪郭線はカスプを持つ. ここで,  $S$  の接ベクトル  $\mathbf{v} = a\varphi_x + b\varphi_y$  に対し,

$$C(x, y) = a^2L(x, y) + 2abM(x, y) + b^2N(x, y)$$

とすると,  $C(x, y) = 0$  は  $\mathbf{v}$  が漸近方向となる点の軌跡である. したがって,  $\Sigma(F)$  と  $C(x, y) = 0$  の交点は, 輪郭線のカスプに対応している.

最後に頂点について考察する. 今,  $(a, b)$  と  $\mathbf{v} = a\varphi_x + b\varphi_y$  を同一視して考える. 定理 2.5 と原点における円柱方向の定義より,  $\mathbf{v}$  が円柱方向ならば,  $\mathbf{v}$  方向から見たときの輪郭線は原点に対応する点で頂点を持つ. このことから, 原点以外に円柱方向を拡張して, 「 $\mathbf{v}$  が円柱方向であるような点の軌跡」を考えると, 変曲点やカスプと同様に輪郭線の頂点が見える. そこで, 次のように円柱方向を原点以外にも拡張する. 今, 正則曲面  $S$  の原点におけるパラメータ表示  $\varphi$  は Monge 標準形 (3.4) で与えられている. 点  $(x, y, f(x, y))$  における Monge 標準形は次のようになる<sup>2</sup>.

$$\tilde{\varphi}(s, t) = (s, t, \tilde{f}(s, t)), \quad \tilde{f}(s, t) = \sum_{i+j=2}^n \frac{A_{ij}(x, y)}{i!j!} + o(n)$$

例えば,

$$\begin{aligned} A_{20}(x, y) &= a_{20} + a_{30}x + a_{21}y + o(1), \\ A_{11}(x, y) &= a_{11} + a_{21}x + a_{12}y + o(1), \\ A_{02}(x, y) &= a_{02} + a_{12}x + a_{03}y + o(1) \end{aligned}$$

である. 構成法の詳細は [20] を参照されたい. したがって, 原点  $\tilde{\varphi}(0, 0)$ , すなわち点  $(x, y, f(x, y))$  における  $\mathbf{v} = a\tilde{\varphi}_s + b\tilde{\varphi}_t$  の共役方向は

$$(aA_{11}(x, y) + bA_{20}(x, y))\tilde{\varphi}_s + (-aA_{20}(x, y) - bA_{11}(x, y))\tilde{\varphi}_t$$

であるから,  $\mathbf{v} = a\tilde{\varphi}_s + b\tilde{\varphi}_t$  が円柱方向である必要十分条件は

$$V(x, y) = \tilde{f}_3(aA_{11}(x, y) + bA_{20}(x, y), -aA_{20}(x, y) - bA_{11}(x, y)) = 0$$

である. ここで,  $\tilde{f}_3$  は  $\tilde{f}$  の 3 次の項である. したがって,  $\Sigma(F)$  と  $V(x, y) = 0$  の交点は, 輪郭線の頂点に対応している.

今考えている  $\mathbf{v}$  を  $C(x, y)$  と  $V(x, y)$  に代入すると,  $C(x, y) = 0$  は  $I(x, y) = 0$  と原点で接し,  $V(x, y) = 0$  はジェネリックに  $D_4$  特異点を持ち,  $D_4^+$  のときは 1 本の曲線で,  $D_4^-$  のときは交差する 3 本の正則曲線になる. ここで,  $V(x, y) = 0$  が  $D_4^+$  特異点を持つ

<sup>1</sup>  $I = 0$  と  $K = 0$  は同値であるが, 役割をわかりやすくするために  $I$  とおいた.

<sup>2</sup> 円柱方向の積分曲線を考察するときも同様の原点以外での Monge 標準形を構成する.

beaks を  $D_4^+$ -beaks とよび,  $D_4^-$  特異点を持つ beaks を  $D_4^-$ -beaks と呼ぶ.  $D_4^+$ -beaks と  $D_4^-$ -beaks の  $\Sigma(F)$ ,  $I(x, y) = 0$ ,  $C(x, y) = 0$  および  $V(x, y) = 0$  の配置は, それぞれ図4の左と右のようになる. よって,  $D_4^+$ -beaks と  $D_4^-$ -beaks の変形における  $\Sigma(F)$  上での輪郭線の変曲点, カスプおよび頂点に対応する点は, それぞれ図5と図6のようになる. したがって, 次が成り立つ.

**定理 4.1.** ([20])  $\mathbb{R}^3$  内の曲面の  $\mathbf{v}$  方向の正射影の beaks 特異点はジェネリックに2つのタイプに分類される. 1つは  $D_4^+$ -beaks で,  $\mathbf{v}$  方向から見た曲面の輪郭線の変形は図7となる. もう1つは  $D_4^-$ -beaks で,  $\mathbf{v}$  方向から見た曲面の輪郭線の変形は図8となる.

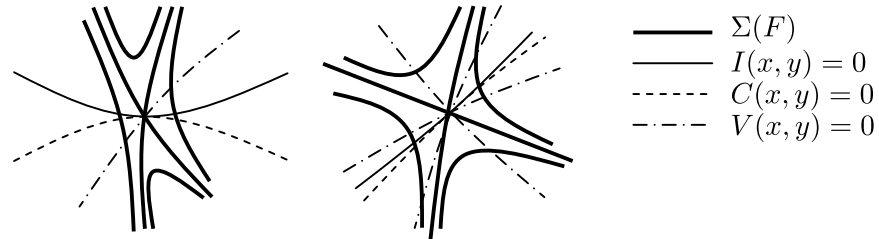


図 4:  $D_4^+$ -beaks (左) と  $D_4^-$ -beaks (右) の  $\Sigma(F)$ ,  $I(x, y) = 0$ ,  $C(x, y) = 0$  および  $V(x, y) = 0$  の配置.

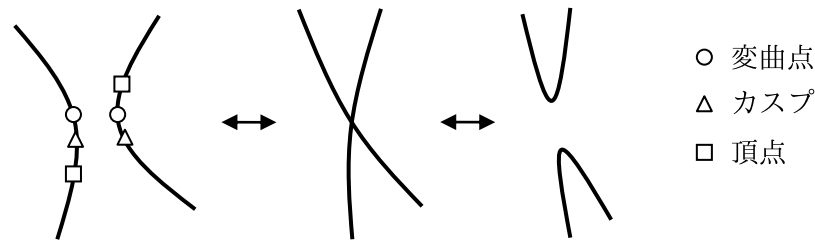


図 5:  $D_4^+$ -beaks の  $\Sigma(F)$  上の変曲点, カスプおよび頂点に対応する点.

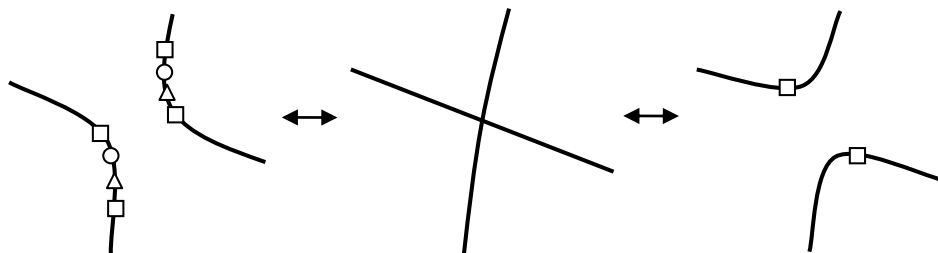


図 6:  $D_4^-$ -beaks の  $\Sigma(F)$  上の変曲点, カスプおよび頂点に対応する点.



図 7:  $D_4^+$ -beaks における輪郭線の変形.



図 8:  $D_4^-$ -beaks における輪郭線の変形

## 参考文献

- [1] T. Banchoff, T. Gaffney, and C. McCrory, Cusps of Gauss maps, Research Notes in Mathematics 55, Pitman, 1982.
- [2] J. W. Bruce and P. J. Giblin, Curves and Singularities, Cambridge University Press, 1984. Second Edition, 1992.
- [3] J. W. Bruce, P. J. Giblin, and F. Tari, Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals, in “Real and Complex Singularities”, Ed. W. L. Marar, Pitman Research Notes in Math. 333 (1995).
- [4] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, IV, Gauthier-Villars, Paris, 1896.
- [5] T. Gaffney, The structure of  $T\mathcal{A}(f)$ , classification and an application to differential geometry, In singularities, Part I, Proc. Sympos. in Pure Math. 40 (1983), Amer. Math. Soc., 409-427.
- [6] T. Fukui and M. Hasegawa, Height functions on Whitney umbrellas, Kôkyûroku Bessatsu, **B38** (2013), 153–168.
- [7] T. Fukui, M. Hasegawa, and K. Nakagawa, Contact of a regular surface in Euclidean 3-space with cylinders and cubic binary differential equations, to appear J. Math. Soc. Japan.
- [8] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. C. Romero Fuster and M. A. Ruas, Inflection points and topology of surfaces in 4-space, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3029–3043.
- [9] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. Ruas, and F. Tari, Differential geometry from singularity theory viewpoint, World Scientific Pub Co Inc (2015/1/30).
- [10] Y. Kabata, Recognition of plane-to-plane map-germs, Topology and its Applications, **202** (2016), 216–238.
- [11] J. J. Koenderink, *What does the occluding contour tell us about solid shape?*, Procection, **13** (1984), 321–330.
- [12] J. J. Koenderink, *Solid shape*, MIT Press Series in Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [13] J. Mather, Stability of mappings, III. Finitely determined map-germs, Publ. Math. I.H.E.S. **35** (1969), 127–156.
- [14] D. K. H. Mochida, M. C. Romero Fuster, and M. A. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. Geometriae Dedicata **54** (1995), 323–332.
- [15] J. Montaldi, On contact between submanifolds, Michigan Math. J. **33** (1986), 195–199.
- [16] I. R. Porteous, The normal singularities of a submanifolds, J. Differential Geometry **5** (1971) 543–564.
- [17] I. R. Porteous, The normal singularities of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), 379–393, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [18] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), 351–369.
- [19] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229–239.

- [20] M. Salarinoghabi and M. Hasegawa, On the geometry of the profiles of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , preprint.
- [21] R. Oset-Shinha and F. Tari, Projections of surfaces in  $\mathbb{R}^4$  to  $\mathbb{R}^3$  and the geometry of their singular images, *Revista Matematica Iberoamericana*, **31** (2015), 33–50.
- [22] T. Takahashi, Homogeneous hypersurfaces in space of constant curvature, *J. Math. Soc. Japan* **22**, (1970), 395–410.
- [23] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse*, Benjamin Paris, 1972.

## 多様体の三角形分割の組合せ論と代数

村井 聡 (大阪大学大学院情報科学研究科)

### 1. 序文

本稿では多様体の三角形分割の頂点や面の個数の研究に関する最近の話題について紹介する. 以下, 多様体  $M$  の三角形分割と言った時には, 有限単体的複体であってその幾何学的実現が  $M$  と同相であるものを指すこととする. また, 多様体は常に連結で有限三角形分割可能なもののみを考える.

単体的複体の面の個数を調べることは組合せ論の分野における重要な研究テーマの一つである. わかりやすい問題を一つ紹介しよう.

問:  $M$  を多様体とする.  $M$  を三角形分割する為には頂点は幾つ必要か?

例えば, 実射影平面  $\mathbb{R}P^2$  には6頂点, 2次元トーラス  $S^1 \times S^1$  には7頂点の三角形分割が存在する (図1参照). 実は, これより少ない頂点数の三角形分割は存在しないので, 求めたかった値は  $\mathbb{R}P^2$ ,  $S^1 \times S^1$  の場合にはそれぞれ6, 7である. こういった値を色々な多様体について求めよう, というのが問題である.

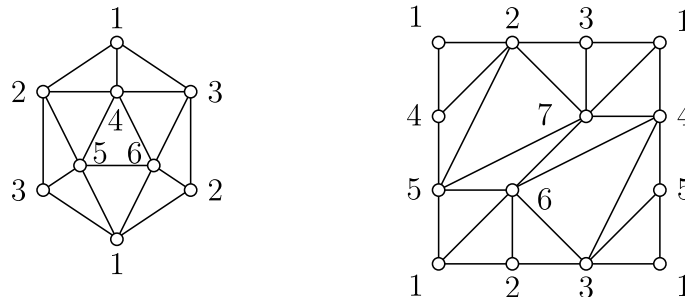


図1:  $\mathbb{R}P^2$  の6頂点分割と  $S^1 \times S^1$  の7頂点分割

なんだか簡単そうな問題に思えるが, 実は上の問題は非常に難しい. 実際, 19世紀の間には閉曲面やごく一部の低次元の多様体の場合にしか必要な頂点数の最小値はわかっていなかった. また, 現在でも4次元射影空間  $\mathbb{R}P^4$  や3次元トーラス  $S^1 \times S^1 \times S^1$  の場合でさえ問題は解決していない.

上では頂点数に関する問題を紹介したが, 一般には  $i$ 次元面の個数の上限や下限に興味を持たれる. 実は, 多様体の三角形分割の面の個数に関する研究はここ10年程で大きく研究が進んでいる. その要因の一つに  $h''$ 列と呼ばれる数を考えることで多様体の三角形分割の面の個数を組合せ論的・代数的に綺麗に扱えるようになったことが挙げられる. 本稿ではこの  $h''$ 列に関する理論を紹介することを主な目的としたい.

本稿の前半ではまず組合せ論的な動機を理解して貰う為, 上で述べた多様体の三角形分割の頂点数に関する問題について少し詳しく紹介する. その後,  $h''$ 列の理論について解説し,  $h''$ 列が頂点数の問題にどう応用されるのか簡単に紹介する.

ところで, 多様体の三角形分割の面の個数に関する研究は, 上記の頂点数の問題も含めて, 結局のところ‘大したことはわかっていない’というのが現状である. 今から新規参入してトポロジー的な立場から何か問題に貢献できる余地は大いにあるのでは無いかと思う.

## 2. 多様体の三角形分割の最小頂点数

単体的複体は有限抽象単体的複体を指すこととする (但し, 位相的な性質を考える際は, その幾何学的実現の性質を考える). 単体的複体  $\Delta$  に対し, その  $i$  次元面の個数を  $f_i(\Delta)$  で表す.  $f_0(\Delta)$  は頂点の個数,  $f_1(\Delta)$  は辺の個数である. また,  $\beta_i(\Delta; \mathbb{F})$  で体  $\mathbb{F}$  を係数とする被約ホモロジー群  $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{F})$  のベクトル空間としての次元を表すとする. (有限三角形分割可能な位相) 多様体  $M$  に対し

$$f_0^{\min}(M) = \min\{f_0(\Delta) : \Delta \text{ は } M \text{ の三角形分割}\}$$

と定める. ここで考える問題は次の問題である.

**問題 2.1.** 与えられた閉多様体  $M$  に対し,  $f_0^{\min}(M)$  を求めよ.

### 2.1. 閉曲面の場合.

最初に閉曲面の場合を考え, 感じを掴んで貰おう. 一般論は後回しにして, まずは図 1 の  $\mathbb{R}P^2$  と  $S^1 \times S^1$  の三角形分割が何故最小の頂点数を持つか説明する. 示さなくてはならないのは,  $\mathbb{R}P^2$  の三角形分割が必ず 6 個以上の頂点を持つ事, 及び  $S^1 \times S^1$  の三角形分割が必ず 7 個以上の頂点を持つ事, である. この事は, Heawood の不等式と呼ばれる次の簡単な結果から確認できる.

**定理 2.2** (Heawood の不等式 [He]).  $\Delta$  が閉曲面  $M$  の  $v$  頂点三角形分割なら,

$$(1) \quad \binom{v-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$$

が成り立つ. 但し,  $\chi(M)$  は  $M$  のオイラー数とする.

証明. 簡単なので証明も紹介しよう.  $\Delta$  の面の個数について次の 2 つの等式が成り立つ

$$v - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = \chi(\Delta), \quad 2f_1(\Delta) = 3f_2(\Delta).$$

最初の等式はオイラー関係式である. 二つ目の式は,  $\Delta$  の各辺が丁度 2 つの 2 次元面に含まれ, かつ  $\Delta$  の各 2 次元面が丁度 3 本の辺を含むことから従う. 一方, 明らかに  $f_1(\Delta) \leq \binom{v}{2}$  であるので, 上の二つの等式を用いて  $f_2(\Delta)$  を消去して

$$v - \chi(M) = \frac{1}{3}f_1(\Delta) \leq \frac{1}{3}\binom{v}{2}$$

を得る. 上で得られる不等式  $v - \chi(M) \leq \frac{1}{3}\binom{v}{2}$  を少し変形すると, 求める不等式  $\binom{v-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M))$  が得られる.  $\square$

Heawood の不等式を  $\mathbb{R}P^2, S^1 \times S^1$  に適応してみよう.  $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1, \chi(S^1 \times S^1) = 2$  であるから, 次のように欲しかった不等式が得られる.

- $\binom{f_0^{\min}(\mathbb{R}P^2)-3}{2} \geq 3$ , 即ち  $f_0^{\min}(\mathbb{R}P^2) \geq 6$ .
- $\binom{f_0^{\min}(S^1 \times S^1)-3}{2} \geq 6$ , 即ち  $f_0^{\min}(S^1 \times S^1) \geq 7$ .

今度は一般の閉曲面について考えてみよう. 閉曲面は種数と向きによって完全に分類がされているので, それぞれの曲面に対して  $f_0^{\min}$  を求めてやればよい.  $S_g = (S^1 \times S^1)^{\#g}$  を向き付可能な種数  $g$  の閉曲面,  $N_g = (\mathbb{R}P^2)^{\#g}$  を向き付不可能な種数  $g$  の閉曲面とする, 但し,  $M^{\#g}$  で  $M$  の  $g$  個の連結和を表す. 実は, 一般の場合も Heawood の不等式からほぼ最小頂点数が決まることが証明されている.

**定理 2.3** (Jungerman and Ringel [Ri, JR] 1955, 1980).  $M$  が  $S_2, N_2, N_3$  以外の連結な閉曲面である時, (1) を満たす任意の  $v$  に対し  $M$  の  $v$  頂点三角形分割が存在する.

先の定理を示すには、 $M$  の三角形分割を具体的に構成すればよいのであるが、頂点数の小さい三角形分割を具体的に構成するのは難しい問題であり、定理 2.3 の証明も易しくない。尚、上の定理は向き付け不可能な場合が 1955 年に Ringel によって示され、向き付け可能な場合が 1980 年に Jungerman と Ringel の二人によって示された。

さて、Heawood の不等式と Jungerman–Ringel の定理を纏めると、次の結果が得られ、閉曲面の場合に三角形分割に必要な頂点数の最小値が求まる<sup>1</sup>。

系 2.4.  $M$  が  $S_2, N_2, N_3$  以外の連結な閉曲面である時、

$$f_0^{\min}(M) = \min \left\{ v \in \mathbb{N} : \binom{v-3}{2} \geq 3(2 - \chi(M)) \right\}.$$

尚、3つの例外  $S_2, N_2, N_3$  については、 $f_0^{\min}(S_2) = 10, f_0^{\min}(N_2) = 8, f_0^{\min}(B_3) = 9$  となる (系 2.4 の右辺より一つ大きい値)。

## 2.2. 一般次元の閉多様体の場合 (古い結果).

ここからは一般次元の多様体の三角形分割の場合の話に移る。始めに断わっておきたいのは、序文にも述べたとおり、一般次元の場合にはほとんど何もわかっていないというのが現状であるから、先ほどの系 2.4 のような一般的な美しい結果に出会えることは期待しないで欲しい。

話を始める前に、どういうことを調べなくてはならないのかを明確にしておく。閉多様体  $M$  が与えられた時、その  $f_0^{\min}(M)$  を求めるには次の二つが必要である。

- (♠)  $f_0^{\min}(M)$  の下限を与える (頂点数の下限を求める)。
- (♡)  $f_0^{\min}(M)$  の上眼を与える (頂点数の少ない三角形分割を実際に構成する)。

上の問題 (♠), (♡) はどちらも難しい。特に、具体的に三角形分割を構成しなくてはならない (♡) は閉曲面の場合でも簡単でなく、ある意味職人芸の領域である。本稿でも (♡) については触れないことにして主に (♠) の問題について解説する。閉曲面の場合には問題 (♠) は Heawood の不等式で殆ど全てが説明できるので、次元が 3 以上の場合が問題となる。

問題 (♠) に関する基礎的な結果は 1987 年に Brehm と Kühnel [BK1] によって示された。この節では主に彼らの結果を紹介する。球面  $S^n$  の場合  $f_0^{\min}(S^n) = n + 2$  となることはほぼ明らかであるが、球面でないとわかっている時、必要な頂点数はどれくらいだろうか？ 次の定理がこの問題に良い解答を与える。

定理 2.5 (Brehm–Kühnel 1987).  $\Delta$  が球面でない閉  $n$  多様体の組合せ三角形分割<sup>2</sup>なら  $f_0(\Delta) \geq \lceil \frac{3}{2}n \rceil + 3$ . 等号成立の時、 $\Delta$  は  $\mathbb{R}P^2, \mathbb{C}P^2, \mathbb{H}P^2, \mathbb{O}P^2$  の何れかと同じホモロジー群を持つ<sup>3</sup>。

例 2.6. 先の定理で等号が成立する三角形分割について少し補足しておく。定理 2.5 より、その時の次元は  $n = 2, 4, 8, 16$  である。(以下  $f_0^{\min}$  が決まる時には ★ を用いる)。

- ★  $n = 2$  の時、そのような分割は一意的で  $\mathbb{R}P^2$  の 6 頂点三角形分割しかない。
- ★  $n = 4$  の時、やはり分割は一意的で、 $\mathbb{C}P^2$  の 9 頂点三角形分割 [KB] しかない。

<sup>1</sup>定理 2.2 や 2.4 は 4 色問題の閉曲面への一般化の研究の過程で得られたものであり、三角形分割の頂点数の最小値を求めることが主目的だったわけではないことを注意しておく。

<sup>2</sup>組合せ三角形分割とは各頂点の link が単体の境界と PL 同相となる三角形分割の事。三角形分割の話は PL の世界で考えることが多いのでこの仮定は自然な仮定である。

<sup>3</sup>実際にはもう少し強く、[EK] で述べられている combinatorial manifold になる。

- ★  $n = 8$  の時, 15 頂点の球面でない 8 次元閉多様体の三角形分割は 3 種類知られているが, これらの中に  $\mathbb{H}P^2$  の三角形分割があるかは未解決問題である<sup>4</sup>.
- 16 次元閉多様体の三角形分割で 27 頂点の球面のものがあるかは未解決問題.

Brehm と Kühnel はホモロジー群と頂点数の関係についても考察し, 次の定理を得ている.

**定理 2.7** (Brehm–Kühnel 1987).  $M$  が閉  $n$  多様体で, ある  $i < \frac{n}{2}$  に対して  $H_i(M) \neq 0$  であるなら,  $f_0^{\min}(M) \geq 2n + 4 - i$  である.

**注 2.8.** 上の定理は  $i = \frac{n}{2}$  の時もほぼ成り立つ. というのは,  $n$  が偶数で  $i = \frac{n}{2}$  の時は上の下限の右辺は  $\frac{3}{2}n + 4$  となるが, 頂点数  $\frac{3}{2}n + 3$  以下の三角形分割を持つ多様体は定理 2.5 にある射影平面のようなものしかないからである.

**例 2.9.** 定理 2.7 により頂点数の最小値が決まりそのような多様体は球面の直積  $S^i \times S^j$  である. 定理から  $f_0^{\min}(S^i \times S^j) \geq 2i + j + 4$  (但し,  $i \geq j$  とする) であるが, このことと三角形分割の具体的な構成から次が決まる.

- ★  $f_0^{\min}(S^3 \times S^2) = 12$ .
- ★  $f_0^{\min}(S^3 \times S^3) = 13$ .
- ★  $f_0^{\min}(S^2 \times S^2) = 11$ .
- ★  $f_0^{\min}(S^{d-1} \times S^1)$  は  $d$  が偶数なら  $2d + 3$ ,  $d$  が奇数なら  $2d + 4$  に一致する.
- ★  $f_0^{\min}(S^{d-1} \times S^1)$  は  $d$  が奇数なら  $2d + 3$ ,  $d$  が偶数なら  $2d + 4$  に一致する.

但し,  $S^{d-1} \times S^1$  は向き付け不可能な  $S^1$  上の  $S^{d-1}$  束を表す<sup>5</sup>.  $S^2 \times S^2$  の場合は  $i + 2j + 4$  と異なる値が出ているが, これは 10 頂点の  $S^2 \times S^2$  の三角形分割の非存在性 [KL] から最小頂点数が 11 であることが決まる. 尚,  $S^{d-1} \times S^1$ ,  $S^{d-1} \times S^1$  に関する結果は (驚くべきことに) 比較的最近の結果である [BD, CSS].

上記以外の  $(i, j)$  に対して,  $f_0^{\min}(S^i \times S^j)$  の値は未解決である. ([KN] にある球面の直積の三角形分割の構成から,  $2i + 2j + 4$  以下であることはわかっている.)

さて, 定理 2.5 や 2.7 は「球面でない」とか「ホモロジー群が消えていない」などのかなり限定的な状況を考えているが, 4 次元の場合には次のような Heawood の不等式の類似が知られている. (後述の定理 2.10 の方が良い下限を与える.)

**定理 2.10** (Kühnel [Kü2] 1990).  $\Delta$  が閉 4 多様体  $M$  の  $v$  頂点三角形分割なら

$$\binom{v-4}{3} \geq 10(\chi(M) - 2).$$

**例 2.11.** 先の定理により, 二つの多様体の最小頂点数が決まる.  $(S^2 \times S^2)^{\#2}$  には 12 頂点の,  $K3$  曲面には 16 頂点の三角形分割の存在することと,  $\chi((S^2 \times S^2)^{\#2}) = 6$ ,  $\chi(K3) = 24$  であることから次のことがわかる.

- ★  $f_0^{\min}((S^2 \times S^2)^{\#2}) = 12$ .
- ★  $f_0^{\min}(K3) = 24$ .

<sup>4</sup>3 つの内の一つが  $\mathbb{H}P^2$  の三角形分割になることが予想されている. 具体的な三角形分割が与えられているが, 位相型が決まらないという不思議な問題である. Pontrjagin 類を計算すれば良いらしいのだが計算機の方で何とかならないのだろうか?

<sup>5</sup> $S^1$  上の  $S^{d-1}$  束は向付け可能なものと不可能なもの 2 種類しかない [Ste].

2.3. 一般次元の閉多様体の場合 (新しい結果).

最近得られたの結果について二つ紹介しておこう. 最近の結果のポイントは, 定理 2.7 のような「ホモロジーが消えていないとき」に関する定理が「ホモロジー群が大きいときに頂点数も大きい」という定理に拡張できるようになったことである. どういう道具を使って証明するのかの解説は後回しにしてここでは結果だけ紹介する. 以下,  $\mathbb{F}$  は任意の体とする.

**定理 2.12** (Novik–Swartz [NS3], M [Mu2]<sup>6</sup>).  $\Delta$  が  $2k$  次元閉多様体  $M$  の  $v$  頂点三角形分割なら

$$\binom{v-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1} \beta_k(M; \mathbb{F}).$$

上の定理は,  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  としてやれば,  $k=1$  の時は Heawood の定理に一致し,  $k=2$  の時は Kühnel の定理を含む定理になる. 但し, 残念ながら上の定理から  $f_0^{\min}$  が新しく決まった例はまだ知られていない.

次の定理も最近分かった重要な結果である.

**定理 2.13** (Novik–Swartz [NS1], Bagchi [Ba], Datta–M [DM], M [Mu2]<sup>7</sup>).  $n \geq 3$  とする.  $\Delta$  が  $n$  次元閉多様体  $M$  の  $v$  頂点三角形分割なら

$$\binom{v-n-1}{2} \geq \binom{n+2}{2} \beta_1(M; \mathbb{F}).$$

等号が成立する時  $M$  は  $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\# \beta_1(\Delta)}$  か  $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\# \beta_1(\Delta)}$  のどちらかに同相.

上の定理から,  $H_1(M) \neq 0$  ならば  $f_0^{\min}(M) \geq 2d+3$  であることがわかるので, これは定理 2.7 の  $i=1$  の場合の一般化になっている.

**例 2.14.** 上の定理から色々な場合で,  $\mathbb{S}^1$  上の  $\mathbb{S}^{n-1}$  束の連結和について三角形分割する為に必要な頂点数の最小値が求まる. 例えば, Lutz–Slanke–Swartz [LSS] において以下の場合に  $f_0^{\min}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\#b}$  と  $f_0^{\min}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\#b}$  の値が決められている.

★  $b = 2, \dots, 8, 10, 11, 14$  (向き付けに依らない値となる. [LSS, Table 12] 参照.)

定理 2.13 の不等式で等号が成立する三角形分割は tight な三角形分割と呼ばれ, 具体的な三角形分割の構成法の研究が進んでおり, 次が示されている.

★ [DS]  $f_0^{\min}((\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\#n^2+5n+6}) = n^2 + 5n + 5$  ( $d$ : 奇数).

★ [DS]  $f_0^{\min}((\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\#n^2+5n+6}) = n^2 + 5n + 5$  ( $d$ : 偶数).

★ [BDSS]  $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\#99}) = 49$ ,  $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\#208}) = 69$ ,  
 $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\#357}) = 89$ ,  $f_0^{\min}((\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)^{\#546}) = 109$ ,  $f_0^{\min}((\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)^{\#143}) = 71$ ,  
 $f_0^{\min}((\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)^{\#342}) = 101$ ,  $f_0^{\min}((\mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^1)^{\#390}) = 97$ .

面白い問題として,  $n$  が奇数 (偶数) の時に定理 2.13 で等号成立する様な三角形分割で向き付け可能 (不可能) なものがあるかは未解決である (簡単に見つかりそうな気がするのだが不思議である).

定理 2.13 の  $i \neq 1$  の場合の一般化については次が予想されているが未解決

**予想 2.15** (Kühnel).  $1 \leq r < \frac{n}{2}$ .  $\Delta$  が  $n$  次元閉多様体  $M$  の  $v$  頂点三角形分割なら,

$$\binom{v-n-2+r}{r+1} \geq \binom{n+2}{r+1} \beta_r(M; \mathbb{F}).$$

<sup>6</sup>基本的には [NS3] の結果. 向き付け不可能で正標数以外の場合のみ [Mu2] の結果.

<sup>7</sup>基本的には [NS1] の結果. 3次元の等号の場合が [Ba, DM], 向き付不可能で正標数の場合が [Mu2].

最後に、最小頂点数問題については Lutz [Lu] に詳しく述べられているのでそちらも参照して欲しい。本稿で省いた射影空間<sup>8</sup> やトーラス<sup>9</sup> などの話も述べられている

### 3. $h''$ 列と面の個数の双対性

前のセクションにある定理 2.12 や定理 2.13 は多様体の三角形分割の一般次元の面の個数の研究、特に、 $h''$  列と呼ばれるものの組合せ論的・代数的な研究から導かれた定理である。 $h''$  列は非常に良い対称性をもち、かつスタンレー・ライスナー環と呼ばれる環の代数的な双対性と深く関係する。この章では  $h''$  列の理論について、その双対性を中心に、どのような理論なのか解説しよう。

#### 3.1. 面の個数の対称性.

$n$  次元単体的複体に対し、その面の個数を並べてできる数列

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), f_1(\Delta), \dots, f_n(\Delta))$$

を  $\Delta$  の  $f$  列と呼ぶ。単体的複体の面の個数を調べるという事は、その  $f$  列の性質を調べる事とすることができる。多様体の三角形分割の場合には  $f$  列に Dehn–Sommerville 等式と呼ばれる対称性が存在する。まずはそれを見て貰う事にする。

最初に閉曲面の場合を考えよう。 $\Delta$  が閉曲面  $M$  の三角形分割であるとする、明らかに

- $f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = \chi(M)$
- $3f_1(\Delta) = 2f_2(\Delta)$

が成り立つ。(二つ目の等式は全ての辺が丁度二つの三角形に含まれるという事実から従う)。上の二式から  $f_1, f_2$  は  $f_0$  のみを使って表せることがわかり、結局

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), 3(f_0(\Delta) - \chi(M)), 2(f_0(\Delta) - \chi(M)))$$

となる。特に、 $f(\Delta)$  は頂点の数のみから決まることがわかる。

次に 3次元閉多様体の三角形分割について考えよう。 $\Delta$  を 3次元閉多様体の三角形分割とする。この時、 $f(\Delta)$  は  $f_0(\Delta), f_1(\Delta), f_2(\Delta), f_3(\Delta)$  の 4つ整数からなるが、閉曲面の場合と同様に

- $f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) - f_3(\Delta) = 0$
- $2f_2(\Delta) = 4f_3(\Delta)$

の等式が成り立つので、結局

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), f_1(\Delta), 2f_1(\Delta) - 2f_0(\Delta), 2f_1(\Delta))$$

となり、 $f(\Delta)$  は頂点の個数  $f_0$  と辺の個数  $f_1$  から決まる。

さて、上で 2次元、3次元の場合を見てきたが、一般次元では何が起こるのだろうか？上の例から  $f$  列を知るためには、大体  $f$  列の最初の半分位の値がわかれば良さそうだ、というのがなんとなく推察できるのではないだろうか。このことは実際に正しいのだが、きちんと説明する為には  $h$  列と呼ばれる数を導入するのが便利である。 $(n-1)$  次元単体的複体  $\Delta$  に対し、その  $h$  列  $h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \dots, h_n(\Delta)) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  を

$$h_i(\Delta) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{n-j}{i-j} f_{j-1}(\Delta)$$

(但し  $f_{-1}(\Delta) = 1$  とする) で定義する。この時、 $f_{i-1}(\Delta) = \sum_{j=0}^i \binom{n-j}{i-j} h_j(\Delta)$  であり、 $f(\Delta)$  を知ることと  $h(\Delta)$  を知るとは同値であることに注意して欲しい。

<sup>8</sup>  $f_0^{\min}(\mathbb{R}P^3) = 11, f_0^{\min}(\mathbb{R}P^4) = 16$  だが  $f_0^{\min}(RP^5)$  が未解決。22 以上 24 以下であることが既知。

<sup>9</sup>  $f_0^{\min}(S^1 \times S^1 \times S^1)$  が 15 であることが予想されているが未解決。15 以下であることは既知。

さて、上記の『閉多様体の三角形分割の  $f$  列を知るには、 $f$  列の最初の半分の値がわかればよさそう』というのは、次の綺麗な等式で説明される。

**定理 3.1** (Dehn–Sommerville 等式 [Kl]).  $\Delta$  が閉  $(n - 1)$  次元多様体の三角形分割である時、次が成り立つ。

$$h_i(\Delta) = h_{n-i}(\Delta) + \binom{n}{i} (-1)^{n-i} (\chi(\Delta) - \chi(\mathbb{S}^{n-1})) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

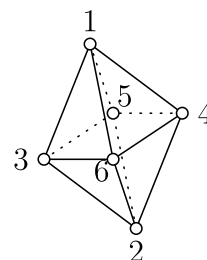
**例 3.2.**  $\Delta$  が右の八面体の境界複体となっている場合を考えてみよう。この時  $\Delta$  は球面  $\mathbb{S}^2$  に同相で、

$$f(\Delta) = (6, 12, 8)$$

である。  $h$  列を定義通りに計算すると

$$h(\Delta) = (1, 3, 3, 1)$$

となり  $h_i(\Delta) = h_{3-i}(\Delta)$  が成り立っていることがわかる。



### 3.2. スタンレー・ライスナー環の双対性.

Dehn–Sommerville 等式はスタンレー・ライスナー環における代数的なポアンカレ双対性から来る対称性として説明することができる。このことは球面の場合には良く知られていたことであるが、多様体の場合にも同様のことが成り立つことが最近証明された。

始めにスタンレー・ライスナー環について説明する。以下  $\mathbb{F}$  は無限体、 $\Delta$  を頂点集合を  $V$  とする単体的複体とし、多項式環  $S = \mathbb{F}[x_v : v \in V]$  を考える。但し、多項式環には各変数の次数を 1 とする次数を入れる。この時、イデアル  $I_\Delta$  を

$$I_\Delta = (x_{v_1} x_{v_2} \cdots x_{v_k} : \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V, \{v_1, \dots, v_k\} \notin \Delta) \subset S$$

で定義する。環  $\mathbb{F}[\Delta] = S/I_\Delta$  を (体  $\mathbb{F}$  上の)  $\Delta$  のスタンレー・ライスナー環と呼ぶ。  $\Delta$  が  $(n - 1)$  次元である時、環  $\mathbb{F}[\Delta]$  の Krull 次元は  $n$  である。このことは、 $\mathbb{F}$  が無限体の時は、上手く  $n$  個の一次式  $\theta_1, \dots, \theta_n$  を選ぶと、 $\mathbb{F}[\Delta]/(\theta_1, \dots, \theta_n)\mathbb{F}[\Delta]$  がアルチン環 (クルル次元 0 の環のこと) になることを意味する。このような  $\theta_1, \dots, \theta_n$  を  $\mathbb{F}[\Delta]$  の線形な巴系 (linear system of parameters) と呼ぶ。

**例 3.3.** 例 3.2 の八面体の場合を考えると、スタンレー・ライスナー環は

$$\mathbb{F}[\Delta] = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_6]/(x_1 x_2, x_3 x_4, x_5 x_6).$$

である。このとき  $x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6$  は  $\mathbb{F}[\Delta]$  の線形な巴系となる。実際、

$$\mathbb{F}[\Delta]/(x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6) \cong \mathbb{F}[x_1, x_3, x_5]/(x_1^2, x_3^2, x_5^2)$$

である。(上の右辺に現れる環を  $R$  とすると、 $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$  で、 $\dim_{\mathbb{F}} R_0 = 1, \dim_{\mathbb{F}} R_1 = 3, \dim_{\mathbb{F}} R_2 = 3, \dim_{\mathbb{F}} R_3 = 1$  となっていることに注意して欲しい。)

先ず、比較的昔から良く知られていた球面の場合の双対性について説明しよう。  $\Delta$  が  $n$  球面  $\mathbb{S}^n$  の三角形分割である時、Dehn–Sommerville 等式は  $h_i(\Delta) = h_{n-i}(\Delta)$  という単純な対称性を与えることに注意しよう。有限次元次数付代数<sup>10</sup>  $R = \bigoplus_{i=0}^s R_i$  が (次数  $s$  の) ポアンカレ双対代数 (Poincaré duality algebra) であるとは、 $R_s \cong \mathbb{F}$  であり、かつ掛け算写像

$$R_i \times R_{s-i} \rightarrow R_s$$

が全ての  $i = 0, 1, \dots, s$  に対して perfect pairing<sup>11</sup> を与える時にいう、但し  $R_i$  は  $R$  の次数  $i$  の斉次成分とする。  $R$  がポアンカレ双対代数なら明らかに  $R_i \cong R_{s-i}$  が成り立つ。

<sup>10</sup>有限次元代数とは多項式環を斉次イデアルで割ったものでベクトル空間として有限次元なもの

<sup>11</sup>掛け算から誘導される写像  $R_i \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}}(R_{s-i}, R_s)$  が同型になるという意味

次の定理から, Dehn–Sommerville 等式は球面三角形分割の場合にはポアンカレ双対性からくる対称性と思えることができる ([Sta] 等を見よ).

**定理 3.4** (スタンレー・ライスナー環のポアンカレ双対性 (球面の場合)).  $\Delta$  をホモロジー  $(n-1)$  球面の三角形分割とし,  $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_n$  を  $\mathbb{F}[\Delta]$  の線形な巴系とする. この時次が成り立つ.

- (1)  $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\Delta]/\Theta\mathbb{F}[\Delta])_k = h_k(\Delta)$  for  $k = 0, 1, \dots, n$ .
- (2)  $\mathbb{F}[\Delta]/\Theta\mathbb{F}[\Delta]$  は次数  $n$  のポアンカレ双対代数である.

次に, 上の定理が一般の多様体の三角形分割へ一般化されることを紹介する. 定理 3.4 は, ホモロジー球面のスタンレー・ライスナー環は Cohen-Macaulay である, という代数的な事実に基づいており, そのままでは多様体の三角形分割に一般化できない. 上を一般化する為, 二つ定義を与える.

$(n-1)$  次元単体的複体  $\Delta$  に対し, その  $h''$ -列  $h''(\Delta) = (h''_0(\Delta), h''_1(\Delta), \dots, h''_n(\Delta))$  を次で定義する<sup>12</sup>.

$$h''_i(\Delta) = \begin{cases} h_i(\Delta) - \binom{n}{i} (\sum_{j=1}^i \beta_{j-1}(\Delta; \mathbb{F})), & (i \neq n \text{ の時}) \\ h_n(\Delta) - \binom{n}{i} (\sum_{j=1}^{n-1} \beta_{j-1}(\Delta; \mathbb{F})), & (i = n \text{ の時}). \end{cases}$$

(尚,  $h''_n(\Delta) = \beta_n(\Delta; \mathbb{F})$  である) なんだかよくわからない定義だと思うので, 少し例を挙げよう.

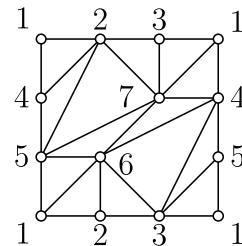
**例 3.5.** 右のトーラス  $S^1 \times S^1$  の 7 頂点三角形分割  $\Delta$  を考えると

$$f(\Delta) = (7, 21, 14)$$

であり,  $h(\Delta) = (1, 4, 10, -1)$ .  $\beta_1(S^1 \times S^1) = 2$  であるから

$$h''(\Delta) = h(\Delta) - 2(0, 0, 3, -1) = (1, 4, 4, 1)$$

となる. (対称な数列が出て来たことに注意!)



次の等式が成り立つ事が知られている (本質的には定理 3.1 と同じもの).

**定理 3.6** ( $h''$ -列に対する Dehn–Sommerville 等式 [No]).  $\Delta$  が向き付け可能な閉  $(n-1)$  多様体の三角形分割である時, 次が成り立つ.

$$h''_i(\Delta) = h''_{n-i}(\Delta) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Krull 次元  $n$  の有限生成次数付  $S$ -加群  $W$  とその線形な巴系  $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_n$  に対し,  $W$  の部分加群  $\Sigma(\Theta; W)$  を次で定義する<sup>13</sup>.

$$\Sigma(\Theta; W) = \Theta W + \sum_{i=1}^n (\theta_1, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_n) W :_W \theta_i.$$

但し,  $W$  の部分加群  $W'$  と  $S$  の元  $f$  に対し,

$$W' :_W f = \{m \in W : fm \in W'\}$$

である. 上の加群は Buchsbaum 環と呼ばれる環の研究の中で後藤 [Go] により考案された. こちらも, なんだかよくわからない定義だと思うが, 要は定理 3.4 における  $\Theta\mathbb{F}[\Delta]$  を  $\Sigma(\Theta, \mathbb{F}[\Delta])$  に変えれば上手くいく, というのが最近分かったことである.

<sup>12</sup> $h'$  列と呼ばれるものもある.  $h'_i = h''_i + \binom{n}{i} \beta_{i-1}$  ( $i \neq n$ ),  $h'_n = h''_n$  で定義される.

<sup>13</sup>“ $\Theta W +$ ”の所は  $n \geq 2$  の時は不要.

**定理 3.7** (スタンレー・ライスナー環のポアンカレ双対性 (多様体の場合) [NS1, NS2]).  $\Delta$  を  $(n-1)$  多様体  $M$  の三角形分割,  $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_n$  を  $\mathbb{F}[\Delta]$  の線形な巴系とする.

- (1)  $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{F}[\Delta]))_k = h''_k(\Delta)$  for  $k = 0, 1, \dots, n$ .
- (2)  $M$  が向き付け可能または  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  なら  $(\mathbb{F}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{F}[\Delta]))$  は次数  $n$  のポアンカレ双対代数.

**例 3.8.** 余り良い例はないのだが, 具体例を挙げておこう.  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  とし, 右の射影平面  $\mathbb{R}P^2$  の 6 頂点三角形分割  $\Delta$  を考える. この時

$$I_{\Delta} = \left( \begin{array}{l} x_1x_2x_3, x_1x_2x_5, x_1x_3x_6, x_1x_4x_5, x_1x_4x_6 \\ x_2x_3x_4, x_2x_4x_6, x_2x_5x_6, x_3x_4x_5, x_3x_5x_6 \end{array} \right)$$

であり,

$$\Theta = (x_1 + x_3 + x_5, x_2 + x_3 + x_5, x_4 + x_5 + x_6)$$

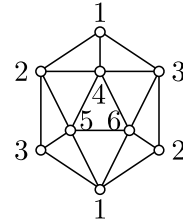
は  $\mathbb{F}[\Delta]$  の線形な巴系.  $\Sigma(\Theta, R)$  は  $I_{\Delta}$  と  $\Theta$  に加え, 次の三つの元を生成元に持つ

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_3x_6 + x_5x_6, \\ x_1x_4 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_3x_6 + x_5x_6, \\ x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_6 + x_5x_6 \end{array} \right\}.$$

定理 3.7 で与えられるポアンカレ双対代数は (不要な変数を消すと)

$$\mathbb{F}[x_1, \dots, x_6]/(I_{\Delta} + (\Theta) + (X)) \cong \mathbb{F}[x, y, z]/(x^2 + xy + yz, y^2 + xz + yz, z^2 + xy + xz)$$

という代数になる.



### 3.3. 境界のある多様体の三角形分割.

定理 3.7 は境界を持つ多様体の場合にも拡張できる.  $\Delta$  が境界を持つ多様体  $M$  の三角形分割なら,  $\Delta$  の面で境界部分にあるもの全体の集合  $\partial\Delta$  は  $\partial M$  の三角形分割になることに注意する. 単体的複体のペア  $\Gamma \subseteq \Delta$  に対し,  $f_i(\Delta, \Gamma)$  を  $\Delta$  に属するが  $\Gamma$  に属さない  $i$  次元面の個数とし,  $\beta_i(\Delta, \Gamma; \mathbb{F}) = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta, \Gamma; \mathbb{F})$  とする. この時,  $h(\Delta, \Gamma), h''(\Delta, \Gamma)$  を通常の単体的複体の場合と同様に定義すると次の形の等式が成り立つ.

**定理 3.9** (Dehn–Sommerville 等式 [MN] (essentially [Gr])).  $\Delta$  が向き付け可能な  $(n-1)$  次元多様体の三角形分割なら

$$h''_i(\Delta) = h''_{n-i}(\Delta, \partial\Delta) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

また, ペア  $\Gamma \subseteq \Delta$  のスタンレー・ライスナー加群  $\mathbb{F}[\Delta, \Gamma]$  を

$$\mathbb{F}[\Delta, \Gamma] = I_{\Gamma}/I_{\Delta}$$

で定義すると次が成り立つ.

**定理 3.10** ([MNY]).  $\Delta$  を可能な  $(n-1)$  多様体の三角形分割,  $R = \mathbb{F}[\Delta], W = \mathbb{F}[\Delta, \partial\Delta], \Theta = \theta_1, \dots, \theta_n$  を  $R$  の線形な巴系とする.  $M$  が向き付け可能もしくは  $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$  の時, 次が成り立つ.

- (1)  $\dim_{\mathbb{F}}(R/\Sigma(\Theta; R))_k = h''_k(\Delta)$  for  $k = 0, 1, \dots, n$ .
- (2)  $\dim_{\mathbb{F}}(W/\Sigma(\Theta; W))_k = h''_k(\Delta, \partial\Delta)$  for  $k = 0, 1, \dots, n$ .
- (3)  $\Delta$  が向き付け可能である時, 積写像

$$(R/\Sigma(\Theta; R))_i \times (W/\Sigma(\Theta; W))_{n-i} \rightarrow (W/\Sigma(\Theta; W))_n$$

は perfect pairing である.

注 3.11. 定理 3.10 は細かい所を端折ったが,  $(W/\Sigma(\Theta; W))_n \cong \mathbb{F}$  であることや, 積写像  $R/\Sigma(\Theta; R) \times W/\Sigma(\Theta; W) \rightarrow W/\Sigma(\Theta; W)$  の well-defined 性などは [MNY] を参照して欲しい.

### 3.4. どうやって頂点数問題へ応用するか?

今まで述べてきた話は一般的過ぎて, セクション 2 で述べたような具体的な問題にどう応用するかはちょっとわかりにくい. 実際, 具体的な問題に応用するときは少しテクニカルで泥臭い議論が必要になる.

雰囲気を見てもらうために定理 2.12 の証明の概要を紹介しておこう.

定理 2.12 の証明の概要. 簡単の為  $M$  は向き付け可能な閉  $2k$  多様体とする.  $\Delta$  を  $M$  の  $v$  頂点三角形分割とし,  $\binom{v-k-2}{k+1} \geq \binom{2k+1}{k+1} \beta_k(M; \mathbb{F})$  を示す.  $R = \mathbb{F}[\Delta]$  とし,  $\Theta$  を  $R$  の線形な巴系とすると, 実は次のことが知られている.

- (1)  $\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_i - \dim_{\mathbb{F}}(R/\Sigma(\Theta, R))_i = \binom{2k+1}{i} \beta_{i-1}(M; \mathbb{F})$ ,
- (2) 任意の多項式  $f$  に対し  $f \cdot \Sigma(\Theta, R) = 0$ .

ここで,  $R/\Theta R$  においてゼロでない一次式  $w$  をとると, (2) より  $(R/(\Theta, w)R)_{k+1}$  のベクトル空間のとしての次元は  $\dim_{\mathbb{F}}(R/\Theta R)_{k+1} - \dim_{\mathbb{F}}(R/\Sigma(\Theta, R))_k$  より大きいのだが,  $(R/\Sigma(\Theta, R))_k \cong (R/\Sigma(\Theta, R))_{k+1}$  なのでこれは (1) の右辺に一致する. 一方,  $\mathbb{F}[\Delta]$  は  $n$  変数多項式環を割った環で,  $\Theta, w$  は  $\mathbb{F}$  上一時独立な  $2k+2$  個の一次式からなるので次が得られる

$$\binom{n-k-2}{k+1} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[x_1, \dots, x_{n-2k-2}]_{k+1}) \leq \dim_{\mathbb{F}}(R/(\Theta, w)R)_{k+1} \leq \binom{2k+1}{k+1} \beta_k(M; \mathbb{F}).$$

(定理 2.12 の不等式の左辺を多項式間の  $k+1$  次の  $\mathbb{F}$ -次元とみるのがポイント.)  $\square$

定理 2.13 の方も簡単に説明しておこう. こちらの定理は, 実は辺の個数に関する以下の結果から従う.

定理 3.12 ([NS1, Ba, DM, Mu2]).  $n \geq 3$  とする.  $\Delta$  を閉  $n$  多様体  $M$  の  $v$  頂点三角形分割とすると, 次が成り立つ.

$$f_1(\Delta) \geq (n+1)v + \binom{n+2}{2} (\beta_1(M; \mathbb{F}) - 1).$$

等号成立の時,  $M$  は  $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\# \beta_1(\Delta)}$  か  $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)^{\# \beta_1(\Delta)}$  のどちらかに同相.

上の定理は一番目のホモロジー群の次元が大きくなると, それに依存して辺の数もそれなりに大きくなるといけないと言っている. 実は, これは頂点数に関する下限も与えていて, 実際, 頂点数  $f_1(\Delta)$  に関する自明な上限  $f_1(\Delta) \leq \binom{v}{2}$  を定理 3.12 に代入すると定理 2.13 を得る.

定理 3.12 の証明の概要. 簡単の為,  $M$  は向き付け可能とする.  $R = \mathbb{F}[\Delta]$  とする. 実は線形な巴系  $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_{n+1}$  と一次式  $w$  を上手く取ると積写像  $\times w : (R/\Theta R)_{n-2} \rightarrow (R/\Theta R)_{n-1}$  が全射になることがわかっている [Sw2]. このことと, 先の証明の (1), (2) から不等式

$$\dim_{\mathbb{F}}(R/(\Sigma(\Theta; R)))_{n-1} + \binom{n+1}{2} \beta_{n-1}(M; \mathbb{F}) \geq \dim_{\mathbb{F}} R/(\Sigma(\Theta; R))_{n-1}$$

がわかるのだが, 定理 3.7 と 3.6 を使うと上は  $h'_1$  と  $h'_2$  に関する不等式に書き直せる. 書き直したものを  $f$  列の言葉に直したものが求める不等式となる.  $\square$

## 3.5. その他.

頂点数の話だけで結構な分量になってしまったので一般次元の面の個数について述べるスペースがなくなってしまったが、多様体の三角形分割の面の個数に関する最近の仕事は [KN, Sw2] に良くまとまっているのでそちらを参照して欲しい。また、3次元多様体の三角形分割の面の個数に関しては [LSS] に良く纏められて書いてあるのでそちらも参照して欲しい<sup>14</sup>。また、 $h''$  列の理論は単体的複体を少し一般化した単体的セル複体と呼ばれるものに応用することもできる。此方については [Mu1] を参照して欲しい。

## REFERENCES

- [Ba] B. Bagchi, The mu vector, Morse inequalities and a generalized lower bound theorem for locally tame combinatorial manifolds, *European J. Combin.* **51** (2016), 69–83.
- [BD] B. Bagchi and B. Datta, Minimal triangulations of sphere bundles over the circle, *J. Combin. Theory, Ser. A* **115** (2008), 737–752.
- [BK1] U. Brehm and W. Kühnel, Combinatorial manifolds with few vertices, *Topology* **26** (1987), 465–473.
- [BK2] U. Brehm and W. Kühnel, 15-vertex triangulations of an 8-manifold, *Math. Ann.* **294** (1992), 167–193.
- [BDSS] B.A. Burton, B. Datta, N. Singh and J. Spreer, A construction principle for tight and minimal triangulations of manifolds, arXiv:1511.04500.
- [CK] M. Casella and W. Kühnel, A triangulated K3 surface with the minimum number of vertices, *Topology* **40** (2001), 753–772.
- [CSS] J. Chestnut, J. Sapir and E. Swartz, Enumerative properties of triangulations of spherical bundles over  $S^1$ , *European J. Combin.* **29** (2008), 662–671.
- [DM] B. Datta and S. Murai, On stacked triangulated manifolds, arXiv:1407.6767.
- [DS] B. Datta and N. Singh, An infinite family of tight triangulations of manifolds, *J. Combin. Theory, Ser. A* **120** (2013), 2148–2163.
- [EK] J. Eells and N.H. Kuiper, Manifolds which are like projective planes, *Publ. Math. I.H.E.S.* **14** (1962), 181–222.
- [Go] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Alg.* **85** (1983), 490–534.
- [Gr] H-G. Gräbe, Generalized Dehn-Sommerville equations and an upper bound theorem, *Beiträge Algebra Geom.*, **25** (1987), 47–60.
- [He] P.J. Heawood, Map-color theorem, *Quart. J. Pure Appl. Math.* (1890) **24**, 332–338.
- [JR] M. Jungerman and G. Ringel, Minimal triangulations on orientable surfaces, *Acta. Math.* **145** (1980), 121–154.
- [Kü1] W. Kühnel, Higher dimensional analogues of Császár’s torus, *Results. Math.* **9** (1986), 95–106.
- [Kü2] W. Kühnel, Triangulations of manifolds with few vertices, In: *Advances in Differential Geometry and Topology* (F. Triccerri, ed.), 59–114, World Scientific, 1990.
- [KB] W. Kühnel and T.F. Banchoff, The 9-vertex complex projective plane. *Math. Intelligencer* **5** (1983), 11–22.
- [KL] W. Kühnel, and G. Lassmann, The unique 3-neighborly 4-manifold with few vertices, *J. Combin. Theory, Series A* **35** (1983), 173–184.
- [KN] S. Klee and I. Novik, Face enumeration on simplicial complexes, arXiv:1505.06380, 2015.
- [Kl] V. Klee, A combinatorial analogue of Poincaré’s duality theorem, *Canad. J. Math.* **16** (1964), 517–531.
- [Lu] F. Lutz, Triangulated Manifolds with Few Vertices: Combinatorial Manifolds, arXiv:math/0506372.
- [LSS] F. Lutz, T. Sulanke and E. Swartz,  $f$ -vectors of 3-manifolds, *Electron. J. Combin.* **16** (2009), Research Paper 13, 33 pp.
- [Mu1] 村井 聡, 単体的セル複体の面の数え上げの話, 第 56 回代数学シンポジウム報告集.
- [Mu2] S. Murai, Tight combinatorial manifolds and graded Betti numbers, *Collect. Math.* **66** (2015), 367–386.

<sup>14</sup>Tight triangulation 関係の未解決問題は今は解決しているものもある。

- [MN] S. Murai and I. Novik, Face numbers of manifolds with boundary, *Int. Math. Res. Not.*, to appear, arXiv:1509.05115.
- [MNY] S. Murai, I. Novik and K. Yoshida, A duality in Buchsbaum rings and triangulated manifolds, arXiv:1602.06613.
- [No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.
- [NS1] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.
- [NS2] I. Novik and E. Swartz, Gorenstein rings through face rings of manifolds, *Compos. Math.* **145** (2009), 993–1000.
- [NS3] I. Novik and E. Swartz, Applications of Klee’s Dehn-Sommerville relations, *Discrete Comput. Geom.* **42** (2009), 261–276.
- [Ri] G. Ringel, Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann, *Math. Ann.* **130** (1955), 314–326.
- [Sc] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, *Math. Z.* **178** (1981), 125–142.
- [Sta] R.P. Stanley, *Combinatorics and commutative algebra*, Second edition, Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [Ste] N.E. Steenrod, The classification of sphere bundles, *Ann. of Math.* **45** (1944), 294–311.
- [Sw1] E. Swartz, Face enumeration: from spheres to manifolds, *J. Eur. Math. Soc.* **11** (2009), 449–485
- [Sw2] E. Swartz, Thirty-five years and counting, arXiv1411.0987, 2014.

SATOSHI MURAI, DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY, SUITA, OSAKA, 565-0871, JAPAN

# グラフの彩色数と Hom 複体について

松下 尚弘 (京都大学理学研究科)\*

## 1. はじめに

単純グラフとは二重線およびループのある頂点を持たないグラフのことである.  $n$  を非負整数とする. 単純グラフ  $G$  の  $n$ -彩色とは,  $G$  の頂点集合  $V(G)$  から  $n$  点集合  $\{1, \dots, n\}$  への写像  $\varphi$  であって,  $v, w \in V(G)$  が辺で結ばれているとき,  $\varphi(v) \neq \varphi(w)$  となるものである.  $G$  の  $n$ -彩色が存在するような  $n$  のうち最小のものを  $G$  の彩色数といい  $\chi(G)$  で表す. グラフの彩色数を決定することをグラフの彩色問題という. これはグラフ理論において古くから考えられてきた問題である [4].

グラフの彩色問題に代数トポロジーを初めて応用したのは Lovász である. Lovász はグラフ  $G$  に対し, 近傍複体  $N(G)$  を定義し,  $N(G)$  が  $n$ -連結ならば  $G$  の彩色数  $\chi(G)$  は  $n + 3$  以上であることを証明した. そしてこの手法を用いて, Lovász は Kneser 予想を解決した.

Hom 複体とは, 二つのグラフ  $T, G$  に対し定義される CW 複体  $\text{Hom}(T, G)$  であり, Babson-Kozlov [1], [2] によって本格的に研究が始められた. Hom 複体は次の意味で近傍複体の一般化になっている:  $K_2$  により二つの頂点とそれらを結ぶ辺のなすグラフを表すとする. このとき  $\text{Hom}(K_2, G)$  と近傍複体  $N(G)$  とはホモトピー同値になる.  $K_2$  への二つの頂点を入れ替える  $\mathbb{Z}_2$  の群作用によって,  $\text{Hom}(K_2, G)$  も  $\mathbb{Z}_2$ -空間となるが, この  $\mathbb{Z}_2$ -空間を箱複体といい, 特別によく研究されている [3].

Hom 複体の研究において, 中心的な話題となっていた概念として, Kozlov のホモトピーテストグラフ [11] がある. グラフ  $T$  がホモトピーテストグラフであるとは, 任意のグラフ  $G$  に対し, 不等式

$$\chi(G) > \text{conn}(\text{Hom}(T, G)) + \chi(T)$$

が成り立つことをいう. ここで空間  $X$  に対し,  $\text{conn}(X)$  によって  $X$  が  $n$ -連結であるような最大の  $n$  を表している. 上記の Lovász の近傍複体に関する結果は「 $K_2$  がホモトピーテストグラフである」と言い換えられる. また Lovász は奇数次のサイクルグラフ  $C_{2r+1}$  ( $(2r + 1)$  角形の頂点と辺のなすグラフ) がホモトピーテストグラフであることを予想し, Babson と Kozlov は [2] においてこの予想を解決した. それ以来, Hom 複体の研究が盛んに行われるようになった.

Hom 複体や近傍複体から,  $n$ -彩色の障害を引き出す方法について述べる. その前に, 以下の基本的な用語を準備しておく. グラフ  $G$  からグラフ  $H$  へのグラフ準同型とは, 頂点集合の間の写像  $f: V(G) \rightarrow V(H)$  であって,  $v \sim_G w$  なら  $f(v) \sim_H f(w)$  が成り立つことをいう. ここで  $v \sim_G w$  は  $v$  と  $w$  はグラフ  $G$  において辺で結ばれていることを意味する.  $K_n$  により完備  $n$ -頂点グラフを表す. すなわち  $V(K_n) = \{1, \dots, n\}$  であって,  $a, b \in V(K_n)$  は  $a \neq b$  のとき辺が張られている. このときグラフ  $G$  の  $n$ -彩色は,  $G$  から  $K_n$  へのグラフ準同型と同一視できる.

本研究は科研費 (課題番号:28-6304) の助成を受けたものである.

キーワード: グラフ, 彩色数, 近傍複体, Hom 複体

\* 〒 606-8224 京都府京都市北白川追分町 京都大学理学研究科数学教室  
e-mail: mtst@math.kyoto-u.ac.jp

$\text{Hom}(T, G)$  のトポロジーから  $G$  の  $n$ -彩色の障害を求めたい. そのためにまず  $T$  に適切な群作用を考える. すると  $\text{Hom}$  複体の関手性から, 空間  $\text{Hom}(T, G)$  に群作用が誘導される (第2節参照), グラフ準同型  $f: G_1 \rightarrow G_2$  は同変写像  $f_*: \text{Hom}(T, G_1) \rightarrow \text{Hom}(T, G_2)$  を誘導する. したがってグラフ  $G$  に対し  $\text{Hom}(T, G)$  から  $\text{Hom}(T, K_n)$  への同変写像が存在しないことが証明されれば,  $G$  の  $n$ -彩色が存在しないことがわかる. 特に  $T = K_2$  のときは,  $\text{Hom}(K_2, K_m) \approx_{\mathbb{Z}_2} S^{m-2}$  ( $n \geq 1$ ) であることが知られている (Babson-Kozlov [1]). ここで  $(m-2)$ -球面  $S^{m-2}$  は対蹠写像により  $\mathbb{Z}_2$ -空間とみなしている. もし  $\text{Hom}(K_2, G)$  が  $n$ -連結ならば, 簡単な障害理論から  $S^{n+1}$  から  $\text{Hom}(K_2, G)$  への  $\mathbb{Z}_2$ -同変写像が存在することがわかるが,  $n+1 > m-2$  ならば  $S^{n+1}$  から  $S^{m-2}$  への  $\mathbb{Z}_2$ -同変写像は存在しない (Borsuk-Ulam の定理). したがって  $n+1 \leq m-2$ , すなわち

$$\chi(G) \geq \text{conn}(\text{Hom}(K_2, G)) + 3 = \text{conn}(\text{Hom}(K_2, G)) + \chi(K_2) + 1$$

を得る. すなわち  $K_2$  はホモトピーテストグラフである. このように  $\text{Hom}$  複体の (同変) ホモトピー型とグラフの彩色数とが関係していることがわかる.

本講演では与えられたグラフ  $T$  に対し,  $\text{Hom}$  複体  $\text{Hom}(T, G)$  の構造が, どの程度グラフ  $G$  の彩色数に制限を与えるのかということについて述べる. 第2節において近傍複体と  $\text{Hom}$  複体の正確な定義を与える.

第3節ではホモトピーテストグラフに関してより詳しく述べ「全ての二部グラフはホモトピーテストグラフ」という Kozlov の予想の肯定的な解決について述べる.

$\text{Hom}$  複体  $\text{Hom}(T, G)$  のホモトピー不変量が  $G$  の彩色数に制限を与えることを述べたが, それでは「 $T$  がホモトピーテストグラフならば  $G$  の彩色数は  $\text{Hom}$  複体  $\text{Hom}(T, G)$  のホモトピー型から決定されるか」という問いが自然に生ずる. しかし続く第4節において任意の有限グラフ  $T$  に対し, 「 $\chi(G) > 2$  ならば  $\text{Hom}(T, G)$  のホモトピー型は  $G$  の彩色数を決定しない」ということを示す. より正確に言えば,  $\chi(G) > 2$  のとき, グラフ  $H$  であって,  $\chi(H)$  は  $\chi(G)$  に比べてはるかに大きいにも関わらず,  $\text{Hom}(T, G)$  と  $\text{Hom}(T, H)$  はホモトピー同値であるものが存在することがわかる.

したがって  $\text{Hom}$  複体  $\text{Hom}(T, G)$  から  $\chi(G)$  を決定するには,  $\text{Hom}(T, G)$  のより精密な情報を調べなくてはならない. しかし箱複体  $\text{Hom}(K_2, G)$  の  $\mathbb{Z}_2$ -CW-複体としての構造は, 元のグラフ  $G$  を孤立点を除いて決定してしまう (第5節参照). 一方,  $\mathbb{Z}_2$ -作用を考えないならば次が成り立つ: 二つのグラフ  $G$  と  $H$  に対し, 箱複体  $\text{Hom}(K_2, G)$  と  $\text{Hom}(K_2, H)$  が CW-複体として同型ならば, Kronecker 二重被覆  $K_2 \times G$  と  $K_2 \times H$  は同型である. このことを用いると, 箱複体 (あるいは近傍複体) が CW-複体として同型であるにも関わらず, 彩色数が全く異なる例を構成することができる.

第6節においてグラフの圏のモデル構造について述べる. この節において, グラフ準同型  $f: G \rightarrow H$  で箱複体間の写像  $f_*: \text{Hom}(K_2, G) \rightarrow \text{Hom}(K_2, H)$  が  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値のとき弱同値とするようなモデル構造を導入し, それが  $\mathbb{Z}_2$ -空間の圏に Quillen 同値になることを述べる. 箱複体でグラフの彩色数の下界を得る方法は, いわばグラフの圏と  $\mathbb{Z}_2$ -空間との圏とを比較して得られるものであった. つまり「 $G$  から  $H$  へのグラフ準同型が存在するならば,  $B(G)$  から  $B(H)$  への  $\mathbb{Z}_2$ -写像が存在する」ということに着目していた. 一方, 上記の第4節における結果は「 $B(G)$  から  $B(H)$  への  $\mathbb{Z}_2$ -同変写像が存在するからといって,  $G$  から  $H$  へのグラフ準同型が存在するとは限らない」といえる. したがってグラフの圏と  $\mathbb{Z}_2$ -空間の圏は一致はしないのだが, Quillen 同値ということはこの二つのモデル圏のホモトピー圏は同値になるということである.

## 2. 基本的な用語

この節では講演で必要となる用語の定義を述べる. 半順序集合のことをポセットと呼ぶ. ポセット  $P$  の部分集合で,  $P$  の順序に関して全順序になるものを  $P$  のチェーンという.  $P$  の有限チェーン全体のなす単体的複体を  $\Delta(P)$  で表し, その幾何学的実現を  $|P|$  で表す.  $|P|$  を  $P$  の分類空間という. 以下の議論において, ポセットはしばしばその分類空間と同一視する.

本講演において, **グラフ** とは集合  $V(G)$  と  $V(G) \times V(G)$  の対称部分集合  $E(G)$  の組  $(V(G), E(G))$  のことを指す.  $v \in V(G)$  が  $(v, v) \in E(G)$  なるとき  $v$  はループを持つという. 第1節冒頭で単純グラフの定義を述べたが, このグラフの定式化においては, 単純グラフとはループを持つ頂点が存在しないグラフのことである. グラフ準同型とは, 写像  $f: V(G) \rightarrow V(H)$  であって  $(f \times f)(E(G)) \subset E(H)$  なるものである. 第1節で述べたように  $G$  の  $n$  彩色は  $G$  から  $K_n$  へのグラフ準同型と同一視され,  $G$  の彩色数  $\chi(G)$  は以下のように定式化できる:

$$\chi(G) = \inf\{n \geq 0 \mid G \text{ から } K_n \text{ へのグラフ準同型が存在する.}\}. \quad (1)$$

$G$  をグラフとする.  $v \in V(G)$  に対し,  $N(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$  を  $v$  の近傍という.  $G$  の**近傍複体**  $N(G)$  とは,  $G$  の孤立していない頂点全体を頂点集合とする単体複体であって, 単体の集合が

$$\{\sigma \subset V(G) \mid \sigma \text{ は有限集合で } \sigma \subset N(v) \text{ となる } v \in V(G) \text{ が存在する.}\}$$

により定義される抽象的単体複体である.

Hom 複体の定義を述べる. グラフ  $T$  からグラフ  $G$  への多重準同型写像とは, 写像  $\eta: V(T) \rightarrow 2^{V(G)} \setminus \{\emptyset\}$  であって,

$$(v, w) \in E(T) \Rightarrow \eta(v) \times \eta(w) \subset E(G)$$

を満たすものである. ここで  $2^{V(G)}$  は  $V(G)$  の冪集合を表す.  $\eta, \eta'$  を多重準同型写像とすると, 各  $v \in V(T)$  に対して  $\eta(v) \subset \eta'(v)$  なるとき,  $\eta \leq \eta'$  と書く. そして  $T$  から  $G$  への多重準同型写像全体のなすポセットを **Hom 複体** といい,  $\text{Hom}(T, G)$  で表す.

$f: T \rightarrow S$  をグラフ準同型とすると, 順序を保つ写像  $f^*: \text{Hom}(S, G) \rightarrow \text{Hom}(T, G)$  を  $f^*(\eta) = \eta \circ f$  により定める. またグラフ準同型  $g: G \rightarrow H$  に対し,  $g_*: \text{Hom}(T, G) \rightarrow \text{Hom}(T, H)$  を  $g_*(\eta)(v) = g(\eta(v))$  とする. これにより Hom 複体  $\text{Hom}(T, G)$  は,  $T$  および  $G$  に関し関手的になる.

## 3. ホモトピーテストグラフ

グラフ  $T$  がホモトピーテストグラフであるとは,

$$\chi(G) > \text{conn}(\text{Hom}(T, G)) + \chi(T)$$

が任意のグラフ  $G$  に対して成立するとき言うのであった. 第1節でも述べたように, Lovász の近傍複体に関する結果は  $K_2$  がホモトピーテストグラフであることを意味する. その他のホモトピーテストグラフの例としては,  $n$  を 3 以上の整数としたときの  $n$ -頂点完備グラフ  $K_n$ ,  $n$ -サイクルグラフ  $C_n$  などがある (それぞれ [1], [2]). Hom 複

体が導入された当初, Lovász は辺を一つ以上持つ全てのグラフは Hom 複体であると予想したが, これは Hoory と Linial により否定的に解決された [8]. その他のホモトピーテストグラフの例や, ホモトピーテストグラフにならない例などは, [6] や [18] などに詳しく書かれている.

Kozlov は [11] において全ての二部グラフ (グラフ  $T$  で  $\chi(T) = 2$  なるもの) はホモトピーテストグラフであると予想したが, 私はこの予想を肯定的に解決した.

**定理 3.1** (M. [13]).  $\chi(T) = 2$  ならば, グラフ  $T$  はホモトピーテストグラフである.

証明は Hom 複体の関手性から簡単にわかるので, ここに書くことにする.

まずグラフ  $T$  が  $\chi(T) = 2$  ならば,  $K_2$  は  $T$  のレトラクトである. すなわちグラフ準同型  $i : K_2 \rightarrow T$  と  $r : T \rightarrow K_2$  で  $ri$  が恒等写像になるものが存在する.  $K_2$  はホモトピーテストグラフだから, 次のことを見ればよい.

**補題 3.2.**  $T$  と  $S$  をグラフとし,  $T$  はホモトピーテストグラフであるとする. もし  $T$  が  $S$  のレトラクトならば,  $S$  はホモトピーテストグラフである.

**証明:** まずグラフ準同型  $f : G \rightarrow H$  が存在するならば,  $\chi(G) \leq \chi(H)$  であることに注意する. これは第2節の式 (1) から明らかである. 次に補題の状況に戻って, グラフ準同型  $i : T \rightarrow S$ ,  $r : S \rightarrow T$  で  $ri = \text{id}_T$  なるものをとる. 上に述べたことから,  $\chi(T) = \chi(S)$  である.

$\text{Hom}(S, G)$  が  $n$ -連結であると仮定して,  $\chi(G) > n + \chi(S)$  を示せばよい. ここで  $\text{Hom}(T, G)$  は  $\text{Hom}(S, G)$  のレトラクトであることに注意する. 実際  $i^*r^* = (ri)^* = \text{id}$  だから. したがって  $\text{Hom}(S, G)$  が  $n$ -連結なので,  $\text{Hom}(T, G)$  も  $n$ -連結である.  $T$  はホモトピーテストグラフだったから

$$\chi(G) > \text{conn}(\text{Hom}(T, G)) + \chi(T) \geq n + \chi(S)$$

となり,  $S$  がホモトピーテストグラフであることがわかる. □

一般に  $n$  頂点完備グラフ  $K_n$  をレトラクトとして含むグラフを **完全グラフ** という.  $n \geq 2$  ならば  $K_n$  はホモトピーテストグラフだから, 補題 3.2 により彩色数が 2 以上の完全グラフはホモトピーテストグラフである.

#### 4. Hom 複体のホモトピー型について

$T$  がホモトピーテストグラフならば  $\text{Hom}(T, G)$  のホモトピー型が  $\chi(G)$  の下界を与えることは前節で述べた. それでは Hom 複体のホモトピー型がグラフの彩色数を決定し得るのかという問題が生じる. この問題に関連して, Walker [19] は  $T = K_2$  のときに, 次のことを証明した.  $G_1$  と  $G_2$  を以下の図で描かれるグラフとする. このとき  $\chi(G_1) = 4$  かつ  $\chi(G_2) = 3$  であって,  $\text{Hom}(K_2, G_1) \simeq_{\mathbb{Z}_2} \text{Hom}(K_2, G_2)$  であることがわかる.

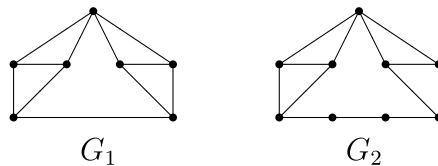


図 1.

すなわち箱複体  $\text{Hom}(K_2, G)$  が  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値であるにも関わらず、彩色数が異なる例が存在することがわかる。上記の Walker の例がそのような例として唯一知られているものだったが、私はそのような例が非常にたくさんあることを示した：

**定理 4.1** (M. [16]).  $T$  を有限グラフ、 $G$  を彩色数が3以上のグラフとする。このとき任意の整数  $n$  に対し、グラフ  $H$  で次の性質を満たすものが存在する。

- (1)  $\text{Hom}(T, G)$  と  $\text{Hom}(T, H)$  はホモトピー同値である。
- (2)  $\chi(H) > n$

さらに  $T = K_2$  のときは(1)において  $\text{Hom}(K_2, G)$  と  $\text{Hom}(K_2, H)$  が  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値であるようにとることができる。

特に  $\text{Hom}$  複体  $\text{Hom}(T, G)$  のホモトピー型は、 $\chi(G) > 2$  ならば  $G$  の彩色数を決定しないことがわかる。前節において  $T$  がホモトピーテストグラフならば  $\text{Hom}(T, G)$  のホモトピー型は  $\chi(G)$  の下界を与えることについて述べたが、定理 4.1 から  $\text{Hom}(T, G)$  のホモトピー型は  $\chi(G)$  の上界を与えることはないこともわかる。特に  $T = K_2$  のときは、以下のことが別に知られている。 $\mathbb{Z}_2$ -空間  $X$  に対し、 $X$  から  $S^n$  への  $\mathbb{Z}_2$ -同変写像が存在するような最小の  $n$  を  $X$  の  $\mathbb{Z}_2$ -指数といい、 $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X)$  で表す。 $\text{Hom}(K_2, K_n) \approx_{\mathbb{Z}_2} S^{n-2}$  ( $n \geq 1$ ) だから、

$$\chi(G) \geq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\text{Hom}(K_2, G)) + 2 \tag{2}$$

が成立する [12]。一方、右の下界は以下の意味で最大であることが、Dochtermann-Schultz [6] において示されている：任意の有限  $\mathbb{Z}_2$ -CW-複体  $X$  に対し、グラフ  $G$  で  $\text{Hom}(K_2, G) \simeq_{\mathbb{Z}_2} X$  かつ  $\chi(G) = \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\text{Hom}(K_2, G)) + 2$  なるものが存在する。

したがって定理 4.1 と組み合わせることで、 $\text{Hom}(K_2, G)$  に関しては、その  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー型に着目するとき、不等式 (2) 以上の情報は得られないことがわかる。

定理 4.1 の証明の概要を、 $T = K_2$  の場合に述べる。記号を短くするために、以下  $\text{Hom}(K_2, G)$  を  $B(G)$  と書くことにする。その証明に使うグラフ理論の有名な定理を紹介する。グラフ  $G$  の内周  $g(G)$  (girth) とは、 $G$  に埋め込まれたサイクルの最小の長さのことを言う。内周が大きいグラフは、局所的には木 (tree) であるグラフ、と考えることができる。木は常に 2 彩色可能である。したがって下記の定理は、彩色数がグラフの大域的な性質であることを示している。

**定理 4.2** (Erdős [7]). 任意の整数  $m, n$  に対し、 $g(G) > m$  かつ  $\chi(G) > n$  なる有限グラフ  $G$  が存在する。

一方で次がわかる。(例えば Walker [19] の第 12 節を参照)

**補題 4.3.** グラフ  $G$  の内周  $g(G)$  が 4 より大きいならば、 $B(G)$  は 1 次元の  $\mathbb{Z}_2$ -CW-複体と  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値である。

一方で箱複体に関しては以下の近似定理が成り立つ。(この「近似」は単体近似定理のような意味合いで使っている)

**命題 4.4** (M. [17]).  $G$  と  $H$  を有限グラフとし、 $\varphi : |B(G)| \rightarrow |B(H)|$  を  $\mathbb{Z}_2$ -同変写像とする。このとき有限グラフ  $G'$  とグラフ準同型  $\varepsilon : G' \rightarrow G$ ,  $f : G' \rightarrow H$  が存在して次の性質を満たす。

- (1)  $\varepsilon_* : B(G) \rightarrow B(H)$  は  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値である.  
 (2) 図式

$$\begin{array}{ccc} |B(G)| & \xrightarrow{\varphi} & |B(H)| \\ \varepsilon_* \uparrow & & \parallel \\ |B(G')| & \xrightarrow{f_*} & |B(H)| \end{array}$$

は  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピーを除いて可換である.

定理 4.1 の証明の概略を述べる.  $G$  は彩色数が 3 以上のグラフで,  $n$  を任意の整数とする. 定理 4.2 から内周が 4 より大きい有限グラフ  $X$  で  $\chi(X) > n$  なるものが存在する. このとき  $|B(X)|$  は一次元  $\mathbb{Z}_2$ -CW-複体と  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値である.  $G$  の彩色数が 3 以上であるという条件から  $S^1$  から  $|B(G)|$  への  $\mathbb{Z}_2$ -写像が存在することがわかる. これは十分大きな  $r$  に対し,  $C_{2r+1}$  から  $G$  へのグラフ準同型が存在するという事実と,  $B(C_{2r+1}) \approx_{\mathbb{Z}_2} S^1$  なることからわかる. したがって  $|B(X)|$  から  $|B(G)|$  への  $\mathbb{Z}_2$ -同変写像が存在する.

上記の近似定理を用いることで, 有限グラフ  $X'$  とグラフ準同型  $\varepsilon : X' \rightarrow X$ ,  $f : X' \rightarrow G$  であって,  $\varepsilon_* : B(X') \rightarrow B(X)$  が  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値になるものが存在する. 次に  $X'$  の“長さ  $m$  のシリンダー  $X' \times I_m$ ”を考える (Dochtermann [5]). ここで  $m$  は 2 以上の整数で,  $I_m$  は長さ  $m$  の道のグラフの各頂点にループを付け加えて得られたものである. このシリンダー  $X' \times I_m$  の両端を  $\varepsilon : X' \rightarrow X$ ,  $f : X' \rightarrow G$  により貼り付けて得られるグラフを  $H$  とおく.

この  $H$  が定理 4.1 の条件を満たす. 実際,  $H$  は  $X$  を部分グラフとして含んでいるから  $n < \chi(X) \leq \chi(H)$  である. 上記の  $H$  の構成は空間のホモトピー押し出し (homotopy pushout) に似ているが, 実際に  $B(H)$  は  $\varepsilon_* : B(X') \rightarrow B(X)$  と  $f_* : B(X') \rightarrow B(G)$  のホモトピー押し出しである.  $\varepsilon_* : B(X') \rightarrow B(X)$  は  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値だから,  $B(G)$  と  $B(H)$  は  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値となることを得る.

## 5. 箱複体のセル構造と Kronecker 二重被覆

前節で述べた結果から, グラフの箱複体の同変ホモトピー型は彩色数を決定しないことがわかった. したがってグラフの彩色数のより詳細な情報を調べるためには, Hom 複体のより精密な構造を調べる必要がある. しかし以下の定理が示すように, 箱複体の  $\mathbb{Z}_2$ -ポセットとしての構造は元のグラフ  $G$  の構造を, 孤立点を除いて決定する. (特に彩色数も等しくなる)

**定理 5.1.**  $G$  と  $H$  を孤立点を持たないグラフとする. このとき以下が成立する.

- (1)  $B(G)$  と  $B(H)$  が  $\mathbb{Z}_2$ -ポセットとして同型であることと,  $G$  と  $H$  が同型であることは同値である.
- (2)  $B(G)$  と  $B(H)$  がポセットとして同型であることと,  $K_2 \times G$  と  $K_2 \times H$  が同型であることは同値である.
- (3)  $K_2 \times G \cong K_2 \times H \Rightarrow N(G) \cong N(H)$  である. さらに  $G$  と  $H$  が stiff (後述) であると仮定すると,  $N(G) \cong N(H) \Rightarrow K_2 \times G \cong K_2 \times H$  が成り立つ.

グラフ  $G$  が stiff であるとは、任意の  $G$  の頂点  $v, w$  に対し、 $N(v) \subset N(w) \Rightarrow v = w$  が成り立つことをいう。

上記の定理において、 $K_2 \times G$  は  $G$  の **Kronecker 二重被覆** と呼ばれている [9]。まずグラフの積  $G \times H$  を定義する。グラフ  $G$  と  $H$  に対し、その積  $G \times H$  を、

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H),$$

$$E(G \times H) = \{((v, w), (v', w')) \mid (v, v') \in E(G), (w, w') \in E(H)\}$$

により定義する。この積 “ $\times$ ” は Kronecker 積と呼ばれることもある。グラフ準同型  $p: G \rightarrow H$  は各  $v \in V(G)$  に対し、 $p|_{N(v)}: N(v) \rightarrow N(p(v))$  が全単射になるとき **被覆** という。  $K_2 \times G$  の第 2 射影  $K_2 \times G \rightarrow G$  は被覆になっている。これが Kronecker 二重被覆という名前の所以である。

Kronecker 二重被覆は以下のように幾何学的に簡明な定式化を持つ。  $X$  を二部グラフとする。  $X$  の **対合写像** (involution) とは、グラフ準同型写像  $\tau: X \rightarrow X$  であって、 $\tau^2 = \text{id}_X$  なるものを指す。  $\tau$  が **奇** (odd) であるとは各  $v \in V(X)$  に対し、  $v$  から  $\tau(v)$  を結ぶ道で長さが偶数のものが存在しないことをいう。  $X$  が連結二部グラフならば、これは  $X$  のある頂点  $v$  に対し、  $v$  から  $\tau(v)$  への長さが奇数な道が取れることと同値である。対合写像  $\tau$  が与えられると、  $X$  の  $\mathbb{Z}_2$ -作用が得られるが、その作用による商を  $X/\tau$  で書くことにする。グラフ  $G$  に対し、  $G$  の Kronecker 二重被覆  $K_2 \times G$  に対しては、 $(1, v) \leftrightarrow (2, v)$  とすることで奇な対合写像が定義される。そしてこの  $\mathbb{Z}_2$ -作用による商はグラフ  $G$  に一致する。一方で以下の定理が古典的に知られている。例えば [9] を見よ。

**補題 5.2.**  $X$  を二部グラフ、  $\tau$  を  $X$  の奇な対合写像とする。このとき  $K_2 \times (X/\tau) \cong X$  である。

この補題を用いることで次の命題が示される。後の例 5.5 において、以下の  $m = 4$ ,  $n = 3$  の場合の例を挙げる。

**命題 5.3** (M. [15]). 任意の 2 以上の整数  $m, n$  に対し、グラフ  $G, H$  で  $\chi(G) = m$ ,  $\chi(H) = n$  かつ  $K_2 \times G \cong K_2 \times H$  なるものが存在する。

定理 5.1 の (2), (3) と命題 5.3 により次がわかる。

**系 5.4** (M. [15]). 任意の 2 以上の整数  $m, n$  に対して、グラフ  $G, H$  で  $\chi(G) = m$ ,  $\chi(H) = n$  であるにも関わらず、  $N(G) \cong N(H)$  かつ  $B(G)$  と  $B(H)$  がポセットとして同型であるようなものが存在する。また  $m, n$  が 3 以上なら  $G$  と  $H$  は連結であるように取ることができる。

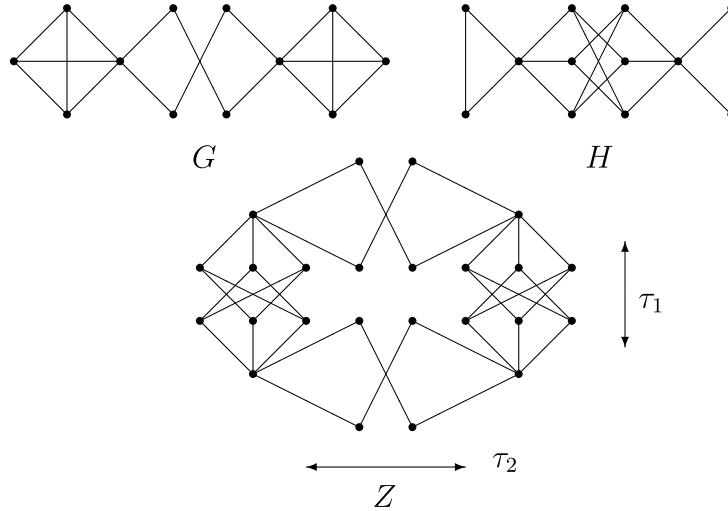
Lovász は近傍複体を初めて導入した論文 [12] において、グラフの彩色数  $\chi(G)$  を近傍複体  $N(G)$  の位相的不変量で特徴付けられないかという問いかけをしているが、系 5.4 はそのような位相的不変量は存在しないということを示している。

**例 5.5.** 下の図で描かれているグラフ  $G$  と  $H$  は  $m = 4$ ,  $n = 3$  のときの命題 5.3 の例である。  $G$  と  $H$  の彩色数がそれぞれ 4, 3 なることは簡単に示せる。  $G$  と  $H$  の Kronecker 二重被覆はともにグラフ  $Z$  に同型になる。これを見るために、  $Z$  の奇な対合写像  $\tau_1, \tau_2$  を以下のように定義する。まず  $\tau_1$  を水平の線に関し線対称に写す  $Z$  の対合写像、  $\tau_2$  を

縦の線に関し線対称に写す  $Z$  の対合写像とする. このとき  $\tau_1, \tau_2$  は奇な対合写像であり, かつ  $Z/\tau_1 \cong G, Z/\tau_2 \cong H$  がわかる. したがって補題5.2により

$$K_2 \times G = K_2 \times (Z/\tau_1) = Z = K_2 \times (Z/\tau_2) = K_2 \times H$$

がわかる.



## 6. 単体的手法とモデル構造について

この節では, グラフの圏にモデル構造を導入し, それが  $\mathbb{Z}_2$ -空間の圏と Quillen 同値になることを述べる. モデル圏とは弱同値・コファイブレーション・ファイブレーションと呼ばれる三種の射の族が与えられた圏で, いくつかの性質を満たすものとして定義される. モデル圏が導入されるとそのホモトピー圏なるものが定義される. 例えば位相空間の圏のモデル構造の場合, そのホモトピー圏は CW-複体を対象とし, 連続写像を射とする圏を, ホモトピックな写像を同一視することで得られる圏に同値になる. 二つのモデル圏が Quillen 同値ならば, この二つのホモトピー圏は圏同値になる.

グラフの彩色問題への Hom 複体の応用は, Hom 複体を通してグラフの圏と, ある群  $\Gamma$  の  $\Gamma$ -空間の圏との比較から得られるものだったと言える. 話を単純にするため,  $\Gamma = \mathbb{Z}_2, T = K_2$  で  $\mathbb{Z}_2$  の  $K_2$  への作用が二つの頂点をひっくり返すものとする. このとき Csorba は任意の自由な  $\mathbb{Z}_2$ -CW-複体  $X$  に対し, 単純グラフ  $G$  で  $\text{Hom}(K_2, G)$  と  $X$  が  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値となるものが存在することを証明した. 一方で  $\mathbb{Z}_2$ -写像  $\varphi: |B(G)| \rightarrow |B(H)|$  が与えられたとき,  $G$  から  $H$  へのグラフ準同型  $f: G \rightarrow H$  で  $f_* \simeq \varphi: |B(G)| \rightarrow |B(H)|$  なるものが存在するかというと, それは一般には成り立たない. 実際, 第4節でも述べたように,  $B(G_1) \simeq_{\mathbb{Z}_2} B(G_2)$  であっても  $\chi(G_1) \neq \chi(G_2)$  なることがある. これは一方の  $G_1$  では  $K_n$  にグラフ準同型があり, したがって  $|B(G_2)| \simeq_{\mathbb{Z}_2} |B(G_1)|$  から  $|B(K_n)|$  への  $\mathbb{Z}_2$ -写像があるものの,  $G_2$  では  $K_n$  にはグラフ準同型が存在しないということである.

したがってグラフの圏と  $\mathbb{Z}_2$ -空間の圏は同値ではない. しかしモデル構造を導入すると, そのホモトピー圏は一致している. それが上記に述べた結果の主旨である.

以下その詳細と正確な主張について書く. 箱複体に限らず, より一般の場合の Hom 複体  $\text{Hom}(T, G)$  に話を戻す. グラフ  $T$  を固定したとき, グラフ  $G$  に対しポセット  $\text{Hom}(T, G)$  を対応させる関手は右随伴関手にも左随伴関手にもならない (したがって Quillen 随伴関手にはならない). そこで次の概念を導入する.

$n$  を非負整数とする. グラフ  $\Sigma^n$  を  $V(\Sigma^n) = [n] = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $E(\Sigma^n) = [n] \times [n]$  とおく. グラフの圏を  $\mathcal{G}$  により表す. 単体的集合  $\text{Sing}(T, G)$  を

$$\text{Sing}(T, G)_n = \mathcal{G}(T, G)$$

とし, 面写像および退化写像を自然に定義することによって得られるものとする. この単体的集合  $\text{Sing}(T, G)$  を **特異 Hom 複体** とよぶ. このとき次が成り立つ.

**定理 6.1** (M. [14]). グラフ  $T, G$  に対し自然なホモトピー同値

$$|\text{Sing}(T, G)| \xrightarrow{\simeq} |\text{Hom}(T, G)|$$

が存在する.

一方で上記の特異 Hom 複体  $\text{Sing}(T, G)$  は右随伴関手になる. より一般に,  $T$  に群  $\Gamma$  が作用しているとき,  $\text{Sing}(T, G)$  にも群作用が誘導され  $\Gamma$ -単体的集合になる. このとき次が成り立つ. (次の定理は東大数理の藤内翔太さんが証明してくださったものです. この場をお借りして感謝させていただきます)

**定理 6.2** (藤内, M. [17]). 上記において, 関手

$$\text{Sing}_T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbf{SSet}^\Gamma, G \mapsto \text{Sing}(T, G)$$

は右随伴関手である. ここで  $\mathcal{G}$  はグラフの圏,  $\mathbf{SSet}^\Gamma$  は  $\Gamma$ -単体的集合の圏である.

$A_T$  を  $\text{Sing}_T$  の左随伴とする. このとき次の定理が成り立つ.

**定理 6.3** (M. [17]). グラフの圏  $\mathcal{G}$  には以下のようなモデル構造が入る.

- (1) グラフ準同型  $f : G \rightarrow H$  は  $f$  が誘導する  $\mathbb{Z}_2$ -写像  $f_* : B(G) \rightarrow B(H)$  が  $\mathbb{Z}_2$ -ホモトピー同値であるとき弱同値とする.
- (2) コファイブレーションは  $\mathbb{Z}_2$ -単体的集合の包含  $i : K \hookrightarrow L$  で  $A_{K_2} \circ \text{Sd}^3(i)$  と書かれるグラフ準同型である.

そしてこのとき随伴関手の対

$$(A_{K_2} \circ \text{Sd}^3, \text{Ex}^3 \circ \text{Sing}_{K_2}) : \mathbf{SSet}^{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow \mathcal{G}$$

は Quillen 同値である.

この定理は一般の  $\Gamma$ -グラフ  $T$  に一般化することはできない. 実際, 随伴関手の対

$$(A_T \circ \text{Sd}^k, \text{Ex}^k \circ \text{Sing}_T) : \mathbf{SSet}^\Gamma \longrightarrow \mathcal{G}$$

が Quillen 同値ならば, (右)  $\Gamma$ -グラフ  $T$  は次の性質が成り立たなくてはならない.

- 群  $\Gamma$  の任意の部分群  $\Gamma'$  に対し, ユニットの定める写像  $\Gamma/\Gamma' \rightarrow \text{Sing}(T, T/\Gamma')$ ,  $\gamma\Gamma' \mapsto p \circ \alpha_\gamma$  は  $\Gamma$ -ホモトピー同値である. ここで  $\alpha_\gamma$  は  $T \rightarrow T$ ,  $v \mapsto v\gamma$  により定まる写像であり,  $p : T \rightarrow T/\Gamma'$  は自然な射影である.

この性質は  $T = K_2$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}_2$  ならば成立する. その他には  $T = \mathbf{1}$  すなわち一つのループを持つ頂点からなるグラフで  $\Gamma$  が自明の時に成り立つ. しかしそれ以外のグラフで, 上記の性質が成り立つ  $\Gamma$ -グラフ  $T$  の例として  $K_2$  とも  $\mathbf{1}$  とも本質的に違う場合が存在するのはわからない.

## 参考文献

- [1] E. Babson, D. N. Kozlov, *Complexes of graph homomorphisms*, Israel J. Math. **152** 285-316 (2006).
- [2] E. Babson, D. N. Kozlov, *Proof of the Lovász conjecture*, Ann. of Math. **165** 965-1007 (2007).
- [3] P. Csorba, *Homotopy types of box complexes*, Combinatorica, **27** (6) 669-682 (2007).
- [4] R. Diestel, *Graph theory*, 4th edition, Springer, Graduate Texts in Mathematics, vol. 173 (2010)
- [5] A. Dochtermann, *Hom complexes and homotopy theory in the category of graphs*, European J. Combin. **30** (2) 490-509, (2009).
- [6] A. Dochtermann, C. Schultz, *Topology of Hom complexes and test graphs for bounding chromatic number*, Israel J. Math. **187** (1) 371-417 (2012).
- [7] P. Erdős, *Graph theory and probability*, Canad. J. Math. **11** 34-38 (1959) .
- [8] A. Hoory, N. Linial, *A counter example to the conjecture of Lovász on the  $\chi$ -coloring complex*, J. Combin. Ser. B **95**(2) 346-349 (2005).
- [9] W. Imrich, T. Pisanski, *Multiple Kronecker covering graphs*, European J. Combin. **29** 1116-1122 (2008)
- [10] D. N. Kozlov, *Homology tests for graph colorings*, Algebraic and Geometric combinatorics, Contemporary of Mathematics **423** 221-234 (2006).
- [11] D. N. Kozlov, *Chromatic numbers, morphism complexes, and Stiefel-Whitney characteristic classes*, in: *Geometric Combinatorics*, IAS/Park City Math. Ser. **14**, Amer. Math. Soc. Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ; in press
- [12] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, J. Combin. Ser. A **25** (3) 319-324 (1978).
- [13] T. Matsushita, *Answers to some problems about graph coloring test graphs*, European J. Combin. Vol. 45, 59-64 April (2015).
- [14] T. Matsushita, *Morphism complexes of sets with relations*, Osaka J. Math. (2016).
- [15] T. Matsushita, *Box complexes and Kronecker double coverings of graphs*, arXiv:1404.1549
- [16] T. Matsushita, *Homotopy types of Hom complexes of graphs*, arXiv:1509.03855
- [17] T. Matsushita, *Box complexes and homotopy theory of graphs*, 1605.06222.
- [18] C. Schultz, *The equivariant topology of stable Kneser graphs*, J. Combin. Ser. A **118** (8) 2291-2318 (2011).
- [19] J. W. Walker *From graphs to ortholattices and equivariant maps*, J. Combin. Theory Ser. B **35**, 171-192 (1983).
- [20] R. T. Živaljević, *WI-posets, graph complexes and  $Z_2$ -equivalences*, J. Combin. Ser. A, **111** (2), 204-223 (2005).

## 4次元シュタイン多様体と結び目

安井 弘一 (広島大学)\*

### 1. はじめに

4次元多様体はその色々な構成や制約を用いることで結び目理論に様々な応用を持つことが知られている. 本稿では主に4次元円板  $D^4$  に1, 2ハンドルを貼り付けて得られる4次元2ハンドル体を考え, その微分構造や結び目理論への応用などについて紹介する. 具体的には以下の3つの研究を中心に述べる.

- エキゾチック枠付き結び目とその結び目コンコードダンスへの応用
- コンパクト可縮4次元多様体上のStein構造の存在問題と結び目
- 結び目の最大Thurston-Bennequin数と可約なデーンス手術

これらの研究にはいずれもStein多様体が関わっている. なお各2ハンドル  $D^2 \times D^2$  の接着領域は  $S^1 \times D^2 (= \partial D^2 \times D^2)$  なので, 4次元2ハンドル体は  $\#_n S^1 \times S^2 (= \partial(D^4 \cup n \text{個の1ハンドル}))$  の枠付き絡み目 (framed link) によって一意に定まることに注意しておく. また各結び目の枠 (framing) は整数で与えられる.

本稿で扱う多様体は全てコンパクト, 連結, 滑らかで向きづけられているとし, 同相写像・微分同相写像は向きを保つとする. ハンドル体は4次元, コンパクト, 連結で向きづけられているとする. 結び目は3次元多様体の中に滑らかに埋め込まれている  $S^1$  であるとし, 断りのない限り  $S^3$  の結び目を意味する. なお4次元多様体やハンドルの基礎事項については例えば [9] を参照して頂きたい.

### 2. エキゾチック枠付き結び目と結び目コンコードダンス

本節では  $S^3$  の枠付き結び目に沿って  $D^4$  に2ハンドルを一つ接着することで得られる4次元多様体 (枠付き結び目が表す4次元多様体と呼ぶ) について, その微分構造の研究と結び目コンコードダンスへの応用を紹介する.

$n$  枠付き結び目で表示される4次元多様体は, 単連結で第2ベッチ数  $b_2$  が1であり, 交叉形式を表示する行列は  $(n)$  である. 非常に単純なトポロジーを持ち, 基本的な4次元多様体と言える. またその境界の3次元多様体は結び目の  $n$  手術 (係数  $n$  のデーンス手術) で得られる多様体と呼ばれ, 3次元トポロジーで非常に盛んに研究されている.

#### 2.1. エキゾチックな4次元多様体と枠付き結び目

「全ての4次元多様体に対しそれとエキゾチックな (即ち同相だが微分同相でない) 4次元多様体が存在するか?」という問題は4次元トポロジーにおける主要テーマの一つである. ここではこの問題の対象を枠付き結び目で表示される4次元多様体に絞った場合を考える. なお枠付き結び目対が表示する2つの4次元多様体が (向きを保って) 同相ならば2つの枠は同じ整数である.

**定義 2.1.** 枠付き結び目の対によって表示される2つの4次元多様体が互いにエキゾチックなとき, その枠付き結び目対を**エキゾチック**と呼ぶことにする.

本研究はJSPS 科研費・若手研究 (B) (課題番号: 16K17593) の助成を受けています.

\* 〒739-8526 東広島市鏡山1丁目3番1号 広島大学大学院理学研究科数学専攻  
e-mail: kyasui@hiroshima-u.ac.jp

全ての枠付き結び目がそれとエキゾチック対を成す枠付き結び目を持つわけではない。例えば0枠付き三葉結び目 (trefoil knot) はエキゾチック微分構造を持つ4次元多様体を表示するが、この枠付き結び目とエキゾチック対を成す枠付き結び目は存在しないことがデーモン手術の結果からわかる。

エキゾチックな枠付き結び目対の最初の例は Akbulut (cf. [3]) によって与えられ、さらに近年 Kalmár-Stipsicz によって無限組の枠付き結び目対に拡張された。

**定理 2.2** (Akbulut [2], Akbulut-Matveyev [3], Kalmár-Stipsicz [10]). 枠付き結び目のエキゾチック対が無限組存在する。

これらの例の枠は全て  $-1$  である (逆の向きを考えれば  $+1$  の場合も得られる)。また各対の一方の4次元多様体が Stein 構造を持ち、他方の4次元多様体が Stein 構造を持たないので、4次元多様体が微分同相でないことを簡単に見分けられる例となっている (Stein 構造については第3節参照)。

これらの例は散発的なものであったが、筆者は全ての枠に対して組織的構成法を与え、次の結果を得た。

**定理 2.3** ([20]). 任意の整数  $n$  に対し、 $n$  枠付き結び目のエキゾチック対が無限組存在する。さらに各対が表示する4次元多様体の対は両方とも Stein 構造を持つように選べる。

この構成法を述べるために用語の準備をしておく。  $S^3$  の結び目  $K$  と  $S^1 \times D^2$  の結び目  $P$  に対し、  $S^3$  の結び目  $P(K)$  を  $f(P)$  で定める。但し写像  $f : S^1 \times D^2 \rightarrow N(K) (\subset S^3)$  は、  $K$  の管状近傍  $N(K)$  の自明化であって、  $K$  の0枠に対応するものとする。  $P$  を  $S^3$  の結び目  $K$  に  $P(K)$  を対応させる写像とみなしたとき、  $P$  は **サテライト写像** と呼ばれる。

筆者はサテライト写像を用いてエキゾチック対の量産方法を与えた (下記の記号の定義は第3節参照)。

**定理 2.4** ([20]). 任意の整数  $n$  に対し、以下の条件をみたすサテライト写像  $P_n, Q_n$  が存在する。  $n \leq \widehat{tb}(K)$  と  $2g_4(K) = \overline{ad}(K) + 2$  をみたす  $S^3$  の任意の結び目  $K$  に対し、  $n$  枠付きの結び目  $P_n(K)$  と  $Q_n(K)$  はエキゾチック対である。さらに  $n \leq \widehat{tb}(K) - 1$  のとき、この対によって表示される4次元多様体は両方とも Stein 構造を許容する。

**注意 2.5.** 各整数  $n$  に対し定理の仮定をみたす結び目  $K$  は多数存在する (例えば適当なトーラス結び目)。さらに結び目  $K$  が仮定をみたすとき、  $P_n(K)$  と  $Q_n(K)$  もその仮定をみたす。従ってこの定理によりエキゾチックな枠付き結び目対が量産できる。特に定理 2.3 が従う。

この構成法は4次元多様体の手術であるコルクツイスト ([4]) の新しい表記方法を与えることによって得られた。定理の仮定の下で微分同相でないことは adjunction 不等式 (第3節参照) を用いて示した。なお各  $n$  に対して定理の  $P_n$  と  $Q_n$  の例を無限組構成した。図1で挙げているのはそのうちの最も単純なものである。

ここでこの結果を別の視点から捉え直す。  $S^3$  の結び目  $K$  とサテライト写像  $P$  に対し、  $n$  枠付きの結び目  $P(K)$  によって表される4次元多様体を  $P^{(n)}(K)$  と記すことにする。このとき  $K \mapsto P^{(n)}(K)$  という対応により、  $P^{(n)}$  は結び目の集合から4次元多様体の集合への写像とみなせる。この写像  $P^{(n)}$  を **4次元  $n$  枠付きサテライト写像** と呼ぶことにする。2つの4次元  $n$  枠付きサテライト写像が滑らかに (位相的に) 同じであるとは、2つの写像が与える4次元多様体が常に微分同相 (同相) であるときをいう。

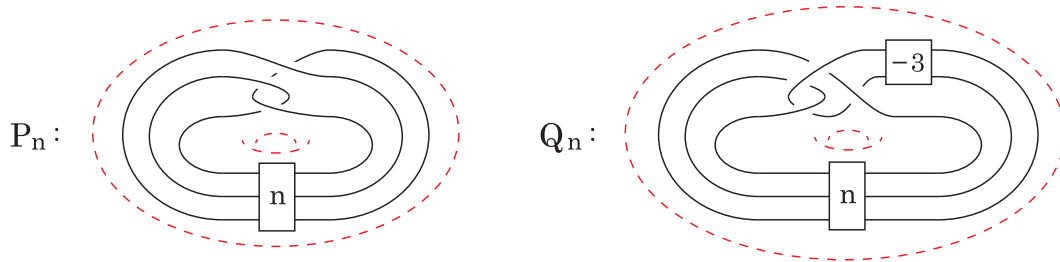


図 1:  $P_n$  と  $Q_n$  の例

定理 2.4 のサテライト写像により, 4次元の位相カテゴリーと滑らかカテゴリーの新しい違いがわかる.

**定理 2.6** ([20]). 任意の整数  $n$  に対し, 位相的には同じだが滑らかには違う 4次元  $n$  枠付きサテライト写像が存在する.

## 2.2. 結び目コンコードダンスへの応用

2つの有向結び目  $K_0, K_1$  がコンコードラントであるとは, 滑らかな埋め込み  $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times [0, 1]$  であって,  $f(S^1 \times i) = K_i$  ( $i = 0, 1$ ) となるものが存在するときをいう. 結び目コンコードダンスは様々な手法を用いて活発に研究されている.

1978年に Akbulut と Kirby は次の予想を提出した (Kirby の問題集 [11] の問題 1.19).

**予想 2.7** (Akbulut-Kirby).  $S^3$  の 2つの結び目の 0 手術が同じ 3次元多様体ならば, それらの結び目は (適当な向きに関して) コンコードラントである.

実際いくつかのコンコードダンス不変量に対し, 2つの結び目の 0 手術が同じ 3次元多様体ならば適当な向きに関して不変量の値が一致することが知られている (cf. [11]). この予想に関する進展はあまりなかったが, 0 手術がホモロジー同境という弱い仮定のもとでは反例があることを, 近年になって Cochran-Franklin-Hedden-Horn が示した.

**定理 2.8** (Cochran-Franklin-Hedden-Horn [5]). 0 手術で得られる 3次元多様体がホモロジー同境だがコンコードラントでない結び目の対が存在する.

安部氏と田神氏はこの予想を結び目理論で非常に有名な未解決問題であるスライス・リボン予想と関連づけた.

**定理 2.9** (Abe-Tagami [1]). スライス・リボン予想が成立するならば Akbulut-Kirby 予想は成立しない.

筆者は Akbulut-Kirby 予想を否定的に解決した.

**定理 2.10** ([20]). 0 手術が同じ 3次元多様体だがコンコードラントでない結び目の対が存在する. さらにそのような結び目の対は無数存在する.

実際, 定理 2.4 で得られる 0 枠付き結び目のエキゾチック対は全て反例となることがその証明から直ちにわかる. これらのうち最も単純なものが図 2 の結び目対である.

結び目のコンコードダンス不変量が 0 手術で得られる 3次元多様体の位相不変量を与えるか否かは自然な問題である. Cochran-Franklin-Hedden-Horn [5] はコンコードダンス不変量  $\tau$  と  $s$  ([17], [18]) が結び目の 0 手術で得られる 3次元多様体のホモロジー同境類の不変量にはならないことを示した. 上記の反例は彼らの結果を強めることができる.

**系 2.11** ([20]).  $\tau$  と  $s$  は結び目の 0 手術で得られる 3次元多様体の位相不変量ではない.

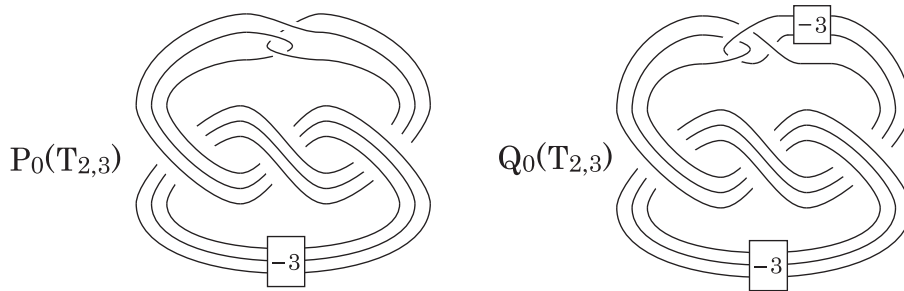


図 2: Akbulut-Kirby 予想の反例

### 3. 4次元 Stein 多様体

本節では様々な応用を持ち活発に研究されている4次元 Stein 多様体に関する基礎事項を4次元トポロジーの立場から簡単に紹介する. 詳細は [9], [16] を参照頂きたい.

#### 3.1. 4次元 Stein 多様体の定義と性質

境界付きの実4次元多様体  $X$  がコンパクト4次元 Stein 多様体であるとは,  $X$  が境界付きの複素2次元多様体であって, ある正則値  $a$  に対して  $\partial X = \varphi^{-1}(a)$  となる狭義多重劣調和関数  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を持つときを言う. コンパクト4次元 Stein 多様体はコンパクト Stein 曲面や Stein domain などと呼ばれることが多い. 本稿ではコンパクト4次元 Stein 多様体を単に **4次元 Stein 多様体** と呼ぶ. 4次元 Stein 多様体は境界付き4次元多様体の非常に広いクラスを与える.

4次元 Stein 多様体  $X$  の境界の3次元多様体  $M$  には  $X$  の複素構造  $J$  から  $\xi := TM \cap J(TM)$  によって自然に接触構造  $\xi$  が定まる. このとき  $X$  は  $(M, \xi)$  の **Stein 充填** (Stein filling) と呼ばれる. 3次元接触多様体が **Stein 充填可能** (Stein fillable) であるとは, Stein 充填を持つ3次元接触多様体と接触同型になるときを言う.

4次元 Stein 多様体の微分構造には以下の強力な制約が成立する.

**定理 3.1** (Lisca-Matić [13]. cf. [3], [14]).  $X$  を4次元 Stein 多様体とし,  $[\Sigma] \in H_2(X; \mathbb{Z})$  は  $X$  に滑らかに埋め込まれた種数  $g$  の閉曲面  $\Sigma$  で代表されているとする.  $[\Sigma] \neq 0$  ならば次の **adjunction 不等式** が成立する.

$$|\langle c_1(X), [\Sigma] \rangle| + [\Sigma] \cdot [\Sigma] \leq 2g - 2.$$

#### 3.2. ハンドル体による4次元 Stein 多様体の構成法

4次元 Stein 多様体はいくつかのトポロジカルな方法を用いて簡単に構成できることが知られている. ここではハンドル体を用いた構成法を紹介する. 用語の準備をしておく. 0, 1ハンドルから成るハンドル体を **1ハンドル体** と呼び, 0, 1, 2ハンドルから成るハンドル体を **2ハンドル体** と呼ぶ. 3次元接触多様体  $(M, \xi)$  の中の結び目  $K$  が **Legendre 結び目** であるとは  $TK \subset \xi$  となるときをいう. 2ハンドル体  $X$  が **Stein ハンドル体** であるとは,  $X$  の各2ハンドル  $D^2 \times D^2$  の接着円  $S^1 \times 0$  が  $X$  の部分1ハンドル体  ${}_{\#_n} S^1 \times D^3$  の境界  $\#_n S^1 \times S^2$  の標準的接触構造における Legendre 結び目であり, さらに接着円の枠が接触構造から定まる枠 (**接触枠**) より1小さいときをいう.

Eliashberg [6] の結果により (cf. Gompf [8]), Stein ハンドル体は  $D^4$  の Stein 構造を各ハンドルへ拡張する Stein 構造を持ち, 逆に Stein 構造を持つ4次元多様体は Stein ハンドル体と微分同相である. 即ち, Stein 構造をもつ4次元多様体は Stein ハンドル体に

よって完全に特徴付けられている.  $\#_n S^1 \times S^2$  の Legendre 絡み目を 1 ハンドル体の境界に図示する方法を Gompf [8] が与えているので, ハンドル体の図式によって Stein ハンドル体は簡単に構成できる.

### 3.3. Legendre 結び目と adjunction 不等式

ここでは Legendre 結び目から得られる adjunction 不等式を紹介する. まず用語を用意しておく.  $S^3$  の標準的接触構造における Legendre 結び目を単に Legendre 結び目と呼ぶことにする. Legendre 結び目  $\mathcal{K}$  の接触枠を  $\mathcal{K}$  の **Thurston-Bennequin 数** と呼び,  $tb(\mathcal{K}) (\in \mathbb{Z})$  と記す.  $\mathcal{K}$  に向きを付けておくと,  $\mathcal{K}$  の **回転数** (rotation number) と呼ばれる整数が定まる. これを  $r(\mathcal{K})$  と記す. なお  $r(\mathcal{K})$  は  $\mathcal{K}$  の向きに応じて符号が変わるが,  $tb(\mathcal{K})$  は  $\mathcal{K}$  の向きによらない. またこれらの値は  $\mathcal{K}$  の図から直ちに計算できる.

$S^3$  の結び目  $K$  に対し,  $D^4$  の中に滑らかに埋め込まれている曲面であって  $K$  を境界に持つものの最小種数  $g_4(K)$  を  $K$  の **4次元種数** と呼ぶ. また,  $n$  枠付きの結び目  $K$  によって表示される 4次元多様体を  $K^{(n)}$  と記し,  $H_2(K^{(n)}; \mathbb{Z}) (\cong \mathbb{Z})$  の生成元を代表する閉曲面の最小種数  $g_s^{(n)}(K)$  を  $K$  の  **$n$  振動種数** ( $n$ -shake genus) と呼ぶ. 振動種数  $g_s^{(n)}(K)$  は 4次元多様体  $K^{(n)}$  の微分構造の不変量である. また全ての  $K, n$  に対し,  $g_s^{(n)}(K) \leq g_4(K)$  が成立する.

Legendre 結び目  $\mathcal{K}$  に対し, 4次元多様体  $\mathcal{K}^{tb(\mathcal{K})-1}$  は Stein 構造を持つので, Gompf [8] による Chern 類公式を adjunction 不等式に適用すると次の不等式が得られる.

**定理 3.2** (Lisca-Matić [13]. cf. [3], [14]).  $|r(\mathcal{K})| + tb(\mathcal{K}) - 1 \leq 2g_s^{(tb(\mathcal{K})-1)}(\mathcal{K}) - 2$ .

この不等式の左辺  $tb(\mathcal{K}) - 1 + |r(\mathcal{K})|$  を  $ad(\mathcal{K})$  と記し,  $\mathcal{K}$  の adjunction 数と呼ぶことにする. なおこの不等式の右辺の振動種数を 4次元種数に置き換えた不等式は slice-Bennequin 不等式と呼ばれる.

$S^3$  の Legendre 結び目  $\mathcal{K}$  が結び目  $K$  の **Legendre 表示** であるとは,  $\mathcal{K}$  が  $K$  と滑らかにアイソトピックであるときをいう. 結び目  $K$  に対し, その Legendre 表示全体の集合を  $\mathcal{L}(K)$  と記すことにする.  $S^3$  の結び目  $K$  に対し, その **最大 Thurston-Bennequin 数**  $\overline{tb}(K)$  と **最大 adjunction 数**  $\overline{ad}(K)$  を

$$\overline{tb}(K) = \max\{tb(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathcal{L}(K)\}, \quad \overline{ad}(K) = \max\{ad(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathcal{L}(K)\}.$$

と定める. また記号  $\widehat{tb}(K)$  を以下のように定める.

$$\widehat{tb}(K) = \max\{tb(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \in \mathcal{L}(K), ad(\mathcal{K}) = \overline{ad}(K)\}.$$

Legendre 結び目の ‘stabilization’ による  $tb$  と  $r$  の変化から以下の系が従う.

**系 3.3.**  $S^3$  の結び目  $K$  と整数  $n$  に対し,  $n \leq \widehat{tb}(K) - 1$  ならば次の不等式が成立する.

$$\overline{ad}(K) \leq 2g_s^{(n)}(K) - 2.$$

## 4. 可縮 4次元多様体上の Stein 構造の存在問題と結び目

与えられた 4次元多様体上の Stein 構造の存在問題は一般に非常に難しい問題である. 本節ではコンパクト可縮 4次元多様体上の Stein 構造の存在問題を結び目の最大 Thurston-Bennequin 数の問題と関係づける. なお前者は 4次元滑らかポアンカレ予想「 $S^4$  と同相な 4次元多様体は  $S^4$  と微分同相である」と密接に関係する問題である.

#### 4.1. 可縮 4 次元多様体上の Stein 構造の存在問題

Eliashberg による  $S^3$  を境界に持つ Stein 多様体の一意性から, 4 次元滑らかポアンカレ予想は次のように言い換えられる.

**事実 4.1.**  $S^4$  と同相な全ての 4 次元多様体が  $S^4$  と微分同相であるためには,  $S^3$  を境界に持つ全てのコンパクト可縮 4 次元多様体が Stein 構造を持つことが必要十分である.

そこで次の自然な一般化が興味深い. この問題が肯定的であれば 4 次元滑らかポアンカレ予想が成立することになる.

**問題 4.2.** 全てのコンパクト可縮 4 次元多様体は Stein 構造を持つか?

$S^3$  は Stein 充填可能なので, 境界が Stein 充填可能な場合が特に重要である.

**問題 4.3.** Stein 充填可能な境界を持つ全てのコンパクト可縮 4 次元多様体は Stein 構造を持つか?

**注意 4.4.** 閉 3 次元多様体が Stein 充填可能であるとは, その 3 次元多様体上に Stein 充填可能な接触構造が存在するときをいう. 例えばオーブンブック分解による Stein 充填可能な 3 次元多様体の特徴付けが知られている. Stein 充填可能なクラスは非常に広く, そうでないものの方が珍しい.

#### 4.2. 最大 Thurston-Bennequin 数と Stein 構造の存在問題

$S^3$  の枠付き結び目が表示する 4 次元多様体は, 枠がその結び目の最大 Thurston-Bennequin 数未満であれば Stein 構造を持つ. しかしこの逆は未解決問題である.

**問題 4.5.**  $S^3$  の枠付き結び目によって表される 4 次元多様体が Stein 構造を許容するならば, 枠はその結び目の最大 Thurston-Bennequin 数未満か?

この問題が肯定的であれば Stein 構造存在の簡易な判定条件が得られる. なおこの問題は正トラス結び目など多数の結び目に対して肯定的である.

#### 4.3. 2 つの問題の関係付け

筆者は問題 4.3 を否定的に解決するためのアプローチとして, 上記の 2 つの問題を以下のように関係づけた.

**定理 4.6** ([21]). 問題 4.3 と問題 4.5 のいずれかの主張は成立しない. さらに一方の問題が成立すれば他方の問題に対する無限個の反例が存在する.

この結果は以下の枠付き結び目の例を構成することで得られる.

**定理 4.7** ([21]). 以下の条件をみたす無限個の枠付き結び目が存在する.

- 各枠付き結び目が表示する 4 次元多様体は, Stein 充填可能な境界を持つ可縮 4 次元多様体と 4 次元 Stein 多様体との境界連結和である.
- 各枠付き結び目の枠は結び目の最大 Thurston-Bennequin 数以上である. (さらに各枠付き結び目は枠が最大 Thurston-Bennequin 数より任意に大きくなるように選べる.)

この枠付き結び目は図 3 の結び目  $K_m$  の  $(n, -1)$  ケーブル  $C_{n,-1}(K_m)$  ( $m \geq 0, n \geq 2$ ) に  $(-n)$  枠を付けたものである. なおこれらの結び目の最大 Thurston-Bennequin 数を

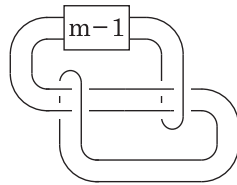


図 3:  $K_m$

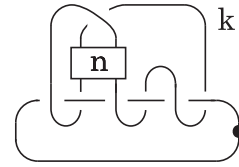


図 4:  $X_{n,k}$

決定するために、適当な条件の下で最大 Thurston-Bennequin 数のケーブル化公式を与えた. これには Rutherford [19] による Legendre 結び目の ruling に関する結果を用いた.

この枠付き結び目によって表示される 4 次元多様体は図 4 の可縮 4 次元多様体  $X_{n,k}$  ( $k = m + 4n$ ) を境界連結和成分に持つ. そこで次の予想を立てた (実際にはこの予想を元にして上記の枠付き結び目を構成した).

**予想 4.8** ([21]).  $n \geq 2, k \geq 4n$  のとき, Stein 充填可能な境界を持つ可縮 4 次元多様体  $X_{n,k}$  は Stein 構造を持たない.

もし問題 4.5 の主張が成立すれば, この予想が成立することが定理 4.7 からわかる.

**注意 4.9.** Mark-Tosun のごく最近のプレプリント [15] によれば問題 4.3 の主張は成立しない. しかし彼らが用いた可縮 4 次元多様体は上の予想のものとは異なるため, この予想自体は未解決である.

## 5. 最大 Thurston-Bennequin 数と可約なデーモン手術

本節では Stein ハンドル体を利用することで得られた, 最大 Thurston-Bennequin 数の下からの良い評価を得る方法を紹介する. さらに応用として, Legendre 手術の既約性に関する予想の反例を与える.

### 5.1. 最大 Thurston-Bennequin 数の評価

結び目の最大 Thurston-Bennequin 数  $\overline{tb}$  は低次元トポロジーに様々な応用を持つ重要な不変量である.  $\overline{tb}$  の上からの良い評価を与える不変量はいくつか知られているが, 結び目の交点数が多い場合, 下からの良い評価を与える Legendre 表示の構成は一般に非常に難しい問題である. また応用の際には上からよりも下からの良い評価を与える方が重要である. 筆者は  $D^4$  の Stein ハンドル分解を応用することにより, 適当な条件の下では最大 Thurston-Bennequin 数を実現するような Legendre 表示の構成法を与えた ([22]). この方法で得られる Legendre 結び目は一般に (その結び目の位相的複雑さと比べて) 極めて複雑であり, 既存の方法で最大 Thurston-Bennequin 数を決定するのが不可能に思われる例を量産することができる.

以下, この方法の概略を  $S^3$  の結び目  $K$  に対して述べる. 但しここで説明する方法が常に適用可能であるとは限らない. なお一般に 2 ハンドル体  $X$  の部分 1 ハンドル体  $X_1$  の境界  $\partial X_1$  の結び目  $\tilde{K}$  は,  $X$  の 2 ハンドルを  $X_1$  に接着することにより,  $\partial X$  の結び目とみなせることに注意しておく.

**ステップ 1.**  $D^4$  と微分同相な 2 ハンドル体  $X$  であって,  $K$  が部分 1 ハンドル体  $X_1$  の境界  $\partial X_1$  の「良い」結び目  $\tilde{K}$  として表せるものを構成する.

ここで  $\partial X_1 = \#_n S^1 \times S^2$  の結び目  $\tilde{K}$  が「良い」とは,  $\overline{tb}(\tilde{K})$  を実現する  $\tilde{K}$  の Legendre 表示の図が  $\partial X_1$  に描ける場合を言う. 例えばトーラス結び目は「良い」結び目である.

なお  $\#_n S^1 \times S^2$  の結び目の  $\overline{tb}$  の定義については [22] を参照して頂きたい.

$X$  の 2 ハンドルの接着円から定まる  $\partial X_1$  の絡み目を  $L$  とする.

**ステップ 2.**  $\tilde{K}$  を  $\partial X_1$  のアイソトピーで動かすことによって,  $\overline{tb}(\tilde{K})$  を実現する  $\tilde{K}$  の Legendre 表示  $\tilde{\mathcal{K}}$  に変形する. このアイソトピーで  $L$  を変形した後に,  $\tilde{\mathcal{K}}$  を固定したまま, アイソトピーで  $L$  をその Legendre 表示  $\mathcal{L}$  に変形する. 但し  $X$  の各 2 ハンドルの枠が  $\mathcal{L}$  の接触枠よりちょうど 1 小さくなるような  $\mathcal{L}$  を選んでおく. このとき  $X$  は Stein ハンドル体である. 従って  $\tilde{\mathcal{K}}$  は  $\partial X \cong S^3$  の Legendre 結び目  $\mathcal{K}$  とみなせる. 但し  $\partial X$  の接触構造は  $X$  の Stein 構造から誘導されるものである.  $S^3$  の Stein 充填可能な接触構造は一意的なので ([7]),  $\mathcal{K}$  は  $S^3$  の標準的接触構造に関する Legendre 結び目である. よって  $\mathcal{K}$  は  $K$  の Legendre 表示を与えている. (但し, このままでは  $\mathcal{K}$  は  $D^4$  と微分同相な Stein ハンドル体の境界の Legendre 結び目であり, ‘front diagram’ では図示できていない. front diagram で図示するには  $X$  の 1 ハンドルを全て消去する必要がある.)

一般にこの方法で得られた Legendre 表示  $\mathcal{K}$  は極めて複雑であり,  $\overline{tb}(K)$  の下からの良い評価を与える. ここで  $\mathcal{K}$  が  $\overline{tb}(K)$  を実現しているための簡単な十分条件を述べる.  $\tilde{K}$  が  $X_1$  の中に埋め込まれている種数  $g$  の曲面の境界であり,  $2g - 1 = tb(\tilde{K})$  をみたますれば, adjunction 不等式により  $\overline{tb}(K) = tb(\mathcal{K})$  が従う. 例えば  $\tilde{K}$  が  $\partial X_1$  の正トーラス結び目のときはこの条件をみたます. もちろん  $\overline{tb}(K)$  を実現しているか調べるには他の上からの評価を用いてもよい.

## 5.2. 可約な Legendre 手術

ここでは上記の方法を用いて Legendre 手術に関する応用を与える. デーン手術によって可約な 3 次元多様体を生じる枠付き結び目の特徴付けは 3 次元トポロジーにおける重要な未解決問題であり, これまでに様々な研究がなされている. Lidman-Sivek はこの問題に対して接触トポロジーを用いた新しいアプローチを最近与えた. ここで必要な定義を復習しておく.  $S^3$  の Legendre 結び目  $\mathcal{K}$  に沿った Legendre 手術とは, 係数が  $tb(\mathcal{K}) - 1$  の  $\mathcal{K}$  に沿ったデーン手術のことである.  $S^3$  の結び目  $K$  に対し,  $\overline{tb}(K)$  未満の整数係数のデーン手術は,  $K$  のある Legendre 表示  $\mathcal{K}$  に沿った Legendre 手術として実現できることに注意しておく. Lidman-Sivek は次の結果を与えた.

**定理 5.1** (Lidman-Sivek [12]).  $S^3$  の結び目  $K$  が  $\overline{tb}(K) \geq 0$  をみたますれば,  $K$  の Legendre 手術で得られる 3 次元多様体は全て既約である.

さらに彼らはこの結果が  $\overline{tb}$  に関する条件無しで成立すると予想した.

**予想 5.2** (Lidman-Sivek [12]).  $S^3$  の任意の結び目は Legendre 手術によって可約な 3 次元多様体を生まない.

なおこの予想は以下の肯定的証拠を持つ. ケーブル予想が正しければ, 結び目のデーン手術で可約な 3 次元多様体を得られるのは結び目が  $(p, q)$  ケーブル結び目で手術係数が  $pq$  の場合に限るが, 標準的構成法で得られるケーブル結び目の Legendre 表示の  $tb$  は  $pq$  以下である.

筆者は前述の Legendre 表示の構成法を用いることでこの予想を否定的に解決した.

**定理 5.3** ([22]). Legendre 手術によって可約な 3 次元多様体を生む  $S^3$  の結び目が無限個存在する. さらに, これらの各結び目  $K$  は可約 Legendre 手術の手術係数が  $\overline{tb}(K)$  より任意に小さくなるように選べる.

例えば  $n \geq 2$ ,  $m \leq -4n + 3$  のとき, 4.3 節のケーブル結び目  $C_{n,-1}(K_m)$  が反例となっている. 実際, 係数が  $-n$  のデーモン手術は可約な 3 次元多様体を与えるが, 図 5 の複雑な Legendre 表示 (図 6 も参照) から  $\bar{tb} = -1$  となることがわかるので, この手術は Legendre 手術として実現できる. なおこの図は前述の方法で得られたものである. 一方, 図 7 の Legendre 表示はケーブル化による標準的な方法で得たものであるが, ライデマイスター移動でこの図を改良することによって  $\bar{tb} = -1$  を実現する表示を得るのは (理論上は可能だが) 筆者にはほぼ不可能に思える.

なお前述の Legendre 表示の構成法を用いることにより, 非常に多くの反例を組織的に構成することができる. 詳しくは [22] の Remark 4.3 を参照して頂きたい.

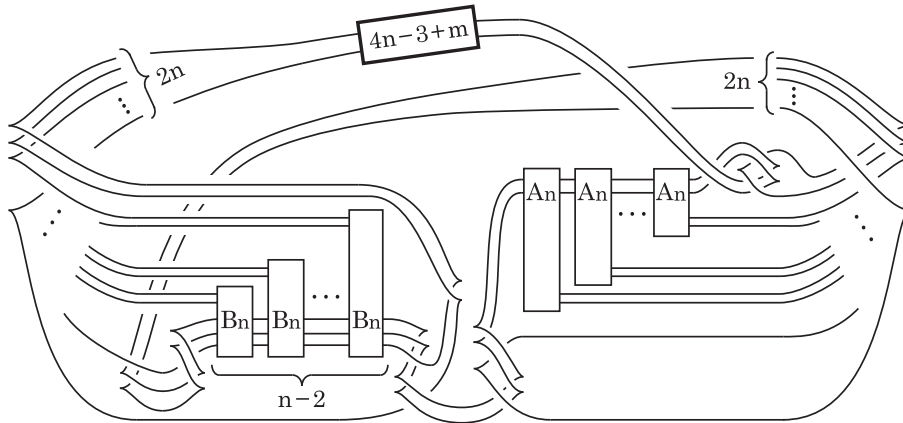


図 5:  $\bar{tb} = -1$  を実現する  $C_{n,-1}(K_m)$  の Legendre 表示 ( $n \geq 2$ ,  $m \leq -4n + 3$ )

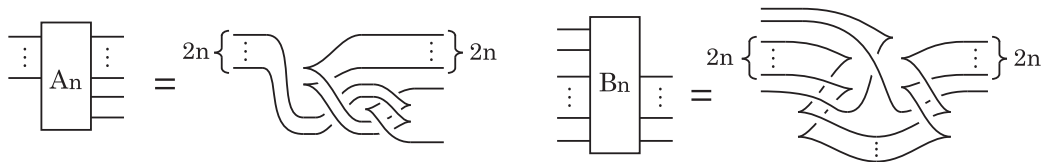


図 6: 図 5 で用いたタングル  $A_n$  と  $B_n$

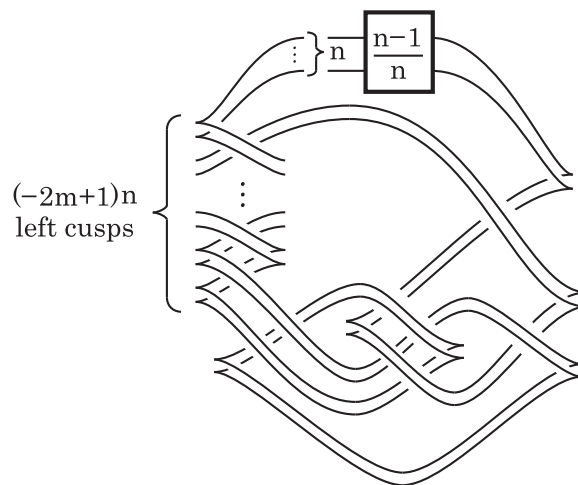


図 7:  $tb = -2n + 1$  となる  $C_{n,-1}(K_m)$  の Legendre 表示 ( $n \geq 2$ ,  $m \leq -1$ )

## 参考文献

- [1] T. Abe and K. Tagami, *Fibered knots with the same 0-surgery and the slice-ribbon conjecture*, arXiv:1502.01102.
- [2] S. Akbulut, *An exotic 4-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 357–361.
- [3] S. Akbulut and R. Matveyev, *Exotic structures and adjunction inequality*, Turkish J. Math. **21** (1997), no. 1, 47–53.
- [4] S. Akbulut and K. Yasui, *Corks, Plugs and exotic structures*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **2** (2008), 40–82.
- [5] T. D. Cochran, B. D. Franklin, M. Hedden, and P. D. Horn, *Knot concordance and homology cobordism*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 6, 2193–2208.
- [6] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension  $> 2$* , International J. of Math. Vol. 1 (1990), No 1 pp. 29-46.
- [7] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), no. 1-2, 165–192.
- [8] R. E. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 2, 619–693.
- [9] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, **20**. American Mathematical Society, 1999.
- [10] B. Kalmár and A. I. Stipsicz, *Singular maps on exotic 4-manifold pairs*, Algebr. Geom. Topol. **13** (2013), no. 3, 1709–1731.
- [11] R. Kirby, editor, *Problems in low-dimensional topology*, from: “Geometric topology (Athens, GA, 1993)”, AMS/IP Stud. Adv. Math. **2**, Amer. Math. Soc. (1997) 35–473.
- [12] T. Lidman and S. Sivek, *Contact structures and reducible surgeries*, Compos. Math. **152** (2016), no. 1, 152–186.
- [13] P. Lisca and G. Matić, *Tight contact structures and Seiberg-Witten invariants*, Invent. Math. **129** (1997), no. 3, 509–525.
- [14] P. Lisca and G. Matić, *Stein 4-manifolds with boundary and contact structures*, Topology Appl. **88** (1998), no. 1–2, 55–66.
- [15] T. E. Mark and B. Tosun, *Obstructing pseudoconvex embeddings and contractible Stein fillings for Brieskorn spheres*, arXiv:1603.07710.
- [16] B. Ozbagci and A. I. Stipsicz, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Bolyai Society Mathematical Studies, **13**. Springer-Verlag, Berlin; Janos Bolyai Mathematical Society, Budapest, 2004.
- [17] P. Ozsvath and Z. Szabo, *Knot Floer homology and the four-ball genus*, Geom. Topol. **7** (2003), 615–639.
- [18] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, Invent. Math. **182** (2010), no. 2, 419–447.
- [19] D. Rutherford, *Thurston-Bennequin number, Kauffman polynomial, and ruling invariants of a Legendrian link: the Fuchs conjecture and beyond*, Int. Math. Res. Not. **2006**, Art. ID 78591, 15 pp.
- [20] K. Yasui, *Corks, exotic 4-manifolds and knot concordance*, arXiv:1505.02551.
- [21] K. Yasui, *Nonexistence of Stein structures on 4-manifolds and maximal Thurston-Bennequin numbers*, arXiv:1508.01491, to appear in J. Symplectic Geom.
- [22] K. Yasui, *Maximal Thurston-Bennequin number and reducible Legendrian surgery*, arXiv:1508.05615, to appear in Compos. Math.

## LINKING INVARIANT FOR ALGEBRAIC PLANE CURVES

BENOÎT GUERVILLE-BALLÉ

### INTRODUCTION

The subject of our interest is the topology of algebraic plane curves (see [8, 12] for basic results). They are geometric objects defined from polynomial equations. More precisely, an *algebraic plane curve* is the zeros locus of a homogenous polynomial  $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ . Abstractly, such a curve is defined by its combinatorics. Let  $\text{Irr}(\mathcal{C}) = \{(C_1, d_1), \dots, (C_n, d_n)\}$  be the set of algebraic plane curves  $C_i$  defined by the irreducible factors of the homogenous polynomial defining  $\mathcal{C}$  with their degrees  $d_i$ ; let also  $\text{Sing}(\mathcal{C}) = \{(P_1, \Sigma_1), \dots, (P_k, \Sigma_k)\}$  be the set singular points of  $\mathcal{C}$  with their local topological types  $\Sigma_i$ . Finally, the combinatorics of a curve  $\mathcal{C}$  is the data of  $\text{Irr}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Sing}(\mathcal{C})$  and the relations between the local branches of  $\Sigma_i$  and the irreducible components of  $\mathcal{C}$ .

The question of the embedding determination of an algebraic plane curve in  $\mathbb{CP}^2$  is not as easy. The embedding type, also called the topological type (or shortly the topology) of an algebraic plane curve  $\mathcal{C}$ , is defined as the homeomorphism type of the pair  $(\mathbb{CP}^2, \mathcal{C})$ . That is two curves  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  have the same topology if and only if there exists a homeomorphism  $\phi : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$  such that  $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ . The topology is oriented if  $\phi$  preserves the global orientation of  $\mathbb{CP}^2$  and the local orientation around the meridians of  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$ . In the same way, the topology is ordered if the homeomorphism  $\phi$  preserves fixed orders on the irreducible components of  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$ . In the case of an embedded curve, the combinatorics admits an equivalent definition with a more topological aspect. It can be defined as the homeomorphism type of  $(\text{Tub}(\mathcal{C}), \mathcal{C})$ , where  $\text{Tub}(\mathcal{C})$  is a tubular neighbourhood of the curve (see [2]).

From these definitions, it is clear that the topological type determines the combinatorics of a curve. It is then natural to consider the inverse question: Is the topology determined by the combinatorics? The answer is known since the 30's, and it is negative. Indeed, in [21, 22, 23] Zariski constructs an explicit example of two curves with the same

combinatorics and different topologies. We will describe explicitly this example in the next section. Such examples of two curves with the same combinatorics and different topologies are called Zariski pair (see [2]). The question is then: how to detect Zariski pair?

To differentiate topologies, several topological invariants were introduced, each one able to distinguish different kinds of “pathology”. The most classical case of Zariski pair is the one detected by the Alexander polynomial, see Degtyarev [10], Libgober [16] or Akyol [1] for a classification of sextics such examples. Other examples with different “pathology” are known. Degtyarev [9, 11] and Shimada [19] construct Zariski pairs of sextics using the theory of  $K3$ -surfaces obtained from double branched covers of the curves. Studying some properties of double Galois cover Artal-Tokunaga [5] or Bannai [6] construct another kind of Zariski pair. In [11] Degtyarev constructs an example of Zariski pair with isomorphic fundamental group of the complement. Recently in [20], Shirane proves that Shimada’s curves (see [18]) form  $k$ -plets of Zariski using the splitting numbers. We can conclude this non-exhaustive list with the Zariski pair constructed by Artal-Carmona-Cogolludo in [3] with homeomorphic complement but different braid monodromies.

We introduce here a new topological invariant: the *linking set*, it is first defined in [14] by Meilhan and the author. It is inspired by the linking numbers of knots theory, and generalized the  $\mathcal{L}$ -invariant introduced by Artal-Florens-Guerville in [4]. The idea is to consider  $\gamma$  an embedded oriented  $S^1$  in the curve  $\mathcal{C}$  (called a *cycle*) and to look its homology class in the complement of the sub-curve  $\mathcal{C}_\gamma^c$  of  $\mathcal{C}$  composed of all the irreducible components which not intersect the  $S^1$  embedded. Unfortunately, this class is not invariant. We should then consider a quotient of  $H_1(\mathbb{C}P^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c)$  by a sub-group  $\text{Ind}_\gamma(\mathcal{C})$  deleting all the remaining indeterminacies. The linking set  $\text{lks}_{\mathcal{C}}(\gamma)$  is then define as the set of the classes in this quotient of all the cycles combinatorially equivalent to  $\gamma$ . It is an invariant of the oriented and ordered topology. In the particular case where the cycle  $\gamma$  is contained in a single irreducible component, we can remove the oriented hypothesis.

We apply this new invariant to the case of the curve introduced by Artal in [2] formed by a smooth cubic and three tangent lines in its inflexion points, and also to its generalization the  $k$ -Artal curves introduced in [7] composed of a smooth cubic and  $k$  tangent lines in its inflexion points. We then prove that there exists Zariski pair of  $k$ -Artal curve for  $k = 3, 4, 5, 6$ . These pairs are geometrically distinguished by the number of alignments in the set of the  $k$  inflexion points considered

(this number is called the type of the arrangement). In order to obtain this result, we compute the linking set for a cycle contained in the cubic. Then we prove that for any order on the irreducible components of the  $k$ -Artal curves there is no homeomorphism of  $\mathbb{C}P^2$  between two  $k$ -Artal curves of different types, for  $k = 3, 4, 5, 6$ . We can also apply this invariant to the Shimada's curves [18], and prove that they form a  $k$ -plets of Zariski with isomorphic fundamental groups. This is done in [15] proving (in some particular case) the equivalence between the splitting numbers and the linking set. This allows us to prove that the linking set is not determined by the fundamental group of the complement. Since the linking set is a generalization of the  $\mathcal{I}$ -invariant introduced in [4], it also distinguish the Zariski pair of line arrangements produced by the author in [13].

The following is organized as follows. Section 1 contains some details about the historical example of Zariski. The construction and invariance theorem of the linking set are done in Section 2. We conclude in Section 3 with the application of the linking set to the  $k$ -Artal curves.

### 1. ZARISKI EXAMPLE

In his historical papers [21, 22, 23], Zariski proves the following result:

**Theorem 1.1** ([21]). *Let  $C_1$  and  $C_2$  be two sextics with 6 cusps. Assume that these cusps lie on a conic for  $C_1$  and are in generic position for  $C_2$ , then:*

$$\pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_1) \simeq \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2, \text{ and } \pi_1(\mathbb{C}P^2 \setminus C_2) \simeq \mathbb{Z}_6.$$



FIGURE 1. Zariski sextics with 6 cusps

He proves in [22] the existence of such curves, and then provides the first example of Zariski pair. It is only in [17] that explicit equations of such curves will be given. Let us explain how to construct them.

Consider a smooth cubic  $C$  of  $\mathbb{C}P^2$ , and let  $P_1, P_2, P_3$  be three of its nine inflexion points. We assume that the three tangent lines  $L_i$  of  $C$  passing through  $P_i$  are in generic position. We consider the coordinates

of  $\mathbb{CP}^2$  such that  $L_1 : x = 0$ ,  $L_2 : y = 0$  and  $L_3 : z = 0$  (see Figure 2). Let  $p$  be the application defined by:

$$p : \begin{cases} \mathbb{CP}^2 & \longrightarrow \mathbb{CP}^2 \\ [X : Y : Z] & \longmapsto [X^2 : Y^2 : Z^2] \end{cases}$$

It is a 4 : 1 application outside of the axes. We denote by  $\tilde{C}$  the pre-image of the cubic  $C$  by  $p$ . It is a sextic with singular points contained in  $p^{-1}(P_i)$ . In order to differentiate the coordinates in the origin and the target of  $p$ , we will denote with capitals the coordinate in the target. Locally around  $P_1$ , the cubic  $C$  is of the form  $y^3 = x$ . Since  $p$  is ramified along the line  $L_1 : x = 0$  then the pre-image of  $C$  near  $P_1$  is of the form  $Y^3 = X^2$ . Furthermore  $p$  is 2 : 1 over  $P_1$ , then  $p^{-1}(P_1)$  is composed of 2 cusps. Using same arguments for  $P_2$  and  $P_3$ , we obtain that  $\tilde{C}$  has exactly 6 cusps.

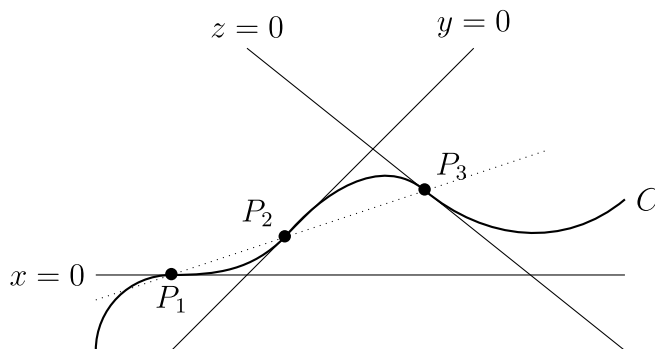


FIGURE 2. Cubic  $C$  with  $P_1$ ,  $P_2$  and  $P_3$  collinear

To construct the two examples of Zarsiki (see Figure 1), we have to consider the case where the inflexion points are collinear, and the case where they are not. In the first case, consider the line  $L$  passing through  $P_1$ ,  $P_2$  and  $P_3$ , then  $p^{-1}(L)$  is a smooth conic containing the 6 cusps of  $\tilde{C}$ . In the second case, such a cubic does not exist.

**Corollary 1.2.** *The combinatorics does not determine the fundamental group of the complement of a curve.*

*Remark 1.3.* The corollary is also true for the complement and the topology of a curve.

## 2. LINKING INVARIANT

**2.1. Recall about linking numbers.** The *linking numbers* are classical invariants of the topology of oriented links. It can be defined as

follows. Let  $L = L_1 \cup \cdots \cup L_s$  an oriented link of  $S^3$  with  $s$  components. Let us recall that  $H_1(S^3 \setminus L_i)$  is isomorphic to  $\mathbb{Z}$  and is generated by the meridian of  $L_i$ . The linking number of  $L_i$  with  $L_j$ , for  $i \neq j$ , is the numerical value of the class  $[L_i]$  in  $H_1(S^3 \setminus L_j)$ .

**2.2. Definition of the invariant.** The linking set is an adaptation of the linking number of knots theory to the case of algebraic curves. A *cycle*  $\gamma$  of a curve  $\mathcal{C}$  is an oriented  $S^1$  embedded in the curve, non homologically trivial in  $H_1(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ .

In order to compare two cycles, we need to define what could be comparable cycles. This is the notion of combinatorially equivalent cycles. Let  $\gamma(t)$ , for  $t \in [0, 1]$  be a parametrization of  $\gamma$ , with  $\gamma(0)$  in the smooth part of  $\mathcal{C}$ . The combinatorial type of  $\gamma$  is the sequence

$$\Gamma(\gamma) = (C_{i_1}, P_{j_1}, \dots, C_{i_k}, P_{j_k}),$$

with  $C_{i_l} \in \text{Irr}(\mathcal{C})$  and  $P_{j_l} \in \text{Sing}(\mathcal{C})$  for all  $l \in \{1, \dots, k\}$ , such that there exists a set  $\{t_1, \dots, t_k\}$ , with  $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$  satisfying:

- for all  $l \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\gamma(t_l) = P_{j_l}$ ,
- for all  $t \in (t_l, t_{l+1})$ ,  $\gamma(t)$  is contained in  $C_{i_{l+1}} \setminus (\text{Sing}(\mathcal{C}) \cap C_{i_{l+1}})$  with  $l \in \{1, \dots, k-1\}$ ,
- for all  $t \in [0, t_1) \cup (t_k, 1]$ ,  $\gamma(t) \in C_{i_1}$ .

Of course the sequence  $\Gamma(\gamma)$  is defined up to cyclic permutation.

**Definition 2.1.** Let  $\gamma$  and  $\mu$  be two cycles of  $\mathcal{C}$ . They are *combinatorially equivalent* if their combinatorial types are equal, that is  $\Gamma(\gamma) = \Gamma(\mu)$ .

We will now construct the sub-curve  $\mathcal{C}_\gamma^c$  of  $\mathcal{C}$  not intersecting  $\gamma$ . Let us first define the support and the internal support of a cycle.

**Definition 2.2.** The support of  $\gamma$  is:

$$\text{Supp}(\gamma) = \bigcap_{g \sim \gamma} \{C \in \text{Irr}(\mathcal{C}) \mid C \cap g \neq \emptyset\},$$

its internal support is:

$$\overset{\circ}{\text{Supp}}(\gamma) = \bigcap_{g \sim \gamma} \left\{ C \in \text{Irr}(\mathcal{C}) \mid (C \overset{\circ}{\cap} g) \neq \emptyset \right\}.$$

A cycle is *minimal* if it is contained in  $\bigcup_{C \in \overset{\circ}{\text{Supp}}(\gamma)} C$ . Since for any cycle  $\gamma$  of  $\mathcal{C}$  there exists a minimal cycle  $\gamma'$  such that  $\gamma$  and  $\gamma'$  are homotopically equivalent, we consider in all the following only minimal cycles. Remark that, if  $\gamma$  is a minimal cycle, then  $\gamma \subset \mathbb{C}P^2 \setminus \bigcup_{C \notin \text{Supp}(\gamma)} C$ .

The idea of the invariant is to consider the homology class of  $\gamma$  in the complement of  $\mathcal{C}_\gamma^c = \bigcup_{C \notin \text{Supp}(\gamma)} C$ . Unfortunately, this class is not an invariant, indeed there exists homotopically equivalent cycles with non-equal homotopy classes in  $H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c)$ . In order to delete this problem, let us introduce the indeterminacy sub-group associated with  $\gamma$ .

Let  $P$  be a singular point of  $\mathcal{C}$ , we denote by  $m_P^{C,b}$  the meridian around  $P$  in the local branch  $b$  of  $\Sigma_P$  contained in the component  $C$ . Remark that if  $C$  is not smooth at  $P$  then  $\Sigma_P$  admits several local branch  $b$  contained in  $C$ . See Figure 3 for an example when  $C$  is smooth in  $P$ .

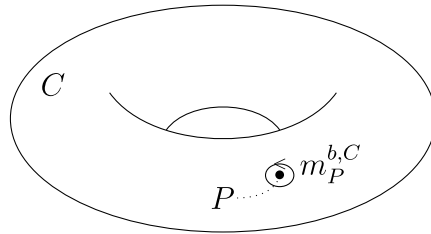


FIGURE 3. The meridian  $m_P^{b,C}$  when  $\text{Br}(\Sigma_P, C) = \{b\}$

**Definition 2.3.** The *indeterminacy sub-group* of  $\mathcal{C}$  associated with  $\gamma$  is the sub-group of  $H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c)$  defined by:

$$\text{Ind}_\gamma(\mathcal{C}) = \langle m_P^{b,C} \mid \forall C \in \overset{\circ}{\text{Supp}}(\gamma), \forall P \in \text{Sing}(\mathcal{C}) \cap C, \forall b \in \text{Br}(\Sigma_P, C) \rangle,$$

where  $\text{Br}(\Sigma_P, C)$  is the local branch of  $\Sigma_P$  contained in  $C$ .

**Proposition 2.4.** *The value of  $m_P^{b,C}$  in  $H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c)$  is determined by the combinatorics, and we have:*

$$m_P^{b,C} = \sum_{D \notin \text{Supp}(\gamma)} I_P(b, D) m_D,$$

where  $I_P(b, D)$  is the multiplicity of the intersection of the local branch  $b$  and  $D$  at the point  $P$ , and  $m_D$  is the meridian of  $D$  in  $\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c$ .

We can define the linking invariant:

**Definition 2.5.** The *linking set* of a minimal cycle  $\gamma$  is defined as the set of classes in  $H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c) / \text{Ind}_\gamma(\mathcal{C})$  of the minimal cycles combinatorially equivalent to  $\gamma$ . It is denoted by  $\text{lks}_{\mathcal{C}}(\gamma)$ .

If there is no ambiguity on the considered curve  $\text{lks}_{\mathcal{C}}(\gamma)$  (resp.  $\text{Ind}_\gamma(\mathcal{C})$ ) is denoted by  $\text{lks}(\gamma)$  (resp.  $\text{Ind}_\gamma$ ).

### 2.3. Invariance theorem & corollaries.

**Theorem 2.6** ([14]). *Let  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  be two curves with the same oriented and ordered topology. If  $\gamma$  and  $\mu$  are two combinatorially equivalent cycles of  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  respectively, then*

$$(1) \quad \phi_*(\text{lks}(\gamma)) = \text{lks}(\mu),$$

where  $\phi_* : H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c) / \text{Ind}_\gamma(\mathcal{C}) \rightarrow H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{D}_\mu^c) / \text{Ind}_\mu(\mathcal{D})$  is the isomorphism induced by the equivalence of topology.

*Remark 2.7.* The isomorphism  $\phi_*$  is the application sending meridian on meridian respecting the orders on  $\text{Irr}(\mathcal{C}) = \{C_1, \dots, C_n\}$  and  $\text{Irr}(\mathcal{D}) = \{D_1, \dots, D_n\}$ ; and respecting the orientation of the meridian (i.e.  $\phi_*(m_{C_i}) = m_{D_i}$ ).

#### Corollary 2.8.

- (1) *If  $\mathcal{C}$  is a rational curve, then  $\text{lks}(\gamma) = \{\gamma\}$  and then Equation (1) becomes:*

$$\phi_*(\gamma) = \mu.$$

- (2) *If  $\text{Supp}(\gamma) = \{C\}$  then we can remove the oriented hypothesis in Theorem 2.6.*

**Corollary 2.9.** *Let  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  be two curves with the same combinatorics, and  $\gamma$  and  $\mu$  be two combinatorially equivalent cycles of  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  respectively. If for any isomorphism*

$$\phi_* : H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_\gamma^c) / \text{Ind}_\gamma(\mathcal{C}) \rightarrow H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{D}_\mu^c) / \text{Ind}_\mu(\mathcal{D})$$

*sending meridian on meridian and respecting their orientation, we have  $\phi_*(\text{lks}(\gamma)) \neq \text{lks}(\mu)$ , then  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  have distinct oriented topology.*

*Remark 2.10.* If we also assume that the support (or the internal support) of  $\gamma$  and  $\mu$  is a singleton, then we can remove the condition oriented in the conclusion of the previous corollary.

### 3. $k$ -ARTAL CURVES

In [2], Artal introduces a Zariski pair where the curves are composed of a smooth cubic and three tangent lines in inflexion points. He proves that a difference of geometry (of the considered inflexion points) implies a difference of topology. Here, we will generalize this result to the case of the curves  $k$ -Artal.

**Definition 3.1.** A *curve  $k$ -Artal* is an algebraic curve composed of a smooth cubic  $C$  and  $k$  lines  $L_1, \dots, L_k$  tangent in the inflexion points of  $C$ .

It is of Type  $l$  if there is exactly  $l$  subset composed of three collinear points in  $\{P_i = L_i \cap C \mid i = 1, \dots, k\}$ .

*Remark 3.2.*

- (1) For the 3-Artal case, the Zarsiki pair studied by Artal is formed by a curve of Type 0 and one of Type 1.
- (2) This Zariski pair is related with the historical example of Zariski (see Section 1) by Figure 2. Indeed, the 3-Artal curve is the cubic  $C$  with the 3 axes, and the geometric difference between Type 0 and Type 1 induces the geometric difference between the sextics with the six cusps along (or not) a conic.

**Theorem 3.3** ([7]). *Let  $k \in \{3, \dots, 6\}$ , there exist  $k$ -Artal curves  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  of different Type such that they form a Zariski pair.*

To prove this theorem, we will compute their linking set (in a particular case) and then apply Corollary 2.9. To compute the linking set in each case, we will compute it in the case of the cubic with nine tangent lines and then consider restrictions to obtain the case with less than nine tangent lines. We denote by  $\mathcal{C}_9$  the 9-Artal curve. It is known that the inflexion points of a smooth cubic have a the structure of  $(\mathbb{F}_3)^2$ . We assume that the points  $P_i = L_i \cap C$  are as in Figure 4.

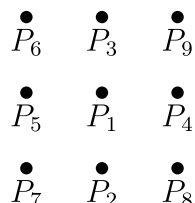


FIGURE 4. Representation of the inflexion points of  $C$  as  $(\mathbb{F}_3)^2$

Let  $\gamma$  be a cycle contained in the smooth cubic  $C$ . It is clear that  $\gamma$  is minimal and that:

$$\text{Supp}(\gamma) = \overset{\circ}{\text{Supp}}(\gamma) = \{C\}.$$

The set of cycles combinatorially equivalent to  $\gamma$  is the set of cycles contained in  $C$ . Homologically this set is equal to  $H_1(C; \mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ . Let  $g_1$  and  $g_2$  be two cycles generating  $H_1(C; \mathbb{Z})$ . In the case where  $C$  is defined by  $x^3 - xz^2 - y^2z = 0$  it has been proved in [14], that there is

$g_1$  and  $g_2$  such that:

$$(2) \quad \begin{aligned} [g_1] &= m_{L_2} - m_{L_3} - m_{L_6} + m_{L_7} + m_{L_8} - m_{L_9} && \text{in } H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_9), \\ [g_2] &= -m_{L_4} + m_{L_5} + m_{L_6} + m_{L_7} - m_{L_8} - m_{L_9} && \text{in } H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{C}_9). \end{aligned}$$

Consider the case  $k = 3$ , let  $\mathcal{I}_1$  be the set  $\{1, 2, 3\}$  and  $\mathcal{I}_2$  be  $\{1, 2, 4\}$ . We denote by  $\mathcal{C}_i$  the curve  $C \cup \left( \bigcup_{j \in \mathcal{I}_i} L_j \right)$ . By Figure 4,  $\mathcal{C}_1$  is of Type 1 and  $\mathcal{C}_2$  of Type 0. We have that  $(\mathcal{C}_i)_\gamma^c = \bigcup_{j \in \mathcal{I}_i} L_j$ . Using restrictions of

Equation (2), we have that:

$$\begin{aligned} [g_1]_1 &= m_{L_2} - m_{L_3}, & \text{and } [g_2]_1 &= 0 & \text{in } H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\mathcal{C}_1)_\gamma^c), \\ [g_1]_2 &= m_{L_2} & \text{and } [g_2]_2 &= -m_{L_4} & \text{in } H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\mathcal{C}_2)_\gamma^c). \end{aligned}$$

To compute the linking set, we need first to determine the indeterminacy sub-group of  $\gamma$ . Since it is combinatorial, then they are isomorphic for  $\mathcal{C}_1$  and  $\mathcal{C}_2$ . In the case of the 3-Artal curves and a cycle  $\gamma$  contain in the cubic, the singular points contained in the cubic are the  $P_j$ , for  $j \in \mathcal{I}_i$ . These singular points are of type  $\mathbb{A}_5$ . This implies that  $I_{P_j}(C, L_l) = 3\delta_{j,l}$ , and then:

$$H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\mathcal{C}_i)_\gamma^c) / \text{Ind}_\gamma(\mathcal{C}_i) \simeq \langle m_{L_j} \text{ for } j \in \mathcal{I}_i \mid 3m_{L_j}, \sum_{j \in \mathcal{I}_i} m_{L_j} \rangle \simeq (\mathbb{Z}_3)^2.$$

We denote by  $\text{lks}_i(\gamma)$  the linking set of  $\gamma$  in  $\mathcal{C}_i$ , for  $i = 1, 2$ . We have then:

$$\begin{aligned} \text{lks}_1(\gamma) &= \{m_{L_2} - m_{L_3}, -m_{L_2} + m_{L_3}\}, \\ \text{lks}_2(\gamma) &= \{m_{L_2}, m_{L_4}, -m_{L_2}, -m_{L_4}, m_{L_2} + m_{L_4}, \\ &\quad m_{L_2} - m_{L_4}, -m_{L_2} + m_{L_4}, -m_{L_2} - m_{L_4}\}. \end{aligned}$$

It is clear (using an argument of cardinality) that for any isomorphism

$$\phi_* : H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\mathcal{C}_1)_\gamma^c) / \text{Ind}_\gamma(\mathcal{C}_1) \rightarrow H_1(\mathbb{CP}^2 \setminus (\mathcal{C}_2)_\gamma^c) / \text{Ind}_\gamma(\mathcal{C}_2)$$

sending meridian on meridian and respecting the orientation, we have  $\phi_*(\text{lks}_1(\gamma)) \neq \text{lks}_2(\gamma)$ . Using Corollary 2.9 and Remark 2.10, the curves  $\mathcal{C}_1$  and  $\mathcal{C}_2$  form a Zariski pair; then case  $k = 3$  of Theorem 3.3 is proved.

*Remark 3.4.* With similar arguments, we can prove Theorem 3.3 for  $k = 4, 5, 6$ .

## REFERENCES

- [1] Aysegül Akyol. Classical zariski pairs with nodes, 2008.
- [2] Enrique Artal-Bartolo. Sur les couples de Zariski. *J. Algebraic Geom.*, 3(2):223–247, 1994.

- [3] Enrique Artal Bartolo, Jorge Carmona Ruber, and José Ignacio Cogolludo Agustín. Braid monodromy and topology of plane curves. *Duke Math. J.*, 118(2):261–278, 2003.
- [4] Enrique Artal Bartolo, Vincent Florens, and Benoît Guerville-Ballé. A topological invariant of line arrangements. *Annali della Scuola Normale di Pisa - Classe di Scienze*, 2016.
- [5] Enrique Artal Bartolo and Hiro-o Tokunaga. Zariski  $k$ -plets of rational curve arrangements and dihedral covers. *Topology Appl.*, 142(1-3):227–233, 2004.
- [6] Shinzo Bannai. A note on splitting curves of plane quartics and multi-sections of rational elliptic surfaces. *Topology Appl.*, 202:428–439, 2016.
- [7] Shinzo Bannai, Benoît Guerville-Ballé, Taketo Shirane, and Hiroo Tokunaga. On the topology of arrangements of a cubic and its inflectional tangents. In preparation.
- [8] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane algebraic curves*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986. Translated from the German original by John Stillwell, [2012] reprint of the 1986 edition.
- [9] Alex Degtyarev. On deformations of singular plane sextics. *J. Algebraic Geom.*, 17(1):101–135, 2008.
- [10] Alex Degtyarev. Classical Zariski pairs. *J. Singul.*, 2:51–55, 2010.
- [11] Alex Degtyarev. On the Artal-Carmona-Cogolludo construction. *J. Knot Theory Ramifications*, 23(5):1450028, 35, 2014.
- [12] William Fulton. *Algebraic curves*. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989. An introduction to algebraic geometry, Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Reprint of 1969 original.
- [13] Benoît Guerville-Ballé. An arithmetic Zariski 4-tuple of twelve lines. *Geom. Topol.*, 20(1):537–553, 2016.
- [14] Benoît Guerville-Ballé and Jean-Baptiste Meilhan. A linking invariant for algebraic curves. Available at [arXiv:1602.04916](https://arxiv.org/abs/1602.04916).
- [15] Benoît Guerville-Ballé and Taketo Shirane. Equivalence between splitting number and linking invariant. In preparation.
- [16] Anatoly Libgober. Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes. *Duke Math. J.*, 49(4):833–851, 1982.
- [17] Mutsuo Oka. Some plane curves whose complements have non-abelian fundamental groups. *Math. Ann.*, 218(1):55–65, 1975.
- [18] Ichiro Shimada. Equisingular families of plane curves with many connected components. *Vietnam J. Math.*, 31(2):193–205, 2003.
- [19] Ichiro Shimada. Lattice Zariski  $k$ -ples of plane sextic curves and  $Z$ -splitting curves for double plane sextics. *Michigan Math. J.*, 59(3):621–665, 2010.
- [20] Taketo Shirane. A note on splitting numbers for galois covers and  $\pi_1$ -equivalent zariski  $k$ -plets. Available at [arXiv:1601.03792](https://arxiv.org/abs/1601.03792).
- [21] Oscar Zariski. On the Problem of Existence of Algebraic Functions of Two Variables Possessing a Given Branch Curve. *Amer. J. Math.*, 51(2):305–328, 1929.
- [22] Oscar Zariski. On the irregularity of cyclic multiple planes. *Ann. of Math. (2)*, 32(3):485–511, 1931.
- [23] Oscar Zariski. On the Poincaré Group of Rational Plane Curves. *Amer. J. Math.*, 58(3):607–619, 1936.

# 結び目と3次元多様体

～ 幾何構造とファイバー構造を中心として ～

作間 誠 (広島大学)\*

## 1. はじめに

種数  $g$  の有向閉曲面を考えると、 $g = 0$  の時は球面、 $g = 1$  の時はトーラス  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  であり、それぞれ自然に球面構造とユークリッド構造を持つことは誰の目にも明らかである。双曲幾何の初歩を勉強すると、種数  $g \geq 2$  なら双曲構造を持つこともすぐに理解できる。そうすると一歩進めて、3次元多様体でも同じようなことが成り立つのではないかと考えるのは（今となっては）極めて自然なことであり、きっとそのような発想をした人も過去にいたのではないかと想像できる。例えば、ザイフェルト・ファイバー束の概念を導入し完全に分類したザイフェルトなら、そのようなことを考えていたとしても不思議ではない。また、1977年という（Thurstonがプリンストン大学で講義を開始した1978年直前の）絶妙のタイミングで御著書「非ユークリッド幾何の世界」をブルーバックスより出版された日本の結び目理論の創始者・寺阪英孝先生も、そのようなことを考えられたことがあるかも、と想像することがある。

Thurstonは3次元多様体のトポロジーと幾何の相性が格段に良いことに気づき、沢山の研究者を巻き込みながら、全く新しい視点から3次元トポロジーの研究を行い、結び目理論を含む低次元トポロジーの世界を一変させた。Thurstonが1982年に出版した記念碑的サーベイ論文[101]で提出した24の問題は、低次元トポロジー研究の指標となり、この分野を極めて豊穡なものとした。そして驚くべきことに、それらの問題のうちYes-Noで尋ねている問題は、一つの未解決問題（数論が絡む問題23）を除いて全て肯定的に解決され、Thurstonが思い描いていたビジョンに狂いがなかったことが証明された。（[16, 87, 98]を参照されたい。）

一方、ファイバー結び目の名が示すようにファイバー構造（曲面束の構造）は結び目理論研究者にとって非常に重要な概念であり、村杉邦夫先生により生み出された村杉和（Murasugi sum）は、結び目理論の研究において必要不可欠な道具となっている。（結び目理論全般については[54]を参照されたい。）また、Rileyによる双曲構造の発見とThurstonによるハーケン多様体の双曲化定理において、ファイバー結び目は特別な役割を果たしている。

本論説では、曲面束の構造と幾何構造との関係を中心に、現在までに明らかにされたことの解説を試みた。また最後の2つの節では、筆者が大切であると考えた課題を、独善的であることは承知の上で述べた。沢山のページ数を使わせていただいたのにもかかわらず、筆者の力不足のために舌足らずでしかも偏った論説になったことを、ご容赦下さい。

なお、蒲谷祐一氏、金英子氏、古宇田悠哉氏、和田昌昭氏には、拙い原稿に対して貴重なコメントをいただくと同時に沢山の修正点をご指摘いただきました。（残りの誤りは筆者の責任です。）心よりお礼申し上げます。

本研究は科研費（課題番号:15H03620）の助成を受けたものである。

\* 〒739-8526 東広島市鏡山1丁目3番1号

e-mail: sakuma@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

## 2. 双曲空間と双曲多様体

### 2.1. 双曲幾何

計量  $ds^2 = (dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)/x_n^2$  を持つ上半空間  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n > 0\}$  を双曲  $n$  次元空間と呼ぶ。  $\partial\mathbb{H}^n := (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$  を  $\mathbb{H}^n$  の無限遠境界と呼ぶ。和集合  $\bar{\mathbb{H}}^n := \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$  は自然な位相に関して  $n$  次元球体と同相である。  $\mathbb{H}^n$  の等長変換群  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  は  $\partial\mathbb{H}^n$  に直交する  $n-1$  次元球面に関する反転で生成される。  $n=2$  のとき、  $\mathbb{H}^2$  は複素上半平面  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$  と同一視され、向き保存等長変換群  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  は  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R})/\langle -E \rangle$  と同一視される。ここで  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  は一次分数変換  $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$  として  $\mathbb{H}^2$  に作用する。  $n=3$  のとき、  $\mathbb{H}^3$  は  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$  と同一視され、  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  は  $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{SL}(2, \mathbb{C})/\langle -E \rangle$  と同一視される。  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  は一次分数変換としてリーマン球面  $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  に作用し、そのポアンカレ拡大として  $\mathbb{H}^3$  に作用する。向き保存等長変換群  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  の非自明元  $\gamma$  は次の3種類に分類される。

1. **双曲型変換** :  $\gamma$  は丁度1本の測地線  $l$  を保存し、  $l$  には一定距離  $d > 0$  の移動として作用する。また  $\partial\mathbb{H}^n$  における  $l$  の2つの端点は、  $\gamma$  の吸引的・反発的不動点となる。
2. **放物型変換** :  $\gamma$  は  $\partial\mathbb{H}^n$  上に唯1つの固定点  $p$  を持つ。このとき、  $\gamma$  は  $p$  を中心とするホ口球体 (すなわち、  $p$  で  $\partial\mathbb{H}^n$  と接するユークリッド距離に関する  $n$  次元球体と  $\mathbb{H}^n$  の共通部分) を保存する。特に  $p = \infty$  の場合、  $\gamma$  は  $\mathbb{H}^n$  のユークリッド距離に関する不動点を持たない向き保存等長変換として作用する。
3. **楕円型変換** :  $\gamma$  は  $\mathbb{H}^n$  内に固定点を持つ。

### 2.2. 双曲多様体

$n$  次元多様体  $M$  上の双曲構造とは、  $M$  上の定断面曲率  $-1$  の完備リーマン計量 (のイソトピー類) のことである。  $M$  上の双曲構造は、同相写像  $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$  (但し、  $\Gamma$  は楕円型変換を含まない  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  の離散部分群) として得られる。この同相写像が導く表現  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  を双曲構造のホロノミー表現と呼ぶ。  $M$  上の2つの双曲構造のホロノミー表現が  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  の内部準同型を法として一致するとき、その2つの双曲構造は同値であるという。  $\mathbb{H}^n$  内の点  $x$  の軌道  $\Gamma x$  の  $\bar{\mathbb{H}}^n$  における集積点集合  $\Lambda(\Gamma)$  は  $\partial\mathbb{H}^n$  の最小  $\Gamma$  不変閉集合を形作り、  $\Gamma$  の極限集合と呼ばれる。補集合  $\Omega(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n \setminus \Lambda(\Gamma)$  は  $\Gamma$  の不連続領域と呼ばれ、その上に  $\Gamma$  は真性不連続に作用する。商空間  $(\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$  を  $\Gamma$  が定めるクライン多様体と呼ぶ。  $\Omega(\Gamma)/\Gamma$  は  $\Omega \subset \partial\mathbb{H}^n$  の共形構造を受け継いでおり、双曲多様体  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  の無限の彼方で貼り付いている。極限集合  $\Lambda(\Gamma)$  の  $\bar{\mathbb{H}}^n$  における凸包と  $\mathbb{H}^n$  の共通部分を  $\mathcal{C}(\Lambda(\Gamma))$  としたとき、  $C(\Gamma) := \mathcal{C}(\Lambda(\Gamma))/\Gamma \subset \mathbb{H}^n/\Gamma$  を双曲多様体  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  の凸核と呼び、  $C(M)$  と表す。  $M$  内の閉測地線は、  $\Gamma$  の双曲型元  $\gamma$  の軸  $l$  の像として得られ、  $l$  の両端点は  $\Lambda(\Gamma)$  に含まれるので、  $C(M)$  は  $M$  の全ての閉測地線を含む。凸核  $C(M)$  は  $M$  の凸部分空間で、  $C(M)$  から  $M$  への包含写像はホモトピー同値であり、しかもこの2つの性質を持つ部分空間で最小なものである。双曲多様体  $M$  あるいはクライン群  $\Gamma$  が幾何学的有限であるとは、凸核  $C(M)$  の近傍で有限体積であるものが存在するときをいう。

以下では主に  $M$  が向き付けられた多様体上の双曲構造を取り扱う。この場合は、 $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  であり、同相写像  $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$  は向き保存であることを要請する。 $n = 2, 3$  に応じて、 $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  の離散部分群をフックス群、クライン群と呼ぶ。

### 2.3. 双曲曲面とタイヒミュラー空間

種数  $g$  の有向曲面  $\Sigma_g$  から  $n$  個の点を除いて得られる曲面を  $\Sigma_{g,n}$  で表す。任意の有限面積有向双曲曲面は、オイラー標数が  $\chi(\Sigma_{g,n}) = 2 - 2g - n < 0$  を満たす  $\Sigma_{g,n}$  に同相である。更に、それぞれの穴はカスプ  $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \Im(z) \geq c\}/(z \sim z+1)$  ( $c > 0$  は定数) と等長的な近傍を持つ。

最も簡単な  $(g, n) = (0, 3)$  の場合、 $\Sigma_{0,3}$  上の双曲構造は理想測地三角形 (即ち、 $\partial\mathbb{H}^2$  でのみ交わる 3 本の測地線で囲まれる領域) 2 つのコピーをその境界で貼り合わせて得られる。理想測地三角形のかわりに、 $\partial\mathbb{H}^2$  でも共通部分を持たない 3 本の測地線により囲まれる開いた 3 角形領域の 2 つのコピーをその境界で貼り合わせると、球面から互いに交わらない 3 つの円板を除いて得られる開多様体に同相な無限面積双曲曲面  $P = \mathbb{H}^2/\Gamma$  を得る。このとき極限集合  $\Lambda(\Gamma)$  はカントール集合、クライン多様体は  $P$  に 3 つの円周を付け加えて得られるコンパクト曲面、凸核  $P_0 := C(P)$  は 3 本の単純閉測地線で囲まれる  $P$  のコンパクト部分曲面である。ここで  $P_0$  は球面から互いに交わらない 3 つの円板の内部を除いて得られるパンツに同相である。双曲的パンツ  $P_0$  の等長型は境界の長さが作る 3 つの実数の組で決まり、しかもこの 3 つ組は  $\mathbb{R}_+^3$  の任意の値を取り得ることがわかる。もし境界の長さが 0 に退化して、カスプを形成する場合を込めると、そのような双曲曲面全体は  $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$  でパラメータ付け出来る。

一般の曲面  $\Sigma = \Sigma_{g,n}$  の双曲構造を記述するには、 $\Sigma$  を  $3g - 3 + n$  本の本質的単純閉曲線 ( $\Sigma$  内の円板または穴あき円板を切り取らない単純閉曲線) で切り開いて  $|\chi(\Sigma)|$  個のパンツに分解すればよい。 $\Sigma$  の双曲構造が与えられると、これらの単純閉曲線は互いに交わらない単純閉測地線にイソトピックであり、それらは双曲曲面を  $|\chi(\Sigma)|$  個の双曲的パンツに分解する。各双曲的パンツの等長型は  $3g - 3 + n$  本の単純閉測地線の長さで決まる。またこれらの単純閉測地線それぞれにおいて、双曲的パンツの貼り合わせの自由度が  $\mathbb{R}$  分だけある。従って、 $\Sigma$  の双曲構造は  $\mathbb{R}_+^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n}$  に値を持つパラメータにより完全に記述できる。しかも、逆に任意のパラメータを実現する  $\Sigma$  の双曲構造が存在することも、前文節より明らかである。以上により、 $\Sigma$  上の双曲構造全体が作るタイヒミュラー空間  $\text{Teich}(\Sigma)$  は次のように記述される。

**定理 2.1 (フェンチェル・ニールセン座標)**

$$\text{Teich}(\Sigma_{g,n}) \cong \mathbb{R}_+^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n} \cong \mathbb{R}^{6g-6+2n}$$

古典的一意化定理により、 $\text{Teich}(\Sigma)$  は  $\Sigma$  上の共形構造全体が作る空間でもあることを注意する。

$\Sigma$  の双曲構造は上で述べた自由度を持つが、その面積はガウス・ボンネの定理により、 $2\pi|\chi(\Sigma)|$  であり、そのため有限面積双曲曲面の面積全体が作る  $\mathbb{R}_+$  の部分集合  $V_2$  は  $2\pi\mathbb{N}$  に一致することを注意する。もっと一般に、自然数  $n \geq 2$  に対して、有限体積双曲  $n$  次元多様体の体積全体が作る  $\mathbb{R}_+$  の部分集合を  $V_n$  とすると、 $n = 3$  の場合を除けば、 $V_n$  は離散的であり、順序集合としての同型  $V_n \cong \mathbb{N}$  が成立する。

## 2.4. 有限体積双曲 3 次元多様体

有限面積双曲曲面がコンパクト部分多様体とカスプの和集合であったのと同様に、有限体積有向双曲 3 次元多様体はコンパクト部分多様体  $M_0$  とトーラスカスプの和集合になる。ここで、トーラスカスプとは、ホロ球  $H := \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid t \geq c\}$  ( $c > 0$  は定数) を ( $\infty \in \partial\mathbb{H}^3$  を固定する) 放物型変換が生成する階数 2 の自由アーベル群で割って得られる部分多様体のことであり、位相的には  $T^2 \times [0, \infty)$  と同相である。従って、有限体積有向双曲 3 次元多様体は境界が空であるかあるいは有限個のトーラスから成るコンパクト多様体の内部と同相である。2 次元の場合は、双曲構造は連続変形を許したが、3 次元以上の有限体積双曲多様体に対しては、次の Mostow-Prasad 剛性定理により、基本群の代数構造により双曲構造が完全に決定され、従って双曲構造は一意的である。

**定理 2.2 (Mostow-Prasad 剛性定理)**  $n \geq 3$  とし、 $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ ,  $M' = \mathbb{H}^n/\Gamma'$  を有限体積双曲  $n$  次元多様体とする。このとき、基本群の間の同型写像  $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  が存在すれば、それは等長写像  $f: M \rightarrow M'$  により実現される。

従って、有限体積双曲 3 次元多様体に関しては、体積、閉測地線の長さ、カスプの形、等長変換群、などの双曲不変量が位相不変量になっており、結び目および 3 次元多様体の位相的研究で重要な役割を果たす。Mostow-Prasad 剛性定理により、完備性を保ったまま有限体積 3 次元多様体の双曲構造を変形することはできない。しかしながら、カスプ付き 3 次元双曲多様体  $M$  は、完備でない双曲多様体に連続変形でき、その完備化は一般にはハウスドルフですらないが、特別な場合には再び双曲多様体になり、位相的には  $M$  のデーン充填、即ち、ソリッドトーラス  $D^2 \times S^1$  の  $M_0$  への貼り合わせにより得られる。しかも、 $M$  の“ほとんど全ての”デーン充填は、上記の方法により双曲構造を持つ (デーン充填定理)。更に  $M$  のデーン充填により得られる双曲多様体の体積は  $M$  の体積より小さいが、その体積全体がつくる集合は  $M$  の体積を集積点とする。実際、有限体積双曲 3 次元多様体の体積全体の集合  $V_3$  は、順序集合として次の整列集合と同型である (Jorgensen-Thurston 理論)。

$$\omega^\omega = \{1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, \dots, 3\omega, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^3, \dots\}$$

ここで、1 は最小体積の閉双曲多様体に対応し、 $\omega$  はカスプを 1 つだけ持つ双曲多様体の内で最小体積を持つものに対応する。尚、同じ体積を持つ双曲 3 次元多様体は有限個しか存在しない。最小体積あるいは小さな体積を持つ双曲 3 次元多様体や、指定された数のカスプを持つ双曲 3 次元多様体のうちで最小体積あるいは小さな体積を持つものを決定するという興味深い問題については、様々なことがわかってきている ([39] および参考文献参照)。しかしながら、Thurston の問題 23 「Show that the volumes of hyperbolic 3-manifolds are not all rationally related.」はまだ未解決である。すなわち、体積比が有理数にならない双曲多様体対の存在は、まだ証明されていない。

## 2.5. 双曲 3 次元多様体の変形理論

前節で述べたように有限体積 3 次元多様体の双曲構造は (完備性を保った) 変形を許さないが、一般の場合は連続変形が可能である。以下で、最も基本的な 3 次元多様体  $\Sigma \times \mathbb{R}$  ( $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ ) の場合を解説する。有限面積双曲曲面  $\Sigma \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$  の基本群であるフックス群  $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  を  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の部分群とみなすと、勿論クライン群である。

このとき  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  は全測地的部分曲面  $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$  を含み,  $\Sigma \times \mathbb{R}$  に計量  $(\cosh^2 t)ds^2 + dt^2$  を入れたリーマン多様体と同一視できる。ここで,  $ds^2$  は  $\Sigma$  の計量,  $t$  は  $\mathbb{R}$  のパラメータである。極限集合  $\Lambda(\Gamma)$  は  $\hat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$  内の真円  $\hat{\mathbb{R}}$  であり, 不連続領域  $\Omega(\Gamma)$  は2つの成分  $\Omega_{\pm}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \Im(z) > 0\}$  から成る。従ってクライン多様体  $(\mathbb{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$  は  $\Sigma$  と閉区間  $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  の直積と同相であり, 2枚のリーマン面  $\mathbb{C}_{\pm}/\Gamma$  が双曲3次元多様体  $\mathbb{H}^3/\Gamma \cong \Sigma \times \mathbb{R}$  の無限の彼方で貼り付いている。

勿論  $\Gamma$  はフックス群として変形可能であるが, 真に3次元的な変形も可能である。例えば,  $\Sigma \cong \mathbb{H}^2/\Gamma$  の単純閉測地線  $\alpha$  を選び, それに沿って  $\Sigma$  を  $\Sigma \times \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^3/\Gamma$  内で少しだけ折り曲げることを考える。 $\alpha$  の  $\mathbb{H}^2$  における逆像は互いに交わらない  $\mathbb{H}^2$  の無限個の測地線から成るので, この操作は  $\mathbb{H}^3$  において  $\mathbb{H}^2$  をその無限個の測地線に沿って一斉に少しだけ同じ角度だけ折り曲げることに対応する。折り曲げ角が十分小さければ, この操作 (による共役を取る) により, 新しいクライン群  $\Gamma'$  が得られ, その極限集合  $\Lambda(\Gamma')$  は位相的には円であり続けるが, そのハウスドルフ次元は1より真に大きくなる。

このようにフックス群の変形で得られ, 極限集合が  $\hat{\mathbb{C}}$  内の円であるような群  $\Gamma'$  を擬フックス群と呼ぶ。擬フックス群  $\Gamma'$  の不連続領域は2つの開円板  $\Omega_{\pm}(\Gamma')$  から成り,  $\Gamma'$  のクライン多様体はフックス群の場合と同じく  $\Sigma \times [-\infty, \infty]$  と同相であり, また凸核は (フックス群でないなら)  $\Sigma \times [-1, 1]$  に同相であり, 従って  $\Gamma'$  は幾何学的有限である。凸核の2つの境界成分のそれぞれは, 「双曲曲面をある測地的ラミネーション (2.6 参照) に沿って折り曲げた形」をしている。この双曲構造  $\mathbb{H}^3/\Gamma'$  は, 無限の彼方にある2枚のリーマン面  $\Omega_{\pm}(\Gamma')/\Gamma' = \Sigma \times \{\pm\infty\}$  により完全にコントロールされる。

正確な意味を述べるために, 曲面  $\Sigma = \Sigma_{g,n}$  に対して, 基本群  $\pi_1(\Sigma)$  の型保存  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現の共役類全体の空間を  $\mathcal{R}(\Sigma)$  とする。ここで表現が型保存であるとは, 穴のまわりを一周するループで代表される基本群の元の像は放物型変換となることである。 $\mathcal{R}(\Sigma)$  の部分空間で  $\pi_1(\Sigma)$  の擬フックス表現 (すなわち, 忠実, 離散, 型保存表現で, その像が擬フックス群になっているもの) 全体が作る部分空間を  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  で表し, 擬フックス空間と呼ぶ。このとき, 次の定理が成り立つ ([47] 参照)。

**定理 2.3 (Bersの同時一意化定理)** 上述の対応は全単射で, 下記の同相写像を導く。

$$\mathcal{QF} : \text{Teich}(\Sigma) \times \text{Teich}(\Sigma) \cong \mathcal{QF}(\Sigma)$$

忠実離散表現全体が作る  $\mathcal{R}(\Sigma)$  の部分空間を  $\mathcal{DF}(\Sigma)$  で表す。 $\mathcal{DF}(\Sigma)$  は閉集合であり, そのため  $\overline{\mathcal{QF}}(\Sigma) \subset \mathcal{DF}(\Sigma)$  となる。Minskyを始めとする沢山の研究者の汗の結晶として, Thurston が [101] で提案したクライン群の変形と分類に関する一連の問題 (Problems 5,6, 9-12) が完全に解決され, 特に  $\mathcal{DF}(\Sigma)$  に関しては次のことが証明された ([64, 65, 73, 98] 参照)。

**定理 2.4 (1)(Density Conjecture)**  $\pi_1(\Sigma)$  の任意の型保存離散忠実表現は擬フックス表現の極限として得られる。すなわち,  $\overline{\mathcal{QF}}(\Sigma) = \mathcal{DF}(\Sigma)$  である。

**(2)(Ending Lamination Conjecture)**  $\mathcal{DF}(\Sigma)$  の元は, 「エンド不変量」により完全に分類できる。

**(3)(Tameness Conjecture)** 任意の  $\rho \in \mathcal{DF}(\Sigma)$  に対して, その像として得られるクライン群  $\Gamma$  から得られる双曲多様体  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  は  $\Sigma \times \mathbb{R}$  に同相である。

(4)(**Ahlfors Measure Conjecture**) 任意のクライン群の極限集合はリーマン球面  $\hat{\mathbb{C}}$  に一致するか, あるいはルベグ測度 0 である。

定理 2.4(2) は, 双曲多様体がそのエンド (コンパクト集合の補集合が作る部分集合族の逆極限) における漸近挙動から定まるエンド不変量により, 完全に決定されることを主張しており, 3次元 Mostow-Prasad 剛性定理の究極の一般化といえる。

## 2.6. タイヒミュラー空間の Thurston コンパクト化とエンド不変量

エンド不変量を説明するために, まずはタイヒミュラー空間の Thurston コンパクト化を説明する。曲面  $\Sigma = \Sigma_{g,n}$  内の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体が作る集合を  $\mathcal{S}$  とする。 $\Sigma$  上の双曲構造  $X \in \text{Teich}(\Sigma)$  を固定すると, 任意の  $\alpha \in \mathcal{S}$  は単純閉測地線にイソトピックとなる。その長さを考えることにより, 長さ関数  $l_X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$  が定まる。双曲構造  $X$  は,  $l_X$  のある有限部分集合  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$  への制限により特徴付けられる, 即ち, 長さ関数は埋め込み  $\text{Teich}(\Sigma) \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}_0}$  を定める。更に閉曲線の長さそのものでなく, 長さの比により双曲構造が定まることが知られており, 無限次元射影空間への埋め込み  $\text{Teich}(\Sigma) \hookrightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{S}})$  を得る。この像の閉包をとると,  $\text{Teich}(\Sigma)$  を内部とする  $6g-6+2n$ 次元球体を得る。これが  $\text{Teich}(\Sigma)$  の Thurston コンパクト化である。ここでコンパクト化で付け加わる  $6g-7+2n$ 次元球面は, Thurston 境界と呼ばれ, 射影的測度付きラミネーション空間  $\text{PML}(\Sigma)$  と同一視できる。このことを見るために各  $\alpha \in \mathcal{S}$  に位相的交点数関数  $\text{Int}(\alpha, \cdot) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  を考えることにより, 埋め込み  $\mathcal{S} \hookrightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{S}})$  を得ることに注意する。ここで, 双曲曲面  $X \in \text{Teich}(\Sigma)$  において, 一つの単純閉測地線  $\alpha$  の長さを 0 に近づける変形を考えると,  $\alpha$  のカラー近傍はどんどん幅を広げ, そのため  $\alpha$  と位相的に交わる曲線の長さは (交点数に応じて) どんどん長くなる。このことから, この  $\text{Teich}(\Sigma)$  内の道の極限が  $\alpha$  であり, 従って,  $\mathcal{S}$  は Thurston 境界の部分集合であることが了解できるであろう。更に,  $\mathcal{S}$  が Thurston 境界内で稠密であることが知られている。

$\Sigma$  上の双曲構造を指定すると,  $\mathcal{S}$  の各元は単純閉測地線として実現できる。単純閉測地線に正実数の重み  $\mu$  を与えた重み付き単純閉測地線の一般化として, 測度付きラミネーション  $(\lambda, \mu)$  が以下のように定義される。まず  $\lambda$  は (測地的) ラミネーション, 即ち, 双曲曲面  $\Sigma$  の閉部分集合で, 互いに交わらない (一般的に非可算無限個の) 単純閉測地線の和集合として表せる閉集合である。(一般的な状況では,  $\lambda$  は局所的にはカントール集合と开区間の直積に同相であり,  $\Sigma$  内で測度 0 である。) そして  $\mu$  は  $\lambda$  の横断方向の測度 ( $\lambda$  と横断的に交わる弧に対して正実数を対応させる) である。但し, 測度  $\mu$  のサポートが  $\lambda$  全体であることを要請する。測度付きラミネーション全体の空間  $\text{ML}(\Sigma)$  は適当な位相の下で,  $\mathbb{R}^{6g-6+2n}$  に同相である。 $\text{ML}(\Sigma) \setminus \{0\}$  において測度が定数倍であるものを同一視して得られる空間が射影的測度付きラミネーション空間  $\text{PML}(\Sigma)$  であり, これが Thurston 境界を与えているのである。

測度付きラミネーション空間  $\text{ML}(\Sigma) \setminus \{0\}$  において, 測度の情報を忘れて測度のサポートであるラミネーションが一致しているものが同値であるとみなして得られる商空間  $\text{UML}(\Sigma)$  を測度無視ラミネーション空間 (unmeasured lamination space) と呼ぶ。

エンド不変量は, 非コンパクト双曲多様体のエンド  $E$  に対して定義され,  $E \cong \Sigma \times [0, \infty)$  であるときは, 大雑把に述べると,  $\text{Teich}(\Sigma)$  あるいは  $\text{UML}(\Sigma)$  に値をとる (詳細は [73, 98] 参照)。具体的に, どのように定義するかについては, 第 4.3 節を見ていただくことにして, 穴あきトーラスの場合のエンディング・ラミネーション定理を述べ

る。この時は、次の自然な同一視があることに注意する：

$$\text{Teich}(\Sigma_{1,1}) = \text{Teich}(\Sigma_1) = \mathbb{H}^2, \quad \text{UML}(\Sigma) = \text{PML}(\Sigma_{1,1}) = \partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

**定理 2.5 (Minsky[72])** 全単射

$$\nu : \mathcal{DF}(\Sigma_{1,1}) \rightarrow (\overline{\mathbb{H}^2} \times \overline{\mathbb{H}^2}) \setminus \Delta(\partial\mathbb{H}^2) \quad (\Delta(\partial\mathbb{H}^2) \text{ は } \partial\mathbb{H}^2 \text{ の対角線集合})$$

が存在する。

Minsky とその共同研究者はこれを足がかりとして、一般の場合のエンディング・ラミネーション予想を完全に解決したのであった [74, 24]。尚、ここで  $\nu^{-1}$  は連続であるが、 $\nu$  自身は連続でない。そのため、表現空間  $\mathcal{R}(\Sigma_{1,1})$  における  $\mathcal{DF}(\Sigma_{1,1})$  の形は極めて複雑であり、非常に興味深い研究対象となっている ([48] 及び参考文献参照)。

### 3. 幾何化定理

#### 3.1. 幾何化定理と 8 つの 3 次元幾何構造

本節では、Thurston により予想され、Perelman により証明された幾何化定理と、その定理における双曲幾何の役割を述べる ([15, 78] 参照)。

**定理 3.1 (幾何化定理)** 任意のコンパクト 3 次元多様体は、幾何構造を持つ多様体への自然な分解を持つ。

Kneser と Milnor による一意素分解定理により、任意のコンパクト有向 3 次元多様体は、素な 3 次元多様体の連結和として一意的に表される。ここでコンパクト 3 次元多様体  $M$  が素であるとは、もし  $M$  を連結和  $M_1 \# M_2$  として表したなら少なくとも一方の成分  $M_i$  は  $S^3$  に同相になることである。任意の素なコンパクト有向 3 次元多様体  $M$  に対して、埋め込まれたトーラスによる標準的な分解 (Jaco-Shalen-Johannson 分解) を持つことが知られている。幾何化定理は、任意のコンパクト有向 3 次元多様体からこの 2 段階の分解を施して得られる各 3 次元多様体の内部が幾何構造を持つことを主張している。

ここで幾何構造とは、単連結、等質的、完備リーマン多様体  $X$  のことであり、多様体  $M$  が  $X$  を幾何構造に持つとは、 $X$  に等長的かつ自由に作用する群  $\Gamma$  による商空間  $X/\Gamma$  として  $M$  が得られる事である。ここで  $X$  が等質的とは、その等長変換群  $\text{Isom}(X)$  が  $X$  に推移的に作用することである。3 次元幾何構造は (本質的に) 8 つ有り、各点の固定化群の連結成分が  $\text{SO}(3)$ ,  $\text{SO}(2)$ ,  $\text{SO}(1) = 1$  に応じて 3 種類に分かれる。

1. 定曲率空間  $S^3$ ,  $E^3$ ,  $H^3$ .
2. 直積空間  $S^2 \times E^1$ ,  $H^2 \times E^1$ , および 3 次元リー群  $\text{Nil}$ ,  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$ .
3. 3 次元可解リー群  $\text{Sol}$ .

ここで  $H^3$  以外の幾何構造を持つ 3 次元多様体の位相型は次のように完全に分類できる。Sol 構造を持つ 3 次元多様体はアノソフ・モノドロミーを持つ円周上のトーラス束、あるいはそれを 2 重被覆にもつ 3 次元多様体である。 $H^3$ , Sol 以外の幾何構造を持つ

ものは、(円周の非交和として得られる) ザイフェルト束空間である ([97] 参照)。円周上のトーラス束は、実はポアンカレが分類しており (こうしてホモロジー群が同じだが同相でない 3 次元多様体対の最初の例を発見した)、ザイフェルト束空間はザイフェルトにより完全に分類されている。このため、双曲多様体の研究が最も重要なものとなる。

### 3.2. 双曲化定理

最も重要な幾何構造である双曲構造を持つための条件を述べるために、3次元多様体の基本事項を復習する ([79] 参照)。\$M\$ をコンパクト有向 3 次元多様体とする。\$M\$ が既約であるとは、\$M\$ 内に埋め込まれた任意の 2 次元球面が \$M\$ 内の 3 次元球体の境界になっていることである。球面定理により、これは \$\pi\_2(M) = 0\$ であることと同値である。\$M\$ 内のコンパクト有向曲面 \$\Sigma\$ が適切に埋め込まれているとは、\$\Sigma \cap \partial M = \partial \Sigma\$ が成立することである。\$M\$ 内に適切に埋め込まれた曲面 \$\Sigma\$ が圧縮可能であるとは、\$M\$ 内に埋め込まれた円板 \$D\$ で \$D \cap \Sigma = \partial D\$ であり、しかも \$\partial D\$ は \$\Sigma\$ 内の本質的な単純閉曲線であることである。曲面 \$\Sigma\$ が圧縮不可能とは圧縮可能ではないことである。ループ定理により、この条件は、包含写像 \$j: \Sigma \to M\$ が誘導する準同型 \$j\_\*: \pi\_1(\Sigma) \to \pi\_1(M)\$ が単射であることと同値である。\$M\$ 内に適切に埋め込まれた曲面 \$\Sigma\$ が境界平行であるとは、\$M\$ の部分空間 \$N\$ で、

$$(N, \Sigma, N \cap \partial M) \cong (\Sigma \times [0, 1] / \sim, \Sigma \times \{0\}, \Sigma \times \{1\})$$

となるものが存在することである。但し \$\sim\$ は \$\Sigma \times [0, 1]\$ 上の同値関係で、各 \$x \in \partial \Sigma\$ に対して \$\{x\} \times [0, 1]\$ 上の全ての点を同値とすることにより生成されるものである。\$M\$ 内に適切に埋め込まれた曲面 \$\Sigma\$ が本質的であるとは、\$\Sigma\$ が圧縮不可能であり境界平行でないことである。アトロイダルという用語は、文献によって微妙に違う意味で使用されるが、本稿では、\$M\$ がアトロイダルであるとは、次の 2 条件が成立することとする。

1. \$\pi\_1(M)\$ の階数 2 の自由アーベル群 \$\mathbb{Z}^2\$ に同型な部分群 \$H\$ を含めば、\$H\$ は周界的である (即ち、\$\partial M\$ の成分であるトーラスの基本群 (の像) の部分群に共役である) ことである。
2. \$M\$ は \$T^2 \times [0, 1]\$, \$K^2 \tilde{\times} I\$ (クラインボトル上の有向 \$I\$ 束) どちらにも同相でない。

トーラス定理を用いれば、既約な 3 次元多様体 \$M\$ がアトロイダルであるための必要十分条件は、\$M\$ が本質的なトーラスを持たなく、更に \$M\$ がザイフェルト束空間でもないことである。

幾何化予想の解決により、コンパクト有向 3 次元多様体 \$M\$ が有限体積双曲構造を持つ (即ち、その内部が有限体積完備双曲構造を持つ) ための必要十分条件が、以下の形で与えられる。

**定理 3.2** 無限基本群を持つコンパクト有向 3 次元多様体 \$M\$ が有限体積双曲構造を持つための必要十分条件は、\$\partial M\$ が高々圧縮不可能なトーラスから成り (空集合でも良い)、\$M\$ が既約かつアトロイダルであることである。

3 次元多様体 \$M\$ がハーケン多様体である場合、即ち \$M\$ が既約であり本質的な曲面を持つ場合、については、上の定理は Thurston によるハーケン多様体の双曲化定理と

して証明された。この証明は、HakenおよびWaldhausenにより証明された、ハーケン多様体に対するヒエラルキーの存在（即ち、本質的曲面で切り開いていくと有限回で3次元球体の非交和に到達する）を出発点としている。この意味では第2.3節で紹介したパンツ分解を用いた曲面の双曲構造の構成に似ている。しかし、様々な深い数学を必要とするその膨大な内容にちなみ怪物定理と呼ばれていた（[60]参照）。怪物定理では周辺構造、すなわち $\partial M$ 上の単純閉曲線 $\gamma$ で、それが代表する $\pi_1(M)$ の元がホロノミー表現により放物型変換に写されるもの、の情報を込めたpared多様体 $(M, P)$ （ここで $P$ は $\gamma$ の $\partial M$ における正則近傍、あるいは $\partial M$ のトーラス成分）に対する双曲化定理として証明される（[60, 52, 65, 67]参照）。

既約な多様体が空でない境界を持てば、3次元球体あるいはハーケン多様体になる。特に、結び目補空間（正確には結び目外部）はハーケン多様体であり、Riley予想「結び目 $K$ の補空間が（有限体積）双曲構造を持つための必要十分条件は、 $K$ がトーラス結び目でもサテライト結び目でもないことである」が従う。この事実が結び目理論に与えた影響は計り知れない。

## 4. 曲面束の幾何構造とNielsen-Thurston理論

### 4.1. 曲面束

曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ 上の向き保存自己同相写像 $\varphi$ が与えられた時、有向3次元多様体

$$M_\varphi := \Sigma \times \mathbb{R} / (x, t) \sim (\varphi(x), t + 1)$$

は $\Sigma$ をファイバーとする $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のファイバー束である。これを $\varphi$ をモノドロミーとする曲面束と呼ぶ。 $\Sigma$ 上の向き保存自己同相写像のイソトピー類全体が作る群を $\Sigma$ の写像類群と呼び $MCG(\Sigma)$ で表すと、曲面束 $M_\varphi$ は $\varphi$ が代表する写像類群の元 $[\varphi]$ により定まる。以下、誤解の心配がないときは、自己同相写像とそれが定める写像類群の元を区別せずに同じ記号で表す。以下で $M_\varphi$ が持つ幾何構造を調べる。

まず下記の単純な曲面の写像類群は簡単な有限群になり（[36]参照）、曲面束はザイフェルト束空間であり、 $S^2 \times \mathbb{E}$ または $\mathbb{E}^3$ の構造を持つ。

$$MCG(\Sigma_{0,0}) = 1, \quad MCG(\Sigma_{0,1}) = 1, \quad MCG(\Sigma_{0,2}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad MCG(\Sigma_{0,3}) \cong \mathfrak{S}_3$$

トーラス $\Sigma_{1,0} = T^2$ に対しては、 $MCG(T^2) \cong SL(2, \mathbb{Z})$ であり、与えられた $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、それが定める $\mathbb{R}^2$ の線形変換が $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ に誘導する自己同相写像 $\varphi_A$ が $A \in MCG(T^2)$ を代表する。

Case 1.  $A = \pm E$ の時： $M_A$ は3次元トーラス $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ であるか、または $T^3$ を2重被覆に持ち、そのため $\mathbb{E}^3$ 構造を持つ。

Case 2.  $|\text{tr} A| < 2$ の時： $A$ は周期が3, 4, 6いずれかの周期写像であり、従って $T^3$ を有限巡回被覆に持ち、そのため $\mathbb{E}^3$ 構造を持つ。

Case 3.  $|\text{tr} A| = 2, A \neq \pm E$ の時： $A$ は $\pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ( $n \neq 0$ )と共役になり、ただ1つの1次元固有空間を持つ。この固有空間に平行な直線族は、 $T^2$ の本質的単純閉曲線による $\varphi_A$ 不変な葉層構造を定め、これは $M_A$ はザイフェルト束構造を定める。その底空間はトーラスまたはクラインボトルであり、更にオイラー数は消えない。これより、 $M_A$ はNil構造を持つ。

Case 4.  $|\text{tr}A| > 2$  の時:  $A$  は 2 つの 1 次元固有空間を持つので,  $\mathbb{R}^2$  の座標変換により次の変換と共役である。

$$(x, y) \mapsto \pm(Kx, \frac{1}{K}y) \quad (K > 1)$$

従って  $T^2$  上に 2 つの互いに横断的な 1 次元葉層構造があり,  $\varphi_A$  は一方の葉層構造では各葉の上で  $K$  倍という拡大写像, 他方の葉層構造では各葉の上で  $1/K$  倍という縮小写像として作用するアノソフ写像である。これより  $M_A$  は Sol 構造を持つ。

#### 4.2. Nilesen-Thurston 理論

一般の曲面  $\Sigma = \Sigma_{g,n}$  に対しても, 穴あきトーラスの場合と同様に任意の写像類  $\varphi \in \text{MCG}(\Sigma)$  に対して下記のいずれかが成立する (Nilesen-Thurston 分類 [103])。

1. 周期的:  $\varphi$  は周期写像である。
2. 可約:  $\Sigma$  上の互いに交わらない本質的単純閉曲線の族  $C$  で  $\varphi$  で保存されるものが存在する。
3. 擬アノソフ:  $\Sigma$  の特異ユークリッド構造で次の条件を満たすものが存在する。
  - (a) その局所座標の下で  $\varphi$  は表示  $(x, y) \mapsto \pm(Kx, \frac{1}{K}y)$  ( $K > 1$ ) を持つ。この  $K$  を擬アノソフ写像  $\varphi$  の拡大係数と呼ぶ。
  - (b) 各特異点は  $\pi$  の自然数倍の錐角を持つ。

この分類は,  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  の元の分類と同じように, タイヒミュラー空間の Thurston コンパクト化  $\overline{\text{Teich}}(\Sigma) \cong B^{6g-6+2n}$  への写像類の作用の固定点を調べることにより得られる。ちなみに, 擬アノソフ写像はモジュライ空間  $\text{Mod}(\Sigma) = \text{Teich}(\Sigma)/\text{MCG}(\Sigma)$  のタイヒミュラー距離に関する閉測地線に対応し, その長さは  $\log K$  ( $K$  は拡大係数) で与えられる ([47] 参照)。

上の分類に応じて, 曲面束  $M_\varphi$  は, (1) ザイフェルト束空間であるか, (2) 非自明な JSJ 分解 (トーラス分解) を持つか, (3) 双曲構造を持つ。

#### 4.3. 曲面束の双曲構造とエンド不変量

擬アノソフ写像  $\varphi$  をモノドロミーにもつ曲面束  $M_\varphi = \Sigma \times \mathbb{R}/(x, t) \sim (\varphi(x), t+1)$  の双曲構造がどのような形をしているか考えてみよう。いま  $M_\varphi \cong \mathbb{H}^3/\Gamma$  とし,  $p: \mathbb{H}^3 \rightarrow M_\varphi$  を普遍被覆射影,  $\Sigma \subset M_\varphi$  をファイバー曲面,  $\tilde{\Sigma}$  を  $p^{-1}(\Sigma)$  の連結成分,  $\tau \in \Gamma$  を  $M_\varphi$  の無限巡回被覆  $\Sigma \times \mathbb{R}$  の被覆変換  $(x, t) \mapsto (\varphi(x), t+1)$  の普遍被覆空間  $\mathbb{H}^3$  への持ち上げとする。このとき, 次が成立していなくてはならない。

1.  $\tilde{\Sigma}$  は  $\Sigma$  の普遍被覆  $\mathbb{H}^2$  と同相であり,  $\mathbb{H}^3$  内に適切に埋め込まれている。
2. 等長変換が作る群  $\langle \tau \rangle$  による  $\tilde{\Sigma}$  の像  $\{\tau^n(\tilde{\Sigma})\}$  は互いに交わらない。
3. ファイバー曲面の基本群  $\hat{\Gamma} = \pi_1(\Sigma)$  は  $\Gamma = \pi_1(M_\varphi)$  の無限正規部分群であるので極限集合  $\Lambda(\hat{\Gamma}) = \Lambda(\Gamma)$  である。一方,  $M_\varphi = \mathbb{H}^3/\Gamma$  は有限体積なので,  $\Lambda(\Gamma)$  は  $\partial\mathbb{H}^3$  全体となる。従って  $\Lambda(\hat{\Gamma}) = \partial\mathbb{H}^3$  を得る。このため, 平面  $\tilde{\Sigma}$  の  $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$  における閉包は  $\partial\mathbb{H}^3$  全体を含む!

曲面群に同型なクライン群としてすぐに思いつく擬フックス群に対しては、極限集合は円であり、最初の条件以外は満たさないということもあり、このようなことは不可能なように思える。Thurston 自身も一瞬そのように思ったそうである。しかしながら、Riley [90] が穴あきトーラス束である 8 の字結び目補空間の双曲構造を構成しており、また Jorgensen[49] も曲面束の双曲構造を組織的に構成していた。Thurston はこれらの研究に触発され、程なく望みの性質を持つファイバー群  $\hat{\Gamma}$  は、擬フックス群の極限として得られることを証明した ([87] 参照)。実際、モノドロミー  $\varphi$  のタイヒミュラー空間への作用を用いると、任意の  $X \in \text{Teich}(\Sigma)$  に対して擬フックス群の無限列  $\{\text{QF}(\varphi^{-n}(X), \varphi^n(X))\}$  は  $\mathcal{DF}(\Sigma)$  内で収束し、その像が  $M_\varphi$  のファイバー群  $\hat{\Gamma}$  を与えるのである (二重極限定理 : [86] 参照)。

このファイバー群  $\hat{\Gamma}$  のエンド不変量 (エンディングラミネーション) は以下のように記述できる。 $\Sigma$  上の本質的単純閉曲線  $\alpha$  を選び、 $M_\varphi$  の無限巡回被覆  $\tilde{M}_\varphi = \mathbb{H}^3/\hat{\Gamma} \cong \Sigma \times \mathbb{R}$  内で  $\alpha$  にホモトピックな閉測地線を  $\alpha^*$  とする。この閉測地線の被覆変換  $\hat{\tau}$  の冪による像  $\hat{\tau}^n(\alpha^*)$  は  $n \rightarrow \pm\infty$  とするとき、土側のエンドに向かっていく。一方、 $\hat{\tau}^n(\alpha^*)$  は  $\Sigma$  上の本質的単純閉曲線  $\varphi^n(\alpha)$  にホモトピックである。 $n \rightarrow \pm\infty$  としたとき  $\varphi^n(\alpha)$  は  $\text{PML}(\Sigma)$  内で収束する。この極限が定める測度無視ラミネーション ( $\in \text{UML}(\Sigma)$ ) が、エンディングラミネーションである。

穴あきトーラスの場合、擬アノソフ写像  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \cong \text{MCG}(\Sigma_{1,1})$  をモノドロミーとする  $\Sigma_{1,1}$ -束  $M_A$  のファイバー群の 2 つのエンディングラミネーションは、行列  $A$  の 2 つの固有空間の傾きである二次無理数となる。

ファイバー群  $\hat{\Gamma}$  を近似する擬フックス群の極限集合は、とてつもなく複雑な曲線である。(Mumford-Series-Wright による素晴らしい著書 [80] または小森洋平による翻訳 [81] を参照されたい。また和田昌昭が開発したソフト OPTi[104] を使えば、極限集合が変化していく様子をリアルタイムで見ることができる。) 更に驚くべきことに、ファイバー群  $\hat{\Gamma}$  の極限集合  $\Lambda(\hat{\Gamma})$  は、実は球面充満曲線 (Cannon-Thurston 写像) の像として理解できるのである ([30, 76] 及びその引用文献を参照)。

## 5. Thurston ノルムとファイバー面

曲面束  $M$  の射影  $f : M \rightarrow S^1$  は  $H^1(M; \mathbb{Z})$  の非自明元 (ファイバーが連結であるなら原始元) を定める。これをファイバー類と呼ぶ。もし 1 次元ベッチ数  $b_1(M)$  が 1 であるなら、 $M$  のファイバー構造は (被覆  $S^1 \rightarrow S^1$  の合成を除いて) 一意的である。しかし、もし  $b_1(M) > 1$  であるなら、次のように射影  $f$  を「微小変形」することにより、無限個のファイバー構造  $f' : M \rightarrow S^1$  を得る。 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  の標準的 1-形式  $dt$  の  $f$  による引き戻し  $\omega$  を考える。 $\omega$  は非特異閉形式なので、それを微小変形して得られる閉形式  $\omega'$  も非特異であり、 $\ker \omega'$  は余次元 1 の葉層構造  $\mathcal{F}'$  を定める。今、 $[\omega'] \in H^1(M; \mathbb{Q}) = \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}); \mathbb{Q})$  とすると、像  $[\omega'](H_1(M; \mathbb{Z}))$  は  $\mathbb{Q}$  の離散部分群であり、従って  $r\mathbb{Z}$  ( $r \in \mathbb{Q}$ ) の形をしている。 $M$  の基点を定めて、基点と  $M$  の各点を結ぶ道に沿う  $\omega'$  の積分は写像  $f' : M \rightarrow \mathbb{R}/r\mathbb{Z} \cong S^1$  を定める。これは特異点を持たず、 $\mathcal{F}'$  をファイバーとする曲面束構造の射影を与える。

Thurston は  $H^1(M)$  上のノルム (Thurston norm) を導入し、上述の現象のより精密な記述を与えた ([102], [52, Section 2] 参照)。以下、 $M$  をコンパクト有向 3 次元多様体とする。 $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$  の任意の元は、 $M$  内に適切に埋め込まれた (連結とは限らない) コンパクト有向曲面  $S$  により実現できる。 $S$  から  $S^2$  成分および

$D^2$  成分を除いて得られる曲面を  $S_0$  とし,  $S$  の複雑度を  $\chi_-(S) := |\chi(S_0)|$  で定める。 $\alpha \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$  のノルム  $\|\alpha\|$  を以下で定義する。

$$\|\alpha\| = \min\{\chi_-(S) \mid [S] = \alpha\}$$

**定理 5.1** (1)  $\|\cdot\|$  は連続写像  $\|\cdot\| : H^1(M; \mathbb{R}) \cong H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  に拡張してベクトル空間  $H^1(M; \mathbb{R})$  上の擬ノルムを定める。さらに, もし非自明なホモロジー類を表す  $M$  に適切に埋め込まれた任意のコンパクト有向曲面が負のオイラー標数を持つなら,  $\|\cdot\|$  はノルムである。

(2)  $\|\cdot\|$  がノルムである時, 単位球

$$B_M = \{\alpha \in H^1(M; \mathbb{R}) \mid \|\alpha\| \leq 1\}$$

は有限個の面からなる多面体で, しかもその頂点集合は有理点からなる。

(3)  $\|\cdot\|$  がノルムであるとする。 $B_M$  の有限個の余次元 1 の面  $F_1, \dots, F_n$  で次の条件をみたすものが存在する。

1.  $F_i$  の原点からのコーン  $\mathbb{R}_+ \cdot F_i$  の内部に含まれる任意の整数点はファイバー類になる。
2. 逆に, 任意のファイバー類はあるコーン  $\mathbb{R}_+ \cdot F_i$  に含まれる。

上の定理において, 各  $F_i$  をファイバー面と呼ぶ。ファイバー面  $F$  に対して, そのコーン  $\mathbb{R}_+ \cdot F$  の内部に含まれる無限個のファイバー構造を統一的に扱う研究が, Fried, Long-Oertel, 松元重則, McMullen 等により行われている ([68] 及び参考文献参照)。Fried は, 有限体積双曲多様体  $M$  の各ファイバー面  $F$  に対して,  $M$  のラミネーションで, コーン  $\mathbb{R}_+ \cdot F$  の内部に含まれる任意のファイバー類に対してそのファイバー曲面と横断的に交わるもの, が存在することを証明し, McMullen は, その結果を用いてタイヒミュラー多項式  $\theta_F \in \mathbb{Z}[H^1(M; \mathbb{Z})]$  を導入した。

**定理 5.2** (1) コーン  $\mathbb{R}_+ \cdot F$  は,  $\theta_F$  のニュートン多面体の頂点集合の双対である。

(2) コーン  $\mathbb{R}_+ \cdot F$  に含まれる任意のファイバー類  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  に対して, それが定めるファイバー構造のモノドロミーである擬アノソフ写像の拡大係数  $K(\phi)$  は, 整数係数 1 変数多項式  $\phi(\theta_F)$  の最大実根である。

(3) 関数  $\phi \mapsto K(\phi)$  は, コーン  $\mathbb{R}_+ \cdot F$  上の実解析的凸関数に拡張する。

アレクサンダー多項式を用いて定義されるアレクサンダーノルムと Thurston ノルムは, ファイバー類に対しては同じであり, 更に, もしファイバー面に付随するラミネーションが横断的に向き付け可能なら, アレクサンダー多項式はタイヒミュラー多項式を割ることが示されている。(最初の主張は, ファイバー結び目のアレクサンダー多項式の次数は結び目の種数の 2 倍である, という古典的結果の一般化である。)

たった一つの双曲多様体が, 無限個のファイバー構造 (即ち, 擬アノソフ写像, 言い換えればモジュライ空間の閉測地線) を定めるのはとても面白い現象であり, この現象を出発点とした様々な興味深い研究が発表されている ([44, 57] 及び参考文献参照)。

## 6. バーチャル・ファイブレーション予想

### 6.1. バーチャル・ファイブレーション予想とその根拠

円周上の曲面束は非常に特別な3次元多様体であり、3次元多様体全体の中のほんの一部を占めるといえる。しかしながら、有限被覆を取るという操作を許すなら、任意の有限体積双曲3次元多様体が曲面束の構造を持つという、信じることができそうにない予想をThurstonは提案した。

**予想 6.1 (バーチャル・ファイブレーション予想)** 任意の有限体積双曲3次元多様体は、円周上の曲面束を有限被覆に持つ。

3次元多様体が種数2以上の曲面を境界を持つ場合や既約でない場合は、明らかに曲面束を有限被覆に持つことは不可能であり、またザイフェルト多様体に対しては、曲面束を有限被覆に持つための必要十分条件は、そのオイラー数が0となる事であるので、上の予想において、有限体積双曲構造を持つという仮定は本質的である。Thurstonがこのような一見非常識と思える予想を提案した背景には、後にAgolとCalegari-Gabaiにより証明されたチーム・エンド予想およびCanaryの被覆定理の帰結として得られる次の事実にある ([29, Corollary 8.1])。

**定理 6.2** 有限体積双曲3次元多様体  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$  の基本群  $\Gamma$  の任意の有限生成部分群  $\hat{\Gamma}$  は、次のいずれかの条件を満たす。

1. 幾何学的有限である
2. バーチャル・ファイバー群である。即ち、 $M$  のある有限被覆が曲面束の構造を持ち、 $\hat{\Gamma}$  はそのファイバー曲面の基本群である。

特に  $M$  が閉双曲3次元多様体であり、 $\hat{\Gamma}$  が閉曲面群（球面以外の有向閉曲面の基本群）であるときは、 $\hat{\Gamma}$  は擬フックス群であるか、あるいはバーチャル・ファイバー群である。また  $M$  が双曲結び目補空有間で  $\hat{\Gamma}$  が最小種数ザイフェルト曲面  $\Sigma$  の基本群であるときは、 $\hat{\Gamma}$  は擬フックス群であるか、あるいはファイバー群（従って  $\Sigma$  はファイバー曲面）である [37]。

### 6.2. Waldhausenの問題とその解決

もし予想6.1が正しいなら、任意の閉双曲3次元多様体は閉曲面群を部分群にもつことになるが、これは、3次元多様体論における長年の懸案であったWaldhausen[106]の問題が解決されることになる。

**問題 6.3 (Waldhausen)**  $M$  を既約な有向閉3次元多様体で、その基本群は無限群であるとする。このとき  $\pi_1(M)$  は閉曲面群を部分群に含むか？

バーチャル・ファイブレーション予想が解けた背景には、この問題に対するKahn-Markovic [51]による驚くべき精密な肯定的解答がある。

**定理 6.4 (Kahn-Markovic)**  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$  を閉双曲3次元多様体とする。このとき、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、 $\Gamma$  の部分群  $\Gamma_\epsilon$  で次の条件を満たすものが存在する。

1.  $\Gamma_\epsilon$  は擬フックス閉曲面群である。

2. 双曲曲面  $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma_\epsilon^{(0)}$  と  $(1 + \epsilon)$  擬等長写像  $g : \partial\mathbb{H}^3 \rightarrow \partial\mathbb{H}^3$  が存在し,  $\Gamma_\epsilon = g\Gamma_\epsilon^{(0)}g^{-1}$  が成立する。

条件2において  $\mathbb{H}^2$  は  $\mathbb{H}^3$  の全測地的部分空有間と同一視している。 $\epsilon > 0$  を限りなく小さな正数に選ぶと,  $\Gamma_\epsilon$  は限りなくフックス群に近く, そのため, その極限集合は限りなく真円に近い。 $\Gamma$  の元による  $\Gamma_\epsilon$  の共役を考えると,  $\partial\mathbb{H}^3$  の任意の点の近くにそれを取り囲む限りなく小さく限りなく真円に近い曲面群の極限集合が存在することになる。

### 6.3. 立方複体と閉3次元双曲多様体

バーチャル・ファイブレーション予想証明の鍵を握るのは, Wiseにより展開された立方複体 (cube complex) の理論である。立方複体 (cube complex) とは, ユークリッド立方体  $I^n = [-1, 1]^n$  の非交和から, それらの面を等長写像で貼り合わせて得られる胞体複体のことである ([43, Definition 2.1] 参照)。例えば,  $I^n$  において各対面を自然に貼り合わせると  $n$ 次元トーラス  $T^n$  を底空間とする胞体複体を得られるが, これは立方複体となっている。また1次元立方複体は, 各辺の長さが2であるような (多重辺やループ辺を許す) グラフに他ならない。連結な絡み目ダイアグラムから得られるデーレン複体 ([23, II.5.41]) は, 2次元立方複体であり, 絡み目外部のスパインを形作る。更に境界トーラスからデーレン複体への自然な写像の写像柱は絡み目外部に立方複体の構造を与える。ちなみに, 体積予想で重要な役割を果たす結び目補空間の Thurston-横田分解 ([109] 参照) は, この立方複体から構成される。

立方複体  $X$  が非正曲率であるとは, グロモフ条件「各頂点のリンクが旗単体的複体である」を満たすときをいう。ここで, 旗単体的複体とは, 単体的複体  $L$  で,  $L$  の頂点集合の部分集合  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  の任意の2点が互いに辺で結ばれているなら, それが  $k$ 単体の頂点集合となっているものである。例えば, 2つの正方形をその境界で貼り合わせて得られる立方複体  $X_0$  の任意の頂点のリンクは2つの頂点を2つの辺でつないでできるグラフであり, 単体的複体ではないので,  $X_0$  は非正曲率ではない。3次元立方体の境界  $\partial I^3$  の任意の頂点のリンクは, 2単体の境界と同型な単体的複体であるが, 旗単体的複体ではないので, 立方複体  $\partial I^3$  は非正曲率ではない。 $I^2$  の対辺を自然に同一視してできる  $T^2$  を底空間とする立方複体  $X_1$  の頂点のリンクは, 長さが4のサイクルが作る旗単体的複体であるので,  $X_1$  は非正曲率である。有向閉曲面  $\Sigma_g$  ( $g \geq 2$ ) のパンツ分解において, 各々のパンツを2つの六角形に分割することにより,  $\Sigma_g$  の六角形によるタイル貼りを得るが, この双対として得られる立方複体  $X_g$  の任意の頂点のリンクは長さが6のサイクルが作る旗単体的複体であるので,  $X_g$  ( $g \geq 2$ ) は非正曲率である。連結な絡み目ダイアグラムから得られるデーレン複体および立方複体が非正曲率であるための必要十分条件は, そのダイアグラムが既約かつ交代的であることである。この事実の結び目理論への興味深い応用が [10, 4] により与えられている。

3次元多様体  $M$  が本質的な曲面を含んでいるなら,  $\pi_1(M)$  は (1次元立方複体である) ツリーに作用する。曲面が埋め込まれていなくても基本群が単射になるように曲面が  $M$  にはめ込まれていたなら,  $\pi_1(M)$  は非正曲率立方複体に作用することを, Sageev [93] は Bass-Serre 理論の一般化として証明した。Bergeron-Wise [14] は, この理論と Kahn-Markovic の定理 6.4 を用いて, 任意の閉双曲3次元多様体  $M$  に対して, それとホモトピー同値な非正曲率立方複体  $X$  が存在することを証明した。交代結び目補空間のような特別な3次元多様体が, 非正曲率立方複体の構造を持つことだけでも十分面

白いが、任意の閉双曲多様体の基本群がある非正曲率立方複体  $X$  の基本群と同型である、というのは驚きである。

#### 6.4. 立方複体内の超平面と特別立方複体

立方複体  $X$  の各立方体  $[-1, 1]^n$  は  $n$  枚の超平面 (ある座標成分  $x_i = 0$  で与えられる) を持ち、これらの超平面は貼りあって  $X$  内にはめ込まれた“余次元 1”の立方複体を形作る。例えば、 $T^n = I^n / \sim$  では  $n-1$  枚の  $T^{n-1}$  を形作り、デーン複体から得られる結び目補空間を底空間とする立方複体では、デーン複体と 2 つのチェッカーボード曲面を得る。これらの超平面が全て埋め込みになっていて、しかも「その 1-近傍が、お互いに分離されている」ような立方複体を特別立方複体と呼ぶ。Haglund-Wise [43] は、任意の非正曲率特別立方複体はある Salvetti 複体  $S(\Gamma)$  に局所等長写像を持ち、従ってその基本群  $\pi_1(X)$  は直角アルティン群  $A(\Gamma)$  に埋め込まれることを証明した。ここで、直角アルティン群  $A(\Gamma)$  とは (多重辺やループ辺を持たない) 有限グラフ  $\Gamma$  から群表示

$$A(\Gamma) = \langle v \in V(\Gamma) \mid [v, w] \quad (\{v, w\} \in E(\Gamma)) \rangle$$

で定まる群のことであり、Salvetti 複体  $S(\Gamma)$  は、この群表示に付随する 2 次元胞体複体に、3 次元以上の立方体を適切に貼り付けて得られる非正曲率立方複体である。ここで任意の直角アルティン群は、ある直角コクセター群

$$C(\Gamma') = \langle v \in V(\Gamma') \mid v^2, [v, w] \quad (v \in V(\Gamma'), \{v, w\} \in E(\Gamma')) \rangle$$

埋め込まれる。

直角コクセター群  $C(\Gamma')$  は *virtually RFRS* (residually finite rationally solvable) と呼ばれる極めて良い性質を持っている [5, Theorem 2.2]。即ち、 $C(\Gamma')$  のある有限指数部分群は  $G$  は、以下の条件を満たす可解列を持つ:  $G = \pi_1(Y)$  とすると、cofinal な有限巡回被覆の列  $Y \leftarrow Y_1 \leftarrow Y_2 \leftarrow Y_3 \leftarrow \dots$  が存在し、各有限巡回被覆  $Y_{i+1} \rightarrow Y_i$  は、無限巡回被覆  $\tilde{Y}_{i+1} \rightarrow Y_i$  の商として得られる。ここで、cofinal であるとは、 $\pi_1(Y_i)$  を  $\pi_1(Y)$  の部分群とみなしたときに、 $\bigcap_{i=1}^{\infty} \pi_1(Y_i) = 1$  となることである。古典的結び目理論研究者にとって、無限巡回被覆の商として有限巡回被覆を構成するのは日常茶飯事であるが、(まず最初に適当に有限被覆をとってから) そのような操作の繰り返しの極限として普遍被覆が得られるという調子のよい性質が、*virtually RFRS* である。Agol [5] は、この性質が、バーチャル・ファイブレーションを持つための必要十分条件であることを示していた。

**定理 6.5 (Agol)**  $M$  をコンパクト既約有向 3 次元多様体で、 $\partial M$  は高々トーラスから成るとする。このとき、 $M$  が *virtually fibered* であるための必要十分条件は、 $\pi_1(M)$  が *virtually RFRS* であることである。

与えられた非分離的な曲面  $F$  がファイバー曲面であるための必要十分条件は、 $M$  を  $F$  で切り開いて作られる縫い目付き多様体  $M \setminus F$  が積縫い目付き多様体であることである。適切な被覆空間を取り、その中で生じる新しい 2 次元ホモロジー類で縫い目付き多様体を切り開いて、その複雑度を下げていき、ついには複雑度 0 の積縫い目付き多様体を見付けるというのが証明のアイデアである。有限巡回被覆  $Y_{i+1} \rightarrow Y_i$  に関する条件は、 $Y_i$  内に棲む縫い目付き多様体が、その有限巡回被覆  $Y_{i+1} \rightarrow Y_i$  へ持ち上がることを保証するために使われる。

そこで残るのは次の予想の証明となる。

**予想 6.6 (Wise)** 非正曲率立方複体  $X$  の基本群  $G$  が双曲群であるなら、 $X$  のある有限被覆  $\tilde{X}$  は特別非正曲率立方複体になる。

この予想は、Agol [7] により、以下の結果に基づく議論により証明された。

1. Virtually special hyperbolic group (特別非正曲率立方複体の基本群を有限指数部分群として含む双曲群) はバーチャル・ハーケン多様体の群論的類似であり、したがって、ハーケン多様体に対するヒエラルキーと類似の群論的ヒエラルキーを持つ双曲群の有限次拡大になっている (Wise [108])。
2. カスプ付き 3 次元双曲多様体に対する双曲的デーネン充填定理 (十分複雑なデーネン充填を施せば閉双曲多様体を得る) の群論的類似である、相対双曲群の「デーネン充填」に関する Malnormal Special Quotient Theorem (擬凸である Malnormal subgroup を周辺群とする相対双曲群に十分複雑な「デーネン充填」を施せば、双曲群を得る (Wise [108]))。

証明の最後のステップは、「Weak Separation Theorem」で存在を保証したある性質をもつ無限被覆を、一旦基本領域に切り分けてそのピースを使って同じ性質をもつ有限被覆を構成することからなる。

なお、カスプ付き双曲多様体の基本群は双曲的でないため、上の議論は適用できないが、Wise [108, Theorem 14.29] により、virtually special であること、即ち、有限被覆が特別非正曲率立方複体と同じ基本群をもつことが証明されている。従って、カスプ付き双曲多様体に対しても virtual fibration 定理は成立する。

Bestvina [16] が述べているように、この証明で特徴的なことは、たとえ閉双曲 3 次元多様体の基本群に限っても、3 次元多様体の世界の中だけでは Wise 予想を証明することは出来なくて、幾何学群論においてバーチャル・ハーケン多様体の類似を考える事により、証明が完成された事である。また、直角アルティン群は (自由群と自由アーベル群の間を補完する) 極めて特別な群であるにもかかわらず、任意の双曲閉 3 次元多様体の基本群を (その指数有限部分群を取れば) 埋め込みを許容するという事実は、印象的である。以上の議論はバーチャル・ファイブレーション予想の証明だけにとどまらず、様々な応用がある ([12, Chapter 5])。なお、バーチャル・ファイブレーション予想の背景と証明については、蒲谷祐一氏による素晴らしいノート [50] がある。

## 7. 曲面束とヘガード分解

任意の有向閉 3 次元多様体  $M$  は 2 つのハンドル体とその境界で貼り合わせるにより得られる。言い換えれば、 $M$  は 2 つのハンドル体  $V_1, V_2$  に分解できる。これをヘガード分解と呼び、 $\Sigma = \partial V_1 = \partial V_2$  をヘガード曲面と呼ぶ。境界があるコンパクト有向多様体に対しても、ハンドル体の代わりに圧縮体 ( $\Sigma \times [0, 1]$  の片側の境界に 2 ハンドル、3 ハンドルを貼り付けて得られる 3 次元多様体) を用いれば、同様の分解が得られ、これもヘガード分解と呼ばれる。3 次元球面内の絡み目  $(S^3, L)$  は 2 つの自明タングル (3 次元球体  $B^3$  とその中に自明に埋め込まれた弧  $t$  の対  $(B^3, t)$ ) に分解でき、これは橋分解と呼ばれる。これもヘガード分解の一種である。

筆者は、以下に述べる 3 つの理由により、ヘガード分解の構造と曲面束の構造には相通ずるところがあると考えている。また、その観点から、興味深いと思える問題がたくさん生じる。

(1) ファイバー構造: 曲面束は  $S^1$  上のファイバー構造である。それに対して、ヘガード分解は1次元軌道体  $\mathcal{I} := S^1/(z \sim \bar{z})$  上の特異曲面束と理解出来る。この軌道体の底空間  $|\mathcal{I}|$  は閉区間  $[-1, 1]$  で、両端点  $\{\pm 1\}$  が特異点である。特異点上のファイバーは、 $\Sigma/h$ , ただし  $h$  はヘガード曲面  $\Sigma$  上の1次元固定点集合を持つ向き逆転対合、と表される。この特異ファイバー構造を軌道体被覆  $S^1 \rightarrow \mathcal{I}$  で引き戻すと、円周上の曲面束を得る。これを言い換えれば、分岐ファイブレーション定理「任意の有向閉3次元多様体  $M$  は曲面束を2重分岐被覆に持つ」を得る [96, 26, 77, 13]。

(2) モノドロミー群: 円周上の曲面束  $M_\varphi$  はモノドロミー  $\varphi$  により決定され、それが生成するモノドロミー群  $\langle \varphi \rangle \subset \text{MCG}(\Sigma)$  は、以下の性質を持つ: ファイバー曲面上の2本の本質的単純閉曲線が  $M_\varphi$  の中でホモトピックとなる必要十分条件は、モノドロミー群の作用で写り合うことである。ヘガード分解  $M = V_1 \cup_\Sigma V_2$  に対しても、類似の性質をもつ「モノドロミー群もどき」が拡大写像類群  $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$  の部分群として以下のように定まる。各  $i = 1, 2$  に対して、 $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$  の元で、ハンドル体  $V_i$  の自己同相写像に拡張し、その拡張が  $V_i$  の恒等写像にホモトピックなもの全体が作る部分群を  $G_i$  とする。  $G_1$  と  $G_2$  が生成する  $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$  の部分群  $G$  は、下記の理由により「モノドロミー群もどき」と考えることが出来る。  $G$  の作用で写り合うヘガード曲面  $\Sigma$  上の2本の本質的単純閉曲線は  $M$  内でホモトピックである。しかも、ヘガード分解が十分高い Hempel 距離を持ち「有界組み合わせ構造」を持つときは、部分的にこの逆も成立する [85]。更に、2橋絡み目の2橋分解に対して、同様の群  $G$  を考えると、きちんと記述できる例外を除いて、その逆も成立する ([62] 及び参考文献参照)。また面白いことに、前述の分岐ファイブレーション定理で生じる曲面束のモノドロミー  $\varphi$  は、  $G_i$  に含まれる向き逆転対合  $h_i$  を使って  $\varphi = h_1 h_2$  と表せる。

(3) 表現空間における位置: 穴あきトーラス  $\Sigma = \Sigma_{1,1}$  に関する Keen-Seres [55] の理論により、擬フックス空間  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  はプリーツ部分多様体の族  $\{\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)\}_{(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta}$  が定めるプリーツ座標を持つ。ここで、  $\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$  はその凸核の2つの境界が測地的ラミネーション  $\lambda_\pm$  で折れ曲がった双曲曲面となる擬フックス表現全体が作る  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  の部分空間である。今、曲面束のファイバー群のエンディングラミネーションを  $(\lambda_-, \lambda_+)$  とすると、ファイバー群は  $\mathcal{P}(\lambda_-, \lambda_+)$  の「終点」(特別な境界点) となっている。一方、有理的プリーツ部分多様体  $\mathcal{P}(r_-, r_+)$  ( $r_\pm \in \mathbb{Q}$ ) は  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  の外部への自然な延長  $\hat{\mathcal{P}}(r_-, r_+)$  を持ち、その「終点」(特別な境界点) が、2橋結び目補空間基本群の2橋分解から定まる表現になっていることを [11] でアナウンスしている。つまりファイバー群が定める忠実離散表現とヘガード分解が定める忠実でない離散表現は、(少なくとも穴あきトーラスの世界では) プリーツ部分多様体 (の拡張の) 特別な境界点になっているのである。

一般に  $\Sigma$  をヘガード曲面とする双曲多様体  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$  の基本群  $\Gamma$  は  $\pi_1(\Sigma)$  の商群であるため、  $\pi_1(\Sigma)$  の忠実でない離散表現  $\rho_M$  の像として得られる。  $\mathcal{D}(\Sigma)$  を  $\pi_1(\Sigma)$  の離散表現全体から成る  $\mathcal{R}(\Sigma)$  の部分空間とすると、Mostow-Prasad 剛性定理により、  $\rho_M$  は  $\mathcal{D}(\Sigma) \setminus \mathcal{DF}(\Sigma)$  の孤立点である。しかしながら、ヘガード分解が十分複雑であるなら、クライン群の空間の孤島といえる  $\rho_M$  は、次のようにしてクライン群の空間の大陸である  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  と次のような航路で結ばれていると予想している。  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  の「有理的」プリーツ部分多様体  $\mathcal{P}(r_-, r_+)$  は  $\mathcal{QF}(\Sigma)$  の外部への自然な延長  $\hat{\mathcal{P}}(r_-, r_+)$  を持ち、  $\rho_M$  は (それに対応する)  $\hat{\mathcal{P}}(r_-, r_+)$  の「終点」(特別な境界点) となっている。有

限体積双曲多様体  $M$  は  $\Sigma \times [-1, 1]$  に 2 ハンドルと 3 ハンドルを貼り付けて得られるが、良い状況では、この位相的操作が、双曲的錐多様体の連続族により、幾何的に実現できるだろうというのが予想（願望）の意味である。この予想は、もっとも単純な場合は次の予想となる。

**予想 7.1 ([11])**  $K$  を  $S^3$  内のトンネル数 1 の双曲結び目とし、 $\tau$  を解消トンネルとする。このとき、 $S^3 \setminus K$  を底空間、 $\tau$  を錐軸とする双曲錐多様体の連続族で錐角が 0 から  $2\pi$  まで動くものが存在する。

この予想は、Adams 予想「双曲結び目の解消トンネルは測地線にイソトピックである」（ホモトピックであることは自明だがイソトピックかどうかは非自明であることに注意）[2] の精密化と考えることができる。尚、Adams 予想に関しては大きな進展が Cooper-Futer-Purcell [31] により得られている。

## 8. 今後の課題

**問題 8.1** (1) 表現空間  $\mathcal{R}(\Sigma)$  における離散表現全体がつくる部分空間（クライン群の空間） $\mathcal{D}(\Sigma)$  の配置を調べよ。特にどのような  $\mathcal{D}(\Sigma)$  の孤立点が錐多様体の連続族で  $\mathcal{DF}(\Sigma)$  に結ばれるか調べよ。

(2) 曲面  $\Sigma$  の代わりにハンドル体または自明タングル補空間を選んだときに同様の問題を考えよ。

2 系自明タングル補空間  $B^3 - t$  に対する上記の問題は 2 つの放物型変換が生成する群の研究と同値である。先駆者 Riley は、パンチカード時代のコンピュータ環境の下で大変な苦勞の末に、2 つの放物型変換が生成するクライン群の空間  $\mathcal{D}(B^3 - t) \subset \mathcal{R}(B^3 - t) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$  を特大用紙に描き、様々な予想を立てた ([11, Figure 0.2a], [91, 92] 参照)。特にそのようなクライン群の分類に関する予想は、ねじれ元のない場合は Adams [3] により、一般の場合については Agol [4] により証明されている ([63] 参照)。尚、どちらの証明も、Thurston の軌道体定理 ([19, 32] 参照) を本質的に使う。山下靖は、[11, Figure 0.2b] の中で  $\mathcal{D}(B^3 - t)$  及びその孤島を大陸に結ぶ絵を描いた。その絵に明らかに存在する美しいパターンに、我々がまだ知らない数学が隠されているのではないかと想像を逞しくしている。尚、この錐多様体を用いるアプローチは、Martin が推進しているプロジェクト「2 元生成算術的クライン群の決定」 ([66] 参照) に優れた効力を発揮することが山下靖により示されており、今後の進展が期待される。

Kim-Lecuire-Ohshika [56] はハンドル体  $V$  の基本群の表現空間  $\mathcal{R}(V)$  を研究し、特に  $V$  を一方のハンドル体とするようなヘガード分解を持つ双曲多様体のホロノミー表現全体の集積点集合（孤島全体の集積点集合）がショットキー空間（大陸）の境界に一致することを証明している。

**問題 8.2** 幾何化定理を精密化して、幾何構造を目で見えるようにせよ。

幾何化定理で幾何構造の存在は保証されるが、その幾何構造がいったいどのようなものであるかということ、まだわからないことだらけである。任意の結び目は結び目ダイアグラムで表現できるが、そのダイアグラムの組み合わせ情報がどれだけ幾何に反映されているであろうか？ 例えば、交差点が定める結び目補空間の弧は測地線にイソトピックか？ またそうだとすると、その測地線達の相互位置関係はダイアグラムで読み取れるものと同じか？ カスプから出てカスプに戻る“最短”測地線（そして最短

閉測地線) はダイアグラム上でどのように見えるか? という問題に関しては, 2橋結び目の場合を除けば, まだほとんど何もわかっていないようである。2橋結び目を特別な場合として含む交代絡み目に関しては, Menasco-Thistlethwaite[70] による Tait フライプ予想の解決により, それを表す(既約)交代ダイアグラムは, フライプを法として一意的なので, 交代ダイアグラムから得られる組み合わせ情報は, 幾何構造によく反映されると予想している。特に, 予想 7.1 の類似が交代絡み目補空間の交差点が定める弧に対して成立するのではないかと想像している。また逆に, Tait フライプ予想を双曲幾何の立場から(あるいは立方複体の観点から)証明することも可能かもしれない。

A'Campo[1] が, (複素)平面曲線の特異点のリンクとして得られる結び目の一般化として導入したディバイド結び目は, 特殊なモノドロミー(右ひねりデーンツイストの積)を持つファイバー結び目であり, その出自からしても極めて興味深い結び目である。この結び目補空間の双曲構造を目で見ることはできないだろうか?

Purcell は, この種の問題を“Effective Geometrization”または“WYSIWYG Topology: What you see is what you get”と呼び, Futer, Kalfagianni 等との共同研究で, この方向の研究を精力的に進めている。同じ思想のもとで, Namazi-Souto[83] はヘガード分解と幾何構造の関係に関する重要な研究成果を上げた。また, これを含む一般的な結果が Brock-Minsky-Namazi-Souto [25] により得られている。

**問題 8.3** 一般の表現に対するエンド不変量を研究せよ。

Bowditch[21] は(離散とも忠実とも限らない)一般の表現  $\rho \in \mathcal{R}(\Sigma_{1,1})$  に対してエンド不変量の集合  $\mathcal{E}(\rho) \subset \hat{\mathbb{R}}$  を定義した。 $\rho$  が忠実離散表現である時は,  $\mathcal{E}(\rho)$  は通常のエンド不変量からエンディング・ラミネーション成分だけを集めたものになっており, 特に  $\rho$  が擬フックス表現のときは  $\mathcal{E}(\rho) = \emptyset$  である。BQ 予想「 $\mathcal{E}(\rho) = \emptyset$  なら  $\rho$  は擬フックス表現か?」[21, Conjecture A] という極めて興味深い予想は, まだ未解決である。また  $|\mathcal{E}(\rho)| > 2$  となる時は, 一般にはコントロール集合になると予想されているが [99, Conjecture 1.8], そのような表現でエンド不変量の具体的な形が決定された唯一の例は, 2橋結び目の双曲構造に由来する表現のみである ([62] 参照)。予想「 $\mathcal{E}(\rho)$  が 2 つ以上の点を含み全体集合でもないときは, 表現の共役類がエンド不変量で決定されよう」[99, Conjecture 1.9] は, エンディング・ラミネーション予想の一般化とみなせて, とても興味深い, まだ何もわかっていない。

**問題 8.4** 双曲的穴あき曲面束の標準的理想胞体分割と変針理想単体分割を比較せよ。

Epstein-Penner[35] により, 有限体積カスプ付き双曲多様体は, 一意的に定まる幾何的理想胞体分割(標準的理想胞体分割)をもつことが示されている。2次元においては, 標準的分割のイソトピー型により双曲構造をグループにまとめることにより, タイヒミュラー空間の自然な分割を与えることができる ([22] 参照)。3次元以上においては, 双曲構造が一意的なので, 標準的分割の組み合わせ構造が有限体積カスプ付き双曲多様体の完全な位相不変量になる。精度保障付計算により標準的分割を求めるプログラム [46, 34] も開発されており, 様々な応用が与えられている。

一方, 擬アノソフモノドロミー  $\varphi \in \text{MCG}(\Sigma)$  の不変特異ユークリッド構造がカスプ以外に特異点を持たない時は, Agol[6] により,  $\varphi$  が生み出す力学系の観点から自然な  $M_\varphi$  の位相的理想単体分割(変針理想単体分割)が一意的に存在することが証明され

ている。Guéritaud [41] により、変針 (veering) 理想単体分割は、ファイバー群に付随する Cannon-Thurston 写像の性質をよく反映する Cannon-Thurston-Dicks フラクタルタイル貼りと密接な関係があることが示されており ([33] 参照)、その意味でも興味深い分割である。

それでは、 $M_\rho$  の 2 つの自然な分割の間にどのような関係があるのでしょうか？ 一般には、変針理想単体分割は幾何的分割ですらないことがあることがあるが [45]、穴あきトーラス束や、正負のホップバンドを交互にプラミングして得られる 2 橋ファイバー絡み目については、両者は一致する [94]。2 つの自然な分割の共通点と差異を解明するのは、興味深い問題である。

**問題 8.5** 楕円のモンテシノス結び目の球面的軌道体としての構造と、その補空間の双曲構造を、比較せよ。

楕円のモンテシノス絡み目  $K$  に対して、 $K$  で分岐する  $S^3$  の 2 重分岐被覆  $M$  は球的多様体  $S^3/G$  ( $G$  は  $S^3$  に等長かつ自由に作用する有限群) となり、その (有限) 普遍被覆空間  $\tilde{M}$  は再び  $S^3$  となる。 $\tilde{M} = S^3$  における  $K$  の逆像  $\tilde{K}$  は  $S^3$  の大円が作る絡み目となる [28, 95]。実際、二重分岐被覆  $M$  上の被覆変換は球面構造に関する等長変換であるので、その普遍被覆  $\tilde{M} = S^3$  への持ち上げと  $G$  が生成する群 ( $\pi$ -軌道体  $(S^3, K)$  の軌道体基本群 [20])  $\tilde{G}$  は  $S^3$  の等長変換群であり、 $\tilde{K}$  は  $\tilde{G}$  の特異集合である。このため、 $\tilde{K}$  の  $S^3$  における配置は、かっちりと決まり、この意味で、 $S^3 \setminus \tilde{K}$  には球面座標が入る。一方、一般的には楕円のモンテシノス絡み目  $K$  は双曲絡み目なので、 $S^3 \setminus \tilde{K}$  には一意的に双曲構造が入る。この双曲構造を球面座標の下で書き下すことはできるであろうか？  $S^3 \setminus \tilde{K}$  が同時に併せ持つ、かっちりとした球面座標と双曲座標を比較するのは大切な問題だと 30 年以上思い続けているが、また吉田正章氏の論説 [110] に鼓舞されたこともあったが、残念ながらまだ何の進展もない。しかしながら、せめて  $\tilde{K}$  が  $S^3$  内で「良い位置」にあることを確認したいと思い、結び目のエネルギーを定義するという問題を提案したところ、福原真二氏の先行研究 [38] に触発された今井 (大原) 淳氏が結び目のエネルギーの理論を打ち立てられた [84] のは望外の喜びであった。

ちなみに、この大円絡み目から、簡単だが面白い次の 2 つの話が生まれていた。通常 2 橋絡み目の分類には、Schubert による 2 橋球面の一意性の証明、またはライデマイスター・トーションによる (2 重分岐被覆である) レンズ空間の分類定理を必要とするが、実は大円絡み目  $\tilde{K}$  の絡み数という単純な不変量だけで分類が可能である [27]。大円絡み目の補空間は容易に曲面束の構造を持つことがわかるのに対し、楕円のモンテシノス絡み目は一般にはファイバー絡み目でないので、ここから直ちにバーチャル・ファイブレーション予想の非自明な例が生まれる [107]。同様のアイデアにより多くの (楕円的ではない) モンテシノス絡み目補空間もバーチャル・ファイブレーションを持つことが示されている [9, 42]。

**問題 8.6 (Long-Reid)** 2 つの結び目群が同型な副有限完備化 (profinite completion) を持てば、その 2 つの結び目群は同型か？

一般に群  $G$  の副有限完備化とは、その有限商群全体が作る逆系の逆極限のことである。上の問題は次のようにも言い換えることができる：結び目群  $G(K) = \pi_1(S^3 \setminus K)$  に

対して、その有限商群全体の集合を  $Q(G(K))$  とする。2つの結び目群  $G(K_1), G(K_2)$  に対して  $Q(G(K_1)) = Q(G(K_2))$  なら  $G(K_1) \cong G(K_2)$  か？

Boileau と Friedl は、上の問題を「3次元多様体の基本群の副有限完備化から3次元多様体のどのような性質が引き出せるか？」という広い観点で捉えることにより、様々な研究成果を挙げつつある ([18] 参照)。

筆者がこの問題に興味を持ったのは、児玉宏児氏との共同研究 [59] がきっかけとなっている。そこでは互いにミュータントな結び目の対を区別する必要があるがあった。我々が取った方法は、結び目  $K$  で分岐する  $S^3$  の分岐被覆のうち、与えられた有限次数  $d$  をもつものを全部書き上げ、その1次元ホモロジーを比較するというものである。(計算の実行は児玉氏が開発していたコンピュータソフト [58] で行った。) この方法で15組のミュータント対を調べたところ、14組は  $d=5$  で区別がつき、残りの1組は  $d=6$  で区別がついた。児玉氏のソフトのおかげで計算できたとはいえ、このような小さな次数の分岐被覆を比較するだけで複雑な結び目の対を区別できたのは驚きであった。また歴史的には、Perko [88] が分岐被覆のホモロジー不変量を用いて10交点までの素結び目の分類を完成させたという経緯もある。そこで、次の問題を提案したい。

**問題 8.7** (1) 相異なる2つの素結び目は、上の様にその有限分岐被覆を調べることにより区別できるか？

(2) 上の (1) において、被覆の次数をあらかじめ評価することができるか？例えば、2つの結び目の交点数が共に  $n$  以下であるなら (または体積が  $n$  以下であるなら)、 $n$  だけで決まる評価可能な自然数  $d(n)$  が存在して、次数  $d(n)$  以下の分岐被覆を調べただけで、2つの結び目を区別できるか？

(3) 問題8.6直後に述べた言い換えにおいて、上の (2) と同様に、考える有限商群の位数を、2つの結び目群の複雑度であらかじめ決まる定数  $d$  で抑えることができるか？

上で述べたように、結び目で分岐する3次元球面の分岐被覆のホモロジー群を調べるのは、結び目理論における極めて有効な常套手段であったが、すべての有限分岐被覆を考えて、その漸近挙動を調べると、想像を絶するようなことが起こることが Le [61] により明らかにされた。

**定理 8.8 (Le)** (1)  $K$  を  $S^3$  内の結び目、 $X = S^3 \setminus K$  とする。結び目群  $\Pi = G(K)$  の有限指数部分群  $\Gamma$  に対して、 $\hat{X}_\Gamma$  を  $K$  で分岐する  $S^3$  の  $\Gamma$ -分岐被覆とする。この時、次が成り立つ。

$$\limsup \frac{\ln \operatorname{Tor} H_1(\hat{X}_\Gamma; \mathbb{Z})}{[\Pi : \Gamma]} \leq \frac{\operatorname{vol}(X)}{6\pi}$$

(2)  $X$  を有向コンパクト既約3次元多様体で  $\partial X$  は高々トーラスからなるとする。基本群  $\Pi = \pi_1(X)$  の有限指数部分群  $\Gamma$  に対して、 $X_\Gamma$  を  $X$  の  $\Gamma$ -被覆とする。この時、次が成り立つ。

$$\limsup \frac{\ln \operatorname{Tor} H_1(X_\Gamma; \mathbb{Z})}{[\Pi : \Gamma]} \leq \frac{\operatorname{vol}(X)}{6\pi}$$

但し、 $\operatorname{vol}(X)$  は  $X$  の双曲ピースの体積の和である。

更に、Le は上の定理で等号が成立することを予想しているのである。Kashaev-村上-村上順 [53, 82] の体積予想にも驚愕したが、昔馴染みの有限被覆のホモロジー群にこのような側面があるのを知って、ただただ恐れ入るばかりである。

## 9. おわりに

筆者は神戸大学理学部および大学院修士課程で細川藤次先生と鈴木晋一先生のご指導を、そして大阪市立大学大学院博士課程で田尾鶉三先生と河内明夫先生のご指導を受ける幸運に恵まれました。結び目理論が盛んになり出した頃に、四先生のご指導の下、先輩・同輩・後輩と一緒に、のびのびと結び目理論の勉強と研究に勤しめたのは本当に幸せなことでした。因みに、お世話になった四先生全員が寺阪英孝先生の直接のお弟子さんでした。筆者は四重の意味で寺阪先生の孫弟子と言えます。

細川藤次先生は2014年11月27日に、田尾鶉三先生は2016年5月11日に、永眠されました。拙い論説ではありますが、両先生の御冥福を心よりお祈り申し上げ、この論説を両先生に捧げます。

## 参考文献

- [1] N. A'Campo, *Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **88** (1998), 151–169 (1999).
- [2] C. Adams, *Unknotting tunnels in hyperbolic 3-manifolds*, Math. Ann. **302** (1995), 177–195.
- [3] C. Adams, *Hyperbolic 3-manifolds with two generators*, Comm. Anal. Geom. **4** (1996), 181–206.
- [4] I. Agol, *The classification of non-free 2-parabolic generator Kleinian groups*, Slides of talks given at Austin AMS Meeting and Budapest Bolyai conference, July 2002, Budapest, Hungary.
- [5] I. Agol, *Criteria for virtual fibering*, J. Topol. **1** (2008), 269–284.
- [6] I. Agol, *Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori*, Topology and geometry in dimension three, 1–17, Contemp. Math., **560**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [7] I. Agol, *The virtual Haken conjecture. With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning*, Doc. Math. **18** (2013), 1045–1087.
- [8] I. Agol, *Virtual properties of 3-manifolds*, Talk at ICM 2014, Seoul.
- [9] I. Agol, S. Boyer, X. Zhang, *Virtually fibered Montesinos links*, J. Topol. **1** (2008), 993–1018.
- [10] I. R. Aitchison, E. Lumsden and J. H. Rubinstein, *Cusp structures of alternating links*, Invent. Math. **109** (1992), 473–494.
- [11] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, Lecture Notes in Mathematics **1909**, Springer, Berlin, 2007.
- [12] M. Aschenbrenner, S. Friedl and H. Wilton, *3-manifold groups*, EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. xiv+215 pp.
- [13] D. Auckly, *Two-fold branched covers*, J. Knot Theory Ramifications **23** (2014), 1430001, 29 pp.
- [14] N. Bergeron and D. Wise, *A boundary criterion for cubulation*, Amer. J. Math. **134** (2012), 843–859.
- [15] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot and J. Porti, *Geometrisation of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics, **13**, European Mathematical Society, Zurich, 2010. Available at <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~labessier/book.pdf>
- [16] M. Bestvina, *Geometric group theory and 3-manifolds hand in hand: the fulfillment of Thurston's vision*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2014), 53–70.
- [17] J. S. Birman and C. Series, *Geodesics with bounded intersection number on surfaces are sparsely distributed*, Topology **24** (1985), 217–225.

- [18] M. Boileau, *Three Lectures on profinite completions of 3-manifold groups*, Lecture at the workshop, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2016, Hiroshima Univ.. available at <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/index2016.html>
- [19] M. Boileau and J. Porti, *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type. Appendix A by Michael Heusener and Porti*, *Astérisque* **272** (2001), 208 pp.
- [20] M. Boileau and B. Zimmermann, *The  $\pi$ -orbifold group of a link*, *Math. Z.* **200** (1989), 187–208.
- [21] B. H. Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups*, *Proc. London Math. Soc.* **77** (1998), 697–736.
- [22] B. Bowditch and D. B. A. Epstein, *Natural triangulations associated to a surface*, *Topology* **27** (1988), 91–117.
- [23] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1999. xxii+643 pp.
- [24] J. Brock, R. Canary and Y. Minsky, *The classification of Kleinian surface groups, II: The ending lamination conjecture*, *Ann. of Math.* **176** (2012), 1–149.
- [25] J. Brock, Y. Minsky, H. Namazi and J. Souto, *Bounded combinatorics and uniform models for hyperbolic 3-manifolds*, arXiv. Math. 1312.2293, to appear in *Journal of Topology*.
- [26] R. Brooks, *On branched coverings of 3-manifolds which fiber over the circle*, *J. Reine Angew. Math.* **362** (1985), 87–101.
- [27] G. Burde, *Verschlingungsinvarianten von Knoten und Verkettungen mit zwei Brücken*, *Math. Z.* **145** (1975), 235–242.
- [28] G. Burde, *Links covering knots with two bridges*, *Kobe J. Math.* **5** (1988), 209–219.
- [29] R. D. Canary, *Marden’s tameness conjecture: history and applications*, *Geometry, analysis and topology of discrete groups*, 137–162, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 6, Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [30] J. W. Cannon and W. P. Thurston, *Group invariant Peano curves*, *Geom. Topol.* **11** (2007), 1315–1355.
- [31] D. Cooper, D. Futer and J.S. Purcell, *Dehn filling and the geometry of unknotting tunnels*, *Geom. Topol.* **17** (2013), 1815–1876.
- [32] D. Cooper, C. D. Hodgson and S. P. Kerckhoff, *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds. With a postface by Sadayoshi Kojima*, *MSJ Memoirs*, **5**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000. x+170 pp.
- [33] W. Dicks and M. Sakuma, *On hyperbolic once-punctured-torus bundles III: comparing two tessellations of the complex plane*, *Topology Appl.* **157** (2010), 1873–1899.
- [34] N. Dunfield, N. Hoffman and J. Licata, *Asymmetric hyperbolic L-spaces, Heegaard genus, and Dehn filling*, *Math. Res. Letters* (to appear), 19 pages, arXiv:1407.7827.
- [35] D. B. A. Epstein and R.C Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, *J. Differential Geom.* **27** (1988), 67–80.
- [36] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, *Princeton Mathematical Series*, **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. xiv+472.
- [37] S.R. Fenley, *Quasi-Fuchsian Seifert surfaces*, *Math. Z.* **228** (1998), 221–227.
- [38] S. Fukuhara, *Energy of a knot*, *A fête of topology*, 443–451.
- [39] D. Gabai, R. Meyerhoff and P. Milley, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds*, *The Poincaré conjecture*, 65–79, *Clay Math. Proc.* **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [40] W. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, *Invent. Math.* **93** (1988), 557–607.
- [41] F. Guéritaud, *Veering triangulation and Cannon-Thurston maps*, arXiv:1506. 03387.

- [42] X. Guo, *Two classes of virtually fibered Montesinos links of type  $\tilde{S}L_2$* , J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), 1250066, 50 pp.
- [43] E. Haglund and D. T. Wise, *Special cube complexes*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), 1551–1620.
- [44] E. Hironaka, *Fibered faces and the dynamics of mapping classes in special subgroups of the mapping class group*, Lecture at the workshop, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2012, Hiroshima Univ.. available at <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/branched/index2012.html>
- [45] C. D. Hodgson, A. Issa, and H. Segerman, *Non-geometric veering triangulations*, arXiv:1406.6439.
- [46] N. Hoffman, K. Ichihara, M. Kashiwagi, H. Masai, S. Oishi and A. Takayasu, *Verified computations for hyperbolic 3-manifolds*, Exp. Math. **25** (2016), 66–78.
- [47] Y. Iwayoshi, and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Translated and revised from the Japanese by the authors. Springer-Verlag, Tokyo, 1992. xiv+279.
- [48] K. Ito, *Convergence and divergence of Kleinian punctured torus groups*, Amer. J. Math. **134** (2012), 861–889.
- [49] T. Jorgensen, *Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle*, Ann. of Math. **106** (1977), 61–72.
- [50] 蒲谷祐一, *Agolによる virtual fibering conjecture の解決について*, 次より入手可能 : <http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kabaya/index.html>
- [51] J. Kahn and V. Markovic, *Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold*, Ann. of Math. **175** (2012), 1127–1190.
- [52] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics, **183**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. xxvi+467
- [53] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys., **39** (1997), 269–275.
- [54] A. Kawachi, *A survey of knot theory*, Translated and revised from the 1990 Japanese original by the author. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. xxii+420 pp.
- [55] L. Keen and C. Series, *Pleating invariants for punctured torus groups*, Topology **43** (2004), 447–491.
- [56] I. Kim, Inkang, C. Lecuire and K. Ohshika, *Primitive stable closed hyperbolic 3-manifolds*, Topology Appl. **172** (2014), 68–71.
- [57] E. Kin and M. Takasawa, *The boundary of a fibered face of the magic 3-manifold and the asymptotic behavior of minimal pseudo-Anosov dilatations*, to appear in Hiroshima Math. J.
- [58] 児玉宏児, *Knot Program*, available at <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/knot.html>
- [59] K. Kodama and M. Sakuma, *Symmetry groups of prime knots up to 10 crossings*, Knots 90 (Osaka, 1990), 323–340, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [60] 小島定吉, *Thurston の ‘怪物定理’ について*, 数学 **34** (1982) 301–316.
- [61] T. Le, *Growth of homology torsion in finite coverings and hyperbolic volume*, Preprint arXiv:1412.7758.
- [62] D. Lee and M. Sakuma, *A variation of McShane’s identity for 2-bridge links*, Geom. Topol. **17** (2013), 2061–2101.
- [63] D. Lee and M. Sakuma, *Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups (I)*, Hiroshima Math. J. **43** (2013), 239–264.
- [64] A. Marden, *Deformations of Kleinian groups*, Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 41–446, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

- [65] A. Marden, *Outer circles. An introduction to hyperbolic 3-manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xviii+427 pp.
- [66] G. J. Martin, *The geometry and arithmetic of Kleinian groups*, Handbook of group actions. Vol. I, 411–494, Adv. Lect. Math. (ALM), **31**, Int. Press, Somerville, MA, 2015.
- [67] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. x+253.
- [68] C. T. McMullen, *Polynomial invariants for fibered 3-manifolds and Teichmüller geodesics for foliations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **33** (2000), 519–560.
- [69] C. T. McMullen, *The evolution of geometric structures on 3-manifolds*, The Poincaré conjecture, 31–46, Clay Math. Proc., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [70] W. Menasco and M. Thistlethwaite, *The classification of alternating links*, Ann. of Math. **138** (1993), 113–171.
- [71] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 9–24.
- [72] Y. N. Minsky, *The classification of punctured-torus groups*, Ann. of Math. **149** (1999), 559–626.
- [73] Y. N. Minsky, *End invariants and the classification of hyperbolic 3-manifolds*, Current developments in mathematics, 2002, 181–217, Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [74] Y. Minsky, *The classification of Kleinian surface groups. I. Models and bounds*. Ann. of Math. **171** (2010), 1–107.
- [75] M. Mirzakhani, *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Ann. of Math. **168** (2008), 97–125.
- [76] M. Mj, *Cannon-Thurston maps for surface groups*, Ann. of Math. **179** (2014), 1–80.
- [77] J. M. Montesinos, *On 3-manifolds having surface-bundles as branched coverings*, Proc. A.M.S. **101** (1987), 555–558.
- [78] J. Morgan and G. Tian, *The geometrization conjecture*, Clay Mathematics Monographs, **5**. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2014. x+291 pp.
- [79] 森元勘治, 3次元多様体入門, 1996, 培風館. 次より入手可能 : <http://tunnel-knot.sakura.ne.jp/3-manifolds.html>
- [80] D. Mumford, C. Series, and D. Wright, *Indra’s pearls. The vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, New York, 2002. xxiii+374 pp.
- [81] D. Mumford, C. Series, and D. Wright, インドラの真珠 クラインの夢見た世界, 小森洋平訳, 日本評論社 2012. xx+396 pp.
- [82] H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. **186** (2001), 85–104.
- [83] H. Namazi and J. Souto, *Heegaard splittings and pseudo-Anosov maps*, Geom. Funct. Anal. **19** (2009), 1195–1228.
- [84] J. O’Hara, *Energy of a knot*, Topology **30** (1991), 241–247
- [85] K. Ohshika and M. Sakuma, *Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions*, Geom. Dedicata **180** (2016), 117–134.
- [86] J.P. Otal, *The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds*, Translated from the 1996 French original by Leslie D. Kay. SMF/AMS Texts and Monographs, **7**, American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2001. xiv+126 pp.
- [87] J. P. Otal, *William P. Thurston: “Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry”* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **116** (2014), 3–20.

- [88] K. A. Perko, *On the classification of knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 262–266.
- [89] J. Purcell, *Research Statement*, available at <http://users.monash.edu/~jpurcell/jpurcell-research2014.pdf>
- [90] R. Riley, *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 281–288.
- [91] R. Riley, *Algebra for Heckoid groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **334** (1992), 389–409.
- [92] R. Riley, *A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements. With a postscript by M. B. Brin, G. A. Jones and D. Singerman*, Expo. Math. **31** (2013), 104–115.
- [93] M. Sageev, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*, Proc. London Math. Soc. **71** (1995), 585–617.
- [94] N. Sakata, *Veering structures of the canonical decompositions of hyperbolic fibered two-bridge link complements*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **25** (2016), 1650015, 34 pages.
- [95] M. Sakuma, *The geometries of spherical Montesinos links*, Kobe J. Math. **7** (1990), 167–190.
- [96] M. Sakuma, *Surface bundles over  $S^1$  which are 2-fold branched cyclic coverings of  $S^3$* , Math. Sem. Notes Kobe Univ. **9** (1981), 159–180.
- [97] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401–487.
- [98] 相馬輝彦, 位相的クライン群論の最近の話題, 数学 **62**(2010), 18–39.
- [99] S. P. Tan, Y. L. Wong, and Y. Zhang, *End invariants for  $SL(2, \mathbb{C})$  characters of the one-holed torus*, Amer. J. Math. **130** (2008), 385–412.
- [100] 寺阪英孝, 非ユークリッド幾何の世界 幾何学の原点をさぐる, 講談社〈ブルーバックス ; B312〉, 1977年5月.
- [101] W. P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381.
- [102] W. P. Thurston, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), no. 339, i–vi and 99–130.
- [103] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.
- [104] M. Wada, *OPTi*, Computer Software available at <http://delta-mat.ist.osaka-u.ac.jp/OPTI/>
- [105] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968) 56–88.
- [106] F. Waldhausen, *Some problems on 3-manifolds*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 313–322, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.
- [107] G.S. Walsh, *Great circle links and virtually fibered knots*, Topology **44** (2005), 947–958.
- [108] D. Wise, *The Structure of Groups with a Quasiconvex Hierarchy*, 187pp. 2011.
- [109] Y. Yokota, *On the potential functions for the hyperbolic structures of a knot complement*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 303–311 (electronic), Geom. Topol. Monogr., **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [110] 吉田正章, 又曲型鏡映群と不変式の一例, 双曲空間とその関連分野 II, 数理解析研究所講究録 (2000), **1163**, 103–108.

# 写像類群上のランダムウォーク

正井 秀俊 (東京大学, 日本学術振興会特別研究員PD)\*

曲面  $S$  の写像類群  $MCG(S)$  の上のランダムウォークを考える。ランダムウォークにより“ランダム”に写像類を生成することができる。もう少し正確に言うと、ランダムに複雑さを増していく写像類の列を得ることができる(写像類群の任意の元が等確率で生成されるような枠組みではないことに注意する)。これにより、写像類群の統計的な情報を研究することができる。また、写像類から写像トーラスや Heegaard 分解を考えることにより、3次元多様体を生成することもでき、複雑さを増していく3次元多様体の列をランダムウォークから得ることができる。本予稿ではまず、群の上のランダムウォークについて、定義を与える。その後、写像類群上のランダムウォークについて知られている事実をいくつか紹介する。

## 1. 群上のランダムウォーク

### 1.1. 定義

離散群  $G$  を考える。群の上でのランダムウォークを考えることは、無限列の集合である  $G^{\mathbb{Z}_{>0}}$  の上の確率測度を考えることである。確率測度は、標本空間と可測集合全体の集合である  $\sigma$ -代数に対して定義されることを思い出す(例えば[舟木]を参照のこと)。まず、今回考える  $\sigma$ -代数の生成系となるシリンダー集合を定義する。群の元  $x_1, \dots, x_n \in G$  によって与えられるシリンダー集合  $[x_1, \dots, x_n]$  は次のように与えられる。

$$[x_1, \dots, x_n] := \{\omega = (\omega_i) \in G^{\mathbb{Z}_{>0}} \mid \omega_i = x_i \text{ for } 1 \leq i \leq n\}.$$

シリンダー集合全体で生成される  $\sigma$ -代数を  $\mathcal{B}$  と書く。この  $\mathcal{B}$  は、 $G$  に離散位相を与え、 $G^{\mathbb{Z}_{>0}}$  に直積位相を与えた際の、ボレル集合族と一致する。

確率測度  $\mu : G \rightarrow [0, 1]$  とは、ここでは単に  $\sum_{g \in G} \mu(g) = 1$  を満たす写像である。Kolmogorov 拡張定理([舟木]の7章など)により、確率測度  $\mu$  は  $G^{\mathbb{Z}_{>0}}$  上の  $\mathcal{B}$  に関する確率測度  $\mathbb{P}$  をただ一つ定める。確率測度  $\mathbb{P}$  はシリンダー  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  に対して、

$$\mathbb{P}([x_1, x_2, \dots, x_n]) = \mu(x_1)\mu(x_1^{-1}x_2) \cdots \mu(x_{n-1}^{-1}x_n)$$

となる。この確率は群の単位元から出発したランダムウォークが、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  と順番に通っていく確率である。確率測度  $\mu$  は遷移確率と呼ばれる。この  $\mu$  を“サイコロ”とみなし、 $\mu$  で得られた新しい元を右からかけていくことで、今回考えているランダムウォークが得られる。群  $G$  の有限生成集合  $A$  上の一様測度が  $\mu$  の例である。その場合はランダムウォークは Cayley グラフ上のランダムウォークとなる。群やグラフの上のランダムウォークの様々な話題に関しては [Wo] など参照されたい。

本研究は科研費(課題番号: 15J08142)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M60, 37B40

キーワード: 写像類群, ランダムウォーク

\* 〒153-8914, 東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: masai@ms.u-tokyo.ac.jp

### 1.2. 群作用と有限一次モーメント

群  $G$  が連結距離空間  $(X, d_X)$  に等長に作用しているとする. 元  $g \in G$  の *translation* 距離  $\tau(g)$  とは  $x \in X$  に対し,

$$\tau(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_X(x, g^n x)}{n}$$

と定義される量である (三角不等式によりこの量は  $x \in X$  によらない).

確率測度  $\mu$  が  $d_X$  に関して有限一次モーメントを持つとは, 任意の  $x \in X$  に対して

$$\sum_{g \in G} \mu(g) d_X(x, gx) < \infty$$

となることを言う. Kingman の劣加法的エルゴード定理 (Kingman's subadditive ergodic theorem) により,  $\mu$  が有限一次モーメントを持つ場合,  $\mathbb{P}$ -a.e.  $\omega = (\omega_n) \in G^{\mathbb{Z}_{>0}}$  に対して, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_X(x, \omega_n x)}{n}$$

が存在し, その値は  $x, \omega$  によらないことがわかる. この値をランダムウォークの  $d_X$  に関するドリフトと呼ぶ. ドリフトはランダムウォークの translation 距離とみなすことができる.

また, 群  $G$  が空間  $Y$  に作用している時,  $Y$  上の測度  $\nu$  が  $\mu$ -stationary であるとは, 任意の可測集合  $A$  に対して

$$\nu(A) = \sum_{g \in G} \mu(g) \nu(g^{-1}A)$$

が成り立つことをいう.  $\mu$ -stationary 測度は *harmonic* 測度ともよばれる.

## 2. 曲線複体と Teichmüller 空間

ここでは有限型の曲面  $S$ , すなわち種数  $g$  の閉曲面から  $n$  個の点を取り除いた曲面を考える. 以降  $3g-3+n > 0$  を仮定する. 曲面  $S$  の写像類群  $MCG(S) := \text{Homeo}^+(S)/\text{homotopy}$  を考える. 群の性質を研究する際に, 群が等長に作用する良い空間を見つけることは非常に有効であることが知られている (幾何学的群論). 写像類群が作用する良い空間として, 曲線複体や Teichmüller 空間などがある. 特に曲線複体は, 写像類群の “双曲性” をとらえるにあたり重要な空間である. 本節では, 曲線複体と Teichmüller 空間について概説する.

### 2.1. 曲線複体

曲面の上の自己交差を持たない閉曲線を単純閉曲線という. 単純閉曲線は1点もしくは取り除いた  $n$  個の点の一つにホモトピックでないとき本質的という. 以降, 単純閉曲線は自由ホモトピー類を指すこととする. 曲面  $S$  の曲線複体  $\mathcal{C}(S)$  は, 各頂点が本質的単純閉曲線に対応し,  $k$  個の頂点に対応する閉曲線が交差を持たない形で曲面上で実現できるとき,  $k$  次元の単体を貼るという条件で定義される複体である. 空間は「すべての三角形が細い」とき Gromov 双曲的と呼ばれる (詳しい定義は [BH, Bow1] などを参照されたい). 次の Masur-Minsky の結果は様々な応用が知られる重要なものである.

定理 2.1 ([MM1]). 有限型の曲面  $S$  の曲線複体  $\mathcal{C}(S)$  は Gromov 双曲的である.

群に対しても、有限生成系を固定し Cayley グラフを考えることで、Gromov 双曲性が議論できる。写像類群  $MCG(S)$  は Gromov 双曲的ではないことが知られている。しかしながら、曲線複体への作用から写像類群  $MCG(S)$  の“双曲性”を抽出することができる。写像類群上のランダムウォークの様々な結果は、Gromov 双曲群のランダムウォークについて知られている事実を曲線複体への作用を用いて写像類群に拡張する、という形で得られている（例えば [MT]）。本予稿では双曲群上のランダムウォークについては触れないが、Calegari による双曲群の定義を含めたサーベイ論文がある [Cal]。また、曲線複体は局所無限であるため議論に困難が生じる場合があることに注意する。この局所無限性から生まれる困難を回避する様々な試み（hierarchy [MM2], acylindricity [Bow2] など）が成功していることをコメントしておく。

## 2.2. Teichmüller 空間

Teichmüller 空間の正確な定義は [FLP, FM, IT] などに譲ることにし、ここでは簡単な説明をすることにとどめる。まず  $X$  をリーマン面もしくは双曲曲面であるとする（一意化定理、等温座標の理論を用いることにより曲面の上では複素構造と双曲構造は 1 対 1 に対応することに注意する。[IT] などを参照のこと）。同相写像  $f: S \rightarrow X$  により、 $S$  上に複素構造、もしくは双曲構造を定義することができる。これを標識付き複素または双曲構造という。Teichmüller 空間は曲面  $S$  上の標識付き複素構造、もしくは双曲構造全体を適切な同値関係で割った空間である。Teichmüller 空間には写像類群が標識の取り換えとして作用している。Teichmüller 空間には様々な距離が定義されているが、今回は次の二つの距離を考える。

- Teichmüller 距離  $d_T$ （複素構造の変形の度合いを測る）、
- Thurston の非対称距離  $d_a$ （双曲構造の変形の度合いを測る）。

この二つの距離の様々な比較をまとめた Papadopoulos-Théret [PT] などの文献がある。二つの距離は完全には一致しないが、Teichmüller 空間の“太い”部分では有限の誤差を除いて一致することが Choi-Rafi により示されている [CR]。[CR] の系として次の命題が成り立つ。

**命題 2.2.** 確率測度  $\mu: MCG(S) \rightarrow [0, 1]$  について次は同値。

- Teichmüller 距離  $d_T$  について有限一次モーメントを持つ。
- Thurston の非対称距離  $d_a$  について有限一次モーメントを持つ。

さらに、 $d_T$  についてのドリフトと  $d_a$  についてのドリフトも一致する。

Teichmüller 空間のコンパクト化を次のように与える。測度付き葉層とは曲面  $S$  上の葉層  $\mathcal{F}$  で有限個の特異点を持つものに、横断的測度  $\mu$  を与えたものである。実際には、各本質的単純閉曲線  $\alpha$  に対して値  $\inf\{\mu(a) \mid a \text{ は } \alpha \text{ の表現}\}$  を返す  $\mathbb{R}_{>0}^S$  の元としてとらえ、適切な同値関係を与えたものを考える。ここで  $\mathcal{S}(= \mathcal{C}^0(S))$  は本質的単純閉曲線全体の集合である。詳しくは上で挙げた文献 [FLP, FM, IT] を参照していただきたい。測度付き葉層全体の空間を  $\mathcal{MF}(S)$  と書き、測度を正の実数倍するという作用で射影化した空間を  $\mathcal{PMF}(S)$  と書く。 $\mathbb{R}_{>0}^S$  の射影化を考えることにより、Thurston は Teichmüller 空間  $\mathcal{T}(S)$  を  $\mathcal{PMF}(S)$  を用いてコンパクト化し、写像類群の作用が連続に拡張するこ

とを示した. これを Thurston コンパクト化といい  $\bar{\mathcal{T}}(S) := \mathcal{T}(S) \cup \mathcal{PMF}(S)$  とする.  $\mathcal{PMF}(S)$  の元  $(\mathcal{F}, \mu)$  は  $\mathcal{MF}(S)$  の元として, もし同じ葉層を持つ  $(\mathcal{F}, \mu') \in \mathcal{MF}(S)$  があつたとき, 必ず  $\mu = t\mu'$  がある  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  に対して成り立つとき, *uniquely ergodic* という.  $\mathcal{UE}(S) \subset \mathcal{PMF}(S)$  を *uniquely ergodic* な葉層全体の集合とする. 写像類群同様の Teichmüller 空間は Gromov 双曲的ではないが, 双曲空間と様々な類似が成り立つことが知られている ([Raf] など). 双曲空間の理想境界と Thurston コンパクト化の境界としての  $\mathcal{PMF}(S)$  を比べたとき, 特に良い類似が見られるのが  $\mathcal{UE}(S)$  である.

### 3. Nielsen-Thurston 分類

写像類  $\phi$  は Nielsen-Thurston 分類により

1. 周期的 ( $\exists n \neq 0$  s.t.  $\phi^n = \text{id}$ ),
2. 既約 ( $\exists \Omega \subset S$  1-submanifold s.t.  $\phi(\Omega) = \Omega$ ),
3. 擬アノソフ ( $\exists (\mathcal{F}_s, \mu_s), (\mathcal{F}_u, \mu_u) \in \mathcal{MF}(S), \exists \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  s.t.  $\phi(\mathcal{F}_s, \mu_s) = (\mathcal{F}_s, \mu_s/\lambda)$  かつ  $\phi(\mathcal{F}_u, \mu_u) = (\mathcal{F}_u, \lambda\mu_u)$ )

のいずれかとホモトピックである事が知られている ([Thu2, FLP, FM] など). 擬アノソフの  $\mathcal{F}_s$  を安定葉層,  $\mathcal{F}_u$  を不安定葉層と呼ぶ. これらは  $\mathcal{PMF}(S)$  の元として擬アノソフ  $\phi$  で固定されており,  $\text{Fix}(\phi) = \{\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_u\}$  が  $\mathcal{PMF}(S)$  で成り立つ. また,  $\mathcal{F}_s$  と  $\mathcal{F}_u$  は *uniquely ergodic* であることも知られている. Thurston コンパクト化の言葉で擬アノソフ  $\phi$  の安定葉層  $\mathcal{F}_s$  は次のように特徴づけられる. 任意の  $X (\neq \mathcal{F}_u) \in \bar{\mathcal{T}}(S)$  に対して,  $\bar{\mathcal{T}}(S)$  の元として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n X = \mathcal{F}_s.$$

同様に,  $X (\neq \mathcal{F}_s) \in \bar{\mathcal{T}}(S)$  の極限  $\phi^{-n}(X)$  は  $\mathcal{F}_u$  に収束する.

写像  $\phi: S \rightarrow S$  に対して写像トーラスは

$$S \times [0, 1] / (\phi(x), 0) \sim (x, 1)$$

として定義される. 擬アノソフは写像トーラスが双曲構造をもつことと同値であることが Thurston [Thu1] によって示されている.

擬アノソフの定義に現れる  $\lambda$  を擬アノソフの *dilatation* と呼ぶ. この dilatation は様々な特徴づけができる. その例として Thurston と Bers の定理をあげる.

**定理 3.1** (Thurston, [FLP] 参照). 写像類  $\phi$  を dilatation  $\lambda$  を持つ擬アノソフであるとする. 任意の本質的単純閉曲線  $\alpha$  と計量  $\rho$  に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(l_\rho(\phi^n(\alpha)))}{n} = \log \lambda$$

が成り立つ. ここで,  $l_\rho$  は  $\rho$  に関する  $\alpha$  の長さである.

**定理 3.2** ([Ber]). 写像類  $\phi$  を dilatation  $\lambda$  を持つ擬アノソフであるとする. 擬アノソフ  $\phi$  の Teichmüller 距離に関する translation 距離は  $\log \lambda$  と一致する.

#### 4. 写像類群上のランダムウォーク

写像類群の部分群  $H < \text{MCG}(S)$  が non-elementary であるとは、擬アノソフ写像  $\phi_1, \phi_2 \in H$  で  $\text{Fix}(\phi_1) \cap \text{Fix}(\phi_2) = \emptyset$  となるものが存在することをいう。

以降、確率測度  $\mu : \text{MCG}(S) \rightarrow [0, 1]$  で次のいずれかの条件を満たすものを考える。

条件 4.1. 確率測度  $\mu : \text{MCG}(S) \rightarrow [0, 1]$  は

- Teichmüller 空間上の Teichmüller 距離に関して有限一次モーメントを持つ、
- 台によって生成される群  $\langle \text{supp}(\mu) \rangle$  は non-elementary である。

条件 4.2. 確率測度  $\mu : \text{MCG}(S) \rightarrow [0, 1]$  は

- 台は有限個の元からなる。
- 台によって生成される群  $\langle \text{supp}(\mu) \rangle$  は non-elementary である。

ここで条件 4.2 は条件 4.1 よりも強い条件であることに注意する。漸近挙動の収束に関する定理 (Kingman の劣加法的エルゴード定理など) が条件 4.1 のもとで成り立つ。条件 4.2 を仮定することで、収束が指数的であることが証明できることが多々ある。その例として、次の Maher による結果がある。

定理 4.3 ([Mah3, Mah4]). 確率測度  $\mu$  は台が生成する部分群が non-elementary であると仮定する。この時、

$$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \in \text{MCG}(S) \mid \omega_n \text{ は擬アノソフ}) \rightarrow 1$$

が成り立つ。さらに、確率測度  $\mu$  が条件 4.2 を満たす場合、 $\mu$  にのみに依存する  $K > 0, c < 1$  が存在し

$$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \in \text{MCG}(S) \mid \omega_n \text{ は擬アノソフ}) \geq 1 - Kc^n$$

が成り立つ。

定理 4.3 をはじめとした、様々な定理を示す基本的な道具となっている Kaimanovich-Masur の結果を紹介する。

定理 4.4 ([KM]). 確率測度  $\mu$  は台が生成する部分群が non-elementary であると仮定する。このとき次が成り立つ。

- (1)  $\mathbb{P}$ -a.e.  $\omega = (\omega_n) \in \text{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$  に対して、極限

$$F(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n X$$

が存在し、 $F(\omega)$  は uniquely ergodic となる。

- (2) ある  $\mu$ -stationary 測度  $\nu$  が存在し、 $F(\omega)$  の分布は  $\nu$  で与えられる。さらにこの  $\nu$  は原子を持たない。

定理4.4の(1)は擬アノソフで成り立っている事実の、ランダムウォーク版とみなすことができる。定理4.4の(1)より、(2)の測度 $\nu$ は $\mathcal{UE}(S)$ でのみ値をとることがわかる。 $\mathcal{UE}(S)$ はKlarreich[Kla]により曲線複体 $\mathcal{C}(S)$ のGromov境界 $\partial\mathcal{C}(S)$ の部分集合としてみることもできる。そのため、(2)の測度 $\nu$ は $\partial\mathcal{C}(S)$ の上で定義されているとみなすこともできる。写像類群の曲線複体への作用により、写像類群上のランダムウォークから曲線複体上のランダムウォークを得ることができ、 $\partial\mathcal{C}(S)$ 上の測度 $\nu$ との相性が良く、様々な結果が得られている。

## 5. ランダム写像類の性質

ここでは、写像類群上のランダムウォークが漸近的に確率1で持つ性質として知られているものをまとめる。すべてを網羅しているわけではなく、また多くは条件4.1か4.2の下で成り立つが、細かい条件が必要な場合もある。詳しくは参照されている文献をご覧ください。

ランダムウォークで得られた写像類は漸近的に確率1で

- 擬アノソフである、写像トーラスが双曲構造を持つ [Kow, Mah3, Mah4, Riv1],
- Heegaard 分解で得られる多様体が双曲構造を持つ [Mah1, LMW],
- 1つ穴あき曲面の場合、写像トーラスが例外的手術をもたない, [Riv2],
- オープンブックとして得られる多様体が双曲構造を持つ [Ito],
- 他の写像類のベキとならない、有限被覆に関する持ち上げにならない [Masa1],
- 写像トーラスが非算術的となる、写像トーラスの対称群が自明となる [Masa1].

ブレイド群は穴あき円盤の写像類群とみなすことができる。ブレイド群に対しては、閉包が双曲絡み目になる [Ma, Ito], ブリッジ分解として得られる絡み目が双曲構造を持つ [IM] ことなどが知られている。

次に、ランダムウォークのステップ数に対して真に線形に増大することが知られている量をまとめる。同様に細かい条件などは文献に譲ることとする。

- 曲線複体上のドリフト [Mah2], パンツ複体, Teichmüller 距離, Thurston 距離に関するドリフト,
- 曲線複体上の translation 距離 [MT],
- 擬アノソフとしての dilatation [DH].

また、次の量の増大度の評価も得られている

- 写像トーラスの双曲体積 (pants 複体上のドリフトが正になることと, Brock の結果 [Bro1, Bro2] をあわせる)
- 安定交換子長 (scl) [CM].

## 6. 写像類群上のランダムウォークの力学系

この節では [Masa2] の結果を説明する. 一言で述べると, 擬アノソフについて成り立っている幾つかの力学系に関する事実が, ランダムウォークに対しても成り立つ, という結果である. まず, 擬アノソフのトポロジカルエントロピーが dilatation と一致するという Thurston の結果を復習する. ここからは, 曲面  $S$  は閉曲面であり, とくにコンパクトであると仮定する.  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}, \mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$  を  $S$  の開被覆とする. このとき

$$N(\mathcal{A}) := \min\{n \mid \{A_1, \dots, A_n\} \text{ は } S \text{ の開被覆, 各 } 1 \leq i \leq n \text{ に対して } A_i \in \mathcal{A}\}$$

とする. また  $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} := \{A_i \cap B_j\}_{i \in I, j \in J}$  とする. 次のトポロジカルエントロピーは任意のコンパクト空間の上の連続写像について同様に定義される.

**定義 6.1** (トポロジカルエントロピー, [AKM]). 写像  $f : S \rightarrow S$  を閉曲面  $S$  上の同相写像とする. 開被覆  $\mathcal{A}$  に対して,

$$h(f, \mathcal{A}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A} \vee f^{-1}\mathcal{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathcal{A})$$

とする. このとき,  $f$  のトポロジカルエントロピー  $h(f)$  を

$$h(f) := \sup_{\mathcal{A}} h(f, \mathcal{A})$$

と定義する. ここで  $\sup$  は  $S$  のすべての開被覆に対してとる.

さらに, 写像類  $\phi \in \text{MCG}(S)$  に対しては,

$$h(\phi) := \inf_{f \in \phi} h(f)$$

と定義する.

定義に含まれる極限の収束は簡単な練習問題である.

**定理 6.2** (Thurston, c.f. [FLP]). 写像類  $\phi \in \text{MCG}(S)$  が dilatation  $\lambda$  をもつ擬アノソフであるとき,

$$h(\phi) = \log \lambda.$$

論文 [Masa2] では, 定義 6.1 を次のようにランダムウォークに対して定義し直した.

**定義 6.3** (ランダムウォークのトポロジカルエントロピー). 写像類の列  $\omega = (\omega_n) \in \text{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$  の表現  $\mathbf{w} = (w_n) \in \text{Homeo}^+(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$  が与えられたとする. すなわち  $w_n$  は  $\omega_n$  の表現である. このとき, 開被覆  $\mathcal{A}$  に対して,

$$h(\mathbf{w}, \mathcal{A}) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{A} \vee w_1\mathcal{A} \vee \dots \vee w_{n-1}\mathcal{A})$$

とする. このとき,  $\mathbf{w}$  のトポロジカルエントロピー  $h(\mathbf{w})$  を

$$h(\mathbf{w}) := \sup_{\mathcal{A}} h(\mathbf{w}, \mathcal{A})$$

と定義する. ここで  $\sup$  は  $S$  のすべての開被覆に対してとる. 写像類の列  $\omega$  のトポロジカルエントロピーは

$$h(\omega) := \inf_{\mathbf{w}} h(\mathbf{w})$$

と定義する. ここで  $\inf$  は  $\omega$  の表現全体でとる.

いくつか注意を与える。まず、写像のベキのときと異なり、ランダムウォークのときは逆写像を取っていない。これは、ランダムウォークが新しい元を「右から」かけていることに起因している。また、ランダムウォークの場合、定義に出てくる極限の存在は(容易には)得られない。表現を取る必要がなければ、Kingmanの劣加法的エルゴード定理が極限の存在を保証するが、表現を取った後は、様々なエルゴード定理が使えなくなる。これは、次のように定義されるBernoulliシフト $\theta$ が、表現を取ることと相性が悪いことに起因する。元 $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \in \text{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$ に対して、 $\theta(\omega) = (\omega_1^{-1}\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ として $\theta$ は定義される。定義より $\theta^i\omega = (\omega_i^{-1}\omega_{n+i})_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ となる。このBernoulliシフト $\theta$ はエルゴード的となり、表現を取る必要のない状況では様々なエルゴード定理が用いられている。

**定理 6.4** ([Masa2]). 確率測度 $\mu : \text{MCG}(S) \rightarrow [0, 1]$ が条件4.1を満たすとする。このとき、 $\mathbb{P}$ -a.e  $\omega \in \text{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}}$ に対して、

$$h(\omega) = L$$

が成り立つ。ここで $L$ はTeichmüller距離 $d_T$ に関するドリフトである。

次のKarlssonによる先行研究によりドリフト $L$ は次のように特徴づけることもできる。

**定理 6.5** ([Kar]). 確率測度 $\mu : \text{MCG}(S) \rightarrow [0, 1]$ が条件4.1を満たすとする。このとき、任意の単純閉曲線 $\alpha$ 、計量 $\rho$ と $\mathbb{P}$ -a.e  $\omega = (\omega_n)$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log l_\rho(\omega_n^{-1}\alpha) = L$$

が成り立つ。

定理6.4と定理6.5は定理6.2、定理3.1、定理3.2をあわせたものランダムウォーク版としてみることができる。

## 7. おわりに

ランダムウォークを考えることで、写像類、3次元多様体、絡み目などの性質 $P$ や不変量 $V$ があったとき、容易に次のように問題設定をすることができる。

**問題 7.1.** 適切な条件を満たす確率測度 $\mu : \text{MCG}(S) \rightarrow [0, 1]$ の下、

- 確率

$$\mathbb{P}(\omega = (\omega_n) \in \text{MCG}(S)^{\mathbb{Z}_{>0}} \mid \omega_n \text{は性質 } P \text{ をもつ})$$

が $n \rightarrow \infty$ としたとき、どのように振る舞うか。

- 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n \text{ に対する } V \text{ の値}}{F(n)}$$

を求める。ここで $F(n)$ は $n$ の関数である。

また、Lubotzky-Maher-Wu [LMW]ではランダムウォークを使って、ある性質を満たす多様体の無限個の例の存在が示されており、この方向への研究も考えられる。

## 参考文献

- [AKM] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew. *Topological entropy*. Transactions of the American Mathematical Society 114 (2): 309-319.
- [Ber] L. Bers, *An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston*, Acta. Math., 141 (1978), 73-98.
- [BH] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Vol. 319. Springer, 1999.
- [Bro1] J. Brock, *The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores*, J. Amer. Math. Soc., 16 (2003), pp. 495-535.
- [Bro2] J. Brock, *Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori*, Comm. Anal. Geom., 11 (2003), 987-999.
- [Bow1] B. Bowditch, *A course on geometric group theory*, MSJ Memoirs 16, 2006.
- [Bow2] B. Bowditch, *Tight geodesics in the curve complex*, Invent. Math. 171(2) (2008), 281-300.
- [Cal] D. Calegari, *The ergodic theory of hyperbolic groups*. Geometry and topology down under, Contemp. Math 597 (2013): 15-52.
- [CM] D. Calegari and J. Maher, *Statistics and compression of scl*, Ergodic Theory and Dynamical Systems (2010): 1-47. arXiv:1008.4952.
- [CR] Y. Choi and K. Rafi. *Comparison between Teichmüller and Lipschitz metrics*. J. Lond. Math. Soc. (2), 76(3):739-756, 2007. math.GT/0510136.
- [DH] F. Dahmani and C. Horbez, *Spectral theorems for random walks on mapping class groups and  $\text{Out}(F_N)$* , arXiv:1506.06790.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru et al., *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque 66-67, Société Mathématique de France, 1979.
- [舟木] 舟木 直久, 確率論, 講座数学の考え方 (20), 朝倉書店, 2004.
- [FM] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49)*, Princeton University Press, 2011.
- [Gad] V. Gadre, *Harmonic measures for distributions with finite support on the mapping class group are singular*, to appear in Duke Math. J., arXiv:0911.2891.
- [IM] K. Ichihara and J. Ma, *A random link via bridge position is hyperbolic*, preprint, arXiv:1605.07267.
- [IT] 今吉洋一, 谷口雅彦, タイヒミューラー空間論, 新版, 日本評論社 (2004).
- [Ito] T. Ito *On a structure of random open books and closed braids*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 91 (2015), 160–162.
- [KM] V. Kaimanovich and H. Masur, *The Poisson boundary of the mapping class group*, Invent. Math. 125 (1996) 221-264.
- [Kar] A. Karlsson, *Two extensions of Thurston's spectral theorem for surface diffeomorphisms*, Bull. Lond. Math. Soc. 46 (2014), no. 2, 217-226.
- [Kla] E. Klarreich, *The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space*, preprint.
- [Kow] E. Kowalski, *The large sieve and its applications, Arithmetic geometry, random walks and discrete groups*, Cambridge Tracts in Mathematics 175 (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [LMW] A. Lubotzky, J. Maher and C. Wu, *Random methods in 3-manifold theory*, Proc. Steklov Inst. Math. 2016, Vol. 292, 118-142, arXiv:1405.6410.
- [Ma] J. Ma, *The closure of a random braid is a hyperbolic link*, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), no. 2, 695-701.

- [Mah1] J. Maher, *Random Heegaard splittings*. Journal of Topology 3.4 (2010): 997-1025.
- [Mah2] J. Maher, *Linear progress in the complex of curves*. Transactions of the American Mathematical Society 362.6 (2010): 2963-2991.
- [Mah3] J. Maher, *Random walks on the mapping class group*, Duke Math. J. 156 (2011), no. 3, 429-468.
- [Mah4] J. Maher, *Exponential decay in the mapping class group*, J. Lond. Math. Soc. (2) 86 (2012), no. 2, 366-386. A correction for the proof of Lemma 2.11 can be found in Maher's webpage: <http://www.math.csi.cuny.edu/maher/research/index.html>
- [MT] J. Maher and G. Tiozzo, *Random walks on weakly hyperbolic groups*, to appear in J. Reine Angew. Math., arXiv:1410.4173.
- [Masa1] H. Masai, *Fibered commensurability and arithmeticity of random mapping tori*, preprint, arXiv:1408.0348.
- [Masa2] H. Masai, *Some dynamics of random walks on the mapping class groups*, preprint, arXiv:1604.00749.
- [MM1] H. Masur and Y. Minsky, *Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity*, Invent. Math., 138(1):103-149, 1999.
- [MM2] H. Masur and Y. Minsky, *Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure*, Geom. Funct. Anal. 10 (2000) 902-974.
- [PT] A. Papadopoulos and G. Th  ret. *On Teichmüller's metric and Thurston's asymmetric metric on Teichmüller space*. Handbook of Teichmüller theory 1 (2007): 111-204.
- [Raf] K. Rafi, *Hyperbolicity in Teichmüller space*. Geometry & Topology 18.5 (2014): 3025-3053.
- [Riv1] I. Rivin, *Walks on groups, counting reducible matrices, polynomials, and surface and free group automorphisms*, Duke Math. J. 142 (2008) 353-379.
- [Riv2] I. Rivin, *Statistics of Random 3-Manifolds occasionally fibered over the circle* arXiv:1401.5736 (2014).
- [Thu1] W. Thurston, *Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, preprint, arXiv:math/9801045.
- [Thu2] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bulletin of the American mathematical society 19, (1988) 417-431.
- [Wo] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

## SYMPLECTIC FLOER 理論の話題から

小野 薫  
京都大学数理解析研究所

A. Floer の Morse theory for Lagrangian intersections [F] が出版されてから 30 年くらい経った。Floer 理論の発展とともに、様々な応用がなされて、今では symplectic 構造の研究において特に重要な位置を占めている。本稿では、太田啓史氏の予稿と合わせて、我々の深谷賢治氏、Yong-Geun Oh 氏との共同研究から幾つかの結果について紹介したい。

## 1. 序 LAGRANGE 部分多様体の FLOER 理論のアイデア

多様体  $X$  の symplectic 構造とは、2次微分形式  $\omega$  で、(1)  $d\omega = 0$ , (2) 非退化 即ち、各点の余接空間に  $\omega$  が定める歪対象双1次形式が非退化 の2条件を満たすものを与えることをいう。Darboux の定理により、 $\omega$  は偶数次元ベクトル空間の非退化双1次形式を平行移動不変な2次微分形式とみなしたものと局所的には微分同相になるので、symplectic 構造には Riemann 幾何における曲率のような局所的な不変量は存在しない。

symplectic 形式を保つ微分同相写像の中で、Hamilton 微分同相写像と呼ばれるものが特に重要なクラスをなす。 $X$  上に滑らかな関数  $h$  が与えられると、ベクトル場  $X_h$  で  $i(X_h)\omega = dh$  を満たすものが一意的に定まる。これを  $h$  の定める Hamilton ベクトル場という。滑らかな関数の族  $H = \{h_t\}_{t \in [0,1]}$  に対して、それを積分して<sup>1</sup>得られる isotopy を  $\{\phi_H^t\}_{t \in [0,1]}$  (但し  $\phi_H^0 = id_X$  とする) と書き、 $\phi_H^1$  と表される Hamilton 微分同相写像という。大雑把に言って、 $m$  次元多様体の微分同相写像は  $m$  変数関数を  $m$  個用いて表されるが、Hamilton 微分同相写像は  $m = 2n$  次元の関数1つ (正準変換の母関数) で表される感じである。Hamilton 微分同相写像はかなり限られたクラスをなしている。

symplectic 多様体の部分多様体は  $\omega$  との関係で、isotropic ( $\omega$  の制限が 0 になる)、coisotropic (各点での接空間の  $\omega$  に関する annihilator が接空間に含まれる)、symplectic ( $\omega$  の制限が symplectic 形式を与える) などの条件がある。中でも、isotropic かつ coisotropic (次元は入れ物の symplectic 多様体の半分になる) であるものは Lagrange 部分多様体と呼ばれ、重要なクラスをなす。

多様体  $M$  の余接束  $T^*M$  には自然な1次微分形式  $\lambda_{can}$  があり、余接束の切断  $s$  に対し、 $s^*\lambda_{can}$  は切断  $s$  を  $M$  上の1次微分形式と見たものと一致する。そして、 $\omega_{can} = d\lambda_{can}$  は  $T^*M$  の symplectic 形式となる。閉1次微分形式を余接束の切断と

<sup>1</sup> $H \in C^\infty([0,1] \times X)$  がコンパクトな台をもつことを課せば積分できる。

みなしたものを  $s$  とすると、 $s: M \rightarrow T^*M$  は Lagrange 埋め込みとなる。特に完全 1 次微分形式  $df$  に対しては、 $f$  の臨界点と 切断  $df$  と 零切断の交点が 1 対 1 に対応するので、これらの交叉の個数は関数の臨界点の個数から評価される。特に、交叉が横断的であることと  $f$  の臨界点为非退化であることは同値で、この場合  $f$  について Morse 理論を用いて交叉点の個数の評価が得られる。切断  $df$  は 零切断の Hamilton 微分同相写像による像として表せるが、逆は正しくない。しかし、零切断の Hamilton 微分同相写像による像は、「無限遠で非退化な 2 次形式となる母関数」を用いて記述することができ、閉多様体上の関数の臨界点理論の安定化版を用いて、零切断との交叉点の個数の評価ができる。余接束などの場合を超えて、一般の閉 symplectic 多様体の中の Lagrange 部分多様体の交叉を考察する際には、上記のような有限次元の臨界点理論を適用できない場合が出てくる。Conley, Zehnder といった人たちは、Lagrange 部分多様体に端点を持つ道の上で定義される作用汎関数に Morse 理論のアイデアが適用できればよいと考えていたが、 $L^2$ -計量に関する勾配ベクトル場を素朴に計算すると、勾配流が定義できない（与えられた点を通る積分曲線が一般には存在しない。積分曲線を複素平面の帯状領域からの正則写像と解釈すると、一般に初期値問題が解けない）ことも分かっていた。Floer は、考えたい複素平面の帯状領域からの正則写像の空間を非線形楕円型方程式の解空間として必要となる諸性質を調べることで、Morse 複体の類似物を（技術的な困難がないように然るべき条件をつけてではあるが）構成した。そのあらまは次のようである。

$L \subset X$  を 閉 Lagrange 部分多様体、 $\phi = \phi_H^1$  を Hamilton 微分同相写像とする。 $\mathcal{P}(L, L)$  を 始点と終点が  $L$  上にある道  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  のなす空間とする。（以下は発見的考察でなので、 $\gamma$  の regularity などについては書かない） $\mathcal{P}(L, L)$  上に “1 次微分形式”  $\alpha_{L,H}$  を

$$\alpha_{L,H}: \xi \in T_\gamma \mathcal{P}(L, L) \mapsto \int_0^1 \omega(\xi(t), \dot{\gamma}(t) - X_{h_t}(\gamma(t))) dt$$

と定める。ここで  $\xi$  は  $\gamma^*TX$  の切断で、 $t = 0, 1$  では  $L$  の接ベクトルになるものと解釈し、 $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$  とおいた。 $\alpha_{L,H}$  は “閉微分形式” であることは、次のことからわかる。 $\gamma_0 \in \mathcal{P}(L, L)$  と、それに近い  $\gamma \in \mathcal{P}(L, L)$  を取ると、 $\gamma_0$  と  $\gamma$  をつなぐ  $\mathcal{P}(L, L)$  の道がある。それを  $w: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  で、 $w(\{0, 1\} \times [0, 1]) \subset L$  を満たす写像と解釈して、 $\gamma_0$  の近傍で定義される関数を  $\gamma \mapsto \int_{[0,1] \times [0,1]} w^* \omega$  と定義する。これを用いて、 $\alpha_{L,H}$  の  $\gamma_0$  の近傍での原始関数が得られる。 $\alpha_{L,H}$  の零点は、この関数の臨界点と対応するが、臨界点での Hessian が非退化であることは、 $L$  と  $\phi(L)$  の交叉の横断性と理解できる。そこで、この関数について Morse 理論の類似を考えたい。

$X$  上の概複素構造  $J$  が  $\omega$  と両立するとは、 $g_J(v_1, v_2) = \omega(v_1, Jv_2)$  が  $X$  の Riemann 計量となることをいう。 $g_J$  を用いて  $\mathcal{P}(L, L)$  の各接空間に  $L^2$ -内積を入れ、 $\alpha_{L,H}$  に対応するベクトル場を計算すると、 $\gamma \mapsto (t \mapsto -J(\dot{\gamma}(t) - X_{h_t}(\gamma(t))))$  となる。このベクトル場の “積分曲線”  $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(L, L)$  を  $u(\tau, t) = (\ell(\tau))(t)$  (ここで、 $\ell(\tau)$  は  $X$  の道で、そのパラメータは  $t \in [0, 1]$  である) とすると、 $u$  は Hamilton ベクトル場を用

いて摂動された Cauchy-Riemann 方程式

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} u(\tau, t) + J(u(\tau, t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} u(\tau, t) - X_{h_t}(u(\tau, t)) \right) = 0$$

の解と解釈できる。ここで発見的考察は終わり、以後は、 $X$  は閉 symplectic 多様体とし、(1) の解たち  $u$  を用いて、鎖複体  $(CF^\bullet(L, H), \delta_{L, H, J})$  を構成する。

$\gamma \in \mathcal{P}(L, L)$  で

$$(2) \quad \dot{\gamma}^\pm(t) = X_{h_t}(\gamma^\pm(t))$$

を満たすもの全体を  $\mathcal{Z}$  とする。 $CF^\bullet(L)$  を、 $\mathcal{Z}$  で  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  上生成される自由加群とする<sup>2</sup>。次数付けは Maslov-Viterbo 指数を使うが、それについては省略する。

$u$  のエネルギー  $E(u)$  を

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \left\| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - X_{h_t}(u) \right\|^2 d\tau dt$$

と定める。 $E(u)$  が有限であることと、 $\tau \rightarrow \pm\infty$  で  $u(\tau, t)$  が  $\gamma^\pm \in \mathcal{Z}$  に収束することは同値であることが示される。上記のような  $\gamma^\pm$  に対して、

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma^-, \gamma^+) = \{u \mid (1), \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} u = \gamma^\pm\}$$

とおく。(1) は  $\tau$ -方向の平行移動不変性を持つので、それによる  $\mathbb{R}$ -作用による商空間を  $\mathcal{M}(\gamma^-, \gamma^+)$  とする。 $X$  内に正則球面や  $L$  に境界をもつ正則円板がないと仮定すると、 $\mathcal{M}(\gamma^-, \gamma^+)$  の 0次元成分は有限個の点からなること、1次元成分の ends は然るべき 0次元成分二つの直積になることから、

$$\delta_{L, H, J}(\gamma^-) = \sum \#_2 \mathcal{M}^{0-dim}(\gamma^-, \gamma^+) \gamma^+$$

と定義することができ、 $\delta_{L, H, J} : CF^\bullet(L, H) \rightarrow CF^\bullet(L, H)$  は  $\delta_{L, H, J} \circ \delta_{L, H, J} = 0$  を満たすことがわかる。こうして得られる複体を Lagrange 部分多様体とその Hamilton 変形の組の Floer 複体、cohomology を Floer cohomology という。Floer は (ここで書いた書き方とは異なるが、同値なもの)  $\pi_2(X, L) = 0$  の条件のもとで実行してみせた。同じ条件下で Floer cohomology を計算し、 $L$  の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -係数 cohomology と同型になることを示した [F]。この系として、交叉点の個数が  $L$  の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -係数 Betti 数の和以上であることが従う。

この結果から、 $\pi_2(X) = 0$  である 閉 symplectic 多様体の Hamilton 微分同相写像の不動点が全て非退化であれば、その個数の評価が得られる (Arnold 予想の Betti 数版の部分的<sup>3</sup>解決)。Floer は Hamilton 微分同相写像の Floer cohomology を単調な閉 symplectic 多様体に対して構成、計算し、Arnold 予想の Betti 数版がこの場合

<sup>2</sup>一般には、Novikov 環上で考える必要があるが、アイデアを説明するこの節ではそれはしない。

<sup>3</sup>部分的とは言っても、Floer の成果は正に breakthrough である。

にも正しいことを証明した [F2]。ここで  $(X, \omega)$  が単調であるとは、 $[\omega], c_1(TX, J)$  を  $\pi_2(X)$  上で測ったとき、ある 正定数  $\lambda$  が存在して、

$$c_1(TX, J)|_{\pi_2(X)} = \lambda[\omega]|_{\pi_2(X)}$$

が成り立つことをいう。

上では、 $\mathcal{P}(L, L)$  を使って、Floer 複体を説明したが、 $L_0 = L$  から  $L_1 = \phi(L)$  に至る道の空間  $\mathcal{P}(L_0, L_1)$  を用いて定式化することもできる (Floer の論文ではこちらで書かれている)。 $\phi_H^t$  を用いて、 $(\phi_H(\gamma))(t) = \phi_H^t(\gamma(t))$  とすると、これは  $L_0$  から  $L_1$  に至る道になる。こうして  $\gamma \in \mathcal{P}(L, L) \mapsto \phi_H(\gamma) \in \mathcal{P}(L_0, L_1)$  により、 $\mathcal{P}(L, L)$  と  $\mathcal{P}(L_0, L_1)$  を同一視すると、方程式 (1) は Hamilton ベクトル場による摂動項のない ( $J$  は  $\phi_H^t$  による変換を受けた) Cauchy-Riemann 方程式に変わる。

Yong-Geun Oh [Oh] は、Lagrange 部分多様体に対しても単調性と最小 Maslov 数が 3 以上の条件<sup>4</sup>のもとで、Floer の構成を拡張し、コンパクトエルミート対称空間の中の実形の場合に計算をした。ここでも、 $X$  と  $L_0, L_1$  に課した条件から正則球面や正則円板が、Floer 複体を構成する際に必要となる 0次元と 1次元のモデュライ空間に悪影響を与えないことが議論の鍵である。

一般的な場合を考えると状況は変わる。Hamilton 微分同相写像 (symplectic 微分同相写像に対してでもよい) に対する Floer cohomology は一般の閉 symplectic 多様体上で構成でき、 $X$  の (Novikov 環係数の) 常 cohomology と同型になることが証明できる (深谷-小野 [FO]、Liu-Tian [LT])。しかし、Lagrange 部分多様体の交叉の Floer 複体については、2次元トラス上で、可縮な円と meridian の対のような簡単な例でも上の議論はうまく進まないことがわかる。このことは、正則球面の bubbling-off は余実次元 2 の現象であるのに対し、正則円板のそれは余実次元 1 の現象なので、Floer 複体を作る際のモデュライ空間の end に影響を与えうることに由来する。問題となるのは Lagrange 部分多様体に境界を持つ正則円板の存在であるから、それらを組織的に考察し、Floer 複体を構成するための障害をはっきりさせ、可能であれば、境界作用素  $\delta$  を修正して Floer 複体を得られるのはどういう時であるかを明らかにしたい。そのために我々は、Lagrange 部分多様体に対して、filter 付き  $A_\infty$ -代数を構成し、その言葉を用いてこれらの問いに答を与えた。それについて [FOOO1] の議論を次節で説明したい。

## 2. LAGRANGE 部分多様体に付随した FILTER 付き $A_\infty$ -代数

以後、Lagrange 部分多様体は spin 構造 (それより弱く我々が導入した相対 spin 構造で十分) を与えられているとする<sup>5</sup>。この条件は、これから説明する構成に現れるモデュライ空間に整合的な向きを入れるために必要となる。

<sup>4</sup>もう少し条件を付けてあるが、ここでは省く

<sup>5</sup> $X$  に然るべき条件を付けて、正則球面の影響が制御できる状況においては  $L$  の spin 構造なしで  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -上で Floer 理論を展開できる。同じ条件下で、 $L$  に spin 構造があれば、 $\mathbb{Z}$  上での構成もできる [FOOO8]。

まず、複素係数の普遍 Novikov 環 (以後単に Novikov 環と書く。また、今回は次数に関する生成元を落としたものを考える。) を定義する。\$T\$ を形式的変数とし、

$$\Lambda_0 = \left\{ \sum_i a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \geq 0, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = +\infty \right\}$$

とおく。指数が実数であるべき級数で、べきが \$+\infty\$ に発散するような無限和を許している。勿論、有限和は全て許される。\$\Lambda\_0\$ は整域で、その商体を \$\Lambda\$ と書く。これは指数が実数である Laurent 型のべき級数からなる体である。また、\$\Lambda\_+\$ で、指数が正であるべき級数のなすもの (\$\Lambda\_0\$ の唯一の極大イデアル) を表す。\$\Lambda \setminus \{0\}\$ に \$v\_T\$ を、

$$v_T \left( \sum_i a_i T^{\lambda_i} \right) = \min \{ \lambda_i \mid a_i \neq 0 \}$$

で定めると、加法的付値になる。\$\Lambda\_0, \Lambda\$ は \$v\_T\$ の定める位相で完備であり、\$\Lambda\$ は (\$\mathbb{C}\$ が標数 0 の代数的閉体であることから) 代数的閉体になる。(この事実は、第 3 節の potential 関数の臨界点を探すときに役立つ。)

\$\Omega^\bullet(L), \Omega^\bullet(L; \Lambda\_0)\$ で、\$L\$ の複素係数あるいは Novikov 環係数の de Rham 複体を表す。de Rham 複体の外微分、wedge 積に加えて、正則円板の効果を加えて filter 付き \$A\_\infty\$-代数が構成される。

空でない連結な境界を持つ種数 1 の Riemann 面 \$\Sigma\$ (例えば円板 \$D^2\$) の境界に \$k+1\$ 点 \$z\_0, \dots, z\_k\$、内部に \$\ell\$ 点 \$w\_1, \dots, w\_\ell\$ を付けたものから \$(X, L)\$ への境界付き安定写像、即ち正則写像で、\$\beta \in H\_2(X, L; \mathbb{Z})\$ を表し、自己同型群が有限であるもの<sup>6</sup>のモデュライ \$\mathcal{M}\_{\ell, k+1}(\beta; L)\$ を考える。\$k+1\$ 個の境界上の点、\$\ell\$ 個の内点で値をとることにより evaluation maps

$$ev_i : \mathcal{M}_{\ell, k+1}(\beta; L) \rightarrow L \quad i = 0, 1, \dots, k; \quad ev_j^+ : \mathcal{M}_{\ell, k+1}(\beta; L) \rightarrow X \quad j = 1, \dots, \ell$$

が定まる。

まず \$\ell = 0\$ の場合を考える。\$\beta \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots\$ に対して、

$$m_{k, \beta} : (\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k) \in (\Omega^\bullet(L))^{\otimes k} \mapsto (ev_0)_! (ev_1^* \xi_1 \wedge \dots \wedge ev_k^* \xi_k) \in \Omega^\bullet(L)$$

と定義する。ここで、\$(ev\_0)\_!\$ はファイバーに沿う積分で、これを定義するには倉西構造の摂動の連続族の手法を用いる。\$m\_{k, \beta}\$ は \$\Omega^\bullet(L)\$ に入れる次数を微分形式としての次数マイナス 1 とすると、これらは次数を 1 増やす多重線形写像になる。\$\beta = 0\$ に対しては、\$k = 1, 2\$ の時以外は 0 で<sup>7</sup> \$m\_{1, \beta=0}, m\_{2, \beta=0}\$ は符号を除けば外微分と wedge 積として定義する。

\$k\$ ごとに足し上げて \$m\_k = \sum\_\beta T^{\int \beta} m\_{k, \beta}\$ とおき、\$m\_k : \Omega^\bullet(L; \Lambda\_0)^{\times k} \rightarrow \Omega^\bullet(L; \Lambda\_0)\$ が定まる。この和が \$T\$-進の意味で収束することはエネルギー有界な安定写像に関する Gromov コンパクト性から従う。境界付き安定写像のモデュライ空間の境界の記述と

<sup>6</sup>境界上に点のついていない場合 \$k+1=0\$ の場合だけは例外的な扱いが必要である。

<sup>7</sup>\$L\$ の特異鎖複体に filter 付き \$A\_\infty\$-代数の構造を入れる場合には、\$m\_{k, \beta=0}\$ は \$k \ge 3\$ であっても消えない。

ファイバー積分についての基本的性質から、 $\{\mathbf{m}_k\}_{k=0,1,2,\dots}$  は次の関係式を満たすことが示される。(符号は少し煩雑なのでここでは  $\pm$  と書くが、先ほどの次数のずらし  $\deg' = \deg - 1$  を考慮すると Koszul 符号で関係式は成立する。)

$$(3) \quad \sum_{k=k_1+k_2-1} \sum_{i=0}^{k_1-1} \pm \mathbf{m}_{k_1}(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_i \otimes \mathbf{m}_{k_2}(\xi_{i+1} \otimes \dots \otimes \xi_{i+k_2})) \otimes \xi_{i+k_2+1} \otimes \dots \otimes \xi_k = 0$$

これを filter 付き  $A_\infty$ -代数の関係式と呼び、 $(\Omega^\bullet(L; \Lambda_0), \{\mathbf{m}_k\})$  を  $L$  に付随した filter 付き  $A_\infty$ -代数と呼ぶ。特に、 $k = 1$  の時をみると、

$$(4) \quad \mathbf{m}_1 \circ \mathbf{m}_1 \xi + \mathbf{m}_2(\mathbf{m}_0(1) \otimes \xi) + (-1)^{\deg' \xi} (\xi \otimes \mathbf{m}_0(1)) = 0$$

となる。 $\mathbf{m}_1$  は  $L$  とそれ自身の交叉についての Bott-Morse 型の Floer 複体の余境界作用素になってほしいものであるが、上の関係式から  $\mathbf{m}_0(1)$  の関係する項があるため、一般に  $\mathbf{m}_1 \circ \mathbf{m}_1 = 0$  とはならない。つまり、この場合  $\mathbf{m}_0(1)$  が余境界作用素を得るための障害である。そこで、これを消すような変形を探す。まずは、filter 付き  $A_\infty$ -代数の座標変換をしてこれを消すことを考える。 $b \in \Omega^{\text{odd}}(L; \Lambda_+)$  を用いて、

$$\mathbf{m}_{b,k}(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k) = \sum_{r_0, \dots, r_k} \mathbf{m}_{k+r_0+\dots+r_k}(b^{\otimes r_0} \otimes \xi_1 \otimes b^{\otimes r_1} \otimes \dots \otimes \xi_k \otimes b^{\otimes r_k})$$

とする。即ち、 $\xi_1, \dots, \xi_k$  の前、間、後に任意個数の  $b$  を入れ、足し上げたものである。 $b$  の取り方から、この和は  $T$ -進位相で収束する。 $\Lambda_0 = \mathbb{C} \oplus \Lambda_+$  の  $\Lambda_+$  係数の  $b$  についてはこのような変形ができる。 $b_0 \in H^1(L; \mathbb{C}/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$  による変形は、 $L$  上の local system を使って、これまでの構成をひねり filter 付き  $A_\infty$ -構造  $\mathbf{m}_k^{b_0}$  を作る事ができる (Cheol-Hyun Cho)。 $(b_0, b)$  に対する

$$(5) \quad \mathbf{m}_{b,0}^{b_0}(1) = \sum_k \mathbf{m}_k^{b_0}(b^{\otimes k}) = 0$$

を Maurer-Cartan 方程式という。Maurer-Cartan 方程式が解  $(b_0, b)$  を持てば、 $\mathbf{m}_{b,1}^{b_0} \circ \mathbf{m}_{b,1}^{b_0} = 0$  となり、 $(\Omega^\bullet(L; \Lambda_0), \mathbf{m}_{b,1}^{b_0})$  は複体となることがわかる。

ところで、filter 付き  $A_\infty$ -代数に対して、 $\mathbf{m}_1$  の古典的部分、今の場合外微分、の cohomology 上に filter 付き  $A_\infty$ -代数の構造を移すことができる。(我々の言葉では canonical model と呼ぶが、minimal model と呼ぶ人たちもいる。) 今の場合、 $H^\bullet(L; \Lambda_0)$  上に filter 付き  $A_\infty$ -構造  $\{\mathbf{m}_k^{\text{can}}\}$  が入る。cohomology 環の単位元  $1_L$  は filter 付き  $A_\infty$ -代数の単位元になる。即ち、 $k \neq 2$  ならば、 $\mathbf{m}_2^{\text{can}}$  に一つでも  $1_L$  が入れば 0 になり、

$$\mathbf{m}_2(1_L; \xi) = \xi = (-1)^{\deg \xi} \mathbf{m}_2(\xi, 1_L)$$

を満たす。これを (4) と見比べれば、 $\mathbf{m}_0(1)$  が  $1_L$  に  $\Lambda_+$  の元が掛かった形になっていれば、 $\mathbf{m}_1 \circ \mathbf{m}_1 = 0$  となり、複体が得られることがわかる。filter 付き  $A_\infty$ -代数の単位元の性質から、 $1_L$  は  $\{\mathbf{m}_{b,k}^{b_0}\}$  に関する単位元にもなることが分かるので、 $(b_0, b)$

が次の意味で Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解になっていれば、 $\mathfrak{m}_{b,1}^{b_0}$  は余境界準同型を与えることがわかる。

$$(6) \quad \mathfrak{m}_{b,0}^{b_0}(1) = \sum_k \mathfrak{m}_k^{b_0}(b^{\otimes k}) \in \Lambda_+ \cdot 1_L$$

ここで詳しく述べることはできないが、filter 付き  $A_\infty$ -代数のホモトピーの枠組みを用いて、Maurer-Cartan 方程式の解の集合、弱い意味での Maurer-Cartan 方程式の解の集合に gauge 同値関係を入れることができ、gauge 同値類全体を  $\mathcal{MC}(L)$ ,  $\mathcal{MC}_{\text{weak}}(L)$  ができる。弱い意味での Maurer-Cartan 方程式の解の定義から、 $L$  の Floer 理論的 potential 関数

$$\mathfrak{PD}^L : \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L) \rightarrow \Lambda_+$$

を、 $(b_0, b)$  に対して、 $\mathfrak{m}_{b,1}^{b_0}(1) = \mathfrak{PD}^L(b_0, b)1_L$  を満たすものとして定義することができる (値は gauge 同値類にしかよらない)。

内点のついた境界付き安定写像のモデュライを用いた bulk 変形について手短かに説明する。

$$\mathfrak{q}_{k,\ell;\beta} : \Omega^\bullet(X)^{\otimes \ell} \Omega^\bullet(L)^{\otimes k} \rightarrow \Omega^\bullet(L) \text{ を}$$

$$\mathfrak{q}_{k,\ell;\beta}(\otimes_j 1^\ell \eta_j \otimes \otimes_{i=1}^k \xi_i) = (ev_0)_!(ev_1^{+*} \eta_1 \wedge \cdots \wedge ev_\ell^{+*} \eta_\ell \wedge ev_1^* \xi_1 \wedge \cdots \wedge ev_k^* \xi_k)$$

とし、 $\mathfrak{q}_{k,\ell} = \sum_\beta T^{J_\beta \omega} \mathfrak{q}_{k,\ell;\beta}$  と定義する。 $\mathfrak{b} \in \Omega^\bullet(X; \Lambda_+)$  に対して、

$$\mathfrak{m}_k^{\mathfrak{b}}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) = \sum_\ell \mathfrak{q}_{k,\ell}(\mathfrak{b}^{\otimes \ell} \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k)$$

とすると、 $\mathfrak{m}_k^{\mathfrak{b}}$  は  $\Omega^\bullet(L; \Lambda_0)$  上に filter 付き  $A_\infty$ -代数の構造を定めることが分かる。これを  $\mathfrak{b}$  による bulk 変形という。Maurer-Cartan 方程式、その (弱い意味での) 解、potential 関数などは、bulk 変形を行った後の filter 付き  $A_\infty$ -代数に対しても考えられ、 $\mathcal{MC}_{\mathfrak{b},\text{weak}}(L)$ ,  $\mathfrak{PD}_{\mathfrak{b}}^L$  などが同様に定義される。また、全ての構造を  $\Lambda_0$ -係数の常 cohomology 上に移すことができる。

この時、次が成り立つ。

**定理 1.**  $L_0, L_1$  を閉 symplectic 多様体  $(X, \omega)$  の clean intersection を持つ Lagrange 部分多様体の相対的 spin 対<sup>8</sup>とする。 $\mathfrak{b} \in H^*(X; \Lambda_+)$  と、 $\mathfrak{b}$  で bulk 変形された  $L_i$  の Maurer-Cartan 方程式が弱い意味での解  $b_i \in H^{\text{odd}}(L; \Lambda_0)$ ,  $i = 0, 1$  で、 $\mathfrak{PD}_{\mathfrak{b}}^{L_0}(b_0) = \mathfrak{PD}_{\mathfrak{b}}^{L_1}(b_1)$  を満たすものが存在する時、 $H^\bullet(L_0 \cap L_1; \Lambda_0)$  上に Floer の  $\delta$  を  $\mathfrak{b}$ ,  $b_0, b_1$  を用いて変形した  $\delta_{\mathfrak{b}}^{b_0, b_1}$  が定義でき、 $(H^\bullet(L_0 \cap L_1; \Lambda_0), \delta_{\mathfrak{b}}^{b_0, b_1})$  は複体となる。

<sup>8</sup> $L_0, L_1$  がそれぞれ spin 構造を与えられている状況ならばこの条件を満たす。symplectic 微分同相写像に対する Floer 複体の構成を含む形に定式化しようとする、それでは足りない、このように条件を書いた。

この cohomology を  $HF_b^\bullet((L_1, b_1), (L_0, b_0); \Lambda_0)$  と書く。Hamilton 微分同相写像  $\phi = \phi_H^1$  から、 $L_1$  と  $\phi(L_1)$  の filter 付き  $A_\infty$ -代数の同型を構成することができる。従って、 $L_1$  の Maurer-Cartan 方程式の (弱い意味での) 解  $b_1$  から、 $\phi(L_1)$  のそれ  $\phi_*(b_1)$  が得られる。しかし、 $HF_b^\bullet((L_1, b_1), (L_0, b_0); \Lambda_0)$  から  $HF_b^\bullet((\phi(L_1), \phi_*b_1), (L_0, b_0); \Lambda_0)$  への同型は一般に得られない。これは、 $\Lambda_0$  上で考えているからで、 $\Lambda_0$  加群としての torsion に違いが現れる。このことは、Lagrange 部分多様体の displacement energy と呼ばれる量の評価に応用することができる ([FOOO6])。  $\Lambda_0$  から、 $\Lambda$  に係数拡大すれば、 $HF_b^\bullet((L_1, b_1), (L_0, b_0); \Lambda)$  から  $HF_b^\bullet((L_1, b_1), (L_0, b_0); \Lambda)$  への同型が得られる。従って、 $\Lambda$ -係数の Floer cohomology が消えていなければ、その交叉をなくすることはできない。

bulk 変形を許して Maurer-Cartan 方程式に解があるかどうかの十分条件を一つ挙げておく<sup>9</sup>

**定理 2.**  $L$  を  $(X, \omega)$  の Lagrange 部分多様体で spin 構造を持つものとする。包含写像の誘導する常 cohomology の写像  $H^\bullet(X; \mathbb{C}) \rightarrow H^\bullet(L; \mathbb{C})$  が単射であれば、ある  $\mathfrak{b} \in H^\bullet(X; \Lambda_+)$  が存在して、 $\mathfrak{b}$  で bulk 変形された filter 付き  $A_\infty$ -代数の Maurer-Cartan 方程式は解をもつ。

この定理の証明には、 $\mathfrak{p}_{k,\ell} : H^\bullet(X; \Lambda_+)^{\otimes \ell} \otimes H^\bullet(L; \Lambda_0)^{\otimes k} \rightarrow H^\bullet(X; \Lambda_0)$  なる operator が用いられる。これは、 $\mathfrak{m}_{k,\ell}$  の場合と異なり、最後にファイバー積分を内点での evaluation map に関して取ることで得られる。

bulk 類  $\mathfrak{b}$  を決めた深谷圏の対象は、Lagrange 部分多様体と Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解の gauge 同値類の組で、射の空間は、potential 関数の値が一致している場合のみ 0 ではなく、bulk 類とそれぞれの Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解を用いて上記のように定義される Floer 複体 (cohomology level では Floer cohomology) である。  $\mathfrak{m}$  は filter 付き  $A_\infty$ -圏の構造を与え、 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$  はそれぞれ  $\hat{\mathfrak{p}} : HH_*(Fuk_{\mathfrak{b}}(X, \omega)) \rightarrow QH_b^*(X; \Lambda_0)$ ,  $\hat{\mathfrak{q}} : QH_b^*(X; \Lambda_0) \rightarrow HH^*(Fuk_{\mathfrak{b}}(X, \omega))$  を与える。ここで、 $QH_b^*$  は  $\mathfrak{b}$  で bulk 変形された量子 cohomology 環、 $HH^*$ ,  $HH_*$  は Hochschild cohomology, Hochschild homology を表し、前者は open-closed map 後者は closed-open map とも呼ばれる。(次節で応用を述べるのに必要なので、言葉のみここに記したが、太田氏の予稿、講演で扱ってもらえるのではないかと思う。)

### 3. 応用例: コンパクトトーリック多様体の LAGRANGE トーラス軌道

<sup>10</sup>この節では  $(X, \omega)$  をコンパクトケーラートーリック多様体とする。複素射影空間とその上の Fubini-Study 形式やその直積はその例である。複素次元を  $n$  とする。コンパクトトーラス  $T = T^n$  は複素構造とケーラー計量を保って作用し、ケーラー形式に関して Hamilton 的な作用である。即ち、moment 写像  $\pi : X \rightarrow Lie^*(T) \cong \mathbb{R}^n$

<sup>9</sup>他にも、anti-symplectic involution の不動点集合として現れる Lagrange 部分多様体について、Maslov 数の条件をつければ Maurer-Cartan 方程式の解の存在を示すことができる [FOOO9]。

<sup>10</sup>この節に関する文献は [FOOO2, FOOO3, FOOO4] である。survey として [FOOO5] もある。

があつて、 $\pi$  と線形な射影  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  の合成として得られる関数の Hamilton ベクトル場たちにより、 $T$  の作用は生成される。複素余次元 1 の部分集合 (部分トーラス作用の不動点集合の和集合で、toric divisors と呼ばれる) の補集合では  $T$  は自由に作用する。従つて、一般的な  $T$ -軌道には、自由かつ推移的に作用して、Lagrange 部分多様体となることも分かる。 $\exp : \text{Lie}(T) \rightarrow T$  を exponential map とすると、 $\pi_1(T) = \exp^{-1}(id) \subset \text{Lie}(T)$  なので、 $\text{Lie}(T)$  及びその双対である  $\text{Lie}^*(T)$  にそれぞれ lattice  $N, M$  が定まる。 $P = \pi(X)$  は各頂点に集まる辺の原始的ベクトルが lattice  $M$  の基となる  $\mathbb{R}^n$  の中の凸多面体である。 $u \in \overset{\circ}{P}$  を  $P$  の内点とすると、 $L(u) = \pi^{-1}(u)$  が Lagrange トーラス軌道 (Lagrange トーラスファイバーと呼ぶ) となる。 $H_1(L(u); \mathbb{Z}), H^1(L(u); \mathbb{Z})$  はそれぞれ  $N, M$  と自然に同一視される。 $L(u)$  が  $T$  の自由な軌道であることを用いて、次のことが示される。

**定理 3.**  $H^1(L(u); \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}) \subset \mathcal{MC}_{weak}(L(u))$

$L(u)$  の potential 関数を  $H^1(L(u); \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$  に制限したものの、先頭項たちは  $P$  の余次元 1 の面に対応し、 $P$  の情報を用いて記述できる。 $N$  のベクトル  $\vec{v}_j, j = 1, \dots, m$  と実数  $\lambda_j$  を用いて  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  上のアフィン関数  $\ell_j(u) = \langle \vec{v}_j, u \rangle - \lambda_j$  があつて、

$$P = \{u \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} | \ell_j(u) \geq 0\}$$

と表される。 $M$  に  $\mathbb{Z}$ -基底をとり固定し、それに関して、 $H^1(L(u); \Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})$  の座標を  $(y_1(u), \dots, y_n(u)) \in (\Lambda_0 \setminus \Lambda_+)^n$  とすると、 $\mathfrak{PD}^{L(u)}$  への先頭項の寄与は、

$$\mathfrak{PD}_0^{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u)) = \sum_{j=1}^m y_1(u)^{v_{1j}} \cdots y_n(u)^{v_{nj}} T^{\ell_j(u)}$$

であることが分かる。ここで、 $v_{ij}$  は  $\vec{v}_j$  の先ほど取り固定した  $M$  の基底の双対基底に関する成分である。 $X$  が Fano 的即ち、 $c_1(X)$  があるケーラー類の正数倍になるとき、(bulk 変形がなければ) potential 関数は  $\mathfrak{PD}_0^{L(u)}$  と一致する。一般には高次の項が現れるが、そのときでも  $\mathfrak{PD}_0^{L(u)}$  は重要な情報を持っている。

これまでのことは、 $T$ -不変な bulk 変形をしても成り立つ。(実は、 $\mathfrak{b}$  は不変微分形式ではなく、 $T$ -不変なサイクルを用いて、モデュライ空間を制約して  $\mathfrak{q}_{k,\ell}$  を定義する。それにより、定理 3 と同様のことを示すことができる。)

**定理 4.**  $\mathfrak{b}$  を  $T$ -不変なサイクルとする。 $\mathfrak{b}$  により bulk 変形された potential 関数  $\mathfrak{PD}_{\mathfrak{b}}^{L(u)}$  が  $(\Lambda_0 \setminus \Lambda_+)^n$  に臨界点  $\mathbf{y}(u)$  を持つことと、 $\mathbf{y}(u)$  に対応した Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解  $b_{\mathbf{y}(u)}$  を用いて定義される Bott-Morse 型の Floer cohomology  $HF_{\mathfrak{b}}^*((L(u), b_{\mathbf{y}(u)}), (L(u), b_{\mathbf{y}(u)}))$  が消えないことは同値である。またこの時、Floer cohomology は Novikov 環 (あるいは Novikov 体) 係数の  $L(u)$  の常 cohomology と加群として同型になる。

これまでは、個々の  $L(u)$  に対して potential 関数を考えていたが、 $y_i = u_i(u)T^{u_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , と変数を置き換えてみる。ここで、 $u_i$  は  $u$  の先ほど決めた  $M$  の基底に関する成分である。すると、 $\mathfrak{PD}_b^{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u))$  を  $y_1, \dots, y_n$  を用いて表すと、それは  $u$  によらないことが分かる。そこでそれを  $\mathfrak{PD}_b^X$  と書き、トーリック多様体  $X$  の potential 関数と呼ぶことにする。この関数の定義域が何になるかは注意が必要で、 $\vec{v}_T^{-1}(\mathring{P}) \subset (\Lambda \setminus \{0\})^n$  をその定義域と定義する。ここで、 $\vec{v}_T$  は  $v_T : (\Lambda \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$  を ( $M$  に定めた基底のベクトルに対応して)  $n$  個並べたものである。特に、そこでは  $\mathfrak{PD}_b^X$  やその形式的な方向微分が  $T$ -進の意味で収束することは境界付き安定写像の Gromov コンパクト性から従う。

potential 関数  $\mathfrak{PD}_b^X$  の Jacobi 環を定義することができる ( $P$  あるいはその内部に対応した strict convergence power series ring を potential 関数の方向微分の生成するイデアルの然るべき閉包で割ったものとして定義する)。それを  $Jac(\mathfrak{PD}_b^X)$  と書く。

定理 5.  $q$  を用いて、環としての同型  $QH_b^*(X; \Lambda_0) \rightarrow Jac(\mathfrak{PD}_b^X)$  が得られる。

特に、 $\mathfrak{PD}_b^X$  は  $\vec{v}_T^{-1}(\mathring{P})$  に重複度を込めて、 $\sum_p b_p(X)$  の臨界点を持つことが分かる。 $(b_p(X)$  は  $X$  の  $p$ -次の Betti 数)  $\mathfrak{PD}_b^X$  の臨界点  $\mathbf{y}$  に対して、 $u_{\mathbf{y}} = \vec{v}_T(\mathbf{y})$ ,  $b_{\mathbf{y}} = \log(T^{-u_{\mathbf{y}}}\mathbf{y})$  とすると、 $HF_b^*((L(u_{\mathbf{y}}, b_{\mathbf{y}})), (L(u_{\mathbf{y}}, b_{\mathbf{y}})))$  は消えないことが分かる。ここで、 $\log$  は成分毎にゼロでない定数項から始まる  $c_0 + T$  の正べきの項たちの  $\log$  をとったもの。これにより、 $\mathfrak{b}$  で bulk 変形された深谷圏の非自明な対象が Lagrangian トーラス軌道とその上の Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解の組として得られる。

ここで、定理 5 の同型が、Hochschild cohomology を経由していることに注意して、次の [AFOOO] の定理を適用する。

定理 6. (1)  $(X, \omega)$  を閉 symplectic 多様体とする。深谷圏の有限個の対象の生成する部分 filter 付き  $A_\infty$ -圏  $\mathcal{L}$  への  $\hat{\mathfrak{p}}$  の制限の像に  $QH_b^*(X; \Lambda_0)$  の単位元を含めば、 $\mathcal{L}$  (の対象) は、深谷圏を分裂生成する。

(2)  $\mathfrak{p}$  と  $q$  は双対である。

従って、コンパクトケーラートーリック多様体の ( $\mathfrak{b}$  で bulk 変形された) 深谷圏は、 $\mathfrak{PD}_b^X$  の臨界点に対応する対象により分裂生成されることが分かる。定理 5 とある pairings の両立性などの話題は太田氏の講演で触れられることと思う。

今述べたこと以外にも、トーリック多様体の中の Lagrange トーラス軌道のお互いに Hamilton 微分同相で写り合わない連続族で、どれも Hamilton 微分同相写像で自分自身から交叉を外せない例の構成、あるいは  $(S^2, \omega)$  2つの直積の中の Lagrange トーラスで同じようなものの構成 (この場合、トーラス軌道としてはそのようなものはない)[FOOO7] や、それを用いた、Hamilton 微分同相写像群の Calabi quasimorphisms

の本質的にどの2つも異なる連続族の構成 [FOOO10] など、この節で述べた理論が関わる応用がある。

#### REFERENCES

- [AFOOO] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Quantum cohomology and split generation in Lagrangian Floer theory*, in preparation.
- [F] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom. **28**(1988), 513-547.
- [F2] A. Floer, *Holomorphic spheres and symplectic fixed points*, Comm. Math. Phys. **120**(1989), 576-611.
- [FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory, anomaly and obstruction, Part I and II*, AMS/IP Studies in Advanced Math., **46-1,2**, Amer. Math. Soc. and International Press, 2009.
- [FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, I*, Duke Math. J. **151**(2010), 23-174.
- [FOOO3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, II*, Selecta Math. (N.S.) **17**(2011), 609-711.
- [FOOO4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, Astérisque **376**, Société Mathématique de France, 2016.
- [FOOO5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, survey*, In Surveys in Differential Geometry Vol. XVII, International Press, 2012, 229-298. 231-268.
- [FOOO6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory*, J. Symplectic Geom. **11**(2013), 231-268.
- [FOOO7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in  $S^2 \times S^2$* , IMRN **2012**, 2942-2993.
- [FOOO8] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory over integers: spherically positive symplectic manifolds*, Pure Appl. Math. Q. **9**(2013), 189-289.
- [FOOO9] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Anti-symplectic involution and Floer cohomology*, accepted for publication in Geometry and Topology.
- [FOOO10] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Spectral invariants with bulk, quasi-homomorphisms and Lagrangian Floer theory*. preprint arXiv:1105.5123.
- [FO] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38** (1999), 933-1048.
- [LT] G. Liu and G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom., **49**(1998), 1-74.
- [Oh] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I, II*, Comm. Pure Appl. Math. **46**(1993), 949-994, 995-1012.



## 深谷圏とミラー対称性予想

太田 啓史 (名古屋大学多元数理科学研究科)

以下、深谷賢治氏 (Simons Center for Geometry and Physics)、Yong-Geun Oh 氏 (Center for Geometry and Physics, IBS)、小野薫氏 (京大数理研) との一連の共同研究および Mohammed Abouzaid 氏 (Columbia 大) との共同研究に基づく。

### 1. Quick review of $A_\infty$ algebra associated to Lagrangian submanifold

1.1. **Coefficient ring/field.** まず、今後我々が使う係数環とその商体を導入する。 $R$  を単位元をもつ可換環とする。 $T$  を不定元として

$$\Lambda^R = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in R, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = +\infty \right\}$$

とおき、これを  $R$  上の普遍ノビコフ体と呼ぶ [FOOO3]。  $\Lambda^R$  には

$$v_T \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \right) = \inf_{a_i \neq 0} \lambda_i, \quad v_T(0) = +\infty$$

により非アルキメデスの付値  $v_T$  が入り、  $\Lambda_0^R = \{x \in \Lambda^R \mid v_T(x) \geq 0\}$  とおけば、これは付値環となり  $R$  上の普遍ノビコフ環と呼ぶ。この原稿では Remark 1.2 (1) 以外  $R = \mathbb{C}$  とし、その場合  $\Lambda, \Lambda_0$  などと書く。  $\Lambda_0$  は局所環になり実際

$$\Lambda_+ = \{x \in \Lambda_0 \mid v_T(x) > 0\}$$

は  $\Lambda_0$  の唯一の極大イデアルであり、  $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$  となる。後の議論では、  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  は擬正則円盤のシンプレクティック面積を表し、係数を  $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$  に還元することは定値写像のみが寄与する古典的描像を考えることに対応する。また、付値  $v_T$  を用いて  $\Lambda$  には  $T$ -進位相が入りそれによる種々の完備化を考える必要がある場合があるが、ここでは省略する。(例えば、Remark 2.8 (1) および [FOOO10] を参照。)

1.2.  **$A_\infty$  algebra associated to  $L$ .** 以下特に断らぬ限り、  $(X, \omega)$  を  $2n$  次元コンパクト<sup>1</sup>シンプレクティック多様体とし、  $L \subset X$  を向きづけられた相対スピン<sup>2</sup>な閉ラグランジアン部分多様体とする。  $L$  の  $\mathbb{C}$  係数微分形式全体の空間を  $\Omega(L)$  とし、  $\Omega(L, \Lambda) = \Omega(L) \otimes \Lambda$ ,  $\Omega(L, \Lambda_0) = \Omega(L) \otimes \Lambda_0$  とおく。

**Theorem 1.1.** [FOOO3, FOOO4] 上のような任意のラグランジアン部分多様体  $L$  に対し、  $\Omega(L, \Lambda_0)$  上に  $1_L$  を単位元<sup>3</sup>とするフィルター付き  $A_\infty$  代数の構造が入る。係数を  $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$  に還元すると  $L$  のドラム DGA と  $A_\infty$  代数としてホモトピー同値。

Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research 15H02054. Version:20160528. 2016年7月7日トポロジーシンポジウム予稿。

<sup>1</sup>コンパクトでなくても  $\mathbb{C}^n$  などある種の凸性をもつものなら可。

<sup>2</sup> $L$  が相対スピンであるとは  $\exists st \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$  s.t.  $st|_L \equiv w_2(L)$  をみたすこと。  $L$  に境界をもつ擬正則円盤のモジュライ空間に向きが入るために必要 [FOOO4, Chapter 8]。

<sup>3</sup> $1_L$  は  $L$  上恒等的に 1 である定数関数。  $\mathbf{e}$  が単位元であるとは  $m_2(\mathbf{e}, x) = (-1)^{\deg x} m_2(x, \mathbf{e}) = x$ ,  $m_k(\cdots, \mathbf{e}, \cdots) = 0$  ( $k \neq 2$ ) を満たすこと。

すなわち、 $k = 0, 1, 2, \dots$  に対し、次数  $+1$  の写像の列

$$\mathbf{m}_k : \underbrace{\Omega^*(L; \Lambda_0)[1] \otimes \cdots \otimes \Omega^*(L; \Lambda_0)[1]}_{k \text{ times}} \longrightarrow \Omega^*(L; \Lambda_0)[1]$$

が存在し次の関係式 ( $A_\infty$  関係式) を満たす

$$\sum_{k_1+k_2=k+1} \sum_i (-1)^\epsilon \mathbf{m}_{k_1}(x_1, \dots, \mathbf{m}_{k_2}(x_i, \dots, x_{i+k_2-1}), \dots, x_k) = 0. \quad (1.1)$$

但し  $\epsilon = \deg' x_1 + \cdots + \deg' x_{i-1}$  ( $\deg' = \deg + 1$ )。以下符号は割愛する。フィルトレーションは  $\mathcal{F}^\lambda \Lambda := \{x \in \Lambda \mid v_T(x) \geq \lambda\}$  から引き起こされるものを入れる。

**Remark 1.2.** (1) [FOOO3, FOOO4] では、 $L$  の  $\Lambda_0^{\mathbb{Q}}$  係数の特異チェイン複体のある部分複体上に  $A_\infty$  代数の構造を構成した。横断正則性の問題を解決するために、そこでは種数 0 の境界付き安定写像の種々のモジュライ空間の倉西構造の多価摂動を用いた。ここでは CF-摂動 (continuous family of perturbation) を用いてドラムモデルで話をする。CF-摂動は、一部 [FOOO4, FOOO7] でも導入していたが、[FOOO17, FOOO19] でより一般的な状況でも使い易いように整備した。CF-摂動を使うと、[FOOO3, FOOO4] で行っていた込み入った帰納的な構成が簡明になったり、また marked points の巡回対称性が得られ marked points の忘却写像がよい振る舞いをするようになるため、ドラムモデルでは単位元の存在<sup>4</sup>が従う [Fu2]。(その代わり係数は  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  となる。一方、CF-摂動ではなく [FOOO3, FOOO4] の議論を用いれば、 $X$  がある条件 (spherically positive<sup>5</sup>) をみたせば多価ではなく一価摂動で  $A_\infty$  代数を構成することができ、そのときは係数を  $\Lambda_0^{\mathbb{Z}}$  あるいは  $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$  にとることができる [FOOO13]。) なお、モース複体上に  $A_\infty$  代数を構成することもできる [FOOO5]。

(2) どのモデルを使うにせよ、 $A_\infty$  構造は一旦はチェンレベル (微分形式レベル) で構成される。一旦チェイン上に構成できれば、障害理論やホモロジー摂動と呼ばれる一般的な方法 ([Ka], [KS] など) を用いてコホモロジー  $H^*(L; \Lambda_0)$  上に  $A_\infty$  構造を作ることができる。これを [FOOO3, FOOO4] では canonical model と呼んだ。canonical model に移れば、特異チェインモデルの場合でも  $L$  の基本類  $e := PD[L] \in H^0(L; \Lambda_0)$  は  $A_\infty$  代数の単位元になる [FOOO3, Theorem A]。

(3) 構成には種数 0 の境界付き安定写像のモジュライ空間を用いるが、一気に  $A_\infty$  構造を構成するのではない。安定写像のエネルギーを用いたある半順序集合を考えることが擬正則写像の Gromov コンパクト性定理から可能であり、それに関する帰納的な構成を行う。帰納的なステップを進めるところではホモトピー的な議論 (障害理論) を組み合わせて  $A_\infty$  構造を構成する [FOOO4]。

(4) 以上の構成で技術的に基礎となるのは倉西構造の理論による仮想基本チェインの方法である。[FOOO3, FOOO4] で書かれたことの更に詳細な記述が必要ならば [FOOO15]、特に [FOOO16], [FOOO18] をご覧頂きたい。また、[FOOO17, FOOO19] は CF-摂動を基軸に、倉西構造の理論を公理化、パッケージ化して使い易いように再構築するものである。

### 1.3. Weak Maurer-Cartan equation, potential function and Floer cohomology.

$(C, \mathbf{m})$  を Theorem 1.1 の filtered  $A_\infty$  代数とする。 $b \in C[1]^0$  を用いて  $A_\infty$

<sup>4</sup>特異チェインモデルでは  $L$  の基本サイクルはホモトピー単位元。単位元までは言えない [FOOO3, FOOO4]。

<sup>5</sup>定値でない任意の  $J$ -holomorphic map  $u : S^2 \rightarrow X$  は  $c_1(TX)[u] > 0$  となるような  $\omega$ -compatible almost complex structure  $J$  が存在するもの。例えば Fano 多様体 ( $-K_X$  が豊富)。

代数は以下のように変形できる<sup>6</sup>。

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_k^b(x_1, \dots, x_k) &= \sum_{\ell_0, \dots, \ell_k} \mathfrak{m}_{k+\sum \ell_i}(\underbrace{b_1, \dots, b_{\ell_0}}_{\ell_0}, \underbrace{b_1, \dots, b_{\ell_1}}_{\ell_1}, \dots, \underbrace{b_1, \dots, b_{\ell_{k-1}}}_{\ell_{k-1}}, \underbrace{b_1, \dots, b_{\ell_k}}_{\ell_k}) \\ &= \mathfrak{m}(e^b x_1 e^b x_2 \dots x_{k-1} e^b x_k e^b) \end{aligned}$$

とおと、 $\mathfrak{m}_k^b$  はまた  $A_\infty$  構造を定める。但し

$$e^b := 1 + b + b \otimes b + \dots + b \otimes \dots \otimes b + \dots$$

とおいた。さて、 $A_\infty$  関係式 (1.1) において、 $\mathfrak{m}_0 \neq 0$  ならば、一般には  $(\mathfrak{m}_1)^2 = 0$  とはならないことに注意する。そこで、 $\mathfrak{m}_k$  を変形して  $(\mathfrak{m}_1^b)^2 = 0$  なるための  $b$  の条件を求めよう。 $A_\infty$  代数の単位元  $1_L$  を用いると次の定義に至る。

**Definition 1.3.**  $b \in C[1]^0$  に対し、

$$\mathfrak{m}(e^b)(= \mathfrak{m}_0^b(1)) = c_b 1_L, \quad \text{for } \exists c_b \in \Lambda_0$$

を **weak Maurer-Cartan 方程式** といい、その解の集合を  $MC_{\text{weak}}(L)$  とおく<sup>7</sup>。 $MC_{\text{weak}}(L) \neq \emptyset$  の時、 $L$  を weakly unobstructed という。更にこの時、

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L : MC_{\text{weak}}(L) \longrightarrow \Lambda_0$$

を  $\mathfrak{m}(e^b) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b)1_L$  で定義し、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L$  を  $L$  の **ポテンシャル関数** と呼ぶ<sup>8</sup>。

次の補題は単位元の定義および  $\mathfrak{m}_k^b$  に対する  $A_\infty$  関係式より直ちに従う。

**Lemma-Definition 1.4.**  $L$  が weakly unobstructed ならば、任意の  $b \in MC_{\text{weak}}(L)$  に対し、 $\mathfrak{m}_1^b \circ \mathfrak{m}_1^b = 0$  が成り立つ。このとき、

$$HF((L, b); \Lambda_0) := H(\Omega(L; \Lambda_0), \mathfrak{m}_1^b) \tag{1.2}$$

とおき、これを  $(L, b)$  の **Floer cohomology** とよぶ。

weak Maurer-Cartan 元が2つある場合、次が成り立つ。

**Proposition 1.5.**

$$\delta_{b_1, b_0}(x) := \sum_{k_1, k_0 \geq 0} \mathfrak{m}_{k_1+k_0+1}(\underbrace{b_1, \dots, b_1}_{k_1}, x, \underbrace{b_0, \dots, b_0}_{k_0})$$

とおく。もし  $b_i \in MC_{\text{weak}}(L)$  ならば、

$$(\delta_{b_1, b_0} \circ \delta_{b_1, b_0})(x) = (\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_1) - \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_0))x \tag{1.3}$$

が成り立つ<sup>9</sup>。特に  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_1) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_0)$  ならば、 $\delta_{b_1, b_0} \circ \delta_{b_1, b_0} = 0$ 。

**1.4. bulk deformations.** Subsections 1.2, 1.3 にでてきた様々なもの ( $A_\infty$  代数,  $MC_{\text{weak}}(L)$ ,  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L$  など) を、シンプレクティック多様体  $X$  の各サイクル  $\mathbf{b}$  により変形することができる [FOOO3, Subsection 3.8.5]。これを我々は**バルク変形**と呼んだ。以下の話もみな、バルク変形した族の話として捉えることができる。ここでは紙数の関係で割愛する。バルク変形を用いた応用として、[FOOO7], [FOOO9], [FOOO10], [FOOO14] をあげておく。[FOOO10] については Remark 2.8 (3) を参照。

<sup>6</sup> $v_T > 0$  のところで先の  $T$ -進位相を用い、 $v_T = 0$  のところでは通常の  $\mathbb{C}$  の位相を用いる。

<sup>7</sup>正確にはそのゲージ同値類の集合。[FOOO3, Chapter 4] を参照。また、 $\mathfrak{m}(e^b) = 0$  を Maurer-Cartan 方程式という。

<sup>8</sup>Maslov 指数が2未満の擬正則円盤がない状況 (例えば Theorem 2.3 (1) の状況) で、canonical model におけるポテンシャル関数の一般的表示は [FOOO9, Appendix 1] に与えてある。

<sup>9</sup> $\delta_{b_1, b_0}$  は  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L$  の行列因子化を与える。

## 2. Toric case

前節までの結果を受けて次が基本問題となるが、それを解決するためには、いかにせんすべての擬正則円盤のモジュライを解析しないといけないので一般にはいずれもなかなか難しい問題である。

**Problem 2.1.** シンプレクティック多様体  $X$  とその相対スピンなラグランジアン部分多様体  $L$  が与えられたとき、

- (1)  $L$  に付随する  $A_\infty$  代数構造を決定せよ。
- (2)  $L$  はいつ weakly unobstructed になるかを判定せよ。
- (3) (2) のときそのポテンシャル関数を計算し、Floer cohomology を計算せよ<sup>10</sup>。

問題 (2) については一般的な状況でいくつかの十分条件が知られている [FOOO3, Chapter 3] が、ここでは省略する。

この節の目的は  $X$  が射影的なトーリック多様体で、そのラグランジアン部分多様体としてトーラス軌道の場合に上記問題に答えることである。[FOOO6], [FOOO7], [FOOO10] の結果である<sup>11</sup>。

$\dim_{\mathbb{C}} X = n$  とする。  $X$  のモーメント写像を  $\pi$ 、その像を  $P$  とする。

$$\pi : X \rightarrow P \subset \mathbb{R}^n$$

像  $P$  は実  $n$  次元の凸多面体であることが知られている<sup>12</sup>。  $u \in \text{Int } P$  に対し  $L(u) := \pi^{-1}(u)$  とおくと、これは丁度  $T^n$  作用の軌道であり、 $T^n$  と微分同相なラグランジアン部分多様体となる。ここではラグランジアントーラスファイバーと呼ぶ。

**Proposition 2.2.** [FOOO6]

- (1) 任意の  $u \in \text{Int } P$  に対し、 $L(u)$  は weakly unobstructed。
- (2)

$$\frac{H^1(L(u); \Lambda_0)}{H^1(L(u); 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})} \subset \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L(u)).$$

以下、ポテンシャル関数  $\mathfrak{PD}_{L(u)}$  を Proposition 2.2 (2) の左辺に制限したのもと同じ  $\mathfrak{PD}_{L(u)}$  で書くことにする。いま、 $\mathbf{e}_i = PD(T^{i-1} \times \text{pt} \times T^{n-i}) \in H^1(T^n; \mathbb{Z})$  とおくと、任意の  $H^1(L(u); \Lambda_0)$  の要素は  $\sum_{i=1}^n x_i(u) \mathbf{e}_i$  と書けるので  $x_1(u), \dots, x_n(u)$  は  $H^1(L(u); \Lambda_0)$  の座標を与える。

$$y_i(u) = e^{x_i(u)}$$

とおくと、これは商空間

$$\frac{H^1(L(u); \Lambda_0)}{H^1(L(u); 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})} \cong (\Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})^n$$

の座標を与え、ポテンシャル関数  $\mathfrak{PD}_{L(u)}$  は  $y_i(u)$  の関数とみれる。

いま、 $X$  のモーメント写像の像  $P$  があるアファイン関数  $\ell_j$  を用いて

$$P = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ell_j(u) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$$

で与えられているとする。ここで、 $j$  番目の面の (内向き) 法ベクトル

$$v_j = (v_{j1}, \dots, v_{jn}) := \left( \frac{\partial \ell_j}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \ell_j}{\partial u_n} \right) \in \mathbb{Z}^n$$

<sup>10</sup>例えば、Floer cohomology の非消滅が分かるとシンプレクティック幾何に (ミラー対称性予想とは別に) いろいろ顕著な応用が得られる。例えば、[FOOO6], [FOOO7], [FOOO9], [FOOO12], [FOOO14] などをみられたい。

<sup>11</sup>それらのサーベイである [FOOO11] も参照。

<sup>12</sup>例えば、 $X = \mathbb{C}P^n$  で標準的なケーラー構造の場合、 $P$  は標準  $n$  単体。

は整数ベクトルである。このとき、以下が成り立つ。

**Theorem 2.3.** [CO][FOOO6][FOOO7]

(1)  $X$  がトーリック Fano 多様体のとき

$$\mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u)) = \sum_{j=1}^m y_1(u)^{v_{j1}} \dots y_n(u)^{v_{jn}} T^{\ell_j(u)}.$$

(2)  $X$  が Fano でないとき

$$\mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u)) = \sum_{j=1}^m y_1(u)^{v_{j1}} \dots y_n(u)^{v_{jn}} T^{\ell_j(u)} + \text{extra terms}^{13}.$$

上の定理の  $\mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u))$  は  $u$  に依っている関数であるが、更に

$$y_i = y_i(u) T^{u_i}$$

とおくと、ポテンシャル関数は  $u$  によらないことがわかる。これを  $\mathfrak{PD}_X$  と書く。

$$\mathfrak{PD}_X : (\Lambda \setminus 0)^n \rightarrow \Lambda.$$

**Example 2.4.**  $X = \mathbb{C}P^n$  のとき、 $u \in \text{Int}P$  に対し

$$\begin{aligned} \mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u)) &= y_1(u) T^{u_1} + \dots + y_n(u) T^{u_n} + \frac{T^{1-u_1-\dots-u_n}}{y_1(u) \cdots y_n(u)} \\ \mathfrak{PD}_{\mathbb{C}P^n}(y_1, \dots, y_n) &= y_1 + \dots + y_n + \frac{T}{y_1 \cdots y_n}. \end{aligned}$$

トラスファイバー  $L(u)$  の場合、 $\mathfrak{PD}_X$  の臨界点の条件式は  $m_1^b = 0$  を導くことがわかるので、 $(L(u), b)$  の Floer cohomology は消えない<sup>14</sup>。実際、次の定理のように  $\mathfrak{PD}_X$  の臨界点を調べることにより、Floer cohomology が消えないラグランジアン トラスファイバーを完全に決定することができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(X) &:= \left\{ (u, b) \mid u \in \text{Int} P, b \in \frac{H^1(L(u); \Lambda_0)}{H^1(L(u); 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})}, HF((L(u), b); \Lambda) \neq 0 \right\} \\ \text{Crit}(\mathfrak{PD}_X) &:= \left\{ \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in (\Lambda \setminus 0)^n \mid y_i \frac{\partial \mathfrak{PD}_X}{\partial y_i}(\vec{y}) = 0 \ \forall i, v_T(\vec{y}) \in \text{Int} P \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

とおいたとき、次が成り立つ。

**Theorem 2.5.** [FOOO6, FOOO10]  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$  とかく。

(1)  $\vec{y} \mapsto (u, b) = (v_T(\vec{y}), \sum_i \log(y_i T^{-v_T(y_i)}) e_i)$  は次の全単射を導く。

$$\text{Crit}(\mathfrak{PD}_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(X).$$

(2)  $\mathfrak{PD}_X$  が Morse のとき、 $\#\mathcal{M}(X) = \sum b_k(X)$ <sup>15</sup>。

<sup>13</sup> $X$  が Fano のときはマスロフ指数が 2 の正則円盤を分類することができ、ポテンシャル関数を上のように明示的に書き下すことができる [CO] が、Fano でないと  $c_1(TX)[C] \leq 0$  なる有理曲線  $C$  が存在することに対応してバブルが起これ、その効果として  $T$  のべきが大きくなる項が余分に出てきて、ポテンシャル関数は一般には無限和となる。詳しくは [FOOO7, Theorem 3.5] を参照。

<sup>14</sup>実際、 $m_1^b = 0$  ゆえ、加群として  $H(T^n; \Lambda)$  と同型になる。

<sup>15</sup>一般には、 $\#\mathcal{M}(X) \leq \sum b_k(X)$ 。

**Example 2.6.**  $X = \mathbb{C}P^n$  とすると Example 2.4 より  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathbb{C}P^n}(y_1, \dots, y_n) = y_1 + \dots + y_n + \frac{T}{y_1 \cdots y_n}$  ゆえ、臨界点は  $\zeta_{n+1} = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n+1}}$  を 1 の原始  $(n+1)$  乗根としたとき

$$\vec{y}_k = \left( \zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}, \dots, \zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}} \right) \in (\Lambda \setminus 0)^n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

よって、 $v_T(\vec{y}_k) = \left( \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right)$  で

$$\mathcal{M}(X) = \left\{ \left( \left( \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right), \vec{y}_k \right) \mid k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

ゆえ  ${}^{16}HF\left(L\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right), \vec{y}_k\right); \Lambda \cong \Lambda^{2^n}$ .

Theorem 2.5 より更に詳しく次の定理が得られる。

**Theorem 2.7.** [FOOO10] 任意の射影的トーリック多様体  $X$  に対し、次の環同型が存在する。

$$ks : QH(X) \xrightarrow{\sim} \text{Jac}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X). \quad (2.2)$$

ここで  $QH^*(X)$  は  $X$  の量子コホモロジー環を表す。

**Remark 2.8.** (1) (2.2) の右辺は  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X$  の  $(\Lambda_0)$  上定義されるヤコビ環である。Theorem 2.3 で述べたように  $X$  が Fano の場合は  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X$  はローラン多項式になるので普通のヤコビ環でよいが、 $X$  が Fano でないと  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X$  は一般には無限級数になるので通常のヤコビ環の定義ではなく、ある種の  $T$  進位相に関する完備化およびヤコビイデアルの閉包をとる必要がある。詳しくは [FOOO10] をご覧頂きたい。

(2) 同型射  $ks$  は小平-スペンサー写像の類似で後 (3.7) で述べる閉開写像  $q$  を用いて幾何学的に陽に与えられる。 $X$  がトーリック Fano 多様体の場合は、例えば A. Givental, V. Batyrev など色々な人々によって (色々な場合に) 上の同型は示されているが、具体的に同型射を与えて示すというより両辺を計算して同型を示すというものであり、我々の証明とは全く異なる。

(3) 左辺がシンプレクティックサイドで右辺が複素幾何サイドでこの同型はミラー対称性の一種である。[FOOO10, Chapter 3] では環同型だけでなくより詳しく、バルク変形 (Subsection 1.4) の空間  $H^*(X; \Lambda_0)$  に入るフロベニウス多様体構造 (平坦構造 [Sa]) のレベルでの同型も証明している。[FOOO11] も参照。

### 3. Fukaya category

Section 1 では一つのラグランジアン部分多様体に対して  $A_\infty$  代数が構成されることを述べた。ここではいくつかのラグランジアン部分多様体の族に対して深谷圏とよばれる  $A_\infty$  圏が構成されることを述べる。深谷圏のアイデアは [Fu1] に遡る。

#### 3.1. $A_\infty$ category $\mathcal{L}$ .

**Theorem 3.1.** [AFOOO1] シンプレクティック多様体  $X$  の有限個の *weakly unobstructed* なラグランジアン部分多様体  $L_i$  とその *weak Maurer Cartan* 元  $b_i \in \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L)$  の対の集合を  $\mathbf{L} = \{(L_i, b_i)\}$  とおく<sup>17</sup>。ここで  $L_i$  たちは互いに横断的に交わると仮定する。このとき、 $\mathbf{L}$  を対象の集合とするフィルター付き  $A_\infty$  圏  $\mathcal{L}$  が存在する。これを  $\mathbf{L}$  の **深谷圏** という。

<sup>16</sup>本当は  $\mathcal{M}(X)$  の第 2 成分は Theorem 2.5 (1) のように  $y_i$  座標を  $x_i(u)$  座標で書き換えるべきであるが表示を簡単にするため、 $y_i$  座標のまま表記する。以下同様。

<sup>17</sup>相対スピンの構造を考える際の  $st \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$  は  $st|_{L_i} \equiv w_2(L_i) \forall i$  をみたく。

すなわち、 $\mathcal{L}$  の対象は  $(L_i, b_i)$  で、対象  $(L_i, b_i)$  を以下では  $i$  と略記するとき、射の空間は

$$CF(i, j) = \begin{cases} \bigoplus_{p \in L_i \cap L_j} \Lambda \cdot p & \text{if } L_i \neq L_j, \\ \Omega(L_i; \Lambda) & \text{if } L_i = L_j \end{cases} \quad (3.1)$$

であり、 $\vec{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_k)$  とおくととき写像の族

$$m_{\vec{\kappa}} : B_{\vec{\kappa}}CF(\mathcal{L}) := CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_{k-1}, \kappa_k) \rightarrow CF(\kappa_0, \kappa_k) \quad (3.2)$$

で  $A_\infty$  関係式

$$\sum_{\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2} \pm m_{\vec{\kappa}_1}(\cdots, m_{\vec{\kappa}_2}(\cdots, \cdots), \cdots) = 0 \quad (3.3)$$

をみたすものが存在する。

$m_{\vec{\kappa}}$  の構成には  $\vec{\kappa}$  を境界条件とする種数 0 の境界付き安定写像のモジュライ空間を用いるが、Theorem 1.1 に比べ新たな技術的問題は現れない。倉西構造の理論をパッケージ化した [FOOO17, FOOO19] の命題を用いれば始めから証明をやり直す必要はない程度である。

**3.2. Hochschild (co)homology of  $\mathcal{L}$ .**  $A_\infty$  圏  $\mathcal{L}$  に対して、その ( $\mathcal{L}$  自身を係数とする) Hochschild (co)homology を導入する。まず、以下で用いる一般的な記号の説明を行う。 $\Lambda$  加群  $C$  に対し、 $B_k C = \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{k \text{ times}}$  および  $BC = \bigoplus_{k=0}^\infty B_k C$  とおく。

(ただし  $B_0 C = \Lambda_0$ )  $BC$  には次の余積  $\Delta : BC \rightarrow BC \otimes BC$  により余結合的余代数の構造が入る。

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{i=0}^k (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_k).$$

$\Delta^{n-1} : BC \rightarrow (BC)^{\otimes n}$  を

$$\Delta^{n-1} = (\Delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-2}) \circ (\Delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-3}) \circ \cdots \circ \Delta.$$

により定義すると  $\mathbf{x} \in B_k C$  は

$$\Delta^{n-1}(\mathbf{x}) = \sum_c \mathbf{x}_c^{(n;1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_c^{(n;n)} \quad (3.4)$$

と書き表すことができる。ここで、 $c$  は  $\mathbf{x}$  を  $n$  個のテンソル積の形に分割するやり方を指定する添字の集合を走る。

**Lemma-Definition 3.2.** 以下で定義される  $(CH_*(\mathcal{L}), \partial_H)$  は複体をなす。これを  $A_\infty$  圏  $\mathcal{L}$  の Hochschild chain complex といい、そのホモロジーを  $HH_*(\mathcal{L})$  と書き、 $\mathcal{L}$  の Hochschild homology という。 $\vec{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_k)$  としたとき

$$\begin{aligned} CH_*(\mathcal{L}) &:= \bigoplus_{\vec{\kappa}} CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_k, \kappa_0) \\ \partial_H(\mathbf{x}) &:= \sum_c \pm \mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes m(\mathbf{x}_c^{(3;2)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;3)} + \sum_c \pm m(\mathbf{x}_c^{(3;3)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes \mathbf{x}_c^{(3;2)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Lemma-Definition 3.3.** 以下で定義される  $(CH^*(\mathcal{L}), \delta_H)$  は複体をなす。これを  $A_\infty$  圏  $\mathcal{L}$  の Hochschild cochain complex といい、そのホモロジーを  $HH^*(\mathcal{L})$  と書き、 $\mathcal{L}$  の **Hochschild cohomology** という。 $\vec{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_k)$  としたとき

$$CH^*(\mathcal{L}) := \prod_{\vec{\kappa}} \text{Hom}(CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_{k-1}, \kappa_k), CF(\kappa_0, \kappa_k))$$

$$\delta_H(\varphi)(\mathbf{x}) := \sum_c \pm m(\mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes \varphi(\mathbf{x}_c^{(3;2)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;3)}) + \sum_c \pm \varphi(\mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes m(\mathbf{x}_c^{(3;2)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;2)}).$$
(3.6)

**Remark 3.4.** Hochschild homology は Hochschild cohomology 上の加群の構造を自然にもつ (キャップ積)。

**Lemma-Definition 3.5.**  $\varphi, \psi \in HH^*(\mathcal{L})$  に対し

$$m_2(\varphi, \psi) := \sum \pm m(\cdots, \varphi(\cdots), \cdots, \psi(\cdots), \cdots)$$

と定義すると、これは  $HH^*(\mathcal{L})$  に結合的な積を定めるこれにより、 $HH^*(\mathcal{L})$  は環構造をもつ。

**3.3. Open-closed, closed-open maps.** 我々は [FOOO3, Theorem 3.8.9, Theorem 3.8.32] において各ラグランジアン部分多様体  $L \subset X$  に対して、種数 0 境界付き安定写像のモジュライ空間の interior marked point, boundary marked point をそれぞれ出力点として用いることにより次の写像を構成した。

$$\begin{aligned} p &: HF(L, b) \rightarrow QH^*(X) \quad \text{s.t. } p \equiv i_! \pmod{\Lambda_+} \\ q &: QH^*(X) \rightarrow HF(L, b) \quad \text{s.t. } q \equiv i^* \pmod{\Lambda_+}. \end{aligned}$$
(3.7)

ここで  $i: \rightarrow X$  は包含写像で  $i_!$  は Gysin 写像。  $\pmod{\Lambda_+}$  は係数を  $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$  に還元することを意味する。最近では  $p$  を開閉写像、 $q$  を閉開写像と呼び  $OC, CO$  などと書く<sup>18</sup>人が多いようである。これを深谷圏  $\mathcal{L}$  の場合に一般化することは直接的である。

**Proposition 3.6.** [AFOOO1] 次の  $\Lambda$  加群の射  $\hat{p}, \hat{q}$  で、 $\mathcal{L} = \{(L, b)\}$  (対象が唯一) のとき (3.7) の  $p, q$  に一致するものが存在する。

$$\begin{aligned} \hat{p} &: HH_*(\mathcal{L}) \rightarrow QH^*(X) \\ \hat{q} &: QH^*(X) \rightarrow HH^*(\mathcal{L}). \end{aligned}$$
(3.8)

更に、 $\hat{q}$  は環準同型射になり、 $\hat{p}$  は  $QH^*(X)$ -加群の射となる。

Remark 3.4 により、 $HH_*(\mathcal{L})$  は  $HH^*(\mathcal{L})$ -加群と思えるが、更に (3.8) の環準同型射  $\hat{q}: QH^*(X) \rightarrow HH^*(\mathcal{L})$  を経由することで  $\hat{p}$  を  $QH^*(X)$ -加群の射とみることができる、というのが最後の主張である。

射  $\hat{p}$  と  $\hat{q}$  は次の意味で互いに双対である。

**Proposition 3.7.** [AFOOO1] 任意の  $x \in QH^*(X)$  と  $y \in HH_*(\mathcal{L})$  に対し

$$\langle \hat{q}(x), y \rangle_{HH} = \pm \langle x, \hat{p}(y) \rangle_{PD_X}$$

が成り立つ。ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{HH}$  は Hochschild cohomology と Hochschild homology の自然な pairing で、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{PD_X}$  は  $X$  の Poincaré pairing を表す。

<sup>18</sup>確かにその方がネーミングとしてはセンスがよいと思う。

**Remark 3.8.** (1) 上の双対性は直感的には当たり前の式なのであるが、 $\hat{p}, \hat{q}$  を構成する際の摂動の取り方がそれぞれで異なるのでそれらをつなげる議論が必要となる。

(2)  $X$  が Liouville 多様体 (特に非コンパクト) の場合に S. Ganatra は同様の双対性を示した [Ga]。我々の場合は  $X$  がコンパクトなので、 $QH^*(X)$  上に Poincaré pairing があり (1) の摂動の問題をクリアすれば後は容易であるのに対し、彼の場合は非コンパクトゆえその部分は易しくない。(量子コホモロジーの代わりにシンプレクティックコホモロジー  $SH^*(X)$  を考える。一方、彼の場合は、Liouville 多様体内の完全なラグランジアン部分多様体を扱っており bubble が起こらずにその点は我々に比べて易しい。)

**3.4. Trace map.** 深谷圏  $\mathcal{L}$  の射の空間  $CF(i, j)$  に次により内積を入れる。

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}} := \begin{cases} \pm \langle \cdot, \cdot \rangle_{PD_L} & \text{if } L_i = L_j \\ \pm 1 & \text{if } p_i, p_j \in L_i \cap L_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

いま、 $\mathcal{L}, \mathcal{U}$  ( $\mathcal{L} = \mathcal{U}$  も可) をシンプレクティック多様体  $X$  のラグランジアン部分多様体のなす深谷圏とし、 $\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$  の対象のラグランジアン部分多様体は互いに横断的に交わると仮定する。このとき、 $\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$  にも  $A_\infty$  圏の構造と内積が入る。

**Definition 3.9.** [AFOOO1][FOOO10]  $\Lambda$  双線形写像

$$Z : CH_*(\mathcal{L}) \times CH_*(\mathcal{U}) \rightarrow \Lambda$$

を  $\mathbf{x} \in CH_*(\mathcal{L}), \mathbf{y} \in CH_*(\mathcal{U})$  に対し、

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{c_1, c_2} \sum_{f_1, f_2} \pm \langle \mathbf{m}(\mathbf{x}_{c_1}^{(2;1)}, f_1^\vee, \mathbf{y}_{c_2}^{(2;2)}), f_2^\vee \rangle \langle \mathbf{m}(\mathbf{y}_{c_2}^{(2;1)}, f_1, \mathbf{x}_{c_1}^{(2;2)}), f_2 \rangle \quad (3.9)$$

と定める。ここで  $\sum_{f_1, f_2}$  は  $f_1 \in U_{v(c_2;2)} \cap L_{\kappa(c_1;1)}, f_2 \in L_{\kappa(c_1;2)} \cap U_{v(c_2;1)}$  なる  $f_1, f_2$  をわたる。ただし、 $\kappa(c_1; 1), \kappa(c_1; 2), v(c_2; 1), v(c_2; 2)$  は

$$\mathbf{x}_{c_1}^{(2;1)} = x_1^{c_1} \otimes \cdots \otimes x_{a(c_1)}^{c_1}, \quad \mathbf{y}_{c_2}^{(2;1)} = y_1^{c_2} \otimes \cdots \otimes y_{b(c_2)}^{c_2}$$

と表したとき、

$$\begin{aligned} x_1^{c_1} &\in CF(L_{\kappa(c_1;1)}, L_{\kappa'}), & x_{a(c_1)}^{c_1} &\in CF(L_{\kappa''}, L_{\kappa(c_1;2)}), \\ y_1^{c_2} &\in CF(U_{v(c_2;1)}, U_{v'}), & y_{b(c_2)}^{c_2} &\in CF(U_{v''}, U_{v(c_2;2)}) \end{aligned}$$

となるような対象の添字である。また、 $f_1 \in U_{v(c_2;2)} \cap L_{\kappa(c_1;1)}$  のとき  $f_1^\vee$  は点として  $f_1$  と同じであるが  $f_1^\vee \in L_{\kappa(c_1;1)} \cap U_{v(c_2;2)}$  とみている。右辺の内積は  $\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$  上の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L} \cup \mathcal{U}}$  を表す。

このとき、直接計算により次がわかる。

**Lemma-Definition 3.10.**  $\mathbf{x} \in CH_*(\mathcal{L}), \mathbf{y} \in CH_*(\mathcal{U})$  に対し、

$$Z(\delta_H \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \pm Z(\mathbf{x}, \delta \mathbf{y}) = 0$$

が成り立つ。よって

$$Z : HH_*(\mathcal{L}) \times HH_*(\mathcal{U}) \rightarrow \Lambda$$

を引き起こす。これを **Trace map** とよぶ。

**Theorem 3.11.** [AFOOO1][FOOO10] 任意の  $\mathbf{x} \in HH_*(\mathcal{L}), \mathbf{y} \in HH_*(\mathcal{U})$  に対し、

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \hat{p}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}), \hat{p}_{\mathcal{U}}(\mathbf{y}) \rangle_{PD_X} \quad (3.10)$$

が成り立つ。この等式はしばしば **Cardy relation** と呼ばれる。ここで  $\hat{p}_{\mathcal{L}}, \hat{p}_{\mathcal{U}}$  は  $\mathcal{L}, \mathcal{U}$  における  $\hat{p}$  写像を表す。

双対性 Proposition 3.7 を用いると

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \widehat{q}_U \circ \widehat{p}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle_{HH(U)}. \quad (3.11)$$

Theorem 3.11 の証明には、**アニュラスからの安定写像**のモジュライ空間を用いる。アニュラスからの安定写像のモジュライを使った議論は、既に [Ab], [FOOO10] にある。

**Remark 3.12.** (1) [FOOO10, Definition 1.3.22] では  $A_\infty$  代数の場合 (深谷圏で対象が一つの場合) に Trace map を導入した。深谷圏への一般化は直接的である。性質 (3.10) は [FOOO10, Theorem 3.4.1. Proposition 3.5.2, Remark 3.10.18 もみよ] に相当し、これはコンパクトトーリック多様体の場合に小平スペンサー写像<sup>19</sup>

$$ks : QH^*(X) \rightarrow \text{Jac}(\mathfrak{PD}_X)$$

が  $QH^*(X)$  および  $\text{Jac}(\mathfrak{PD}_X)$  上の内積を保つという重要な結果を導き [FOOO10, Chapter 3], Remark 2.8 (3) で述べたフロベニウス多様体構造の同型を示すキーとなる。

(2) D. Shklyarov は独立に、proper smooth dg 圏に対して Trace map を構成した [Shk]。N. Sheridan はそれを  $A_\infty$  圏の場合に直接的に一般化している [Sh]。

#### 4. Generation criteria

M. Abouzaid は [Ab] において、 $X$  が Liouville 多様体で完全ラグランジアン部分多様体のなす深谷圏について、その生成元の判定条件を与えた。この場合は Remark 3.8 (2) でも触れたように、バブルが起こらずそれにとまなうモジュライ空間の解析は容易になる。ここでは、これまでの我々の結果を用いて、一般のコンパクトシンプレクティック多様体  $X$  と完全とは限らないコンパクトラグランジアン部分多様体のなす深谷圏の場合に判定条件を与える。

$X$  をコンパクトシンプレクティック多様体とし、そのある有限個の weakly unobstructed かつ互いに横断的に交わるラグランジアン部分多様体の族  $\{L_i\}$  とその weak Maurer-Cartan 元  $\{b_i\}$  の対の集合  $\mathbf{L} = \{(L_i, b_i)\}$  から Theorem 3.1 により得られる深谷圏を  $\mathcal{L}$  とする。 $1_X \in QH^0(X)$  を量子コホモロジー環の単位元とする。 $1_X$  は  $X$  の基本類のポアンカレ双対である。

**Theorem 4.1.** [AFOOO1] 上の状況で、深谷圏  $\mathcal{L}$  は条件

$$1_X \in \text{Image}(\widehat{p} : HH_*(\mathcal{L}) \rightarrow QH^*(X)) \quad (4.1)$$

をみたしていると仮定する。このとき、任意の (別の) *weakly unobstructed* なラグランジアン部分多様体  $U$  とその *weak Maurer-Cartan* 元  $b_U$  で  $HF((U, b_U); \Lambda) \neq 0$  をみたすものに対し、 $(L, b) \in \mathbf{L}$  が存在し、

$$\mathfrak{PD}_L(b) = \mathfrak{PD}_U(b_U)$$

が成り立つ。

証明には、Subsection 3.4 で導入した Trace map  $Z$  を用い、Theorem 3.11 が本質的に用いられる。

さて、 $\lambda := \mathfrak{PD}_L(b) = \mathfrak{PD}_U(b_U)$  とおく。

$$\mathbf{L}_\lambda := \{(L, b) \in \mathbf{L} \mid \mathfrak{PD}_L(b) = \lambda\}$$

とおき、 $\mathbf{L}_\lambda$  がなす  $\mathcal{L}$  の  $A_\infty$  部分圏を  $\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}$  とする。また、

$$\mathcal{U}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \cup \{(U, b_U)\}$$

<sup>19</sup>[FOOO10, Theorem 1.1.1] より  $ks$  は環同型写像。

とおくと Theorem 4.1 より包含写像が引き起こす自然な関手

$$I_\lambda : \mathcal{L}_\lambda \longrightarrow \mathcal{U}_\lambda$$

が存在する。このとき、

**Theorem 4.2.** [AFOOO1]  $I_\lambda$  は次の導来圏の同値を引き起こす<sup>20</sup>:

$$I_\lambda : D^\pi(\mathcal{L}_\lambda) \xrightarrow{\sim} D^\pi(\mathcal{U}_\lambda). \quad (4.2)$$

すなわち、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b)$  の値が  $\lambda$  である対象のなす導来圏の中では、新たな対象  $(U, b_U)$  は不要であり、条件 (4.1) をみたく深谷圏  $\mathcal{L}_\lambda$  があれば十分ということである。その意味で条件 (4.1) は深谷圏の生成を意味する条件を与える。条件 (4.1) は更に次の条件と同値である。

**Theorem 4.3.** [AFOOO1] 条件 (4.1) は次の (1) または (2) と同値。

- (1)  $\hat{p}$  は全単射
- (2)  $\hat{q}$  は全単射。

すなわち、条件 (4.1) をみたく深谷圏  $\mathcal{L}$  は、シンプレクティック多様体  $X$  の量子コホモロジーの情報をすべてもっているということになる。従って、次が基本問題となる。

**Problem 4.4.** シンプレクティック多様体  $X$  が与えられたとき、条件 (4.1) をみたく深谷圏  $\mathcal{L}$  を見つけよ。

次節では  $X$  が射影的なトーリック多様体の場合にその例をあげる。

## 5. Example

$X$  を射影的なトーリック多様体とし、以下 Section 2 の記号をそのまま用いる。(2.1) で定義した  $\text{Crit}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X)$  を用いて

$$\mathcal{L} := \{(L(u), \vec{y}) \mid \vec{y} \in \text{Crit}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X)\} \quad (5.1)$$

とおく。Theorem 2.5 より、任意の  $(L(u), \vec{y}) \in \mathcal{L}$  に対し、 $HF((L(u), \vec{y}); \Lambda) \neq 0$  であることに注意。このとき、

**Theorem 5.1.** [AFOOO2]  $\mathcal{L}$  は条件 (4.1) をみたく。特に、 $\mathcal{L}$  は  $X$  の深谷圏 (の導来圏) を生成する。

*Proof.* 写像  $\mathcal{I} : HH^*(\mathcal{L}) \rightarrow \text{Jac}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X)$  を構成し、可換図式

$$\begin{array}{ccc} QH^*(X) & \xrightarrow{\hat{q}} & HH^*(\mathcal{L}) \\ & \searrow ks & \downarrow \mathcal{I} \\ & & \text{Jac}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X) \end{array}$$

を得る。Theorem 2.7 より小平-スペンサー写像  $ks$  は同型ゆえ、 $\hat{q}$  は単射。双対性 Proposition 3.7 より  $\hat{q}$  は全射。□

<sup>20</sup> $A_\infty$  圏の twisted complex から三角圏を作り (シフト、射の錐を繰り返して得られるものを加える)、その後ベキ単完備化をとったものを  $D^\pi$  と書く。ホモロジー的ミラー対称性予想を考える際に必要。例えば [Sei] を参照。

**Example 5.2.** (Example 2.6 の続き)  $X = \mathbb{C}P^n$  のとき、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathbb{C}P^n}(y_1, \dots, y_n)$  の臨界点は、 $\zeta_{n+1}$  を 1 の原始  $(n+1)$  乗根として

$$\vec{y}_k = (\zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}, \dots, \zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

で与えられた。

$$\mathcal{L} = \left\{ \left( L \left( \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right), \vec{y}_k \right) \mid k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

とおくと、これが  $\mathbb{C}P^n$  の深谷圏の生成元を与える<sup>21</sup>。このとき、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathbb{C}P^n}$  は Morse で

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathbb{C}P^n}(\vec{y}_k) = (n+1)\zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}$$

ゆえ、 $(n+1)$  個の臨界値は互いに異なる。また、C-H.Cho[Ch]の結果により、Floer cohomology  $HF\left(\left(L\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right), \vec{y}_k\right)\right)$  は  $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_{\mathbb{C}P^n}$  のヘッシアンに associate した Clifford 代数と同型になる。C. Kassel[Ka]の結果 (の  $A_\infty$  版) によれば、Clifford 代数の Hochschild cohomology は 1 次元になる。よって  $\mathcal{L}$  の Hochschild cohomology は 1 次元の直和に分解し

$$HH^*(\mathcal{L}) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}.$$

一方、 $\mathbb{C}P^n$  の量子コホモロジー環は半単純で

$$QH^*(\mathbb{C}P^n) \cong \Lambda[y]/(y^{n+1} = T) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}$$

と直和分解することが知られている。よって、この場合は直接計算によっても同型

$$QH^*(\mathbb{C}P^n) \cong HH^*(\mathcal{L}) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}$$

を確認することができる。

#### REFERENCES

- [Ab] M. Abouzaid, *A geometric criterion for generating the Fukaya category*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 112 (2010), 191–240.
- [AFOOO1] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Quantum cohomology and split generation in Lagrangian Floer theory*, in preparation.
- [AFOOO2] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Homological mirror symmetry for compact toric manifolds*, in preparation.
- [Ch] C.-H. Cho, *Holomorphic disks, spin structures and the Floer cohomology of the Clifford torus*, Internat. Math. Res. Notices 35 (2004), 1803–1843.
- [CO] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773–814.
- [EL] J. D. Evans and Y. Lekili, *Floer cohomology of the Chiang Lagrangian*, Selecta Math. New Series 21, (2015), 1361–1404.
- [Fu1] K. Fukaya, *Morse homotopy,  $A^\infty$ -categories, and Floer homologies*, Proc. of the 1993 Garc Workshop on Geometry and Topology ed. by H. J. Kim, Lecture Notes series 18, Seoul Nat. Univ. (1993), 1–102.
- [Fu2] K. Fukaya, *Cyclic symmetry and adic convergence in Lagrangian Floer theory*, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 3, 521–590.
- [FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction*, Kyoto University preprint, 2000.
- [FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction*, expanded version of [FOOO1], 2006 & 2007.

<sup>21</sup>他の生成元もありうる。例えば [EL] では  $\mathbb{C}P^3$  の R. Chiang のラグランジアン部分多様体 (とその上の 4 種の局所系を組にしたもの) が、有限体  $\mathbb{F}_5$  上で生成元となることを示している。因に我々の  $(L(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \vec{y}_k)$  も  $\mathbb{F}_5$  上生成している。

- [FOOO3] <sup>22</sup> K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction, Part I*, AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.1, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009). MR2553465.
- [FOOO4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction, Part II*, AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.2, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009). MR2548482.
- [FOOO5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Canonical models of filtered  $A_\infty$ -algebras and Morse complexes*, in ‘New perspectives and challenges in symplectic field theory’, 201–227, CRM Proc. Lecture Notes, 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009).
- [FOOO6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151, (2010), no.1, 23–174.
- [FOOO7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II: bulk deformations*, Selecta Math. New Series 17, (2011), 609–711.
- [FOOO8] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Anti-symplectic involution and Floer cohomology*, arXiv:0912.2646. To appear in Geometry and Topology.
- [FOOO9] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in  $S^2 \times S^2$* , Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 13, 2942–2993.
- [FOOO10] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, Astérisque 376, (2016). arXiv:1009.1648.
- [FOOO11] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey*, Surveys in Differential Geometry XVII (2012) 229–298.
- [FOOO12] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory*, J. Symplectic Geom. 11 (2013), no 2, 231–268.
- [FOOO13] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory over integers: spherically positive symplectic manifolds*, Pure and Applied Math. Quarterly 9, No 2, (Special Issue: In Honor of Dennis Sullivan), 189–289 (2013).
- [FOOO14] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Spectral invariants with bulk, quasimorphisms and Lagrangian Floer theory*, submitted, arXiv:1105.5123.
- [FOOO15] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Technical details on Kuranishi structure and virtual fundamental chain*, arXiv:1209.4410.
- [FOOO16] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Shrinking good coordinate systems associated to Kuranishi structures*, arXiv:1405.1755. To appear in J. Symplectic Geom.
- [FOOO17] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Kuranishi structure, Pseudo-holomorphic curve, and virtual fundamental chain: Part I*, arXiv:1503.0763.
- [FOOO18] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Exponential decay estimates and smoothness of the moduli space of pseudoholomorphic curves*, submitted, arXiv:1603.07026.
- [FOOO19] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Kuranishi structure, Pseudo-holomorphic curve, and virtual fundamental chain: Part II*, In preparation.
- [Ga] S. Ganatra, *Symplectic cohomology and duality for the wrapped Fukaya category*, ArXiv1304.7312.
- [Ka] T.V. Kadeišvili, *The algebraic structure in the homology of an  $A_\infty$ -algebra*, Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 108, (1982). 249–252.
- [Ka] C. Kassel, *A Künneth formula for the cyclic cohomology of  $\mathbb{Z}_2$ -graded algebras*, Math. Ann. 275, 683–699 (1986).
- [KS] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, in ‘Symplectic Geometry and Mirror Symmetry’ ed. by K. Fukaya et all. World Sci. Publishing, (2001). 203–263.
- [Sa] K. Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. R.I.M.S. 19 (1983), 1231 - 1261.
- [Sei] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, (2008).
- [Sh] N. Sheridan, *Formulae in noncommutative Hodge theory*, ArXiv1510.03795.
- [Shk] D. Shklyarov, *Matrix factorizations and higher residue pairings*, ArXiv1306.4878.

<sup>22</sup>2016 年に再版されるらしい。



# ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論

岸本 大祐 (京都大学)\*

## 1. はじめに

ポリヘドラルプロダクトは, (抽象) 単体複体によって定まる直積空間の部分空間たちの和集合として与えられる空間である. この構成は, ウェッジやジョインなど, ホモトピー論において基本的な空間の構成法を組み合わせたものに拡張したものであり, その雛形は古くに現れていた. ([27, 1] 参照) 単体複体を用いた現在の定式化は, Davis-Januszkiewicz [8] による擬トーラス多様体に関する仕事において, モーメントアングル複体と Davis-Januszkiewicz 空間と呼ばれる単体複体により定まる空間が導入された後, それらの一般化として Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler [2] により与えられた.

定義より, ポリヘドラルプロダクトのトポロジーは, 単体複体の組み合わせ情報により支配されるため, そのホモトピー不変量は単体複体の組み合わせ不変量を与える. 特に, あるポリヘドラルプロダクトのコホモロジーは, 単体複体の Stanley-Reisner 環やその導来代数と同型であることが知られており ([8, 3] 参照), Stanley-Reisner 環の情報をもとに, ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型を決定するという研究が行われてきた. ([2, 16, 17, 13, 15] 参照) また, 最近では, Kätthan の仕事 [25] に見られるように, ポリヘドラルプロダクトに関する結果を, 単体複体の組み合わせ論へと拡張することも行なわれており, ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論と組み合わせ論との相互作用は, より興味深い展開を見せている.

2013年のトポロジーシンポジウムにおいて入江幸右衛門氏 (大阪府立大学) がポリヘドラルプロダクトの分解について講演された後, いくつか重要な進展があったので, 本講演ではこの進展を中心に, 以下の項目について解説する: (i) ポリヘドラルプロダクトと Stanley-Reisner 環, (ii) ファットウェッジフィルトレーションとホモトピー分解, (iii) Golod 性と sequentially Cohen-Macaulay 性, (iv) 今後の課題. ポリヘドラルプロダクトにはトーリックトポロジーとのつながりという重要な側面があるが, 今回はそれに関して具体的には触れないことにする. 本講演の内容は入江幸右衛門氏との共同研究にもとづいている.

## 2. ポリヘドラルプロダクトと Stanley-Reisner 環

### 2.1. ポリヘドラルプロダクトの定義

まず, ポリヘドラルプロダクトを定義しよう. 以下,  $K$  を頂点集合が  $[m] = \{1, \dots, m\}$  である (抽象) 単体複体とし,  $(\underline{X}, \underline{A})$  を空間対の族  $\{(X_i, A_i)\}_{i \in [m]}$  とする. 部分集合  $\sigma \subset [m]$  に対して,  $X_1 \times \dots \times X_m$  の部分空間

$$D(\sigma) = Y_1 \times \dots \times Y_m, \quad Y_i = X_i \ (i \in \sigma), \ A_i \ (i \notin \sigma)$$

を対応させることで, 単体複体  $K$  は部分空間配置を定める. (実際は  $K$  の極大面だけで定まるが,  $K$  を考えるほうが便利である.) その和としてポリヘドラルプロダクトは定

2010 Mathematics Subject Classification: 55P15, 05E45, 52B22

キーワード: polyhedral product, moment-angle complex, Stanley-Reisner ring, Golodness

\* 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学 大学院理学研究科

e-mail: kishi@math.kyoto-u.ac.jp

web: <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kishi/>

義される :

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} D(\sigma)$$

特に重要なポリヘドラルプロダクトは,  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ ,  $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *)$  であり, 本講演では  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  を扱う.

**例 2.1** 任意の  $i$  で  $(X_i, A_i) = (\mathbb{R}, 0)$  のとき, 部分空間配置  $\{D(\sigma)\}_{\sigma \in K}$  を  $K$  が定める座標空間配置という. 定義より, その和は  $\mathcal{Z}_K(\mathbb{R}, 0)$  である.  $K$  の Alexander 双対を

$$K^\vee = \{\tau \subset [m] \mid [m] - \tau \notin K\}$$

で定めると,  $K$  が定める座標空間配置の補空間は  $\mathcal{Z}_{K^\vee}(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \simeq \mathcal{Z}_{K^\vee}(D^1, S^0)$  となる. この部分空間配置の複素化を考えると, その補空間は  $\mathcal{Z}_{K^\vee}(\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0) \simeq \mathcal{Z}_{K^\vee}(D^2, S^1)$  である. ポリヘドラルプロダクト  $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ ,  $\mathcal{Z}_K(D^1, S^0)$  は特に重要であり, それぞれモーメントアングル複体, 実モーメントアングル複体と呼ばれ,  $\mathcal{Z}_K, \mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  で表される.

**例 2.2** 射影  $(CX_i, X_i) \rightarrow (\Sigma X_i, *)$  は写像

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \rightarrow \mathcal{Z}_K(\Sigma \underline{X}, *) \tag{1}$$

を誘導する.  $K = \partial\Delta^{[m]}$  のときを考える. ここで,  $\Delta^{[m]}$  は頂点集合を  $[m]$  とする単体である.  $m = 2$  のとき, この写像は Whitehead 積  $X_1 * X_2 \rightarrow \Sigma X_1 \vee \Sigma X_2$  であり,  $m > 2$  のとき, Porter [27] はこの写像を高次 Whitehead 積と呼んだ. したがって, 一般の  $K$  に対して, 写像 (1) は高次 Whitehead 積の一般化と考えられる.

ポリヘドラルプロダクトは  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$ ,  $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, *)$  は次のホモトピーファイブレーションにより, 相互補完的に結びつけられている.

$$\mathcal{Z}_K(C\Omega \underline{X}, \Omega \underline{X}) \rightarrow \mathcal{Z}_K(\underline{X}, *) \xrightarrow{\text{incl}} X_1 \times \cdots \times X_m \tag{2}$$

また, ファイバーの包含写像は (1) において  $\underline{X}$  を  $\Omega \underline{X}$  に置き換えたものを經由する.

## 2.2. Stanley-Reisner 環

単体複体  $K$  の可換環  $R$  上の Stanley-Reisner 環は

$$R[K] = R[v_1, \dots, v_m] / (v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid \{i_1, \dots, i_k\} \notin K)$$

により定義される. 便宜上,  $v_i$  の次数は 2 とする. 定義より次の同型をただちに得る.

$$H^*(\mathcal{Z}_K(BS^1, *); R) \cong R[K] \tag{3}$$

したがって,  $\mathcal{Z}_K(BS^1, *)$  と関係する空間によって,  $R[K]$  の導来代数を実現できる. 例えば,  $R[K]$  のコホモロジーは  $\Omega \mathcal{Z}_K(BS^1, *)$  のコホモロジーと同型である. 本講演で重要なのは次の同型である.

**命題 2.3 (Baskakov-Buchstaber-Panov [3])** 次の環同型が存在する.

$$H^*(\mathcal{Z}_K; R) \cong \text{Tor}_{R[v_1, \dots, v_m]}^*(R[K], R)$$

ただし, 右辺の積は Koszul 分解から誘導される.

この同型は、チェインレベルでの同型を具体的に記述することで、Baskakov-Buchstaber-Panov [3]により得られたが、ホモトピーファイブレーション(2)のEilenberg-Mooreスペクトル系列に同型(3)を代入することでも理解出来る。同型(3)と命題2.3の同型を通してポリヘドラルプロダクトの性質を類推し、証明する、もしくは、ポリヘドラルプロダクトの性質を単体複体の組み合わせ論へと還元するのが本研究の大きな目的である。

**注 2.4** ポリヘドラルプロダクトはStanley-Reisner環だけではなく、群のグラフ積を基本群で実現する。例えば、グラフ $\Gamma$ に対して、 $\mathcal{Z}_\Gamma(B\mathbb{Z}/2, *)$ の基本群はright-angled Coxeter群と同型であり、ホモトピーファイブレーション(2)により、 $\mathbb{R}\mathcal{Z}_\Gamma$ の基本群はその交換子群と同型であることがわかる。このつながりに焦点をあてたポリヘドラルプロダクトの研究も興味深い。( [10, 9, 29, 30] 参照)

### 3. ファットウェッジフィルトレーションとホモトピー分解

#### 3.1. BBCG 分解

Hochsterは加群同型

$$\mathrm{Tor}_{R[v_1, \dots, v_m]}^*(R[K], R) \cong \bigoplus_{I \subset [m]} \tilde{H}^*(K_I; R)$$

を示した。ただし、 $K_I = \{\sigma \in K \mid \sigma \subset I\}$ 。(Hochsterはさらに、環構造もこの同型を通して組み合わせ的に記述している。)この同型を実現するポリヘドラルプロダクトの性質が知られており、それが次のBBCG分解である。

**定理 3.1 (Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler [2])** 次のホモトピー同値が存在する。

$$\Sigma \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \Sigma \bigvee_{\emptyset \neq I \subset [m]} |\Sigma K_I| \wedge \hat{X}^I$$

ただし、 $\hat{X}^I = \bigwedge_{i \in I} X_i$ である。

**注 3.2** BBCG分解には酷似した先行結果 [23, 24]がある。また、これらの結果は [18]により、一般化されている。

次の問題を考えよう。

**問題 3.3** BBCG分解にもとづいて、ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型を記述せよ。

最も安直なアプローチは、「BBCG分解のサスペンションをはずす」というものであり、これを出発点として、ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論は発展してきた。もちろん、任意の単体複体に対してサスペンションははずせないのも、はずせる可能性のある単体複体を見つける必要がある。その際に利用されるのが、単体複体のGolod性という組み合わせ代数構造であり、これに関しては次節で述べる。今までにいくつかのGolod性をもつ単体複体のクラスに対して、サスペンションははずされてきたが ([13, 16, 15]参照)、それぞれアドホックな手法で行われており、ポリヘドラルプロダクトの本質的な性質を理解するまでには至っていなかった。さらに、Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler

によるBBCG分解の証明は、ポリヘドラルプロダクトをサスペンションすることで得られる性質にもとづいているため、(サスペンション抜きの)ポリヘドラルプロダクト自体の構造とBBCG分解のつながりが明確ではない。よって、次の問題を考えよう。

**問題 3.4** BBCG分解を誘導するポリヘドラルプロダクトの構造を発見し、調べよ。

### 3.2. ファットウェッジフィルトレーション

空間族  $\underline{X} = \{X_i\}_{i \in [m]}$  に対して  $k$  次ファットウェッジは

$$T^k(\underline{X}) = \{(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m \mid x_i \text{ のうち } m - k \text{ 個は基点}\}$$

で定められる、直積空間  $X_1 \times \dots \times X_m$  の部分空間であり、フィルトレーション

$$* = T^0(\underline{X}) \subset T^1(\underline{X}) \subset \dots \subset T^{m-1}(\underline{X}) \subset T^m(\underline{X}) = X_1 \times \dots \times X_m$$

を与える。このフィルトレーションはサスペンションすると分裂し、直積空間の標準的な分解を与える：

$$\Sigma(X_1 \times \dots \times X_m) = \Sigma \bigvee_{i=1}^m T^i(\underline{X})/T^{i-1}(\underline{X}), \quad T^i(\underline{X})/T^{i-1}(\underline{X}) = \bigvee_{I \subset [m], |I|=i} \widehat{X}^I.$$

([21, 19] 参照) この分解がBBCG分解の根底にあるので、次のフィルトレーションを導入する。

**定義 3.5**  $\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \cap T^i(C\underline{X})$  とするとき、フィルトレーション

$$* = \mathcal{Z}_K^0(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \mathcal{Z}_K^1(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \dots \subset \mathcal{Z}_K^m(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

を  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  のファットウェッジフィルトレーション (FWF) という。

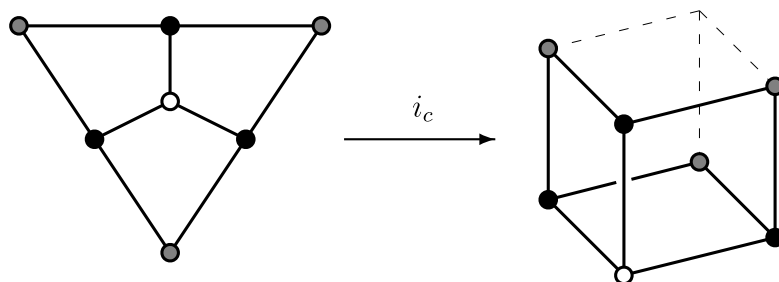
FWFの構造を明らかにする上で、 $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  のコーンパラメータを抜き出したポリヘドラルプロダクト  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K (= \mathcal{Z}_K(D^1, S^0))$  が重要な役割を果たす。 $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^i = \mathcal{Z}_K^i(D^1, S^0)$  とする。部分集合  $\sigma \subset [m]$  に対して、立方体  $(D^1)^m$  の頂点

$$v_\sigma = \{(x_1, \dots, x_m) \in (D^1)^m \mid x_i = -1 (i \in \sigma), +1 (i \notin \sigma)\}$$

を対応させることで、単体  $\Delta^{[m]}$  の重心細分を立方体  $(D^1)^m$  に区分別形的に埋め込むことができる：

$$i_c: |\text{Sd } \Delta^{[m]}| \rightarrow (D^1)^m, \quad \sigma \mapsto v_\sigma.$$

この埋め込みは、 $m = 3$  のときは次のように描くことができる。



さらに、この埋め込みは、次の埋め込みへ拡張される：

$$\text{Cone}(i_c): |\text{Cone}(\text{Sd } \Delta^{[m]})| \rightarrow (D^1)^m$$

したがって、 $\text{Sd } K, \text{Cone}(\text{Sd } K)$  はそれぞれ  $\text{Sd } \Delta^{[m]}, \text{Cone}(\text{Sd } \Delta^{[m]})$  の部分複体なので、埋め込み

$$i_c: |\text{Sd } K| \rightarrow (D^1)^m, \quad \text{Cone}(i_c): |\text{Cone}(\text{Sd } K)| \rightarrow (D^1)^m \quad (4)$$

を得る。この埋め込みを詳しく調べると次がわかる。

**補題 3.6 (Iriye-Kishimoto [17])** 埋め込み (4) は対の同相

$$(|\text{Cone}(\text{Sd } K)|, |\text{Sd } K|) \rightarrow (\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1})$$

を与える。

上で与えられた写像  $|\text{Sd } K| \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}$  を  $\varphi_K$  と書く。ここで重要なのは、 $\varphi_K$  は埋め込み  $i_c$  の制限なので、組み合わせ的かつ明示的に与えられているということである。定義より、 $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^i = \bigcup_{I \subset [m], |I|=i} \mathbb{R}\mathcal{Z}_{K_I}$  なので、次がすぐにわかる。

**定理 3.7 (Iriye-Kishimoto [17])**  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^i$  は写像

$$\varphi_{K_I}: |\text{Sd } K_I| \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{Z}_{K_I}^{i-1}$$

で  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{i-1}$  ( $\cap \mathbb{R}\mathcal{Z}_{K_I}^{i-1}$ ) にコーンをはって得られる。ただし、 $I \subset [m]$  は  $|I| = i$  をみたすものすべてをはしる。特に、 $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  の FWF はコーン分解である。

ここで、一般の  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  にもどらう。 $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  を  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  のコーンパラメータの空間だとみなすことで、写像

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K \times X_1 \times \cdots \times X_m \rightarrow \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$$

がつくれ、対の同相写像

$$(\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}) \times (X_1 \times \cdots \times X_m, T^{m-1}(\underline{X})) \rightarrow (\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}), \mathcal{Z}_K^{m-1}(C\underline{X}, \underline{X}))$$

を誘導することがわかる。よって、 $\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) = \bigcup_{I \subset [m], |I|=i} \mathcal{Z}_{K_I}(C\underline{X}_I, \underline{X}_I)$  なので、定理 3.7 から次がわかる。ここで、 $\underline{X}_I = \{X_i\}_{i \in I}$  である。

**定理 3.8 (Iriye-Kishimoto [17])** 対の同相写像

$$\prod_{\substack{I \subset [m] \\ |I|=i}} \Phi_{K_I}: \prod_{\substack{I \subset [m] \\ |I|=i}} (|\text{Cone}(\text{Sd } K_I)|, |\text{Sd } K_I|) \times (\underline{X}^I, T^{i-1}(\underline{X}_I)) \rightarrow (\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}), \mathcal{Z}_K^{i-1}(C\underline{X}, \underline{X}))$$

が存在する。ただし、 $\underline{X}^I = \prod_{i \in I} X_i$  である。特に、 $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  の FWF は Fox [11] の意味でカテゴリー列である。

上記の通り,  $\varphi_{K_I}$  は組み合わせ的かつ明示的に与えられている. 今,  $\Phi_{K_I}$  は  $\varphi_{K_I}$  を用いて定められるので, 定理 3.8 はポリヘドラルプロダクトと  $K$  の組み合わせ論とを直接結びつけることがわかる. これにより, ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論と組み合わせ論とのつながりがより強くなり, ポリヘドラルプロダクトに対するより深い組み合わせ論的考察が可能となる. 例えば, FWF を用いると,  $K$  の組み合わせ情報から BBCG 分解のサスペンションはずしを行うことができる. (次節参照)

$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  とは異なり, 一般に  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  の FWF がコーン分解であるとは示せないが, 各  $X_i$  が co-H 空間なら, 高次 Whitehead 積を用いて FWF がコーン分解であることが示せる. この事実をモーメントアングル複体の場合に記しておく.  $\mathcal{Z}_K^i = \mathcal{Z}_K \cap T^i(D^2)$  とする.

**定理 3.9 (Iriye-Kishimoto [17])**  $I \subset [m], |I| = i$  に対して写像

$$\bar{\varphi}_{K_I}: |K_I| * S^{i-1} \rightarrow \mathcal{Z}_{K_I}^{i-1}$$

が存在し,  $\mathcal{Z}_K^i$  は  $\mathcal{Z}_K^{i-1}$  ( $\supset \mathcal{Z}_{K_I}^{i-1}$ ) に  $\bar{\varphi}_{K_I}$  でコーンをはって得られる. ただし,  $I \subset [m]$  は  $|I| = i$  をみたすものすべてをはしる. 特に,  $\mathcal{Z}_K$  の FWF はコーン分解である.

### 3.3. ホモトピー分解

まず, BBCG 分解が FWF から得られることを見る. James [21] の retractile argument (もしくはその一般化である [18]) より,  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  の FWF はサスペンドすると分裂する, すなわち,

$$\Sigma \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \Sigma \bigvee_{i=1}^m \mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) / \mathcal{Z}_K^{i-1}(C\underline{X}, \underline{X})$$

となることがわかる. さらに, 定理 3.8 より,

$$\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) / \mathcal{Z}_K^{i-1}(C\underline{X}, \underline{X}) = \bigvee_{I \subset [m], |I|=i} |\Sigma K_I| \wedge \hat{X}^I$$

となるので, BBCG 分解を得る. したがって, FWF は我々が調べるべき対象であることがわかる. よって, 定理 3.8 から, 写像  $\Phi_K$  を調べることで, BBCG 分解のサスペンションをはずすということを理解できると期待される. さらに,  $\Phi_K$  は  $\varphi_K$  を用いて定義されることから,  $\varphi_K$  を調べることで BBCG 分解のサスペンションはずしを理解できると期待される. 実際, 次のことが証明できる. 任意の  $I \subset [m]$  で  $\varphi_{K_I} \simeq *$  となるとき,  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  の FWF は自明であるという.

**定理 3.10 (Iriye-Kishimoto [17])**  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  の FWF が自明のとき, 次のホモトピー同値がある:

$$\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{\emptyset \neq I \subset [m]} |\Sigma K_I| \wedge \hat{X}^I$$

この定理の逆の主張が一般に成り立つかどうかは未だに解決されておらず, かなり難しい問題だと思われる. しかし, 各  $X_i$  が co-H 空間の場合は, BBCG 分解のサスペンションがはずれることと, FWF が自明となることとの同値性が証明できる. したがって, モーメントアングル複体に関して次が成り立つ.

**定理 3.11 (Iriye-Kishimoto [17])** 次の条件は同値である.

1.  $\mathcal{Z}_K$  の FWF は自明である.
2.  $\mathcal{Z}_K$  は co-H 空間である.
3. 次のホモトピー同値がある :

$$\mathcal{Z}_K \simeq \bigvee_{\emptyset \neq I \subset [m]} \Sigma^{|I|+1} |K_I|$$

## 4. Golod 性と sequentially Cohen-Macaulay 性

### 4.1. Golod 性

定理 3.10 が適用できる単体複体をさがそう. まず, BBCG 分解のサスペンションがはずれるとき,  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  はサスペンション空間となる. 特に, 命題 2.3 より, 導来代数  $\mathrm{Tor}_{R[v_1, \dots, v_m]}^*(R[K], R)$  は任意の可換環  $R$  で積と (高次) Massey 積が自明となる. この性質は古くから可換環論で考えられてきた Golod 性と同値である. 可換環のコホモロジーのポアンカレ級数に関してある (等号を含む) 不等式が成り立つことが知られており, 等号が成り立つとき, その可換環は Golod と呼ばれる. ([12] 参照) Stanley-Reisner 環に限定すると, この不等式は,  $\mathcal{Z}_K$  のパスループファイブレーションに付随する Eilenberg-Moore スペクトル系列の  $E_2$  項と  $E_\infty$  項の Poincaré 級数の間の不等式としても理解できる. したがって, Golod 性とこのスペクトル系列が  $E_2$  項でつぶれることは同値である. さらに, このスペクトル系列の微分は, 底空間  $\mathcal{Z}_K$  の積と (高次) Massey 積なので, 命題 (2.3) から次を得る.

**命題 4.1 (Golod [12])**  $R[K]$  が Golod であることと,  $\mathrm{Tor}_{R[v_1, \dots, v_m]}^*(R[K], R)$  の積と (高次) Massey 積が全て消えることは同値である.

$R[K]$  が Golod のとき,  $K$  は  $R$  上 Golod という. 以上より, BBCG 分解のサスペンションをはずすには,  $K$  が任意の環上で Golod でなければならないことがわかった.

**注 4.2** Golod 性の研究では, Berglund-Jöllenberg [22, 4] の結果が広く使われてきたが, 最近, Kätthan [26] により, Jöllenberg [22] の結果は間違っていることが発見され, それに基づいて証明された Berglund-Jöllenberg [4] の結果が成り立たないことが証明された. したがって, Golod 性に関する研究で, この結果を用いているものに関しては, 注意を要する.

### 4.2. Sequentially Cohen-Macaulay 性

Golod 性は単体複体の Cohen-Macaulay 性や shellability と関連付けて研究されることが多い. 単体複体  $K$  が  $R$  上 Cohen-Macaulay (CM) とは,  $R[K]$  が CM であることをいう. つまり, 任意の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  による局所化  $R_{\mathfrak{m}}$  に対して,

$$\dim R_{\mathfrak{m}} = \mathrm{depth} R_{\mathfrak{m}}$$

が成り立つことをいう. CM 性は可換環論において重要な概念であり, 対応する単体複体の特徴づけが Stanley [28] により与えられている. 定義から, CM 複体は純粹, つまり, 極大面は同次元であることがわかる. Stanley [28] は, CM 性を非純粹な単体複体へと一般化した.

**定義 4.3** 単体複体  $K$  が  $R$  上 sequentially Cohen-Macaulay (SCM) とは, 任意の  $i$  に対して,  $i$  次元の面で生成される  $K$  の部分複体が  $R$  上 CM であることをいう.

単体複体が CM であることと, 純粹かつ SCM であることは同値である. SCM 複体のクラスには shifted, vertex-decomposable, shellable という興味深い部分クラスがある. 定義は割愛するが, 次の包含関係だけは述べておく. ([28, 5, 6] 参照)

$$\text{shifted} \Rightarrow \text{vertex-decomposable} \Rightarrow \text{shellable} \Rightarrow \text{SCM}$$

双対 CM 複体 (Alexander 双対が CM) が Golod であることは古くから知られており, これは次に拡張できる.

**命題 4.4 (Stanley [28])** 単体複体が  $R$  上双対 SCM (Alexander 双対が SCM) なら,  $R$  上 Golod である.

したがって, 双対 SCM 複体に対して BBCG 複体のサスペンションははずせると期待できる. 実際, SCM 複体の部分クラスに関して, 次の証明されている.

**定理 4.5 (Iriye-Kishimoto [16], Grbić-Theriault [13])**  $K$  が shifted 複体 (=双対 shifted 複体) のとき, BBCG 分解のサスペンションははずせる.

**定理 4.6 (Grujić-Welker [15])**  $K$  が双対 vertex-decomposable 複体のとき,  $\mathcal{Z}_K(D^n, S^{n-1})$  に関する BBCG 分解のサスペンションははずせる.

FWF を用いてこの問題を考えよう.  $K$  の極小非面とは,  $[m]$  の部分集合  $\sigma$  で,  $\sigma \notin K$  だが, 任意の  $v \in \sigma$  に対して  $\sigma - v \in K$  をみたすものである.  $\hat{K}$  を  $K$  にすべての極小非面を付け加えてできる単体複体とする.  $\varphi_K$  の組み合わせ的かつ明示的に定義を詳しくみることで次を得る.

**補題 4.7 (Iriye-Kishimoto [17])** 写像  $\varphi_K: |\text{Sd } K| \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}$  は  $|\text{Sd } \hat{K}|$  を経由する.

したがって,  $\varphi_K \simeq *$  を証明するには, 可縮な単体複体  $M$  で  $K \subset M \subset \hat{K}$  を見つければよい.  $K$  が  $\mathbb{Z}/p$  上双対 SCM 複体のとき, ホモロジーを調べると,  $K \subset L \subset \hat{K}$  をみたす単体複体  $L$  で,  $|L|_{(p)}$  が可縮なものが存在することがわかる. ここで,  $-(p)$  は素数  $p$  での局所化を意味する. したがって,  $(\varphi_K)_{(p)}$  は定値写像にホモトピックであり, これをすべての  $p$  で寄せ集めることにより,  $\varphi_K$  は定値写像にホモトピックであることがわかる. (詳しくは [17] 参照) 一方,  $K$  が  $\mathbb{Z}/p$  上双対 SCM 複体のとき, 任意の  $I \subset [m]$  に対して  $K_I$  も双対 SCM 複体である. したがって, 次を得る.

**定理 4.8 (Iriye-Kishimoto [17])**  $K$  が  $\mathbb{Z}$  上双対 SCM 複体のとき,  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  の FWF は自明である.

**系 4.9 (Iriye-Kishimoto [17])**  $K$  が  $\mathbb{Z}$  上双対 SCM 複体のとき, BBCG 分解のサスペンションははずせる.

以上のように, FWF を用いると, 単体複体  $K$  の組み合わせ情報をポリヘドラルプロダクトへと直接結びつけることで, ポリヘドラルプロダクトのホモトピー型の本質的な理解につながる.

## 5. 今後の課題

最後に今後の課題をいくつかあげる.

**問題 5.1** 定理 3.10 の逆は成立するか?

定理 3.10 は同値性を主張しないが, 定理 3.11 では, モーメントアングル複体に関して, FWF の自明性と BBCG 分解のサスペンションが外せること同値性が証明されている. では,  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  と  $\mathcal{Z}_K$  のちがいはどこにあるのだろうか? 最も大きな違いは,  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  は単連結でないが,  $\mathcal{Z}_K$  は単連結なことである. 実際, 定理 3.11 の証明では単連結性が重要な役割を果たしている.  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  が単連結でないことから, 定理 3.10 の逆は, LS カテゴリーに関する Ganea 予想と同様の困難さがあり, 現在のところ, 正しいのかどうかの予想すら立っていない.

写像  $\varphi_K: |\mathrm{Sd} K| \rightarrow \mathbb{R}\mathcal{Z}_K^{m-1}$  を調べる方法として補題 4.7 を, 前節で示した. これ以外にも,  $\varphi_K$  のホモトピーファイバーを調べるというのが [17] では提示されている. また, その応用として neighborly 性の高い単体複体について考察されている.

**定義 5.2** 任意の  $\sigma \subset [m], |\sigma| = k + 1$  に対して  $\sigma \in K$  となるとき,  $K$  を  $k$ -neighborly という.

**定理 5.3 (Iriye-Kishimoto [17])**  $K$  が  $\lceil \frac{\dim K}{2} \rceil$ -neighborly のとき,  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  の FWF は自明である.

さらに  $\dim K = 1$  [17] または閉曲面 [20] のときは neighborly 性, Golod 性,  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  の FWF の自明性が同値であることが示された. ([20] 参照) さらに, この結果は Kätthan [26] により, 高次元多様体へと部分的に (同値性は含まない) 拡張されている. これを受けて, 次の問題をあげる.

**問題 5.4** Golod 性, neighborly 性,  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  の FWF の自明性が同値となる単体複体のクラスを見つけよ.

写像 (1) が高次 Whitehead 積の一般化であることは述べた.  $K$  が shifted 複体のときこの写像は高次 Whitehead 積 (の合成) に他ならないことが [19] で示されている. ([14] でも同様のことが考察されているが, 致命的なミスがある.)

**問題 5.5** BBCG 分解のサスペンションがはずせる単体複体  $K$  に対して, 写像 (1) が高次 Whitehead 積で表されることを示せ.

一般に写像 (1) は高次 Whitehead 積の合成ではない. したがって次の問題も重要である.

**問題 5.6** 写像 (1) のホモトピー作用素としての性質を調べよ.

$K$  の  $n$  スケルトンを  $K^{(n)}$  で表す. ポリヘドラルプロダクト  $\mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X})$  は  $K$  のスケルトンから得られるフィルトレーション

$$\mathcal{Z}_{K^{(0)}}(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \mathcal{Z}_{K^{(1)}}(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \cdots \subset \mathcal{Z}_{K^{(m-1)}}(C\underline{X}, \underline{X}) = \mathcal{Z}_K(C\underline{X}, \underline{X}) \quad (5)$$

をもち, FWF と

$$\mathcal{Z}_K^i(C\underline{X}, \underline{X}) \subset \mathcal{Z}_{K^{(i+1)}}(C\underline{X}, \underline{X})$$

により関係づけられる. このフィルトレーションはトーラス作用の観点からも重要であると考えられる.

**問題 5.7** フィルトレーション (5) の性質を調べ, Stanley-Reisner 環のレゾリューションとの関係を明らかにせよ.

## 参考文献

- [1] D. Anick, *Connections between Yoneda and Pontrjagin algebras* Algebraic topology, Aarhus, 1982, 331-350. Lecture Notes in Math. **1051**, Springer, Berlin, 1984.
- [2] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, and S. Gitler, *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Math. **225** (2010), 1634-1668.
- [3] I.V. Baskakov, V.M. Buchstaber, and T.E. Panov, *Cellular cochain algebras and torus actions*, Russian Math. Surveys **59** (2004), no. 3, 562-563.
- [4] A. Berglund and M. Jöllenbeck, *On the Golod property of Stanley-Reisner rings*, J. Algebra **315** (2007), 246-273.
- [5] A. Björner and M.I. Wachs, *Shellable nonpure complexes and posets. I*, Trans. AMS **348** (1996), 1299-1327; *Shellable nonpure complexes and posets. II*, Trans. AMS **349** (1997), 3945-3975.
- [6] A. Björner, M. Wachs, and V. Welker, *On sequentially Cohen-Macaulay complexes and posets*, Israel J. Math. **169** (2009), 295-316.
- [7] V.M. Buchstaber and T.E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series **24**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [8] M.W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417-451.
- [9] M.W. Davis and P.H. Kropholler, *Criteria for asphericity of polyhedral products: corrigenda to "Right-angularity, flag complexes, asphericity"*, Geom. Dedicata **179** (2015), 39-44.
- [10] M.W. Davis and M. Kahle, *Random graph products of finite groups are rational duality groups*, J. Topol. **7** (2014), no. 2, 589-606.
- [11] R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. (2) **42** (1941), 333-370.
- [12] E.S. Golod, *On the homologies of certain local rings*, Soviet Math. Dokl. **3** (1962), 745-748.
- [13] J. Grbić and S. Theriault, *The homotopy type of the polyhedral product for shifted complexes*, Advances in Math. **245** (2013), 690-715.
- [14] J. Grbić and S. Theriault, *Higher Whitehead products in toric topology*, arXiv:1011.2133.
- [15] V. Grujić and V. Welker, *Discrete Morse theory for moment-angle complexes of pairs  $(D^n, S^{n-1})$* , Monatsh. Math. **176** (2015), no. 2, 255-273.
- [16] K. Iriye and D. Kishimoto, *Decompositions of polyhedral products for shifted complexes*, Advances in Math. **245** (2013), 716-736.
- [17] K. Iriye and D. Kishimoto, *Fat wedge filtrations and decomposition of polyhedral products*, arXiv:1412.4866v3.
- [18] K. Iriye and D. Kishimoto, *Decompositions of suspensions of spaces involving polyhedral products*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), 825-841.
- [19] K. Iriye and D. Kishimoto, *Polyhedral products for shifted complexes and higher Whitehead products*, arXiv:1505.04892.

- [20] K. Iriye and D. Kishimoto, *Golodness and polyhedral products for two dimensional simplicial complexes*, arXiv: 1506.08970.
- [21] I.M. James, *On H-spaces and their homotopy groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **11** (1960), 161-179.
- [22] M. Jöllenbeck, *On the multigraded Hilbert and Poincaré series of monomial rings*, J. Pure Appl. Algebra **207**, No. 2, (2006), 261-298.
- [23] Y. Kamiyama and S. Tsukuda, *The configuration space of the n-arms machine in the Euclidean space*, Topology Appl. **154** (2007), 1447-1464.
- [24] Y. Kamiyama and S. Tsukuda, *On the homology of configuration spaces of arachnoid mechanisms*, Houston J. Math. **34** (2008), 483-499.
- [25] L. Kätthan, *The Golod property for Stanley-Reisner rings in varying characteristic*, to appear in J. Pure Appl. Alg.
- [26] L. Kätthan, *A non-Golod ring with a trivial product on its Koszul homology*, arXiv:1511.04883.
- [27] T. Porter, *Higher-order Whitehead products*, Topology **3** (1965), 123-135.
- [28] R.P. Stanley, *Combinatorics and commutative algebra*, Second edition. Progress in Mathematics **41**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.
- [29] M. Stafa, *On the fundamental group of certain polyhedral products*, J. Pure Appl. Alg. **219** (2015), no 6, 2279-2299.
- [30] M. Stafa, *Polyhedral products, flag complexes and monodromy representations*, arXiv:1604.05504.



## 結び目理論の応用について

– DNA 組換え酵素、高分子化学、統計力学的エントロピー –

下川 航也 (埼玉大学)\*

### 1. イントロダクション

環状DNAや多環状高分子化合物は、結び目、絡み目や空間グラフの構造を持ち、以前から、結び目理論が応用されている ([1] など参照)。最近では、環状渦などにも応用が及んでいる。本講演では、最近行った結び目理論の応用について議論する。これらの研究は、山口大学の石原海氏他との共同研究である。

### 2. DNA 組換えとバンド手術

環状DNAは、結び目や絡み目の構造を持つ。DNAの組換え酵素は、DNAのトポロジーを変えるものがある。ここでは、その数学的モデルを考える。2重らせん環状DNAを結び目としてモデル化する。このとき、DNA組換え酵素の働きは、結び目や絡み目のバンド手術 (や有理タングル手術) に対応する。バンド手術とは、結び目、絡み目の図1の様な局所変形である。バンドの部分以外で、結び目、絡み目の向きが一致しているとき、向きに同調した (coherent) バンド手術という。向きに同調したバンド手術は、絡み目の成分数を1変化させる。



図 1: 結び目、絡み目の向きに同調したバンド手術。

特に、部位特異的組換え酵素を考え、部位の塩基配列を用いて向きを導入すると、そのバンド手術は結び目や絡み目の向きに同調したバンド手術となる。論文 [2] において、DNA組換え酵素システム *Xer-dif-FtsK* が組換えにより段階的にDNA絡み目を解いていく実験 [3] の様子を解明している。ここで、初めのDNAのトポロジーは図2の様に平行に向き付けられたトーラス絡み目  $T(2, 2p)$  であることが知られており、何度かの組換えにより自明な絡み目へと変形される。この実験では組換えの部位の数が2つであるため、生成物は、結び目か2成分絡み目となる。実験データ [3] に基づき、まずは「各組換えによりDNA結び目、絡み目の交点数が減少する」と仮定する。

**定理 2.1.** [2] DNAの組換えを向きに同調するバンド手術でモデル化する。DNA組換えの列により  $T(2, 2p)$  から自明な絡み目が得られたとし、各組換えは最後の組換えを

本研究は科研費 (課題番号:25400080, 26310206, 16H03928, 16K13751) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M25, 92C40

キーワード: 結び目, 高分子, DNA

\* 〒338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保255 埼玉大学 大学院理工学研究科

e-mail: kshimoka@rimath.saitama-u.ac.jp

web: <http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/KoyaShimokawa.html>

除き交点数を減らすと仮定する。このとき、組換えは  $2p$  回であり、得られる DNA 結び目、絡み目は図 2 の様な、トーラス絡み目、結び目  $T(2, k)$  である。

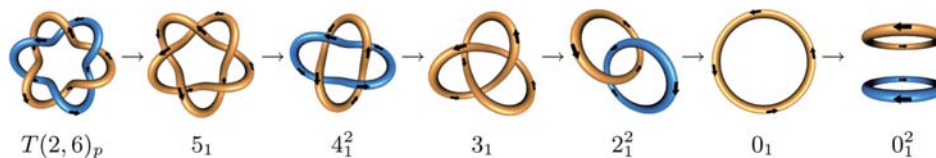


図 2:  $T(2, 2p)$  からの各組換えが交点数を下げると仮定すると、経路は一意に定まる。

次に、 $T(2, 6)$  からの組換えによる絡み目解消経路について、定理 2.1 の仮定を、少し弱くすると他の経路も現れる。

**定理 2.2.** [5]  $T(2, 6)$  から 6 回の組換えで自明な絡み目が得られたとする。各組換えで、交点数が変わらないか下がるとすると、その経路は図 3 の 9 つの経路のいずれかである。

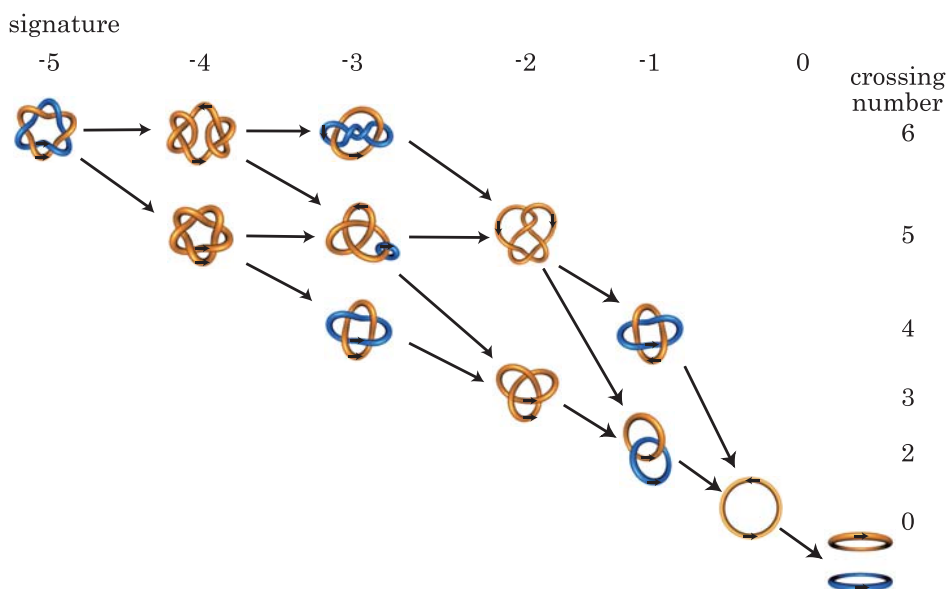


図 3:  $T(2, 6)$  からの組換えによる 9 つの絡み目解消経路。

定理 2.2 の証明には、向きに同調したバンド手術と絡み目不変量との関係 [6, 7, 8] 等を用いている。この問題に関連する論文として、[9, 10, 11] がある。

### 3. DNA 組換えのメカニズム

次に、組換えのメカニズムの解明を行う。これは数学的には、バンド手術の特徴付けに対応する。DNA の組換えは結び目と絡み目のバンド手術でモデル化されているとし、バンド手術は結び目、絡み目の向きに同調したものであると仮定する。

#### 3.1. これまでの結果

論文 [12] において、反平行に向きづけられた種数 0 のトーラス絡み目  $T(2, 2k)$  から自明な結び目への向きに同調したバンド手術は、アイソトピーで一意となることを示している。また、論文 [13] において、種数 1 の 2 橋結び目  $N(\frac{4mn-1}{2m})$  から、反平行に向きづ

けられた種数0のトーラス絡み目  $T(2, 2k)$  へのバンド手術の特徴付けを行っている。これ以前にも、[14, 15]等のバンド手術の分類が知られている。これらの結果は、DNA組換えの実験の際に、DNA結び目、絡み目として現れるものに対応し、DNA組換えのメカニズムの特徴付けに応用されている [2, 16]。

### 3.2. ファイバー絡み目とバンド手術

ここでは、ファイバー絡み目間のバンド手術の特徴付けに関する結果 [17] を紹介する。バンド手術がファイバー絡み目のオイラー数を2以上変化させる場合は、小林毅氏により特徴付けがなされている [18]。そこで、ここではオイラー数が丁度1だけ変わる場合の特徴付けを行う。

まず、曲面の変形である一般化されたホップバンディングを導入する。ホップバンディングでは、曲面に適切に埋め込まれた弧にそって、ホップアニュラスをプラミングする。一般化されたホップバンディング [17] では、曲面  $F'$  上の1点で自己交差する弧  $\ell$  で  $\ell \cap \partial F' = \partial \ell$  となるものを用意し、図の様に  $F'$  に  $\ell$  に平行なバンド  $b$  を加えた新しい曲面  $F = F' \cup b$  を構成する。このとき、 $F$  は  $F'$  から  $b$  に沿った一般化されたホップバンディングで得られるという。一般化されたホップバンディングについては、Ken Baker 氏 [19] により美しい絵が描かれているので、参照して頂きたい。

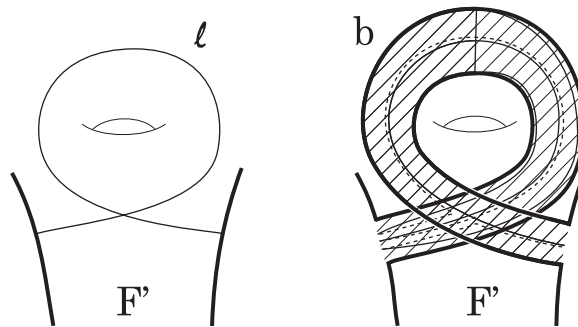


図 4: 一般化されたホップバンディング。

$L$  と  $L'$  を  $S^3$  の絡み目とし、 $L'$  は  $L$  から  $b$  に沿った絡み目の向きに同調したバンド手術で得られ、オイラー数について  $\chi(L') > \chi(L)$  を満たすとする。このとき、 $L$  は  $b$  を含むような緊張 (taut) ザイフェルト曲面を持つ [12, 20, 21]。ファイバー絡み目の場合には、緊張ザイフェルト曲面はファイバー曲面となる。

**定理 3.1.** [17]  $L$  と  $L'$  を  $S^3$  の絡み目とし、 $L'$  は  $L$  から  $b$  に沿った向きに同調したバンド手術で得られ、 $\chi(L') = \chi(L) + 1$  を満たすとする。このとき、以下が成立する。

1.  $L$  がファイバー絡み目とする。このとき、 $L'$  がファイバー絡み目となるのは、 $L$  のファイバー曲面  $F$  が、 $L'$  の (緊張) ザイフェルト曲面  $F'$  から  $b$  に沿った一般化されたホップバンディングで得られるときである。
2.  $L'$  がファイバー絡み目とする。このとき、 $L$  がファイバー絡み目となるのは、 $L$  の (緊張) ザイフェルト曲面  $F$  が、 $L'$  のファイバー曲面  $F'$  から  $b$  に沿った一般化されたホップバンディングで得られるときである。

この定理の系として、トーラス結び目、絡み目  $T(2, p)$  から得られるファイバー絡み目の分類を行うことが出来る。

系 3.2. [17]  $L'$  が  $L = T(2, p)$  ( $p \geq 2$ ) から  $b$  に沿った向きに同調するバンド手術で得られたとし、 $\chi(L') > \chi(L)$  と仮定する。このとき、 $L'$  が素であれば、 $L' = T(2, p-1)$  となり、 $L'$  が連結和であれば  $L' = T(2, p_1) \# T(2, p_2)$  ( $p_1, p_2 > 1, p_1 + p_2 = p$ ) となる。さらに、バンド  $b$  のアイソトピー類も特徴付けられる。

このようなバンドの一つの例を図5に挙げる。

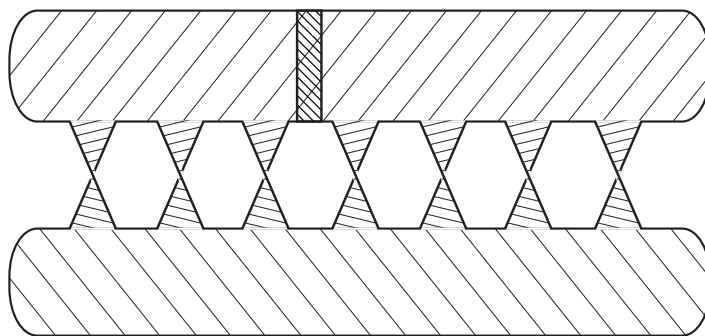


図 5:  $T(2, 7)$  から  $T(2, 3) \# T(2, 4)$  へのバンド手術。

系 3.2 と以前から知られている結果を用いると、図 2、3 に現れる多くの組換えのメカニズムを与えることが出来る。また、論文 [17] においては、ファイバー絡み目間の交差交換についての議論も行っている。

#### 4. 流体力学における環状渦のトポロジー

最近、三葉結び目  $3_1$  が水の中の環状渦で構成されている [22]。その渦が図3の様に、絡み目、結び目へと形を変える (reconnection) 実験結果が報告されている。この変形もバンド手術でモデル化されるため、この分野への結び目理論等の貢献が今後期待される。この現象に関する文献として、[23, 24] が挙げられる。

#### 5. 高分子化学への応用

##### 5.1. 高分子化合物のトポロジー

東京工業大学の手塚育志研究室において、様々なグラフの構造を持つ多環状高分子化合物が合成されている。最近の研究で、2部完全グラフ  $K_{3,3}$  の構造を持つ高分子化合物が構成され [25]、AMS のウェブページでも取り上げられた。そのような背景のもとに、現在、埼玉大学の深口駿氏が  $K_{3,3}$  結び目の研究を行っており、今後それらのもつ化学的性質の研究を行う。

##### 5.2. 高分子化合物の命名法とその応用

様々なグラフの構造を持つ多環状高分子化合物が合成されるに至り、化合物の命名に数学的な背景が必要になり、サイクルを持つグラフの命名を行っている。その命名法と、対応する化合物の化学的性質との関連の研究を行っている。

我々が用いるグラフの命名法は、 $(d_1, \dots, d_v)_k^\ell$  の形のものである。ここでグラフ  $G$  に対し、 $(d_1, \dots, d_v)$  は  $G$  の各頂点の次数の列であり、 $\ell$  は  $G$  のループ数、 $k$  はそれら

が一致する場合の順番である。例えば、図6のグラフは、 $G = (5, 3, 2, 2)_1^1 = (5, 3, 2^2)_1^1$  と呼ばれる。この命名法は、結晶構造の研究のために論文[26]により導入されたものと、基本的に一致する。

このようなグラフ構造を持つ多環状高分子化合物の化学的性質と、それらのより単純な構造を持つ高分子化合物からの作成方法などの研究を行っている。

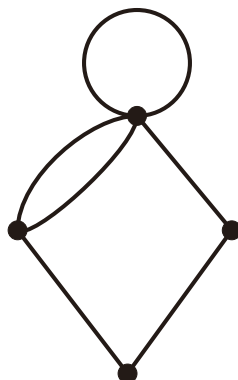


図 6: グラフ  $G = (5, 3, 2, 2)_1^1 = (5, 3, 2^2)_1^1$ 。

## 6. 格子結び目の統計力学的エントロピー

$\mathbb{R}^3$  内の立方格子内の結び目に対し、最少ステップ数などの研究を行ってきた [27, 28, 29]。この研究では、 $(2 \times 1)$ -チューブ領域  $(\mathbb{R} \times [0, 2] \times [0, 1])$  内の格子結び目について、その指数関数的増大度に関する結果を報告する。

立方格子に埋め込まれた結び目（格子結び目）は自己排除体積鎖 (self-avoiding polygon) の例であるが、希薄溶液内の DNA やタンパク質などの環状高分子（ポリマー）のモデルとしてよく用いられる。その統計力学的エントロピーに相当する指数関数的増大度 (exponential growth rate) は、物性研究の側面では重要なものである。

$\mathbb{R}^3$  の原点を始終点とする立方格子内の長さが  $n$  の結び目の個数を  $p_n$  とする。 $p_n$  は  $n$  が増加するにつれ、指数関数的に増加する。 $\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log p_n$  を指数関数的増大度という。 $\mathcal{K}$  を結び目型とすると、 $p_n(\mathcal{K})$  で長さ  $n$  の  $\mathcal{K}$  の格子結び目の個数を表し、 $\kappa(\mathcal{K}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log p_n(\mathcal{K})$  で  $\mathcal{K}$  の指数関数的増大度を表す。まず、自明な結び目  $0_1$  について、 $\kappa(0_1) < \kappa$  が示された [30, 31]。このことから、「十分長い格子結び目が自明な結び目になることは、指数関数的に稀である」ことが従う。さらに、任意の結び目型  $\mathcal{K}$  について  $\kappa(\mathcal{K}) < \kappa$  であることが示された [32]。しかし、「どの結び目についても指数関数的増大度が一致するか否か」という問題は現在でも未解決である ([33] 等参照)。

論文 [29] において、 $(2 \times 1)$ -チューブ内の結び目は、2橋結び目、または、その連結和であることを示している。また、 $(2 \times 1)$ -チューブ内の格子結び目に限定しても、自明な結び目  $0_1$  について  $\kappa(0_1)$  は存在し 0 でないことが示されている [34]。今回の研究で、 $(2 \times 1)$ -チューブ領域内の任意の結び目について、上記の問題を解決した。

**定理 6.1.** [35]  $\mathcal{K}$  を  $(2 \times 1)$ -チューブ内で実現できる結び目型とする。このとき、 $\kappa(\mathcal{K}) = \kappa(0_1)$  である。

この定理は、次の結果を用いて示すことが出来る。



- [16] Tangle analysis of Xer recombination reveals only three solutions, all consistent with a single three dimensional topology pathway, M. Vazquez, S.D. Colloms and D.W. Sumners, *J. Mol. Biol.* **346**, 493-504 (2005).
- [17] Band surgeries and crossing changes between fibered links, D. Buck, K. Ishihara, M. Rathbun, and K. Shimokawa, to appear in *J. London Math. Soc.* (arXive 1304.6781).
- [18] Fibered links and unknotting operations, T. Kobayashi, *Osaka J. Math.* **26**, 699-742 (1989).
- [19] <https://sketchsoftopology.wordpress.com/2013/04/26/a-generalized-banding/>
- [20] Link genus and the Conway moves, M. Scharleman and A. Thompson, *Comment. Math. Helv.* **64**, 527-535 (1989).
- [21] Networking Seifert surgeries on knots III, A. Deruelle, K. Miyazaki, K. Mogegei, *Algebr. Geom. Topol.* **14**, 2065-2101 (2014).
- [22] Creation and dynamics of knotted vortices, D. Kleckner and W.T.M. Irvine, *Nature Physics* **9**, 253-258 (2013).
- [23] How superfluid vortex knots untie, D. Kleckner, L.H. Kauffman and W.T.M. Irvine, *Nature Physics* (2016).
- [24] Conservation of writhe helicity under anti-parallel reconnection, C.E. Laing, R.L. Ricca, and D.W.L. Sumners, *Sci. Rep.* **5**, 9224 (2015).
- [25] Constructing a macromolecular  $K_{3,3}$  graph through electrostatic self-assembly and covalent fixation with a dendritic polymer precursor, T. Suzuki, T. Yamamoto, and Y. Tezuka, *J. Am. Chem. Soc.* **136**, 10148-10155 (2014).
- [26] Minimal nets, A. Beukemann and W.E. Klee, *Zeitschrift für Kristallographie* **201**, 37-51 (1992).
- [27] Bounds for the minimum step number of knots in the simple cubic lattice, R. Scharein, K. Ishihara, J. Arsuaga, Y. Diao, K. Shimokawa, and M. Vazquez, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 475006 (24pp) (2009) .
- [28] Bounds for the minimum step number of knots confined to slabs in the simple cubic lattice, K. Ishihara, R. Scharein, Y. Diao, J. Arsuaga, M. Vazquez and K. Shimokawa, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 065003 (2012).
- [29] Bounds for the minimum step number of knots confined to tubes in the simple cubic lattice, *in preparation*.
- [30] Knots in self-avoiding walks, D.W. Sumners and S.G. Whittington, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, 1689-1694 (1988).
- [31] Knots in random walks, N. Pippenger, *Discrete Applied Math.* **25**, 273-278 (1989).
- [32] Entanglement complexity of graphs in  $\mathbb{Z}^3$ , C.E. Soteros, D.W. Sumners and S.G. Whittington, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc* **111**, 75-91 (1992).
- [33] Entropic exponents of knotted lattice polygons, E. Orlandini, E.J. Janse Van Rensburg, M.C. Tesi and S.G. Whittington, in "Topology and Geometry in Polymer Science" Volume 103 of the series The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 9-21 (1989).
- [34] Lattice models of branched polymers: effects of geometrical constraints, C.E. Soteros and S.G. Whittington, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, (1989) 5259-5270.
- [35] K. Ishihara, K. Shimokawa, C. Soteros, M. Vazquez, *in preparation*.



Non-Kähler complex structures on  $\mathbb{R}^4$ 

粕谷 直彦 (青山学院大学社会情報学部)\*

## 1. 主定理とその背景

本稿では、筆者が Antonio J. Di Scala (Politecnico di Torino), Daniele Zuddas (KIAS) とともに [1] において構成した  $\mathbb{R}^4$  に微分同相な non-Kähler complex surfaces の例およびそれらが満たす様々な性質について解説する。

はじめに、Kähler 性の定義を確認しておこう。

**定義 1.**  $(M, J)$  を complex manifold とする。  $M$  上に complex structure  $J$  と両立する symplectic form  $\omega$  が存在するとき、  $(M, J)$  は Kähler であるという。ただし、  $\omega$  が  $J$  と両立するとは以下の2つの条件を満たすことを言う。

- (1) 任意の0でない接ベクトル  $u \in TM$  に対して、  $\omega(u, Ju) > 0$  が成立 (tamedness).
- (2) 任意の接ベクトル  $u, v \in TM$  に対して、  $\omega(u, v) = \omega(Ju, Jv)$  が成立 ( $J$ -invariance).

任意の complex manifold は局所的には Kähler であるから、問題は complex structure と両立する  $\omega$  が大域的に取れるかどうかである。その意味において、Kähler 性および non-Kähler 性は complex manifold の大域的な性質である (ここで言う Kähler 性は固定した Hermite 計量に関する Kähler 性のことではなく、Kähler 計量の存在と同値であることを注意されたい)。実際、小平 [3]–[9]、宮岡 [11]、Siu [16] による以下の定理が知られている。

**定理 2.** Compact complex surface に関して、Kähler であることと first Betti number  $b_1$  が偶数であることは同値である。

つまり、compact complex surface の場合は  $b_1$  というトポロジーの情報のみから Kähler 性、non-Kähler 性が決まってしまう。一般の次元においても、compact Kähler manifold の奇数次 Betti number  $b_{2j+1}$  は偶数である、という Hodge theory からの帰結があった。ところが、non-compact な場合にはもはやこのような性質は成り立たない。実際、任意の connected open orientable 4-manifold は Kähler complex structure を許容することが知られている。さらに一般次元の場合にも、 $b_1$  が奇数の Stein manifolds が存在することはすぐにわかる。このように、non-compact complex manifold の場合、そのトポロジーの情報だけでは non-Kähler 性を示すうえで役に立たない。唯一の手がかりは次の補題である。

**補題 3.** ホモロジカルに自明な compact holomorphic curve を含む complex manifold は non-Kähler である。

証明は極めて容易である。Kähler manifold  $(M, J)$  内の compact complex curve  $C$  は  $J$  と両立する symplectic form  $\omega$  に対し、  $\int_C \omega > 0$  を満たすから、ホモロジカルに非自

---

\* e-mail: nkasuya@si.aoyama.ac.jp

明であるというだけのことである。しかし、この簡単な補題がこの話における1つの重要な鍵となる。さて、我々の問題は次の通りである。

**問題 1.**  $\mathbb{R}^{2n}$  上に non-Kähler complex structure は存在するか？

この問題は  $n = 2$  の場合のみ未解決であった。これについて簡単に説明したい。まず  $n = 1$  の場合、全ての complex curve は Kähler なので答えは明らかに No である。一方、 $n \geq 3$  の場合は Calabi と Eckmann によって Yes であることが示されている。彼らは1953年に2つの奇数次元球面の直積上の complex structure を以下のような方法で構成した。まず、2つの Hopf 写像  $h_p: S^{2p+1} \rightarrow \mathbb{C}P^p$ ,  $h_q: S^{2q+1} \rightarrow \mathbb{C}P^q$  の直積写像  $h_{p,q}: S^{2p+1} \times S^{2q+1} \rightarrow \mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$  をとると、これは  $T^2$  fiber bundle である。ここで modulus  $\tau$  の elliptic curve  $S(\tau)$  をとる。 $\mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$  の標準的な座標近傍系  $\{U_i \times U_j\}$  ( $0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q$ ) に対し、 $U_i \times U_j \times S(\tau)$  を貼り合わせることによって  $h_{p,q}$  が holomorphic  $T^2$  fiber bundle となるような  $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$  上の complex structure が構成される。これが有名な Calabi-Eckmann manifold  $M_{p,q}(\tau)$  である。この  $M_{p,q}(\tau)$  の open subset を次のように取ることで  $\mathbb{R}^{2n}$  ( $n \geq 3$ ) 上の non-Kähler complex structure が得られるのである。まず、 $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$  の自然な胞体分割を取り、その最大次元セルに対応する  $M_{p,q}(\tau)$  の open subset を  $E_{p,q}(\tau)$  と表す。もしも  $p > 0, q > 0$  ならば、 $E_{p,q}(\tau)$  は  $h_{p,q}$  のほとんどの elliptic fiber を含んでおり、しかも  $\mathbb{R}^{2(p+q+1)}$  と微分同相だから、上で示した補題3により、non-Kähler であることが従う ( $n \geq 3$  という条件は、 $n = p+q+1, p > 0, q > 0$  から来ている)。

では同様にして  $\mathbb{R}^4$  上の non-Kähler complex structure を構成できるではないか、と思うかもしれないが、それは不可能である。というのも  $M_{0,1}(\tau)$  は Hopf surface と一致するため、 $E_{0,1}(\tau)$  は  $\mathbb{C}^2$  の open subset だからである。従って  $n = 2$  の場合には、別のアプローチが必要となる。

そこで我々が注目したのが、松本幸夫氏と深谷賢治氏によって発見された  $S^4$  から  $S^2$  への genus-one achiral Lefschetz fibration の例である。これを Matsumoto-Fukaya fibration と呼ぶことにする。この例は4次元トポロジー論においてはよく知られたものだが、positive singularity と negative singularity を1つずつ持つため、一見すると複素幾何とは全く関係がないように思われる。しかし実は、その唯一の negative singularity を含む4-ball を取り除いてしまえば、残りの部分は  $\mathbb{R}^4$  と微分同相であり、しかも fibration のそこへの制限が holomorphic となるように complex structure を入れることができる。すると、その holomorphic fibration の regular fiber として elliptic curve が含まれるので、補題3より  $\mathbb{R}^4$  上の non-Kähler complex structure であることが分かる。これが今回の構成法の概要である。即ち、主定理は以下の通りである。

**定理 4.**  $1 < \rho_2 < \rho_1^{-1}$  を満たす任意の実数の組  $(\rho_1, \rho_2)$  に対し、以下の条件を満たす complex manifold  $E(\rho_1, \rho_2)$  および surjective holomorphic map  $f: E(\rho_1, \rho_2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  が存在する。

- (1)  $E(\rho_1, \rho_2)$  は  $\mathbb{R}^4$  と微分同相。

- (2)  $f^{-1}(0)$  は  $f$  の唯一つの singular fiber であり, node を 1 つ持った immersed holomorphic sphere である.
- (3)  $f$  の regular fiber は 2 種類あり, embedded holomorphic torus と embedded holomorphic annulus である.

勿論この定理を証明するためには complex manifold  $E(\rho_1, \rho_2)$  を構成しなくてはならないので, トポロジカルな情報だけでは不十分である. しかし, 先ほどの Matsumoto-Fukaya fibration の全空間から negative Lefschetz singularity の近傍をくりぬくというアイデアによって,  $\mathbb{R}^4$  を 2 つのピースへ非自明に分解することができる. この分解が  $E(\rho_1, \rho_2)$  を貼り合せて構成するための設計図を与えてくれるのである. そしてその 2 つのピースそれぞれに complex structure を入れ, 互いに biholomorphic な貼り合せ領域を指定し, biholomorphism によって解析的貼り合せを行う. その際, 設計図を睨みながら, トポロジカルには貼り合せが Matsumoto-Fukaya fibration と同じになるよう適切に貼り合せ領域を指定しておけば, 構成した complex manifold が  $\mathbb{R}^4$  と微分同相になるようにコントロールできるということである. その詳細については, 2 章・3 章で述べることにする.

4 章では complex manifold  $E(\rho_1, \rho_2)$  の性質および応用について詳しく述べる. そのうち顕著なものをいくつか先行して紹介しておこう.

まず  $(\rho_1, \rho_2) \neq (\rho'_1, \rho'_2)$  ならば,  $E(\rho_1, \rho_2)$  と  $E(\rho'_1, \rho'_2)$  は互いに biholomorphic でない, ということが挙げられる. このことは,  $E(\rho_1, \rho_2)$  上の compact holomorphic curve の分類を用いて証明することができる. 結果として,  $\mathbb{R}^4$  上には非可算無限個の non-Kähler complex structure があることが分かる.

さらにこれを利用すれば, 任意の connected open orientable 4-manifold は非可算無限個の non-Kähler complex structure を許容することが分かる. 先ほども述べた通り, Kähler complex structure の存在については知られているが, その基本的考え方は  $\mathbb{C}P^2$  へのはめ込みを使って complex structure を引き戻すというものであった. これと同じことを行き先を  $E(\rho_1, \rho_2)$  の 1 点 blow up にとりかえて行うのである.

境界の持つ性質についても述べておこう.  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界は 3 次元球面に微分同相であるが, complex manifold の内側へ少しだけ摂動することによって, strictly pseudoconvex boundary にすることが出来る. こうしてできた新たな境界は overtwisted contact 3-sphere であることが容易に示される. つまり,  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界の近傍を少しだけ削ることで, overtwisted contact 3-sphere の concave holomorphic filling を構成することができる. これは overtwisted contact 3-manifold の concave holomorphic filling の初めての例である. さらに副産物として,  $E(\rho_1, \rho_2)$  はいかなる compact complex surface にも埋め込まれないということも分かる. なぜなら, overtwisted contact manifold は convex holomorphic filling を持たないからである.

このように 4 次元トポロジー・微分位相幾何学の立場から複素幾何や接触幾何の分野に大きく貢献できるという点が本稿で最も伝えたいことである. それでは, その話の根幹となる  $E(\rho_1, \rho_2)$  の構成を詳しく見ていこう.

## 2. The Matsumoto-Fukaya fibration

1980年代前半に松本幸夫氏と深谷賢治氏は以下のような構成によって  $S^4$  から  $S^2$  への genus-one achiral Lefschetz fibration を発見した [10]. まず Hopf fibration  $H: S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  とその suspension  $\Sigma H: S^4 \rightarrow S^3$  を用意し, その合成  $f_{MF} := H \circ \Sigma H$  をとる. すると,  $f_{MF}$  の regular fiber は 2-torus となり, suspension の 2 つの pinched point がちょうど正と負の Lefschetz singularity となる. この torus fibration  $f_{MF}: S^4 \rightarrow S^2$  を Matsumoto-Fukaya fibration と呼ぶ.

$f_{MF}$  にはただ 2 つの singular fiber がある. 正の singularity を持つ方を  $F_1$ , 負の singularity を持つ方を  $F_2$  としよう. すると,  $S^4$  は  $F_1$  の tubular neighborhood  $N_1$  と  $F_2$  の tubular neighborhood  $N_2$  の貼り合わせとして表せることが分かる. 実際,  $S^2$  を  $S^2 = D_1 \cup D_2$  (ただし,  $f_{MF}(F_j) \in D_j$ ,  $\partial D_1 = \partial D_2$ ) と 2 つの disk の和に分解したとき,  $N_1 := f_{MF}^{-1}(D_1)$ ,  $N_2 := f_{MF}^{-1}(D_2)$  と定義すれば確かにそのようになっている.

$f_{MF}$  の  $N_j$  への制限を  $f_j$  とおこう ( $j = 1, 2$ ). すると,  $f_1: N_1 \rightarrow D_1$  は正の singularity を 1 つだけ持つ genus-one Lefschetz fibration であり,  $f_2: N_2 \rightarrow D_2$  は負の singularity を 1 つだけ持つ genus-one achiral Lefschetz fibration である. Monodromy はそれぞれ vanishing cycle に沿った right-handed Dehn twist, left-handed Dehn twist となる. 従って,  $\partial N_1$  と  $\partial N_2$  は確かに互いに orientation reversing diffeomorphic である.

次に,  $\partial N_1$  と  $\partial N_2$  はどのような diffeomorphism で貼り合わされているのかをはっきりさせよう. そのために Kirby diagram を見る. Matsumoto-Fukaya fibration の Kirby diagram は図 1 の通りであることがよく知られている (例えば [13], Figure 8.38 を参照).

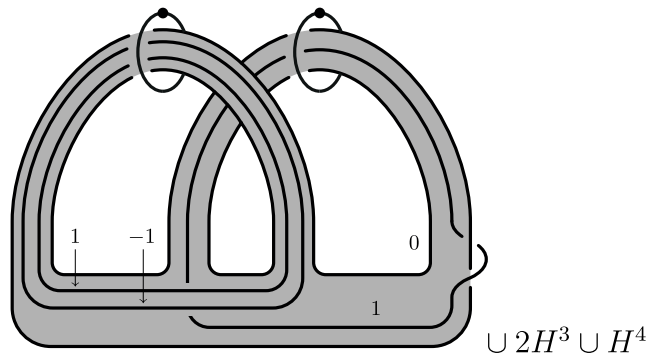


図 1: The Matsumoto-Fukaya fibration on  $S^4$ .

この diagram を説明しよう. まず, グレーの部分は 0-handle に 2 つの 1-handle を貼り合わせた once punctured torus となっている. ここへ 4 つの 2-handle が以下のように貼り付けられる. まず, framing 0 の 2-handle によって, once punctured torus の穴がふさがれて torus となる. これが torus fibration の regular fiber に相当する. さらに左側の 1-handle を通る形で framing  $-1$ , framing 1 の 2 つの 2-handle が貼り付けられる. これらはそれぞれ正と負の Lefschetz singularity の vanishing cycle に対応する 2-handle である. 最後に, 右側の 1-handle を通る形で framing 1 の 2-handle が貼り付けられる. 結局この 2-handle が  $\partial N_1$  と  $\partial N_2$  を貼り合わせる際にどうひねっているかを表しているのである. 従って, この diagram から分かることをまとめると次のようになる. ま

ず、正と負の singularity に対応した2つの vanishing cycle は一致している．そこでそれが表す  $T^2$  fiber の1次ホモロジーを meridian と見ることにすれば、 $\partial N_1$  と  $\partial N_2$  の貼り合わせは  $T^2$  fiber の longitude に沿った1回ひねり（正確には自明な貼り合わせの後に multiplicity-1 logarithmic transformation を行うということ）である．従って、この貼り合わせを絵で表すと図2のようになる．

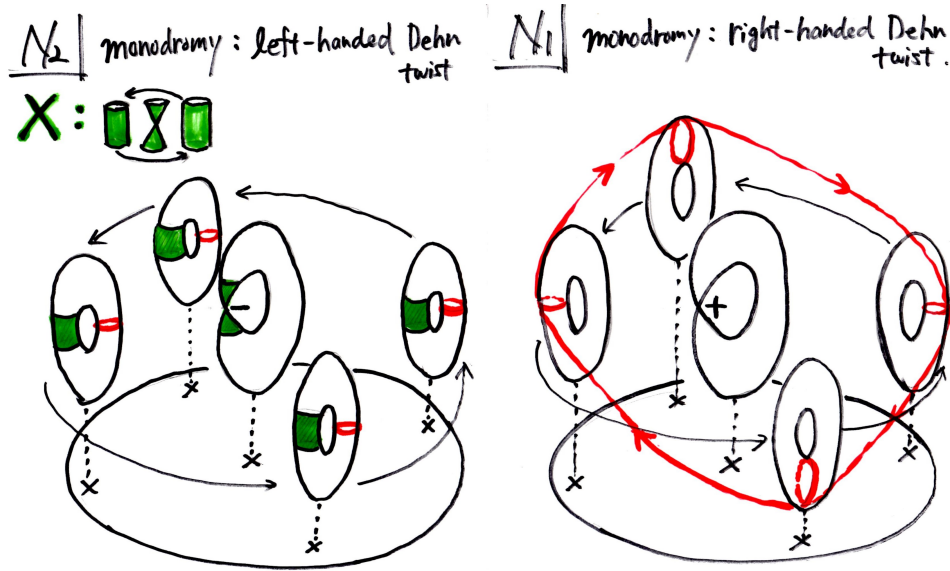


図 2: The gluing of  $N_1$  and  $N_2$ .

さてこの貼り合わせによって、 $N_1 \cup N_2 = S^4$  となることが分かったから、今度は  $N_2$  から negative singularity の近傍  $X \cong B^4$  を取り除くことを考えよう（ $X$  は緑色の部分）． $X$  は  $D_2$  上の negative singularity を1つだけ持つ annulus fibration (monodromy は left-handed Dehn twist) の全空間なので、確かに negative Lefschetz singularity の近傍の standard model であり、 $B^4$  と微分同相である．よって、その補集合  $N_1 \cup (N_2 \setminus X)$  は  $\mathbb{R}^4$  と微分同相になる．

ところで、 $N_2 \setminus X$  にはもはや singularity はないので、 $D_2$  上の trivial annulus fibration の全空間、即ち  $A \times D^2$  ( $A$  は annulus) と微分同相である．これに注意すれば、以下の補題が得られる．

**補題 5.**  $A \times D^2$  を  $N_1$  に以下のように貼り合わせる．各  $t \in \partial D^2 = -\partial D_1 \cong S^1$  に対し、 $A \times \{t\}$  は各ファイバー  $f_1^{-1}(t) \cong T^2$  の thickened meridian として埋め込まれ、 $t \in S^1$  が1周する間に  $T^2$  の longitude 方向に1周する．得られる多様体は  $\mathbb{R}^4$  に微分同相である．

このようにして、 $\mathbb{R}^4$  を  $N_1$  と  $A \times D^2$  の和という形で非自明に分解することが出来た．これが  $E(\rho_1, \rho_2)$  の設計図である．また、 $f: E(\rho_1, \rho_2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  はトポロジカルには  $f_{MF}$  を  $N_1 \cup (N_2 \setminus X)$  へ制限したものである．あとはこれらを complex manifold によって実現していけばよい訳である．

最後に  $N_1 \cup (N_2 \setminus X) \cong \mathbb{R}^4$  の Kirby diagram を記しておこう．それは図3のようになる．図1と比較したとき，取り除くべき  $X$  は vanishing cycle を表す framing 1 の 2-handle, 3-handle, 4-handle の和に他ならないからである．

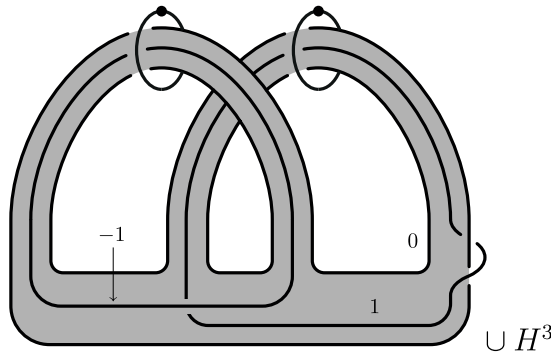


図3: The map  $f$  on  $S^4 \setminus X \cong \mathbb{R}^4$ .

### 3. $E(\rho_1, \rho_2)$ の構成

前章で得られた結果を踏まえ，この章では complex manifold  $E(\rho_1, \rho_2)$  の構成を行う．具体的には，補題5で得られた2つのピース  $N_1$  と  $A \times D^2$  へ complex structure を入れ，それぞれに貼り合せ領域を適切に指定するというを行う．

以下，次のような記号を用いる．

$$\Delta(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}, \quad \Delta(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}.$$

また， $\rho_0, \rho_1, \rho_2$  は  $0 < \rho_0 < \rho_1 < 1 < \rho_2 < \rho_1^{-1}$  という条件を満たす実数とする．

まずはそれぞれのピースに complex structure を入れる． $A \times D^2$  の方は簡単で，holomorphic annulus と holomorphic disk の直積  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  を取ればよい．一方， $N_1$  は genus-one Lefschetz fibration  $f_1: N_1 \rightarrow D_1$  の全空間だから，これが elliptic fibration となるような complex structure を入れればよい．そのためには以下の elliptic surface 内の  $I_1$  型 singular fiber の近傍モデルが適している．まず， $\Delta(0, \rho_1)$  上の elliptic fibration

$$\pi: \mathbb{C}^* \times \Delta(0, \rho_1) / \mathbb{Z} \rightarrow \Delta(0, \rho_1)$$

を考える．ただし， $n \in \mathbb{Z}$  の作用は

$$n \cdot (z, w) = (zw^n, w)$$

で与えられている．これを  $\Delta(\rho_1)$  上に延長し，singular elliptic fibration  $g_1: W \rightarrow \Delta(\rho_1)$  を得る．これが小平による  $I_1$  型 singular fiber の近傍モデルである ([4]) ．

この  $W$  と直積  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  を複素解析的に貼り合わせることによって， $E(\rho_1, \rho_2)$  を構成する．直積の方からは  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_1^{-1}, \rho_0^{-1})$  を貼り合せ領域として取ってくる． $W$  の方からは  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0, \rho_1)$  と biholomorphic な貼り合せ領域を以下のようにして取る．多価正則関数  $\varphi: \Delta(\rho_0, \rho_1) \rightarrow \mathbb{C}^*$  を

$$\varphi(w) = \exp\left(\frac{1}{4\pi i}(\log w)^2 - \frac{1}{2} \log w\right)$$

によって定める. すると,

$$\varphi(re^{i(\theta+2\pi)}) = re^{i\theta}\varphi(re^{i\theta}) = w\varphi(w) \quad (1)$$

を満たすので,  $\varphi$  は  $1 \in \mathbb{Z}$  の  $\mathbb{C}^*$  への作用と両立し,  $\pi$  の holomorphic section を定める. そこで, この  $\varphi$  を用いて

$$Y := \{(z\varphi(w), w) \in \mathbb{C}^* \times \Delta(\rho_0, \rho_1) \mid z \in \Delta(1, \rho_2)\}$$

とすれば,  $Y$  は  $\mathbb{Z}$  の作用で不変であり,  $V := Y/\mathbb{Z}$  は  $\varphi$  の定める holomorphic section に沿った  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0, \rho_1)$  と biholomorphic な領域となる. この  $V$  が  $W$  内の貼り合せ領域である. 貼り合せ領域同士の biholomorphism  $j$  は

$$j : V \cong \Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0, \rho_1) \rightarrow \Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_1^{-1}, \rho_0^{-1}); (z, w) \mapsto (z, w^{-1})$$

によって与える. あとは

$$E(\rho_1, \rho_2) := W \cup_j (\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1}))$$

と定義すればよい.

これが  $\mathbb{R}^4$  に微分同相であることは以下のように示される. 貼り合せ領域  $V$  は  $\Delta(1, \rho_2)$  を fiber とする  $\varphi$  によって自明化された直積だから,  $\varphi$  が満たす条件 (1) に注目すれば,  $w$  が 0 のまわりを 1 周するたびに  $\Delta(1, \rho_2)$  は elliptic curve の longitude 方向へ 1 周回っていることが分かる. というのも (1) から,  $\varphi$  の値は  $w$  の偏角を  $2\pi$  増やすと  $w$  の積によって変化するが, それは  $\Delta(1, \rho_2)$  が elliptic curve  $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}$  の中で次の基本領域へ移動することに対応するからである (ただし,  $\mathbb{C}^*$  の偏角方向が meridian, 動径方向が longitude に対応していることに注意せよ). 従って,  $W$  と  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  の貼り合わせはトポロジカルには補題 5 のものと一致しており,  $E(\rho_1, \rho_2)$  は  $\mathbb{R}^4$  に微分同相である.

最後に  $f$  を構成する必要があるが, これは単に  $\Delta(\rho_1)$ ,  $\Delta(\rho_0^{-1})$  への射影をとればよい. 即ち,  $W$  上では  $g_1$ ,  $\Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  上では 2nd factor への射影として定義する.  $\Delta(\rho_1)$  と  $\Delta(\rho_0^{-1})$  は貼り合せ領域の biholomorphism

$$\Delta(\rho_0, \rho_1) \rightarrow \Delta(\rho_1^{-1}, \rho_0^{-1}); w \mapsto w^{-1}$$

によって貼り合わさって  $\mathbb{C}P^1$  をなすから,  $f : E(\rho_1, \rho_2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  が定義されるのである.

このようにして構成された  $E(\rho_1, \rho_2)$  および  $f$  が主定理の条件を満たしていることはもはや明らかであろう.

#### 4. $E(\rho_1, \rho_2)$ の性質および応用

最後に, これまでに明らかとなっている  $E(\rho_1, \rho_2)$  と  $f$  の性質 ([1], [2] を参照) について述べる. まず以下のように, compact holomorphic curve を容易に分類することができる.

**補題 6.**  $E(\rho_1, \rho_2)$  内の compact holomorphic curve は  $f$  の compact fiber である.

*Proof.*  $i: C \rightarrow E(\rho_1, \rho_2)$  を compact holomorphic curve とする. 即ち,  $C$  は compact Riemann surface,  $i$  は holomorphic immersion とする. このとき, 合成  $f \circ i: C \rightarrow \mathbb{C}P^1$  が constant map であることを示せばよい.  $f \circ i$  は compact Riemann surface の間の holomorphic map であるから, branched covering map か constant map のいずれかである. ところが, この写像は  $C \rightarrow E(\rho_1, \rho_2) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  と contractible space  $E(\rho_1, \rho_2) \cong \mathbb{R}^4$  を経由しているため null-homotopic であり, branched covering map とはなり得ない. よって,  $f \circ i$  は constant map である.  $\square$

つまり, compact holomorphic curve は  $f^{-1}(w)$  ( $w \in \Delta(\rho_1)$ ) のみである.  $w \neq 0$  ならば,  $f^{-1}(w)$  は modulus が  $\frac{1}{2\pi i} \log w$  の elliptic curve である. この分類を踏まえると,  $\mathbb{R}^4$  上に非可算無限個の non-Kähler complex structure が存在することが証明できる.

**定理 7.**  $(\rho_1, \rho_2) \neq (\rho'_1, \rho'_2)$  ならば,  $E(\rho_1, \rho_2)$  と  $E(\rho'_1, \rho'_2)$  は互いに biholomorphic でない.

*Proof.* 対偶を示す. 即ち, biholomorphism  $\Phi: E(\rho_1, \rho_2) \rightarrow E(\rho'_1, \rho'_2)$  が存在すると仮定して,  $\rho_1 = \rho'_1, \rho_2 = \rho'_2$  であることを示す.  $\Phi$  は compact curve を compact curve に写すから,  $\Phi(W) = W'$  となる. さらに, elliptic curve は同じ modulus の elliptic curve に写るから,  $\Phi$  は  $W$  上 fiberwise biholomorphism であり, base map  $\Delta(\rho_1) \rightarrow \Delta(\rho'_1)$  は identity である. よって,  $\rho_1 = \rho'_1$  である. さらに analytic continuation により,  $\Phi$  は  $E(\rho_1, \rho_2)$  全体で fiberwise biholomorphism であることが分かる. 従って, annulus fiber  $\Delta(1, \rho_2)$  は annulus fiber  $\Delta(1, \rho'_2)$  と biholomorphic となり,  $\rho_2 = \rho'_2$  である.  $\square$

次に, Picard group  $\text{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$  が非可算であることを示す. ここで,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$  は  $\mathbb{C}P^1$  上の first Chern class  $k$  の holomorphic line bundle,  $L_k$  はその  $f$  による引き戻し ( $E(\rho_1, \rho_2)$  上に誘導される line bundle) とする. また  $f$  による line bundle の引き戻しによって定まる Picard group の間の homomorphism を  $f^*$  で表す.

**定理 8.**  $f^*: \text{Pic}(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \text{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$  は injective であり,  $\text{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$  は非自明な complex vector space である.

*Proof.*  $L_k$  が自明であることを仮定して,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$  が自明であることを示せばよい.  $L_k$  の nonvanishing holomorphic section  $\tau$  をとる. 一方,  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$  も  $\Delta(\rho_1), \Delta(\rho_0^{-1})$  それぞれの上では自明なので,  $\sigma_1, \sigma_2$  という部分的な nonvanishing holomorphic section がとれる. これらを  $f$  で引き戻せば,  $W_1 := W$  上の nonvanishing section  $f^*(\sigma_1)$  と  $W_2 := \Delta(1, \rho_2) \times \Delta(\rho_0^{-1})$  上の nonvanishing section  $f^*(\sigma_2)$  を得る. 従って,  $W_j$  上の holomorphic function  $\tau_j$  ( $j = 1, 2$ ) が

$$\tau|_{W_j} = \tau_j f^*(\sigma_j)$$

によって定まる. ところが  $W_1 = W$  は compact fibers で foliate されているから,  $\tau_1$  は fiberwise constant である, つまり  $\Delta(\rho_1)$  上の holomorphic function  $u_1$  が存在して,  $\tau_1 = f^*(u_1)$  となる. 共通部分  $V = W_1 \cap W_2$  においては

$$f^*(u_1 \sigma_1) = \tau_2 f^*(\sigma_2)$$

が成り立つから、 $\tau_2$  も  $V$  上においてはやはり fiberwise constant である。ここで analytic continuation を用いれば、 $\tau_2$  は  $W_2$  全体で fiberwise constant, 即ち  $\Delta(\rho_0^{-1})$  上の holomorphic function  $u_2$  が存在して、 $\tau_2 = f^*(u_2)$  となる。すると、 $u_1\sigma_1$  と  $u_2\sigma_2$  は  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$  の nonvanishing holomorphic section を定めるから、 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(k)$  は自明となる。これで  $f^*$  の injectivity が示された。

よく知られている通り  $\text{Pic}(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}$  なので、 $\text{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$  は  $\mathbb{Z}$  を含む。さらに、sheaf cohomology の long exact sequence を見れば、

$$\text{Pic}(E(\rho_1, \rho_2)) = H^1(E(\rho_1, \rho_2), \mathcal{O}^*) \cong H^1(E(\rho_1, \rho_2), \mathcal{O})$$

であることが分かる。 $H^1(E(\rho_1, \rho_2), \mathcal{O})$  は complex vector space だから、 $\text{Pic}(E(\rho_1, \rho_2))$  も complex vector space と見なせ、しかも  $\mathbb{Z}$  を含むので非自明である。□

同じような議論により、 $E(\rho_1, \rho_2)$  上の holomorphic vector bundle  $L_{k_1} \oplus L_{k_2} \oplus \cdots \oplus L_{k_n}$  ( $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ ) は全て異なることが分かる。さらにその全空間をとれば  $\mathbb{R}^{2n+4}$  上の互いに biholomorphic でない non-Kähler complex structure が得られる。これらが Calabi と Eckmann によって構成された complex structure と異なることは compact holomorphic curve の分類を見れば明らかである ([2], Theorem 4)。

さて次に、以下の定理を証明しよう。

**定理 9.** 任意の connected open orientable 4-manifold  $M^4$  は非可算無限個の non-Kähler complex structure を許容する。

これを証明するためには次の Phillips の定理 [15] が重要となる。

**定理 10.**  $M$  を open manifold とする。このとき微分をとる写像

$$d: \text{Sub}(M, V) \rightarrow \text{Epi}(TM, TV); f \mapsto df$$

は弱ホモトピー同値である。ただし、 $\text{Sub}(M, V)$  は  $M$  から  $V$  への submersion 全体の空間、 $\text{Epi}(TM, TV)$  は  $TM$  から  $TV$  への surjective homomorphism 全体の空間である。

これを用いると例えば、 $M$  が parallelizable ならば  $M$  から  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq \dim M$ ) への submersion が存在する、ということが分かる。従って、 $M^4$  が parallelizable open 4-manifold (open spin 4-manifold と言っても同値) ならば  $\mathbb{C}^2$  への immersion  $g: M^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$  が存在することが分かる。この  $g$  を使って  $\mathbb{C}^2$  の complex structure を引き戻せば、 $M^4$  に Kähler complex structure を入れることができる。 $M^4$  が一般の connected open orientable 4-manifold である場合は、行き先を  $\mathbb{C}P^2$  に変更すれば同様の議論ができる。尚、 $M^4$  上の almost complex structure の存在は Teichner-Vogt [17] および Gompf [12] によって示されている。このことを踏まえて、定理 9 を証明する。

*Proof.*  $M^4$  が spin の場合 (つまり parallelizable な場合) のみ証明を与えることとする。定理 10 より、 $M^4$  から  $E(\rho_1, \rho_2) \cong \mathbb{R}^4$  への immersion  $h: M^4 \rightarrow E(\rho_1, \rho_2)$  が存在する。ここで以下のようにして、 $h(M^4)$  が elliptic curve を含むように rescaling しておけ

ば、引き戻しによって得られる  $M^4$  上の complex structure は non-Kähler となる.  $h$  は immersion だから, 十分小さい 4-ball  $B \subset M^4$  をとれば, その上で embedding となる. ここで,  $\rho'_1 < \rho_1, \rho'_2 < \rho_2$  を満たす  $E(\rho'_1, \rho'_2)$  をとると,  $E(\rho'_1, \rho'_2) \subset E(\rho_1, \rho_2)$  となって,  $\mathbb{R}^4$  内に open 4-ball が埋め込まれた形となる.  $h(B) \subset E(\rho_1, \rho_2)$  も  $\mathbb{R}^4$  内の open 4-ball だから,  $h(B)$  を  $E(\rho'_1, \rho'_2) \rightarrow \mathbb{R}^4$  の diffeomorphism が存在する. この diffeomorphism との合成をとって rescaling することにより, 元々  $h(B) = E(\rho'_1, \rho'_2)$  であるとしてよい. この  $h$  によって  $E(\rho_1, \rho_2)$  の complex structure を引き戻して  $M^4$  上に complex structure を入れると, そこには  $E(\rho'_1, \rho'_2)$  が holomorphic に埋め込まれている. よって,  $M^4$  は non-Kähler complex structure を許容する.  $(\rho_1, \rho_2)$  と  $(\rho'_1, \rho'_2)$  を変えることで含まれる elliptic curve の modulus をコントロールできるから, 非可算無限個存在することもすぐにわかる. また,  $M^4$  が non-spin の場合には,  $E(\rho_1, \rho_2)$  の代わりにその 1 点 blow up を用いれば同様の議論を行うことができる.  $\square$

最後に,  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界の性質について述べる.

**定理 11.** 境界  $\partial E(\rho_1, \rho_2)$  のカラー近傍  $A$  であって,  $\partial(E(\rho_1, \rho_2) \setminus A)$  が strictly pseudoconcave boundary となるものが存在する. このとき, 新たな境界は negative overtwisted contact 3-sphere となる.

即ち,  $E(\rho_1, \rho_2)$  の境界のカラー近傍  $A$  を削ることにより, overtwisted contact 3-sphere の concave holomorphic filling が得られるということである. この contact structure は negative Hopf band に対応する negative contact structure, 言い換えると,  $S^3$  上の standard contact structure を Hopf fiber に沿って half Lutz twist したものに negative orientation を入れたものである. このことは,  $E(\rho_1, \rho_2)$  を構成する過程で取り除いた  $X$  が negative Lefschetz singularity の近傍の standard model であったことを考えれば, 自然なことと感じられるだろう.

証明の際には, strictly pseudoconcavity のみを示せば十分である. というのも, strictly pseudoconcave boundary には complex tangency によって negative contact structure が誘導される, というのは一般論であるし, さらに  $d_3$ -invariant を見れば contact structure のホモトピー類が決まってしまうからである. 従って,  $E(\rho_1, \rho_2)$  内に境界の  $S^3$  を内側に摂動した形の concave hypersurface を作ればよい. その構成については本予稿では省略し, トポロジーシンポジウムの講演において詳しく述べることにしたい.

## 参考文献

- [1] A. J. Di Scala, N. Kasuya and D. Zuddas, *Non-Kähler complex structures on  $\mathbb{R}^4$* , arXiv:1501.06097 (2015).
- [2] A. J. Di Scala, N. Kasuya and D. Zuddas, *Non-Kähler complex structures on  $\mathbb{R}^4$  II*, arXiv:1511.08471 (2015).
- [3] K. Kodaira, *On Compact Complex Analytic Surfaces: I*, Ann. of Math. **71** (1960), 111–152.
- [4] K. Kodaira, *On Compact Analytic Surfaces: II*, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626.
- [5] K. Kodaira, *On Compact Analytic Surfaces: III*, Ann. of Math. **78** (1963), 1–40.

- [6] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: I*, Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798.
- [7] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: II*, Amer. J. Math. **88** (1966), 682–721.
- [8] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: III*, Amer. J. Math. **90** (1968), 55–83.
- [9] K. Kodaira, *On the structures of compact complex analytic surfaces: IV*, Amer. J. Math. **90** (1968), 1048–1066.
- [10] Y. Matsumoto, *On 4-manifolds fibered by tori*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **58** (1982), no. 7, 298–301.
- [11] Y. Miyaoka, *Kähler metrics on elliptic surfaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **50** (1974), 533–536.
- [12] R. E. Gompf, *Spin<sup>c</sup>-structures and homotopy equivalences*, Geom. Topol. **1** (1997), 41–50.
- [13] R. E. Gompf and A. I. Stipsitz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society (1999).
- [14] A. Phillips, *Submersions of open manifolds*, Topology **6** (1967), 171–206.
- [15] Y. T. Siu, *Every K3 surface is Kähler*, Inv. Math. **73** (1983), 139–150.
- [16] P. Teichner and E. Vogt, *All oriented 4-manifolds have spin<sup>c</sup>-structures*, preprint (1994).



# 曲面の写像類群の線型性問題の視覚化について

笠原 泰 (高知工科大学)\*

## 概 要

高種数の曲面の写像類群に関する基本的な未解決問題に、線型性問題がある。本稿では、写像類群の線型性に関する既知の結果を概観した後、筆者が「線型性問題の視覚化」と呼ぶ、閉曲面および1点穴開き曲面の写像類群が線型となるための、ある意味幾何的な必要十分条件 [17] について紹介したい。

## 1. 序

### 1.1. 写像類群とその線型性問題

向き付け可能な曲面(2次元多様体)に対し、向きを保つ同相写像のイソトピー類全体の成す群を、その曲面の写像類群という。考える曲面の型や、考えるイソトピーの種類に応じて写像類群にはいくつかの変種がある。以下、これらを単に写像類群という。写像類群は低次元トポロジーの他、幾何的群論、代数幾何、数論、数理物理などとも関連を持ち、現在までに様々な観点から活発に研究されている。

しかし、古くからある基本的な問題である線形性、すなわち 或る体上の忠実な有限次元線型表現の存在問題については、曲面の型が単純な場合を除き、未解決のまま残っている。ここで、群の線型表現が忠実とは、対応する線型変換群への準同型が単射であることをいう。以下、群は体  $K$  上の忠実な有限次元線形表現を持つとき、 $K$  線型ということにする。

### 1.2. 既知の結果

$\Sigma_g$  で種数  $g$  の有向閉曲面を表す。その写像類群  $\mathcal{M}_g$  は定義により、 $\Sigma_g$  の向きを保つ同相写像のイソトピー類全体の成す群である。種数  $g$  の1点穴開き曲面  $\Sigma_{g,*}$  を、 $\Sigma_g$  と固定された基点  $*$   $\in \Sigma_g$  の組と定める。 $\Sigma_{g,*}$  の写像類群  $\mathcal{M}_{g,*}$  を、基点を保つ  $\Sigma_g$  の向きを保つ同相写像のイソトピー類全体の成す群として定める。但しイソトピーは常に基点を固定し続けるもののみを考える。

種数  $g = 1$  の場合、 $\mathcal{M}_1$  と  $\mathcal{M}_{1,*}$  は共に  $SL(2, \mathbb{Z})$  と同型であることが古典的に知られている。従ってこれらの写像類群は  $\mathbb{Q}$  線型である。種数  $g = 2$  の場合は、2000年になって  $\mathcal{M}_2$  の線型性が初めて確立された (Korkmaz [20], Bigelow–Budney [5])。これは、先だって Bigelow [4], Krammer [23] により確立した、Artin 組みひも群  $B_n$  の線型性と、 $B_n$  と穴開き球面の写像類群との関係、および  $\mathcal{M}_2$  と6点穴開き球面の写像類群の関係を記述する Birman–Hilden 理論 [7] を組み合わせることで示された。

$\mathcal{M}_{2,*}$  の線型性は、 $g \geq 3$  に対する  $\mathcal{M}_g$  および  $\mathcal{M}_{g,*}$  の線型性と同様に未解決である。

### 1.3. 高種数の難しさについて

#### 1.3.1. Lawrence 表現の不存在

比較のため、まず組みひも群  $B_n$  の有限次元線型表現である Lawrence 表現 [24] を思い出す。2次元円板  $D^2$  に対し、 $n$  個の内点からなる部分集合  $P_n$  を固定する。 $D^2$  と  $P_n$  の組

\* 〒782-8502 高知県香美市土佐山田町 高知工科大学 共通教育教室  
e-mail: kasahara.yasushi@kochi-tech.ac.jp

を  $D_n$  とかく.  $D_n$  の写像類群, すなわち  $n$  点穴開き円板の写像類群は,  $P_n$  を集合として固定する  $D^2$  の向きを保つ同相写像で, 境界上恒等写像であるもののイソトピー類全体の成す群として定義される. ただし, イソトピーは,  $P_n$  と境界の点を常に固定するもののみを考える. すると,  $D_n$  の写像類群は, 組みひも群  $B_n$  と同一視できる.  $\mathcal{C}_m(D_n)$  で  $D^2 \setminus P_n$  の  $m$  点配置空間 (順序なし) を表す.  $\mathcal{C}_m(D_n)$  の 1 次コホモロジー群には  $B_n$  が自然に作用し, その不変部分は,

$$H^1(\mathcal{C}_m(D_n); \mathbb{Z})^{B_n} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1); \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (m \geq 2) \end{cases}$$

である ([24]). この不変部分に対応する  $\mathcal{C}_m(D_n)$  のアーベル被覆の  $m$  次ホモロジー群は, 被覆変換群  $\mathbb{Z}$  ( $m = 1$ ) または  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ( $m \geq 2$ ) の  $\mathbb{Z}$  係数の群環を基礎環とする,  $B_n$  の有限次元線型表現を定める.  $m = 1$  のとき, この表現は Burau 表現と一致し,  $n = 3$  の場合忠実であることが知られていた (Magnus–Peluso [26]). Bigelow と Krammer が示したのは,  $m = 2$  の場合に得られる線型表現が忠実ということであった.

同様の構成を, 境界成分を 1 つもつ, 種数  $g \geq 1$  のコンパクト有向曲面  $\Sigma_{g,1}$  と, その写像類群  $\mathcal{M}_{g,1}$  に対して考える. ここに,  $\mathcal{M}_{g,1}$  は  $\Sigma_{g,1}$  の向きを保つ同相写像で境界上恒等写像であるもの全体の, 境界上の各点を動かさないイソトピーによる商として得られる群を表す. すると  $m \geq 1$  に対し,  $\mathcal{M}_{g,1}$  加群として

$$H_1(\mathcal{C}_m(\Sigma_{g,1}); \mathbb{Z}) \cong H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(但し  $\mathcal{M}_{g,1}$  の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  への作用は自明) となることから (c.f. Scott [29], Bellingeri [3]), 得られる  $\mathcal{M}_{g,1}$  の線型表現は,  $\mathcal{C}_m(\Sigma_{g,1})$  の高々 2 重被覆の  $m$  次ホモロジー群となり,  $\mathcal{C}_m(\Sigma_{g,1})$  そのものの  $m$  次ホモロジーと比較して, 情報が大きく増えることが期待できない. また, 後者の定める  $\mathcal{M}_{g,1}$  の線型表現のカーネルは,  $m$  についてすべて併せると,  $\mathcal{M}_{g,1}$  の Johnson filtration と一致することが知られている (Moriyama [27]).

### 1.3.2. $\text{Aut}(F_n)$ との比較

$F_n$  で階数  $n$  の自由群,  $\text{Aut}(F_n)$  で  $F_n$  の自己同型群を表す.  $\text{Aut}(F_2)$  が線型であることは,  $B_4$  の線型性から従う (Krammer [22]). この場合を除いた  $n \geq 3$  に対し,  $\text{Aut}(F_n)$  は線型でないことが Formanek–Procesi [11] により示されている. 一方,  $\mathcal{M}_{g,1}$  は  $F_{2g}$  と同型な  $\Sigma_{g,1}$  の基本群に作用し, Dehn–Nilsen 型定理によれば,  $\mathcal{M}_{g,1}$  はこの作用を介して  $\text{Aut}(F_{2g})$  の比較的大きな部分群と見なせる:

$$\mathcal{M}_{g,1} \cong \{f \in \text{Aut}(F_{2g}); f(\zeta) = \zeta\}$$

但し,  $\zeta$  は  $F_{2g}$  の適当な自由生成系  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  に対し,  $\zeta = [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_g, b_g]$ . しかし, Formanek–Procesi の手法を直接用いても,  $g \geq 2$  に対して  $\mathcal{M}_{g,1}$  の非線型性を導くことはできないことが Brendle–Tehrani–Hamidi [8] により確認されている.

### 1.3.3. 位相群の格子問題

最近になり, 閉曲面 または一般個数の穴開き曲面の写像類群で, 第 2 可算公理をみたす局所コンパクト連結位相群の格子<sup>1</sup> となるものが Kida [19] により完全に決定されている.

<sup>1</sup>局所コンパクト位相群  $G$  の格子とは,  $G$  の離散部分群  $\Gamma$  で, 商空間  $G/\Gamma$  が,  $G$  の左かけ算による作用で不変な, 正則 Borel 確率測度を持つものをいう.

それによれば, 種数  $g \geq 1$  のとき, そのような格子となり得るのは  $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_{1,*} \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  に限る. なお, 同じ結果によれば, 5点以上の穴開き球面の写像類群もそのような格子になることを禁止されているが, 他方, 上に引用した Korkmaz [20], Bigelow–Budney [5] によれば, 穴開き球面の写像類群はすべて線型である.

#### 1.4. 低次元表現の分類

関連する話題として, 写像類群の低い次元をもつ複素線型表現の分類結果を紹介する.  $B_n$  に対しては,  $n-1$ 次元までの既約表現は,  $n = 4, 5, 6$  で生じる有限個の例外を除き, 1次元アーベル表現か,  $n-1$ 次元の被約 Burau 表現の特殊化の composition factor と共役なものに限ること, また, すべての例外は Iwahori–Hecke 環表現となることが Formanek [9] により示されている.  $B_n$  の  $n$ 次元既約表現についても, Formanek 他 [10] により, 分類が完成している.

種数  $g \geq 1$  の場合, 穴開きなら穴同士の入れ替えを許さない写像類群のみを考えることで, Franks–Handel [12] は, 次元が  $2g-1$  以下の複素線型表現が, すべて写像類群のアーベル化を経由することを示した. 続いて Korkmaz [21] は, アーベル化を経由しない  $2g$ 次元の複素線型表現は,  $g$  が十分大きいとき symplectic 表現と共役であることを示した. ここで, symplectic 表現とは,  $\mathcal{M}_g$  の  $\Sigma_g$  の 1次ホモロジー群への作用が誘導する線型表現

$$\mathcal{M}_g \rightarrow \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$$

および, この準同型と, すべての境界成分を 2次元円板で塞ぎ, すべての穴を忘れることで得られる  $\mathcal{M}_g$  への自然な全射準同型との合成をいう.

さらに Korkmaz は同じ手法により, 種数  $g \geq 3$  の写像類群が 次元  $3g-3$  以下の忠実複素線型表現を持たないことを示している.

## 2. 線型性問題の視覚化

### 2.1. 動機

$\mathcal{M}_g$  および,  $\mathcal{M}_{g,*}$  の線型性は, 上に見た通りかなり微妙な問題であり, 高種数についても ad-hoc に解決するものならば, いつ解決してもおかしくないと言えるが, 系統的なアプローチは見当たらない. そこで, 線型性問題を写像類群に固有の幾何的な問題として言い換えてみることを考えた. それにより, 解決に手が届きそうな写像類群の新しい問題を見出すこと, またその延長上に線型性問題解決のアプローチが見えてくることを期待したい.

$\Sigma_{g,n}$  で種数  $g \geq 1$ , 境界成分の個数が  $n \geq 0$  であるコンパクト有向曲面,  $\mathcal{M}_{g,n}$  でその写像類群を表す.  $\mathcal{M}_{g,n}$  は  $\Sigma_{g,n}$  の向きを保つ同相写像で境界上恒等写像であるもののイソトピー類全体の成す群である. 但し, イソトピーは境界上の点を動かさないものとする.  $S$  で  $\Sigma_{g,n}$  内の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体を表す. ここに, 単純閉曲線が本質的とは, 1点とホモトープでなく, どの境界成分とも平行でないことをいう. また, 単純閉曲線自体は曲面の部分集合と見なし, 従ってその向きは考えない. 写像  $\iota: S \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  を  $c \in S$  に対し  $c$  に沿った (右手) Dehn ツイスト  $t_c \in \mathcal{M}_{g,n}$  を対応させる写像として定める.  $S$  の元として異なる, 二つの単純閉曲線に沿った Dehn ツイスト

の,  $S$  への作用は一致しない. 従って,  $\iota$  は単射である. また, 写像類群の基本的性質として, 任意の  $f \in \mathcal{M}_{g,n}$ , および  $c \in S$  に対し,

$$f\iota(c)f^{-1} = \iota(f(c)) \quad (2.1)$$

が成り立つことが知られている.

筆者の出発点となったのは, 未だ忠実かどうかわかっていない, Iwahori–Hecke 環に由来する  $\mathcal{M}_2$  の線型表現である, 種数 2 の Jones 表現 ([15], [16]) の忠実性を検討する中で発見した, 次の事実である:

**補題 2.1** ([17]).  $g \geq 1$  かつ  $n \geq 0$  とする. 任意の群準同型  $\varphi: \mathcal{M}_{g,n} \rightarrow G$  に対し,  $\text{Ker } \varphi$  が  $\mathcal{M}_{g,n}$  の中心  $Z(\mathcal{M}_{g,n})$  に含まれるための必要十分条件は, 合成写像

$$\varphi \circ \iota: S \rightarrow G$$

が単射となることである.

証明は, 性質 (2.1) に加え,  $S$  に自明に作用する  $\mathcal{M}_{g,n}$  の元全体は  $Z(\mathcal{M}_{g,n})$  と一致すること, 二つの単純閉曲線に沿った Dehn ツイストの  $S$  への作用が一致すれば, 元の曲線も互いにイソトープになることによる.  $\square$

注意 2.2.  $g \geq 1$  に対し, 写像類群の中心  $Z(\mathcal{M}_{g,n})$  の構造は, 次の通り完全に決定されている ([28]).  $n = 0$  の場合:  $g \geq 3$  のとき, 自明;  $g = 1, 2$  のとき, 超楕円的対合が生成する位数 2 の巡回群.  $(g, n) = (1, 1)$  の場合: 境界に沿った「半ツイスト」が生成する無限巡回群. それ以外の場合: 各境界成分に沿った Dehn ツイストたちが生成する階数  $n$  の自由アーベル群.

以下, 基礎体  $K$  を固定しておく.

## 2.2. 閉曲面の場合

補題 2.1 を使うと,  $\mathcal{M}_{g,n}$  の線型性問題を, 中心を除いて「視覚化」できる.

$K[S]$  で, コンパクト曲面  $\Sigma_{g,n}$  内の本質的単純閉曲線のイソトピー類の成す集合  $S$  を基底とする  $K$  上のベクトル空間を表す.  $\mathcal{M}_{g,n}$  の  $S$  への自然な作用により,  $K[S]$  は  $\mathcal{M}_{g,n}$  加群の構造を持つ. 説明のために, 次を導入しておく.

**定義 2.3.** 体  $K$  上のベクトル空間  $M$  の成す  $\mathcal{M}_{g,n}$  加群と,  $\mathcal{M}_{g,n}$  同変な全射準同型

$$p: K[S] \rightarrow M$$

の組を  $\Sigma_{g,n}$  の ( $S$  型) 曲線加群という.

射影  $p$  が明らかなきときは, 単に曲線加群  $M$  などということにする.

注意 2.4. (1)  $\mathcal{M}_{g,n}$  加群として,  $M \cong K[S]/\text{Ker } p$  であり,  $\text{Ker } p$  の元は有限個の  $S$  の元の形式的有限和だから, 結局, 曲線加群とは  $K[S]$  に単純閉曲線の有限和を関係子(「スケイン型」関係子)として得られる  $\mathcal{M}_{g,n}$  加群のことである.

(2) これまでに知られている,  $\text{Ker } p$  の  $\mathcal{M}_{g,n}$  生成元を直接指定することで定義された有限次元曲線加群としては, ただ一つ Luo が [25] で構成したものがあのみである.

(3) すべての  $\mathcal{M}_{g,n}$  加群が曲線加群の構造を持つわけではない. たとえば,  $n = 0$  として,  $K$  の標数が 2 でなければ,  $\mathcal{M}_g$  加群  $H_1(\Sigma_g; K)$  は  $\Sigma_g$  の曲線加群の構造を持ち得ない. この場合, より強く  $\mathcal{M}_g$  同変な準同型  $K[S] \rightarrow H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$  は 0 写像に限る.

さて,  $\mathcal{M}_{g,n}$  の任意の有限次元線型表現は,  $\Sigma_{g,n}$  の有限次元曲線加群を誘導することを観察しておく. 有限次元ベクトル空間  $V$  を表現空間とする線型表現  $\rho: \mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \text{GL}(V)$  に対し,  $\rho \circ \iota(S)$  の生成する  $\text{End}(V)$  の  $K$  部分空間を  $M_\rho$  で表す.  $\rho(f)$  による共役作用により  $\text{End}(V)$  を  $\mathcal{M}_{g,n}$  加群と見なす. すると, 性質 (2.1) により,  $M_\rho$  は  $\text{End}(V)$  の  $\mathcal{M}_{g,n}$  部分加群となる. さらに,  $p_\rho: K[S] \rightarrow M_\rho$  を  $\rho \circ \iota$  の線形な拡張として定めれば,  $M_\rho$  は  $\Sigma_{g,n}$  の有限次元曲線加群となる.

この構成と, 補題 2.1 を基礎として, 次を示すことができる.

定理 2.5 ([17]).  $\mathcal{M}_{g,n}$  が,  $K$  上の有限次元線型表現で, カーネルが中心に含まれるようなものを持つための必要十分条件は,  $\Sigma_{g,n}$  の有限次元曲線加群

$$p: K[S] \rightarrow M$$

で,  $p$  の  $S$  への制限が単射となるものが存在することである.

注意 2.2 で述べた通り,  $n = 0$  かつ  $g \geq 3$  ならば,  $\mathcal{M}_{g,n}$  の中心は自明である. 従って, 定理は直ちに次を導く.

系 2.6 ([17]). 種数  $g \geq 3$  の閉曲面の写像類群  $\mathcal{M}_g$  が  $K$  線型となるための必要十分条件は,  $\Sigma_g$  の有限次元曲線加群  $p: K[S] \rightarrow M$  で,  $p$  の  $S$  への制限が単射となるものが存在することである.

### 2.3. 1 点穴開き曲面の場合

$g \geq 2$  とする. 前節と同様の, 線型性問題の視覚化を,  $\mathcal{M}_{g,*}$  について考える.

この場合, 写像類群が自然に作用し, 部分集合として自身が含む幾何的対象として,  $S$  の他に曲面群  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  がある. これは, いわゆる Birman 完全列 [6] により記述される:

$$1 \rightarrow \pi_1(\Sigma_g, *) \xrightarrow{i} \mathcal{M}_{g,*} \xrightarrow{j} \mathcal{M}_g \rightarrow 1 \tag{2.2}$$

ここに,  $j$  は基点を忘れることで得られる準同型. また,  $i$  は,  $\Sigma_g$  の基点付きループに, それを基点のイソトピーと見なしたときの, 包囲イソトピーの結果生じる  $\Sigma_{g,*}$  の同相写像の, 逆写像のイソトピー類を対応させる準同型である. 性質 (2.1) に対応して, 任意の  $f \in \mathcal{M}_{g,*}$ ,  $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$  に対し,

$$f \cdot i(\gamma) \cdot f^{-1} = i(f_*\gamma) \tag{2.3}$$

が成り立つ. 但し,  $f_*$  は  $f$  の  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  への自然な作用を表す.

次が補題 2.1 の対応物を与える:

**補題 2.7** ([17]).  $\mathcal{M}_{g,*}$  の任意の群準同型  $\rho: \mathcal{M}_{g,*} \rightarrow G$  が単射となるための必要十分条件は,  $\rho \circ i$  が単射となることである.

証明.  $\rho$  が  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  上で単射と仮定して,  $\text{Ker } \rho = \{1\}$  を示せばよい.  $f \in \text{Ker } \rho$  とすると, 性質 (2.3) により, 任意の  $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g)$  に対し,  $\rho(i(\gamma)) = \rho(f)\rho(i(\gamma))\rho(f^{-1}) = \rho(fi(\gamma)f^{-1}) = \rho(i(f_*\gamma))$ . よって, 仮定により,  $f_*\gamma = \gamma$  がすべての  $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *)$  に対して成り立つ. Dehn–Nielsen 型定理により,  $\mathcal{M}_{g,*}$  の  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  への作用は忠実であるから,  $f = 1 \in \mathcal{M}_{g,*}$  を得る.  $\square$

以下, 準同型  $i$  により, 曲面群  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  を  $\mathcal{M}_{g,*}$  の部分群と見なす. 補題 2.7 により, 写像類群  $\mathcal{M}_{g,*}$  の線型性は,  $\Sigma_g$  の基本群の有限次元忠実線型表現で,  $\mathcal{M}_{g,*}$  に拡張するものの存在と同値であることがわかった. 当然, 次の問題は  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の有限次元線形表現が,  $\mathcal{M}_{g,*}$  の線型表現に拡張するのはどのような場合か, ということである. しかし, これに直接答えるのはかなり難しいと考えられるので, まず曲面群の変形空間 (c.f. Goldman [13]) の言葉を用いてわかることを考える.

曲面群  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  から群  $G$  への群準同型全体を  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), G)$  とかく. この集合には  $G$  が,  $G$  自身への共役作用を後から合成することにより作用する. この作用による商集合を

$$X_G = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), G) / G$$

とかき,  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の変形空間という.  $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), G)$  が代表する  $X_G$  の元を  $[\phi]$  と書く.

$f \in \mathcal{M}_{g,*}$  とする. 準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow G$  に対し, 準同型  $\phi \circ f_*^{-1}$  を対応させることにより,  $\mathcal{M}_{g,*}$  の  $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), G)$  への作用が定まる. これは, 自然に  $\mathcal{M}_{g,*}$  の  $X_G$  への作用に落ち,  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の  $X_G$  への作用は自明なので, 結局  $\mathcal{M}_g$  が Birman 完全列 (2.2) を介して  $X_G$  に作用する.

**補題 2.8** ([17]). もし, 準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow G$  が  $\mathcal{M}_{g,*}$  の準同型

$$\mathcal{M}_{g,*} \rightarrow G$$

に拡張するならば,  $[\phi] \in X_G$  は  $\mathcal{M}_g$  の  $X_G$  への作用の大域的不動点である.

証明. 諸定義と, 性質 (2.3) を組み合わせればよい.  $\square$

一般に,  $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, *), G)$  に対し,  $\phi(\pi_1(\Sigma_g, *))$  の  $G$  における中心化群は自明とは限らないこともあり, 補題 2.8 の逆は成り立たないように思われる. しかし, それにもかかわらず,  $G = \text{GL}(n, K)$  の場合,  $X_{\text{GL}(n, K)}$  への  $\mathcal{M}_g$  作用の任意の大域的不動点から,  $\mathcal{M}_{g,*}$  の線型表現を, 次のようにして構成できる.

まず, 任意の線型表現  $\phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{GL}(n, K)$  に対し,  $\phi$  の像による共役作用は線型表現  $\text{Ad } \phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{GL}(\text{End}(n, K))$  を定める.  $V_\phi$  で,  $\phi(\pi_1(\Sigma_g, *))$  が生成する  $\text{End}(n, K)$  の  $K$  部分空間をあらわすと, これは明らかに  $\text{Ad } \phi$  による  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の作用で不変である.  $\text{Ad } \phi$  の作用を  $V_\phi$  に制限して得られる線型表現を

$$\mathcal{A}\phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{GL}(V_\phi)$$

で表す. さらに, もし  $[\phi] \in X_{\text{GL}(n, K)}$  が  $\mathcal{M}_g$  作用の大域的不動点ならば,  $f \in \mathcal{M}_{g, *}$  の  $V_\phi$  への線形作用が

$$\phi(\gamma) \mapsto \phi(f_*\gamma) \quad (\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *))$$

により well-defined に定まり, しかもこの対応は,  $\mathcal{A}\phi$  を拡張する線型表現

$$\Psi : \mathcal{M}_{g, *} \rightarrow \text{GL}(V_\phi)$$

を定めることがわかる.

さて, 明らかに

$$\text{Ker } \mathcal{A}\phi = \{\gamma \in \pi_1(\Sigma_g, *); [\gamma, \pi_1(\Sigma_g, *)] \subset \text{Ker } \phi\}$$

である. また,  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の中心は自明なので, 補題 2.7 により, 特に  $\phi$  が忠実ならば,  $\Psi$  も忠実である. また,  $V_\phi \subset \text{End}(n, K)$  なので,  $\dim V_\phi \leq n^2$  が成り立つ.

以上をまとめれば次を得る:

**定理 2.9** ([17]).  $g \geq 2$  とする. 1点穴あき写像類群  $\mathcal{M}_{g, *}$  が  $K$  線型となるための必要十分条件は, ある  $n$  に対して  $X_{\text{GL}(n, K)}$  への  $\mathcal{M}_g$  作用が,  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の忠実線型表現で代表される大域的不動点を持つことである. さらに, もしそのような大域的不動点が存在すれば,  $\mathcal{M}_{g, *}$  は  $K$  上の高々  $n^2$  次元の忠実線型表現を持つ.

結果から言えることをいくつか確認しておく.

注意 2.10. Goldman [13] で述べられている通り, 曲面群の変形空間への写像類群の作用に関する最近の力学系的研究によれば, この作用は, (適当な位相と測度の下で), 真性不連続と, エルゴード性の複雑な混じり合いであることが明らかになってきている. 定理 2.9 は,  $\mathcal{M}_{g, *}$  の忠実線型表現は変形空間の中の真性不連続領域と正反対の場所にしかあり得ないことを主張している. 他方, たとえ写像類群の変形空間への作用が完全にエルゴード的であったとしても, 大域的不動点が1点存在することを禁止するには足りない.

注意 2.11. 補題 2.8 の帰結を  $G = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  の場合に観察しておくことも興味を引くかもしれない. 曲面群  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の忠実  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  表現の, よく知られた源泉として,  $\Sigma_g$  の双曲構造がある. つまり, 双曲構造に付随するホロノミー表現が単射準同型  $\phi : \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  を与える. そのような表現が代表する変形空間  $X_{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$  の点は,  $\mathcal{M}_g$  作用に関して有限 stabilizer を持ち, これは丁度対応する双曲的曲面の向きを保つ等長変換群と一致する. 従って, 補題 2.8 により, このような  $\phi$  は決して準同型  $\mathcal{M}_{g, *} \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  に拡張しないことがわかる.

注意 2.12. 1.4 節で述べた通り,  $\mathcal{M}_{g,*}$  は  $3g - 3$  次元以下の複素忠実線型表現を持たない. このことを定理 2.9 と合わせると,  $n \leq \sqrt{3g - 3}$  ならば,  $X_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}$  への  $\mathcal{M}_g$  作用は  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の忠実表現で代表される大域的不動点を持たないことがわかる.

最後に, 関連する先行結果について付言する. これまでに, Birman 完全列 (2.2) を用いて写像類群の線型性を直接言い換える, 定理 2.9 のような結果は知られていなかったようである. しかし, 次に述べるように間接的な結果を指摘することができる. 線型性を持つ群が満たすべき性質に, residually finite, すなわち, 単位元以外の任意の元に対し, その群から有限群への準同型であって, その元を単位元以外の元に移すものが存在する, という性質がある.  $\mathcal{M}_{g,*}$  が residually finite であることは Baumslag [2] により示された.  $\mathcal{M}_g$  が residually finite であることは, 最初 Grossmann [14] により Baumslag の方法を拡張することで示されたが, その後, Bass–Lubotzky [1] は,  $\mathcal{M}_{g,*}$  が residually finite であることと,  $\mathcal{M}_g$  の  $X_{\mathrm{GL}(n, K)}$  への作用の下で, 既約表現で代表される  $X_{\mathrm{GL}(n, K)}$  のすべての点を, すべての  $n$  にわたって固定する写像類が  $1 \in \mathcal{M}_g$  に限るということから概ね従うことを示している. (正確には  $\mathcal{M}_g$  でなく, それを指数 2 の部分群として含む  $\pi_1(\Sigma_g, *)$  の外部自己同型群.) これは上の定理 2.9 と対照を成している.

#### 2.4. いくつかの問題

定理 2.5, 2.9 に基づいて写像類群の線型性問題を解決するために基本的と思われる問題を挙げておきたい.

閉曲面の場合. 曲線加群  $p : K[S] \rightarrow M$  が基礎体  $K$  上有限次元となるための必要十分条件は何か? また,  $\mathrm{Ker} p$  が  $\mathcal{M}_{g,n}$  加群として有限生成となるための必要十分条件は何か?

1 点穴開き曲面の場合. Birman 完全列 (2.2) には自由群の自己同型の対応物

$$1 \rightarrow F_n \rightarrow \mathrm{Aut}(F_n) \rightarrow \mathrm{Out}(F_n) \rightarrow 1$$

が存在し, 定理 2.9 の類似物が全く同じ理由で成り立つ. ここに  $\mathrm{Out}(F_n)$  は  $F_n$  の外部自己同型を表す.  $\mathrm{Aut}(F_n)$  は  $n = 2$  のとき線型で,  $n \geq 3$  のとき線型でないことに, 変形空間への  $\mathrm{Out}(F_n)$  作用の力学系の言葉で別証明を与えよ.

### 3. 関連する話題

本稿に述べた議論の出発点となった, 補題 2.1 を用いると, 写像類群  $\mathcal{M}_{g,n}$  の任意の群準同型に対し, それが  $\Sigma_{g,n}$  内の単純閉曲線のあいだの幾何的交叉の有無をすべて判別できることが, その準同型のカーネルが中心  $Z(\mathcal{M}_{g,n})$  に含まれることと必要十分であることを示すことができる. 詳細については論文 [18] を参照されたい.

#### 参考文献

- [1] H. Bass and A. Lubotzky, *Automorphisms of groups and of schemes of finite type*, Israel J. Math. **44** (1983), no. 1, 1–22.
- [2] G. Baumslag, *Automorphism groups of residually finite groups*, J. London Math. Soc. **38** (1963), 117–118.
- [3] P. Bellingeri, *On presentations of surface braid groups*, J. Algebra **274** (2004), no. 2, 543–563.

- [4] S. J. Bigelow, *Braid groups are linear*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 2, 471–486.
- [5] S. J. Bigelow and R. D. Budney, *The mapping class group of a genus two surface is linear*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 699–708 (electronic).
- [6] J. S. Birman, *Mapping class groups and their relationship to braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 213–238.
- [7] J. S. Birman and H. Hilden, *Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin’s braid group*, Ann. of Math. **97** (1973), 424–439.
- [8] T. E. Brendle and H. Hamidi-Tehrani, *On the linearity problem for mapping class groups*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 445–468.
- [9] E. Formanek, *Braid group representations of low degree*, Proc. London Math. Soc. (3) **73** (1996), no. 2, 279–322.
- [10] E. Formanek, W. Lee, I. Sysoeva, and M. Vazirani, *The irreducible complex representations of the braid group on  $n$  strings of degree  $\leq n$* , J. Algebra Appl. **2** (2003), no. 3, 317–333.
- [11] E. Formanek and C. Procesi, *The automorphism group of a free group is not linear*, J. Algebra **149** (1992), no. 2, 494–499.
- [12] J. Franks and M. Handel, *Triviality of some representations of  $\text{MCG}(S_g)$  in  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $\text{Diff}(S^2)$  and  $\text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$* , Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 9, 2951–2962.
- [13] W. M. Goldman, *Mapping class group dynamics on surface group representations*, Problems on mapping class groups and related topics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 189–214.
- [14] E. K. Grossman, *On the residual finiteness of certain mapping class groups*, J. London Math. Soc. (2) **9** (1974/75), 160–164.
- [15] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. (2) **126** (1987), no. 2, 335–388.
- [16] Y. Kasahara, *An expansion of the Jones representation of genus 2 and the Torelli group*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 39–55.
- [17] ———, *On visualization of the linearity problem for mapping class groups of surfaces*, Geom. Dedicata **176** (2015), 295–304.
- [18] ———, *Geometric intersection in representations of mapping class groups of surfaces*, 2016, preprint, arXiv:1504.03052v3.
- [19] Y. Kida, *Measure equivalence rigidity of the mapping class group*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 1851–1901.
- [20] M. Korkmaz, *On the linearity of certain mapping class groups*, Turkish J. Math. **24** (2000), no. 4, 367–371.
- [21] ———, *The symplectic representation of the mapping class group is unique*, 2011, preprint, arXiv:1108.3241.
- [22] D. Krammer, *The braid group  $B_4$  is linear*, Invent. Math. **142** (2000), no. 3, 451–486.
- [23] ———, *Braid groups are linear*, Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 1, 131–156.
- [24] R. J. Lawrence, *Homological representations of the Hecke algebra*, Comm. Math. Phys. **135** (1990), no. 1, 141–191.
- [25] F. Luo, *On non-separating simple closed curves in a compact surface*, Topology **36** (1997), no. 2, 381–410.
- [26] W. Magnus and A. Peluso, *On a theorem of V. I. Arnol’d*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 683–692.
- [27] T. Moriyama, *The mapping class group action on the homology of the configuration spaces of surfaces*, J. Lond. Math. Soc. (2) **76** (2007), no. 2, 451–466.

- [28] L. Paris and D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, J. Reine Angew. Math. **521** (2000), 47–83.
- [29] G. P. Scott, *Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **68** (1970), 605–617.

