第16回

位相幾何学シンポジウム

1966 御殿場

第16回

位相幾何学シンポジウム

1966年7月18日～20日

御殿場

目次

大阪・新潟グループ

微分構造の間の距離について　　四方義啓（大阪市大）

4-manifolds の imbedding　　渡部剛（新潟大）

九州グループ

KO-theory の characteristic class　　鈴木治夫（九州大）

東京グループ

Homotopy type of certain smooth manifolds　　笹尾靖也（東京女大）

Combinatorial topology グループ

Hauptvermutung を巡って　　小林一章（神戸大）

名古屋グループ

例外リー群のホモトピー群　　可知偉行（名古屋大）

マイクロバンドルのオイラークラスについて　　垣内伸彦（愛知大）

京都・東北グループ

Lens space とその応用

Lens space の K-ring について　　上部恒和（京都大）

Lens space の immersion　　内田伏一（東北大）

Lens space mod 3 の non-imbeddability と non-immersibility　　小林貞一（京都大）

微分構造の間の距離について

四方義啓（大阪市大）

0. 以下に述べる事の詳細は 大阪ジャーナル, vol 3 (1966) にありますので, それを参照して頂けると幸です。

ここ数年来, 与えられた位相多様体の上に入る微分構造を数え上げる事, 又はその為の手段として, 種々な方法でそれらの微分構造を分類する事が盛んに行なわれて来ました。それらは主に次のようなものでした。

0-1) 主目的である所の 微分同相による分類

0-2) 古来から行われ, 1)を障害理論で処理する為の一つの段階ともみられる 組合せ同値による分類

0-3) 微分構造の（ある意味での）函数として, その下にある位相多様体の（コ）ホモロジー環の中に, ある量（例えば Pontrjagin 類など）を定義し逆にその函数によって行なう分類（すなわち上の P-類の例では P-類が等しい時にもとの微分構造を同値とみなして得られる分類）

ここでは 屋上屋を重ねる事になるかもしれませんが 上の分類の他にもう一つ距離 ρ による分類を考えてみます。

1. 距離(*) ρ の定義は一寸後回しにして, それの性質のうち面白そうなものを例挙してみます。ここで, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ はあるコムパクト位相多様体上の微分構造, 従って $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$ は σ_1, σ_2 の間の距離を表します。

1-1) $\rho(\sigma_1, \sigma_2) < \varepsilon_1 \ (\varepsilon_1 > 0) \Leftrightarrow$ σ_1, σ_2 は微分同相

1-2) $\rho(\sigma_1, \sigma_2) < \varepsilon_2 \ (\varepsilon_2 > 0) \Rightarrow$ σ_1, σ_2 は組合せ同値

(**) $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$ は有限 $\Leftarrow$ σ_1, σ_2 は組合せ同値

1-3) $\rho(\sigma_1, \sigma_2) < \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} \Rightarrow$ σ_1, σ_2 は整係数の P-類を共有。

このように 可成り純粋に幾何的な概念（上では右側に書いています）, 又それによる分類 0-1), 2), 3) が 距離という概念にまあ何とか反映して

きます。将来 この二つの関連がもっと明らかとなって来れば面白かろうと思っています。

2. 所で ρ は今の所、そううまく計算出来るものではありませんが、定義だけは次のようにして与えられます。先ず微分構造 σ_1, σ_2 を代表する微分多様体 M_1, M_2 をとります。これらは同相なはずです。その同相写像を f としておいて、M_1, M_2 上(勝手に入れた)リーマン計量による距離 d_1, d_2 に対して次のような数を作ります。

$$l(f; d_1, d_2) = \begin{cases} \inf\{k \geq 1 ;\ \forall x, y \in M_1,\ d_1(x,y)/k \leq d_2(f(x), f(y)) \leq k\, d_1(x,y)\} \\ \infty ;\ \text{上の集合}\ \{k \geq 1 ; \cdots\}\ \text{が空集合のとき} \end{cases}$$

このままでは リーマン計量のとり方や、f の作り方によって $l(f; d_1, d_2)$ は変わってしまい、微分構造 σ_1, σ_2 だけによる量にはならないので、両者に関する inf をとって d_1, d_2 や f に無関係な量 $l(\sigma_1, \sigma_2) = \inf_{f, d_1, d_2} l(f; d_1, d_2)$ にしてしまいます。最後に log をとって距離 $\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \log l(\sigma_1, \sigma_2)$ が出来上ります。こうするのは ~~log~~ $l(\sigma_1, \sigma_1) = 1$, $l(\sigma_1, \sigma_3) \leq l(\sigma_1, \sigma_2)\, l(\sigma_2, \sigma_3)$ であるという事によります。log をとれば夫々距離函数の公理になりますから。

3. さてここで、非常に怪しげな方法ではありますが、2)において現れた量がどういう風にして 1)に述べた性質に結びつくかをみてみます。(主に 1-1)に話をかぎります。) 微分同値といい組合せ同値といい、ある意味で局所的な考察に還元出来るものですから うんと局所的な立場、すなわち f がユークリッド空間 R^n からそれ自身への写像である場合だけを考えてみます。この時 d_1, d_2 を共にふつうのユークリッド距離としますと、すぐ ~~解~~ わかるように、

f が直交変換 $\Longleftrightarrow$ $l(f; d_1, d_2) = 1$

これから うんと飛躍してよければ、$l(f; d_1, d_2)$ が 1 に近ければ、f は直交変換に近かろうと思ってよさそうです。実際 その通りで、$l(f; d_1, d_2)$ の1への近さの程度に従って f がうまい具合に(すなわち、この局所的な考察が大域的なそれへ拡張出来るような具合に) 微分同相写像、又は組合せ同相によって近似出来る事が示されます。この事から $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$ が小さ

ければ、σ_1, σ_2 間のある同相写像が微分同相ないし組合せ同相で近似出来る事が導びかれるのです。

4. 3)で ~~様~~ 行なった考察は、位相多様体の上に果して微分構造、又は組合せ構造が入るかという所謂 smoothing, triangulation problem へも応用出来ますが、これらについては稿を改めて述べさせて頂きたいと思っています。

(*) 距離とは言いましたが、その値として ∞ をとる事も許します。従って組合せ同値なら距離有限は意味のある事なのです。

4-manifolds の imbedding

新潟大学
渡部　剛

Introduction

以下 M^4 は closed, connected 4-dimensional smooth manifold とする. ここにおいて M^4 の R^7 への imbedding について考える。

M^4 の imbedding について既に得られている結果は次のようなものである。

(1) 任意の $M^4 \subset R^8$

$P_4(R) \not\subset R^7$ よりこれは best possible である。

(2) orientably $M^4 \subset R^7$ almost differentiably

(3) orientable $M^4 \subset R^7$ piecewise linearly (Hirsh [4])

これより特に M^4 は orientable, oriented cobordant to zero とし, 次のことを証明する。

(a) $M^4 \subseteq R^6 \Rightarrow M^4 \subset R^7$

(b) simply connected $M^4 \subset R^7$

この結果は best possible である. 実際 S^2 上の non-trivial な 2-sphere bundle の total space は R^6 には imbed できない。

(c) s-parallelizable $M^4 \subset R^7$　(Bredon, $M^4 \subset R^6$)

(d) simply connected, s-parallelizable $M^4 \subset R^6$

(e) homotopy 4-sphere $\subset R^5$

4次元に対する h-cobordism theorem が成立すれば, (d) は R^5 に imbed できる。

実際

$$M^4 \begin{pmatrix} \text{simply connected} \\ \text{s-parallelizable} \end{pmatrix} \underset{\text{same homotopy type}}{\equiv} \sum_{i=1}^{s} \#(S^2 \times S^2)_i \quad \text{(Milnor [2])}$$

$\Updownarrow$

their quadratic forms are equivalent (Milnor [2])

$\Updownarrow$

$M^4 \underset{h\text{-cobordant}}{\sim} \Sigma \# (S^2 \times S^2)$; (Wall [3])

§1 (Stable) G-structure on manifold

M^n : orientable smooth manifold

ν : stable normal bundle of M^n

its structure group is $SO(N)$

$E(SO(N)/G)$: associated bundle of the universal $SO(N)$ bundle with fibre $SO(N)/G$. $G < SO(N)$

$G = SO(1)$ or $U(N/2)$

もし ある map $s: M \longrightarrow E(SO(N)/G)$ が存在して

$$\begin{tikzcd} & E(SO(N)/G) \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "\nu"'] & B_{SO(N)} \end{tikzcd}$$

が commute するならば，M は (stable) G-structure を持つという。

次のことはよく知られている。

$\{$ G-structure on M $\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{$ homotopy classes of s $\}$

さらに次のことが証明される

<u>Lemma 1</u>

(1) M が G-structure を持てば ∂M もそうである

(2) M が G-structure を持てば その double もそうである

(3) M, M' が G-structure を持ち，それが $\partial M = \partial M'$ 上で同じ G-structure を induce すれば $M \cup M'$ もそうである。

証明)

(2) 次のような imbedding が存在することより明らか。

$f: M \cup M' \longrightarrow R^{n+N+1}$ (M' : copy of M)

$f: M \longrightarrow R_+^{n+N+1}$, $\nu_{f|\partial M} = \nu_f \oplus \varepsilon'$

$f: M \longrightarrow R_-^{n+N+1}$, $\nu_{f|\partial M'} = \nu_f \oplus \varepsilon'$

$f: M \cap M' \longrightarrow R^{n+N} = R_+^{n+N+1} \cap R_-^{n+N+1}$ (ε' : tangent to M)

(3) : (2) とほとんど同様である。

<u>Corollary</u> (1) π-manifold の double は π-manifold である。

(2) weakly complex manifold の double は weakly complex である。

次の定理は Milnor による。

<u>定理1</u> weakly complex manifold が weakly complex manifold の boundary になるための必要十分条件は すべての chern number が 0 であることである。

<u>Remark</u> M^4 : weakly complex (closed)

$p_1(M) = c_1^2(M) - 2c_2(M)$

dual chern classes $\bar{c}_1(M) = -c_1(M)$

$\bar{c}_2(M) = c_1^2(M) - c_2(M)$

§2. Surgery on a weakly complex manifold

M^n : a weakly complex manifold

$\pi_1(M^n) \ni \alpha \neq 0$

$f: S^1 \longrightarrow M^n$ representing α

$n \geq 3$ ならば f は imbedding と仮定できて，さらに M^n は orientable だから normal bundle は trivial.

従って

$f: S^1 \times D^{n-1} \longrightarrow M^n$

と考えられる。

$$M' = (M - \mathrm{int}\, f(S^1 \times D^{n-1})) \cup D^2 \times S^{n-2}$$

とすれば，M' は α を kill したものである。

$W = M \times I \cup_f D^2 \times D^{n-1}$ と define し，corner を丸めて smooth manifold にすれば，$\partial W = M \cup M'$

$$s: M \longrightarrow E(SO(N)/U(\tfrac{N}{2}))$$

を W 全体に extend する obstruction は $H^i(W, M; \pi_{i-1}(SO(N)/U(\frac{N}{2})))$ になる。しかるに

$$H^i(W, M; \pi_{i-1}(SO(N)/U(\tfrac{N}{2}))) = \begin{cases} \pi_1(SO(N)/U(\frac{N}{2})) & i=2 \\ 0 & i \neq 2 \end{cases}$$

N が十分大なるときは $\pi_1(SO(N)/U(\frac{N}{2})) = 0$

従って s は W 全体に extend できる。故に M' も weakly complex である。

<u>Theorem 2</u> weakly complex manifold の fundamental group を weak complex structure を保存しながら kill できる。

§3 The proof of (a)

M^4 を orientable 4-manifold とすれば，weakly complex である。もし M が oriented cobordant to zero と仮定すれば $P_1(M) = 0$

$$\therefore\ C_1^2(M) - 2C_2(M) = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$M^4 \subseteq R^6$ と仮定すれば，

$\exists f\ \ M^4 \subset R^{4+2N}$ $\quad \nu_f = \gamma^2 \oplus \varepsilon^{2(N-1)}$

orientable 2-plane bundle は complex structure を持つから

$\nu_f = (\zeta^1 \oplus \theta^{N-1})_R$ $\quad \zeta^1$: complex 1-plane bundle, θ^{N-1} trivial complex bundle

$\therefore\ \bar{C}_2(M) = 0$

$\therefore\ C_1^2(M) - C_2(M) = 0 \quad \cdots\cdots (2)$

(1). (2) より $C_2(M) = 0$ $\quad C_1^2(M) = 0$

すなわち M^4 の chern number はすべて 0 である。

定理 1 により $\exists W^5$: weakly complex.

$$\partial W = M$$

定理 2 により W は simply connected と仮定できる。

W の double $\overline{W}$ もまた simply connected, weakly complex である。

特に $\overline{W}_3(W) = 0$

Hirsh の定理 [1] により $\underline{\overline{W} - x \subset R^7}$

$$\therefore\ \underline{M^4 \subset R^7}$$

§4 simply connected case

M^4: simply connected, oriented cobordant to zero

Wall の定理 [3] により

定理 3. $\exists W^5$; $\partial W = M$

W は 2-sphere の bouquet と同じ homotopy type を持つ。

特に M^4 が Spin manifold であるときは，W も spin manifold にとれる。

このような W は R^7 に immersible なることは容易に示されるから，$\partial W = M$ は R^6 に immersible。これより (b) が示される。

M^4 を simply connected, s-parallelizable と仮定する。$\overline{W}$ (double of W) は π-manifold になる。

もし $H_2(\overline{W})$ が free ならば Smale の定理により

$$\overline{W}=(S^2\times S^3)\#\cdots\#(S^2\times S^3)$$

従って $M\subset\overline{W}\subset R^6$

$$\xrightarrow{i^*} H^2(W)\xrightarrow{\delta} H^3(\overline{W},W)\xrightarrow{j^*} H^3(\overline{W})\xrightarrow{i^*} H^3(W)\xrightarrow{\delta} \quad \text{exact}$$

$$h:\overline{W}\longrightarrow W$$

で $hi=1$ なるように define できるから, $\delta=0$

よって

$$0\longrightarrow H^3(\overline{W},W)\longrightarrow H^3(\overline{W})\longrightarrow H^3(W)\longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

$H^3(W)=0$ より

$$H^3(\overline{W},W)\xrightarrow{\approx} H^3(\overline{W})$$

$H^3(\overline{W},W)\approx H^3(W,M)\approx H_2(M)$: free だから $H^3(\overline{W})=H_2(\overline{W})$ も free である。

Reference

[1] M.W. Hirsh : On imbedding differentiable manifolds in Euclidean space. Ann of Math 73 (1961)

[2] J. Milnor : On simply connected 4-manifolds Symp. Inter Topologia Algebraica, Mex (1958)

[3] C.T.C. Wall On simply connected 4-manifolds. Jour. London Math. Soc. 39 (1964)

[4] M.W. Hirsh. On embedding 4-manifolds in R^7 Proc. Camb. Phil. Soc (1965)

KO-THEORY の CHARACTERISTIC CLASS

鈴木治夫 (九大・理)

有限 CW-複体の KO-理論における Thom 同型を Spin(n) 表現と関連させて述べ, 同理論における characteristic class, 即ち ρ^k-class の表現の指標を, R. Bott [5] の方法によってみちびく。次に J.F. Adams [3] による拡張された意味の ρ^k-classes の例をいくつか示し, これらを用いて, oriented projective spaces 等の ρ^k-classes を定める。

1. 表現論に関する準備

(1.1) Clifford algebras.

Spin(n) は SO(n) の universal covering group であるが, その表現も併せて考えるため, Clifford algebra C_n を用いて構成しておく。C_n は実数体 R 上の単位元をもつ associative algebra で, その生成元が $e_1, e_2, \cdots, e_n$, relations が

$$e_1^2=e_2^2=\cdots=e_n^2=-1,\quad e_j e_k=-e_k e_j\ (j\neq k).$$

によって定義される。C_n には canonical anti-automorphism $a\longrightarrow a^*$ が

$$(e_{j_1}\cdots e_{j_k})^*=e_{j_k}\cdots e_{j_1}=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}e_{j_1}\cdots e_{j_k}$$

によって定まる。また C_n は加群として次のように直和分解する。即ち,

$$C_n=C_n^+\oplus C_n^-.$$

$$C_n^+=\{\sum \alpha_{j_1\cdots j_k}e_{j_1}\cdots e_{j_k}\mid \alpha_{j_1\cdots j_k}\in R,\ k:\text{偶数}\}$$

$$C_n^-=\{\sum \alpha_{j_1\cdots j_k}e_{j_1}\cdots e_{j_k}\mid \alpha_{j_1\cdots j_k}\in R,\ k:\text{奇数}\}$$

とくに、$\{\sum \alpha_j e_j \mid \alpha_j \in R\} \subset C_n^-$ を n次元ベクトル空間 R^n と同一視し、その中の単位球を $S^{n-1} = \{\sum t_j e_j \mid \sum t_j^2 = 1\}$ とするとき、

$$Spin(n) = \{a = u_1 \cdots u_k \mid u_1, \cdots, u_k \in S^{n-1},\ a a^* = 1\}$$

と定める。

$Spin(n)$ は C_n^+ に含まれる連結な乗法群であることがすぐわかる。任意の $a \in Spin(n)$ に対し、R^n の一次変換 $\varphi(a)$ を、

$$\varphi(a) v = a v a^* \quad (v \in R^n)$$

と定めれば、φ は homomorphism で、さらに short exact 列、

$$0 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow Spin(n) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow 0$$

が得られ、$Spin(n)$ の double covering としての定義と一致する。

(1.2) Spin(n) の表現

一般に compact 群 G が、実又は複素数体上の有限次元ベクトル空間の上に自己同型変換として作用するとき、これを実又は複素 G-module、その同型類を G の実又は複素表現という。単に、G-module、G の表現という場合は、複素 G-module、G の複素表現をいみする。既約 G-modules の同型類から、和とそのテンソル積によって生成される環を表現環といい、$R(G)$ とあらわす。

$n = 2r$ 又は $2r+1$ として、$SO(n)$ の maximal torus を T とかく。natural inclusion $U(r) \subset SO(n)$ の下で $T \subset U(r)$。任意の整数 k に対して、y^k を既約複素 $U(1)$-module (一次元複素ベクトル空間 C) で、

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) = U(1)$$

の作用が、$e^{ik\theta} w$ $(w \in C)$ によって定まるものとする。一般に、$y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r}$ ($k_1, \cdots, k_r$ は整数) は既約複素 T-module で、$Diag(D(\theta_1), \cdots, D(\theta_r), *) \in T$ ($n = 2r$ ならば $*$ は空集合、

$= 2r+1$ ならば $* = 1$) の作用が、$e^{ik_1\theta_1 + \cdots + ik_r\theta_r}$ の積によって定まる。
omomorphism $\varphi : Spin(n) \longrightarrow SO(n)$ に対して、$T' = \varphi^{-1}(T)$ とおく。
$'$ は $Spin(n)$ の中の torus となる。
は $y_1^{k_1} \cdots y_r^{k_r}$ に既約複素 T'-module の構造を定めるが、これも
一記号で表わす。k_j $(1 \leq j \leq r)$ が整数の場合だけに限らず、

$$k_1 \equiv k_2 \equiv \cdots \equiv k_r \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$$

場合も φ は既約複素 T'-module を定める。これ以外の実数の
。$k_1, \cdots, k_r$ に対しては、T'-module の構造は定まらない。

$R(T')$ の表現、

$$\Delta_{2r+1} = \sum y_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cdots y_r^{\frac{\varepsilon_r}{2}},$$

$$\Delta_{2r}^+ = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r = +1} y_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cdots y_r^{\frac{\varepsilon_r}{2}},$$

$$\Delta_{2r}^- = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r = -1} y_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cdots y_r^{\frac{\varepsilon_r}{2}}, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \ (1 \leq j \leq r),$$

。$R(Spin(n)) \subset R(T')$ に含まれる。右辺の T'-modules は、複素
次元既約 modules の和だから、これらの式は、y_j を $e^{i\theta_j}$ $(1 \leq j \leq r)$ と
なせば、表現の行列の主対角線上に並ぶ複素数の和、即ち
指標となる。このような意味で、上式を、

$$ch(\Delta_{2r+1}) = \sum y_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cdots y_r^{\frac{\varepsilon_r}{2}},$$

$$ch(\Delta_{2r}^+) = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r = +1} y_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cdots y_r^{\frac{\varepsilon_r}{2}},$$

$$ch(\Delta_{2r}^-) = \sum_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r = -1} y_1^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cdots y_r^{\frac{\varepsilon_r}{2}},$$

かくことができる。

(1.3) R(Spin(n)) と RO(Spin(n)).

以下簡単のため、$G_n = Spin(2n+1)$, $H_n = Spin(2n)$ とおく。
$n \in R(Spin(n))$ を standard な表現、即ち、$Spin(n)$ の作用が、
ojection $\varphi : Spin(n) \longrightarrow SO(n)$ によって定まる $Spin(n)$-module に対応
するものとする。λ^i を i-th exterior powers による表現とするとき、

$$\mathbb{R}(H_n) = \mathbb{Z}[\iota_{2n}, \lambda^2\iota_{2n}, \cdots, \lambda^{n-2}\iota_{2n}, \Delta_{2n}^{+}, \Delta_{2n}^{-}],$$

$$\mathbb{R}(G_n) = \mathbb{Z}[\iota_{2n+1}, \lambda^2\iota_{2n+1}, \cdots, \lambda^{n-1}\iota_{2n+1}, \Delta_{2n+1}],$$

(右辺は [ ] の中の元によって $\mathbb{Z}$ 上で自由生成される環)

となる。natural inclusion $h_n : H_n \longrightarrow G_n$ は homomorphism $h_n : \mathbb{R}(G_n) \longrightarrow \mathbb{R}(H_n)$ を引きおこす. また,

$$h_n^!(\Delta_{2n+1}) = \Delta_{2n}^{+} + \Delta_{2n}^{-}$$

となることが両辺の指標の一致を示すことによって. いえる.

compact 群 G に対し. 実 G-modules から定まる環を $\mathbb{R}O(G)$ とかく. c を実 G-modules の複素化とするとき. $n \equiv -1, 0, 1 \pmod 8$ ならば.

$$\mathbb{R}O(Spin(n)) \xrightarrow[\cong]{c} \mathbb{R}(Spin(n))$$

となり. $\mathbb{R}(H_{4n}) \cong \mathbb{R}O(H_{4n})$ は $\mathbb{R}(G_{4n}) \cong \mathbb{R}O(G_{4n})$ の上で $1, \Delta_{8n}^{+}$ によって自由生成されることがわかっている。

2. KO-theory における characteristic class.

(2.1) Thom 同型.

X を連結な CW-複体. E を X 上の principal G-bundle, V をその同伴な実又は複素 vector bundle とする。G_n の表現 μ に同伴な vector bundle を $\alpha_E(\mu)$ (または $\mu(E)$) で表わすとき. $\alpha_E(\iota_{2n}) = V$. $\mathbb{P}(E) = E \times_{G_n} G_n/H_n$ は V に同伴な sphere bundle $\mathbb{S}(V)$ に同型. principal H_n-bundle $\tilde{E} \longrightarrow E/H_n \cong \mathbb{P}(E)$ が自然に定まる。E をこの H_n-bundle とみるとき $\tilde{E}$ とかく。

X が一点からなる場合. 表現 $\Delta_{2n}^{+} \in \mathbb{R}(H_n)$ に対して $d_n = \alpha_{\tilde{E}}(\Delta_{2n}^{+}) \in K(S^{2n})$ $(S^{2n} \cong G_n/H_n)$ とおけば. $1, d_n$ は $K(S^{2n})$ の $\mathbb{Z}$ の上の free base となる。

$$KO(S^{8n}) \xrightarrow[\cong]{c} K(S^{8n})$$

$$\mathbb{R}O(Spin(n)) \xrightarrow[\cong]{c} \mathbb{R}(Spin(n)), \quad n \equiv -1, 0, 1 \pmod 8$$

と併せて. $KO(S^{8n})$ は. 1 と $\Delta_{8n}^{+} \in \mathbb{R}O(Spin(8n))$ から引きおこされる $S^{8n} \cong G_{4n}/H_{4n}$ 上の vector bundle の定める元によって. 自由生成されること

とがわかる。

E が trivial G_{4n}-bundle の場合. Künneth の公式.

$$KO(X) \otimes KO(S^{8n}) \xrightarrow{\cong} KO(X \times S^{8n})$$

を用い. E が一般の G_{4n}-bundle の場合. 有限個の trivialization の open cover に Mayer-Vietris の exact 列を適用し次の定理が得られる.

定理 1. $\Delta_{8n}^{+} \in \mathbb{R}O(H_{4n})$ に対し $d = \alpha_{\tilde{E}}(\Delta_{8n}^{+}) \in KO(\mathbb{P}(E))$ とおくとき. $KO(\mathbb{P}(E))$ は $KO(X)$ の上で $1. d$ によって自由生成される。

E' を principal H_{4n}-bundle. $E = E' \times_{H_{4n}} G_{4n}$ とする。$Spin(8n) = H_{4n}$ によって. $\iota_{8n+1} \in \mathbb{R}O(G_{4n})$ に対応する実 vector bundle $\alpha_E(\iota_{8n+1}) = V$ の fibre R^{8n+1} の最後の座標は固定されるから. $\mathbb{S}(V)$ の section s が定まる。$W = \alpha_{E'}(\iota_{8n})$ とすれば. $V = W \oplus 1$ だから空間と写像から成る. splitting 列.

$$0 \longrightarrow X \underset{s}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} \mathbb{S}(W \oplus 1) \xrightarrow{j} X^W \longrightarrow 0$$

(π は bundle の projection, X^W は W の Thom 複体)

が成立つ. $\mathbb{S}(W \oplus 1) \cong \mathbb{P}(E)$ なることに注意しておく. $z \in \widetilde{KO}(X^W)$ を $j^! z = \pi^! s^! d - d$ によって定めれば. z は $\widetilde{KO}(X^W)$ の $KO(X)$-free generator となる。

$$\phi_{KO} : KO(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{KO}(X^W), \quad \phi_{KO}(u) = j^{!-1}(zu)$$

を KO-theory の Thom 同型という. 明かに.

$$KO^*(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{KO}^*(X^W)$$

まで拡大される.

(2.2) Adams operations と characteristic classes.

KO-theory において. Adams operation Ψ^k が. t を不定元として. formal power series.

$$\Psi_{-t}(x) = -t \frac{d}{dt}\{\log \lambda_t(x)\}$$

$$x \in KO(X), \quad \lambda_t(x) = 1 + \lambda^1(x)t + \lambda^2(x)t^2 + \cdots,$$

$$\Psi_t(x) = t\Psi^1(x) + t^2\Psi^2(x) + \cdots$$

によって定義される．Φ^k は ring homomorphism となる．X の上の構造群が Spin(8n) の実 vector bundle W に対し．KO(X) の元．

$$\rho^k(W) = \phi_{KO}^{-1}\,\Phi^k\,\phi_{KO}(1)$$

を．W の KO-理論における <u>characteristic class</u> という．

普通の cohomology 理論において．ϕ_H を Thom 同型．S_q^k を Steenrod square とするとき．Stiefel-Whitney class が．

$$W_k(W) = \phi_H^{-1}\,S_q^k\,\phi_H(1) \in H^k(X : Z_2)$$

と定義されるのと似ている．

定理 2． <u>$\rho^k(W) \in KO(X)$ に対応する表現の指標は．</u>

$$\underline{ch}\,\rho^k = \prod_{1\le r\le 4n}\left(y_r^{\frac{1}{2}(k-1)} + \cdots + y_r^{-\frac{1}{2}(k-1)}\right).$$

W_k が．vector bundle に同伴な sphere bundle の fibre homotopy type に関する invariant であるように．ρ^k もまた次のような性質をもつ．

定理 3． <u>X の上の．Spin(8n) を構造群とする実 vector bundles ξ_1, ξ_2 の各々の同伴な sphere bundles が fibre homotopy equivalent ならば（k に無関係な）$y \in \widetilde{KO}(X)$ が存在し．</u>

$$\rho^k(\xi_1) = \rho^k(\xi_2)\,\frac{\Phi^k(1+y)}{1+y}$$

ρ^k は．X 上の実 Spin(8n) vector bundle W に対して定義されたが k が奇数ならば．指標の式．$\underline{ch}\,\rho^k = \prod_{1\le r\le n}\left(y_r^{\frac{1}{2}(k-1)} + \cdots + y_r^{-\frac{1}{2}(k-1)}\right)$ を用いて．構造群が SO(2n) の vector bundles の一次結合から成る subring $K_{SO_2}(X) \subset KO(X)$ にまで拡大される．但し．その値は．$KO(X)\otimes Q_k$ の元で Q_k は p/k^q（p．q は任意の整数）の形の分数全体から成る加群とする．この ρ^k の拡大は．k が偶数であっても．指標の式に基いてなされる．

3. ρ^k-classes の例．

(3.1) RP^n または球面上の実 vector bundles．

$\underline{ch}\,\rho^k$，Chern 指標 $ch\,\rho^k$ を用いて次の結果が Adams [3] により得られている．ξ を RP^n の canonical line bundle とするとき．$\sigma = \xi - 1$ は $\widetilde{KO}(RP^n)$ の生成元となる．奇数 $k>0$，任意の整数 l に対し

$$\rho^k(2l\sigma) = 1 + \frac{k^l - \varepsilon^l}{2k^l}\,\sigma,$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & k \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & k \equiv 3 \pmod 4), \end{cases}$$

$n \equiv 1$ 又または $2 \pmod 8$，$n \geqq 2$．$x \in \widetilde{KO}(S^n) \cong Z_2$ が生成元ならば．

$$\rho^k(x) = \begin{cases} 1 & k \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ 1+x & k \equiv \pm 3 \pmod 8). \end{cases}$$

$x \in \widetilde{KO}(S^{4n}) \cong Z$ ならば．任意の整数 $k>0$ に対して

$$\rho^k(x) = 1 + \frac{1}{2}(k^{2n} - 1)\,\alpha_{2n}\,x.$$

但し α_{2n} は．$\log\left(\dfrac{\sinh\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}\,\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ によって定められる．

(3.2) Stunted projective spaces およびその他の空間上の実 vector bundles.

上に述べた式を用いて．更に次の結果が得られる．

m, n を整数で．$0<m<n$，$m \not\equiv -1 \pmod 4$ なるものとする．

projection $i : RP^n \longrightarrow RP^n/RP^m$ は natural injection

$$i^! : \widetilde{KO}(RP^n/RP^m) \longrightarrow \widetilde{KO}(RP^n)$$

を定める．$\nu \in \widetilde{KO}(RP^n/RP^m) \cong Z_{2^{\phi(n,m)}}$ を生成元で $i^!\nu = 2^{\phi(m)}\sigma$ なるものとする．奇数 $k>0$．任意の整数 l に対して

$$\rho^k(l\nu) = 1 + (i^!)^{-1}\left(\frac{k^{l\cdot 2^{\phi(m)-1}} - \varepsilon^{l\cdot 2^{\phi(m)-1}}}{2k^{l\cdot 2^{\phi(m)-1}}}\,\sigma\right).$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & k \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

m を整数で $m>0$，$m \not\equiv -1 \pmod 4$ とする．

$$\widetilde{KO}(S^m \times RP^2) \cong \widetilde{KO}(S^m) \oplus \widetilde{KO}(RP^2) \oplus \widetilde{KO}(S^m \wedge RP^2)$$

の右辺の各項における自然な生成元を．それぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とかく．a_1, a_2 および a_3 を任意の整数とするとき．$a_1\sigma_1 + 2a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \in \widetilde{KO}(S^m \times RP^2)$

および奇数 $k>0$ に対し、

$$\rho^k(a_1\sigma_1+2a_2\sigma_2+a_3\sigma_3)=(\rho^k\sigma_1)^{a_1}(\rho^k(2\sigma_2))^{a_2}(\rho^k\sigma_3)^{a_3}$$

が定まる。$m\equiv 1$ または $2\ (\mathrm{mod}\ 8)$ ならば $\widetilde{KO}(S^m)\cong Z_2$，$m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ ならば $\widetilde{KO}(S^m)\cong Z$．その他の場合は $\sigma_1=0$

参考文献

[1] M. Atiyah and F. Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces, Differential Geometry. Proc. of Symposium in Pure Math. Amer. Math. Soc. 1961

[2] J. F. Adams. Vector fields on spheres, Ann. of Math. 75 (1962) 603-632

[3] ———, On the group J(X)-I, II, III, IV. Topology 2 (1963), 181-195, 3 (1965), 137-171, 193-222, 5 (1966), 21-71.

[4] M. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3. Suppl. 1 (1964). 3-38.

[5] R. Bott, Lectures on K(X), Harvard Univ. (Mimeographed) 1962.

[6] C. Chevalley. Theory of Lie groups, Princeton Univ. Press, 1946.

[7] ———. The algebraic theory of spinors, New York. Columbia Univ. Press, 1954

[8] J. Milnor. The representation rings of some classical groups. Princeton Univ. (Mimeographed) 1963.

[9] H. Boerner. Representations of groups, North-Holland 1963.

[10] L. Pontrjagin, Topological groups, Princeton Univ. Press. 1939

[11] R. Brauer and H. Weyl. Spinors in n dimensions. Amer. J. Math. 57 (1935), 425-449

Homotopy type of certain smooth manifolds.

東京女子大　笹尾靖也.

コホモロジー群が $H^0(M)=H^4(M)=H^8(M)=H^{12}(M)=Z$，$H^i(M)=0$ $i\neq 0, 4, 8, 12$ の如き単連結な smooth closed manifold M のホモトピー型を計算し，更には diffeomorphic classification を計算してみようというのが最初の目標である。方法は Browder-Novikov の theory を応用するもので，今回は Browder の定理の応用の部分を考えることにする。従って得られる結果は上の如き M のホモトピー型及び特性類による分類である。M はホモトピカルには $S^4\cup_f e^8\cup_g e^{12}$ の形をしているとして良いから，そのホモトピー型は $\{f\}\in\pi_7(S^4)$ と $\{g\}\in\pi_{11}(S^4\cup_f e^8)$ とで定まる。かかる CW-複体の分類は比較的容易である。従って問題はかかる CW-複体が smooth closed manifold とホモトピー型が一致するための $\{f\}$，$\{g\}$ に関する条件を求めれば解かれるものと考える。そこで Browder の定理を利用しようというわけである。

W. Browder の定理とは次の如きものである。
X を $4n$ 次元の CW-複体 (finite，$n>1$) とするとき次の 1), 2), 3), が成立するならば X とホモトピー型が同じで，2) の ξ を stable tangent normal bundle にもつ smooth closed manifold が存在する。

1) Poincaré duality が成立する。i.e. $u\in H^{4n}(X)$ が存在して $\cap u: H^i(X)\longrightarrow H_{4n-i}(X)$ は同型である。

2) X 上の vector bundle ξ が存在してその Thom-complex $T(\xi)$ は reducible である。i.e. $\Phi: H_i(X)\longrightarrow H_{N+i}(T(\xi))$

を Thom の同型写像とすると $\Phi(u)$ は spherical で[illegible]。

3) $\hat{\xi}$ を ξ の dual とするとき $\hat{\xi}$ について Hirzebruch の Index theorem が成立する。i.e. $\mathrm{Ind}\,X = L_n(\hat{p}_1, \cdots \hat{p}_n)$。

さて上の定理を $X = S^4 \cup_f e^8 \cup_g e^{12}$ に応用して 1), 2), 3) の条件を $\{f\}$, $\{g\}$ の性質として表現すれば、おおよそ以下の通りである。 $\{f\} \in \pi_7(S^4) \cong Z[h] + Z_{12}[\tau]$ であるから一般には $\{f\} = a[h] + b[\tau]$ とかけるが、特に $b=0$ の場合だけ考えるものとする。この時 $\pi_{11}(S^4 \cup_f e^8)$ を計算すると次の lemma を得る。

lemma 1. $\pi_{11}(S^4 \cup_f e^8) \cong Z_{15}[\mu_f] + Z[\lambda_f] + Z_{(a,24)}[\nu_f]$

ここに $(a, 24)$ は a と 24 の最大公約数。

そこで $\{f\} = a[h]$, $\{g\} = m\mu_f + l\lambda_f + n\nu_f$ となる時 X を type (a, m, l, n) と呼ぶことにする。

lemma 2. X が type (a, m, l, n) なら、$H^*(X; Z)$ において $e^4 \cup e^8 = l e^{12}$ となるように λ_f をえらべる。

Browder の条件 1) はこれより $l = \pm 1$ となることと同値であることは明らかである。次に X 上の (stable) vector bundle はその Pontrjagin class で定まるが、次の結果が得られる。

lemma 3. ξ を X 上の (stable) vector bundle とすれば ξ は次の如き ξ_1, ξ_2, ξ_3 の一次結合である。但し μ_f は $\pi_{11}(S^4)$ のひとつの生成元であるが stable group $\pi_{N+11}(S^{N+4})$ に入れたとき $\pi_{N+11}(S^{N+4})$ の generator の 16 倍となるものとする。

	p_1	p_2	p_3
ξ_1	$2e^4$	ae^8	$16m\,e^{12}$
ξ_2	0	$6e^8$	$\left(2l + \frac{24n}{(a,24)}\right)\times(-10)e^{12}$
ξ_3	0	0	$240\,e^{12}$

$\pi(\xi)$ の reducibility については次の lemma が成立する。

lemma 4. $\pi(\xi)$ が reducible であるための必要十分条件は $\frac{1}{2}\mathrm{ch}_6(\eta)$ が integral class になることである。

η は $\pi(\xi)$ の任意の vector bundle である。

この lemma は KO-theory の Thom 同型を使って ξ の条件として次の如きものとなる。

lemma 5. $p_1(\xi) = xe^4$, $p_2(\xi) = ye^8$, $p_3(\xi) = ze^{12}$ とする。$\pi(\xi)$ が reducible となるための必要十分条件は

$$16z + 12xyl + 3alx^3 \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ (2^{11}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7)$$

$$\beta_X - 5xl \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ (2^4\cdot 3\cdot 5)$$

$$24\alpha_X + 16al + 20alx + 3alx^2 + 4yl \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ (2^4\cdot 3^2\cdot 5)$$

但し $\beta_X = \left(2l + \frac{24n}{(a,24)}\right)\times(-10)$ $\alpha_X = 16m$ とする。

Index Theorem については容易であるから省略する。結局以上のいくつかの lemma を満足するものを求めれば良いわけである。

Hauptvermutung について。

神戸大学 小林一章

simplicial complex K から topological space X への homeomorphism $h: K \to X$ が存在するとき K は X の triangulation であると云う。

2つの complex K_1, K_2 が isomorphic とは、K_1 と K_2 の simplex が face の incidence relation も含めて 1-1 に対応する事である。

complex K が complex L の simplicial subdivision とは（但し K と L の underlying space は homeomorphic とする。）K の各 simplex が L のある simplex に含まれる事である。

2つの complex K_1, K_2 が combinatorially equivalent であるとは、K_1 と K_2 とが isomorphic な simplicial subdivision をもつ事である。

triangulation に関する Hauptvermutung とは homeomorphic な space X と Y は combinatorially equivalent な triangulation をもつかという事である。

上の Hauptvermutung に関してわかっている結果は、X が complex のとき $\dim X \leq 2$ では Papakyriakopoulos [11] が肯定的に解決した。しかし、Milnor [7] が 6次元以上の complex で反例を出し、Stallings [15] が 5次元以上の complex で反例を出した。

次に X が manifold のとき Radó [12] が $\dim X \leq 2$ で、更に Moise [8] と Bing [1] が $\dim X \leq 3$ で肯定的に解決した。（最近 Bing の証明に誤りがある事がわかった。）又 X が S^n 又は B^n（sphere 又は cell）の時には、$n \neq 4, 5, 7$ で Smale [14] が肯定的に解決し、Noguchi [10] は Smale の結果を使って $n = 5, 7$ の S^n、$n = 7$ の B^n に関して肯定的に解決した。（最近 Luft [5] が全く同様の結果を得ている。）更に Gluck [3] は S^n と B^n に関して弱い形の Hauptvermutung を証明した。

一方一般の次元の manifold に対して Homma [4] が次の形の近似定理を仮定して肯定的に解決した。

(App n): $h: R^n \to R^n$: onto homeomorphism で

$h|K = $ p.w.l. (piecewise linear) 但し

K は R^n の closed finite sub-complex.

$\Rightarrow {}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して

${}^{\exists}g: R^n \to R^n$ onto p.w.l. homeomorphism

かつ g は 1) $g|K = h|K$

2) $|g(x) - h(x)| < \varepsilon$ をみたす。

この (App n) を仮定して Homma [4] は

(H) : M_1, M_2 : closed p.w.l. manifolds

$f: M_1^n \to M_2^n$: homeomorphism で

$f|K = $ p.w.l. 但し K は M_1 の finite polyhedron

$\Rightarrow {}^{\forall}\varepsilon(x) > 0$ に対し ${}^{\exists}g: M_1 \to M_2$ p.w.l. homeomorphism

かつ 1) $g|K = f|K$

2) $|g(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$ をみたす。

を証明した。この (H) を使って Homma は一般の次元の manifold の triangulation 及び Hauptvermutung を証明した。更に上の (App n) に関して Connel [2] が $n \geq 7$、$K = \phi$、h: stable homeomorphism という条件をつけて肯定的に解決した。

しかしながら (App n) については否定的である。実際 Mogun [6] は (H) の M_i^n ($i = 1, 2$) を S^n に置きかえたものに対して $n = 23$ で反例を出した。従って (App n) は一般には成り立たない。

そして最近 Sondow. Siebenman [13] が Mazur と同様の反例を5次元以上で出した。

しかしながら (Appx) について反例が出ても、それによって Hauptvermutung が成立たない訳ではない。例えば (Appx) に K の近傍で p.w.l. と云う条件をつけても、Hauptvermutung 及び triangulation に関する結果は出て、むしろその様な類似定理に対しては反例がない。

又 K と L が differentiable manifold の differentiable structure に compatible な smooth triangulation なら K と L が combinatorially equivalent になる事が Munkres [9] により証明された。

以下 Stallings と Siebenman, Sondow の反例について記します。

Stallings の反例及び Siebenman. Sondow の反例について。

G を Brandt Groupoid とする。(Brandt Groupoid の定義は [15]).

$a_1, a_2, \cdots \in G$ とし formal infinite sequence $a_1 \cdot a_2 \cdots$ が定義されたとする。

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots = (a_1 a_1^{-1} a_1)(a_2 a_2^{-1} a_1^{-1} a_1 a_2)(a_3 \cdots$$
$$= (a_1 a_1^{-1})(a_1 a_2 a_2^{-1} a_1^{-1})(a_1 a_2 a_3 \cdots$$
$$= e \cdot e \cdot e \cdot$$

但し e は a_1 の left identity. 従って infinite seq. $a_1 \cdot a_2 \cdots$ は first term の left identity のみに依存する事がわかる。

n-dim. cobordism $C=(M: A.B)$ とは.

M: n-dim compact differentiable (or combinatorial) manifold. $\partial M = A \cup B$ となるものとする。orientation は良く知られているものとする。

2つの cobordism C, C' の間の diffeo. 又は p.w.l. homeo. が存在するときこれらの cobordism を identify する。

n-dim cobordism に composition $\circ$ を次の様に入れる。

$$(M; A.B)\circ(N; B.C) = (M\cup N; A, C)$$

但し $M\cup N$ は B で orientation を考慮に入れて貼り合わせたものとする。cobordism $C=(M; A.B)$ が invertible であるとは、$C'\cdot C$, $C\cdot C''$ が product cobordism すなわち $C'\circ C = C\cdot C'' = (A\times I; A\times 0. A\times 1)$ になる様な C', C'' が存在することである。

invertible cobordism 全体は Brandt Groupoid を作る。

今 $C=(M; A, B)$ $e_A = (A\times I; A\times 0, A\times 1)$ $e_B = (B\times I; B\times 0, B\times 1)$ としたとき。

$$C\circ e_B \circ e_B \circ \cdots = C\circ(C^{-1}C)\circ(C^{-1}C)\circ\cdots$$
$$= e_A\circ e_A\circ e_A\circ\cdots$$
$$\approx A\times[0,1)$$

従って $(M; A,B)$ に $B\times[0.1)$ を attach してできたものを C' とする。

定理1. 任意の B に対して. $C' \approx A\times[0.1)$ (diffeo.)

又 $W^{n+1} = S^n \times [0.1] \supset M^{n-1}$ (smoothly or p.w.l. imbedded) とし. M^{n-1} は imbedding $F: S^{n-2}\times[0.1] \to W$ の image になっているとし. $S^n\times i$ では $K_i\times i = F(S^{n-2}\times i)$ となっているとする。(S^n, K_i) と $(S^n\times i, K_i\times i)$ $(i=0.1)$ を identify する。その時 $C = \{(W; M); (S^n, K_0), (S^n, K_1)\}$ を (n+1)-dim strong cobordism という。invertible strong cobordism に関しても上と同様の定理が得られる。

$C = \{(W_k, M_k); (S^{n+1}, L^{n-3}), (S^{n+1}, L_k^{n-3})\}$ とし. C' は C の right-end に $(S^{n+1}, L^{n-3})\times[0.1)$ を attach したものとする。

定理1'. $C' \approx (S^{n+1}, L^{n-3})\times[0.1)$ (diffeo.)

次に h-cobordism を考える。

h-cobordism $C=(M;A,B)$ とは inclusion $A\subset M$, $B\subset M$ が homotopy eq. になっている cobordism の事である。又 inclusion $(S^n-K_i)\to(W-M)$ $(i=0,1)$ が homotopy eq. の時 $C=\{(W,M);(S^n,K_0),(S^n,K_1)\}$ を strong h-cobordism という。

各 h-cobordism $(M;A,B)$ に元 $\tau(M;A,B)\in Wh(\pi)$ を対応させる。但し $\pi=\pi_1(A)$. かつ $Wh(\pi)$ は Whitehead torsion group. 即ち homotopy eq. $A\to M$ の torsion のなす group. 同様に strong h-cobordism $C_k=\{(W_k,M_k);(S^n,L^{n-2}),(S^n,L_*^{n-2})\}$ に関しても $\tau(C_k)\in Wh(\pi)$ を対応させる。但し $\pi=\pi_1(S^n-L^{n-2})$。$Wh(\pi)$ は homotopy eq. $(S^n-L^{n-2})\to(W_k-M_k)$ の torsion のなす group. 以下 strong-h-cobordism も普通の h-cobordism と同様に議論が進められるので普通の h-cobordism を扱う。

先ず関数 τ は次の意味で additive である。

$\tau(C\circ C')=\tau(C)+\tau(C')$　　$C=(M;A,B)$, $C'=(N;B,C)$

且 isomorphism $\pi_1(A)\simeq\pi_1(B)\simeq\pi_1(M)$ で $\pi_1(A)$ と $\pi_1(B)$ を identify する。

Mazur の定理 [16]: $(M;A,B)$ を次元 ≥ 6 なる h-cobordism とし、$\tau(M;A,B)=0$ とすると (M,A,B) は trivial cobordism $(A\times I;A\times 0,A\times 1)$ に equivalent である。

この証明は Smale の handle-body theorem の応用である。それに依ると $(M;A,B)=A\times I\cup$ (degree k, $k+1$ の handlebody) となる。但し $k=[\frac{n}{2}]$. 仮定 $\tau(M;A,B)=0$ は degree k と $k+1$ の handles の trivial pair をつけ、それらを slide させる事に依り全ての handles を取り除く事が出来る事を示している。

この事に依って $(M;A,B)$ が $A\times I$ で表現される事は影響はない。

もう一つの結果は次の事である。$\alpha\in Wh(\pi)$, $(\pi=\pi_1(A))$ かつ $n\geq 6$ なら与えられた $\tau(M;A,B)=\alpha$ をもつ h-cobordism $(M;A,B)$ が存在する。このためには α を π-integral group ring 上の matrix で表現し、$A\times I$ に degree 2 と 3 の handles をそれらの handles の間の incidence number が与えられた matrix となる様にくっつける。

定理2. $(M^n;A,B)$ が $n\geq 6$ なる h-cobordism ならそれは invertible cobordism である。

証明. $\tau(N;B,C)=-\tau(M;A,B)$ なる h-cobordism $(N;B,C)$ を construct する。すると上に述べた Mazur の定理により $\tau((M;A,B)\circ(N;B,C))=0$. だから $(M;A,B)\circ(N;B,C)$: trivial である。それ故 right inverse が存在する。left-inverse の存在も同様に出る。それ故 $(M;A,B)$ は invertible である。

上の定理2は Stallings の Engulfing theorem を使うと次の様に改良出来る。

定理3. $n\geq 5$ なる全ての h-cobordism $(M;A,B)$ は invertible である。

以上から定理1と定理3を使うと $n\geq 5$ として任意の h-cobordism $C=(M;A,B)$ とすると

$C\equiv A\times[0,1]$　p.w.l. homeomorphic

系; $X=\text{cone}\,A$, $Y=M\cup\text{cone}\,B$ とすると

X と Y は homeomorphic である。

Stallings の反例。

$K=S^1\cup_5 D^2$ とし

cont. map $f:K\to K$ を $f|S^1=id$, $f_*(c)=\xi c$ とする。但し $f_*:C_*(K)\to C_*(K)$ は f によって induce された chain map で、$c\in C_2(K)$, $\xi=(1-t+t^2)$。すると f は homotopy eq. かつ ξ は $\pi_1(K)$ の整群環 $\{t|t^5=1\}$ の non-trivial unit.

$g:K\to R^5$; p.w.l. imbedding とし regular neighborhood $U=N(g(K),R^5)$ とする。

又 $h:K\to U$ p.w.l. imbedding を g の polyhedral approximation になっている様なものとする。
$V=N(h(K),U)$: regular neighborhood of $h(K)$ in U とする。$M=U-\mathrm{int}\,V$ $\partial U=A$, $\partial V=B$ とすると $A\subset M$ $B\subset M$ は homotopy eq. になるから $(M;A,B)$ は 5-dim. h-cobordism になる。

$X=\mathrm{cone}\,A$, $Y=M\cup\mathrm{cone}\,B$ とすると定理3 の系 から X と Y は homeomorphism である事がわかる。しかし X と Y は p.w.l. homeomorphic でない。何故なら $F:X\to Y$ が p.w.l. homeomorphism なら F に依って X の cone point x は Y の cone-point y に移る。(それは F の construction から)。従って x と y の open star を各 X, Y から除くと $(A\times I, A\times 0)$ から (M,B) への polyhedral homeomorphism が存在する事になる。然し $\tau(A)=0$, $\tau(B)\neq 0$ 従って矛盾。だから $F:X\to Y$ なる p.w.l. homeomorphism は存在しない。

定理4 complex X と Y は topological には equivalent だが combinatorial には異なる。

Lieberman Sondow の反例。

Prop. imbedding $K^{n-2}\subseteq S^n$ $(n\geq 5)$ は $\pi_1(S^n-K)\cong J\times G$ をみたすものとする。

但し J: infinite cyclic group.
G: order 120 の binary icosahedral group.

(この様な imbedding は Zeeman が trefoil knot を twist spinning する事により存在を保障した。)

$\Longrightarrow$ 次の性質をみたす無限個の strong h-cobordism $c_0, c_1, c_2, \dots$ が存在する。ここで $c_i=\{(W_i,M_i);(S^n,K),(S^n,K_i^{n-2})\}$。もし $i\neq j$ $\theta:\pi_1(S^n-K)\to\pi_1(S^n-K)$ が automorphism なら $\theta_*\tau(c_i)\neq\tau(c_j)$ 又は $\tau(\bar{c}_j)$

但し $\tau(c_i)\in Wh(\pi_1(S^n-K))$ は homotopy eq. $S^n-K\subset W_i-M_i$ の Whitehead torsion.

又 $\bar{c}_j=\{(W_j,M_j);(S^n,K_j^{n-2}),(S^n,K^{n-2})\}$

証明は次の lemma を使う。

lemma Z_5 を $J\times G$ の 5-Sylow subgroup とし $\varphi:Z_5\to J\times G$ を inclusion とする。
すると任意の automorphism $\theta:J\times G\to J\times G$ に対して
$\varphi_*(Wh(Z_5))\subseteq Wh(J\times G)$ は infinite order をもち
$\theta_*\varphi_*(Wh(Z_5))=\varphi_*(Wh(Z_5))$ (onto itself) である。

$n\geq 5$ の場合の Prop. の証明.

Mazur の定理から与えられた $\alpha_i\in Wh(\pi_1(S^n-K))$ に対し $\tau(c_i)=\alpha_i$ なるような c_i が存在する。従って $k=0,1,2\cdots$ に対し $c_k=\{(W_k,M_k);(S^n,K),(S^n,K_k)\}$ を $\tau(c_k)=k\beta$ とする。但し β は lemma の $\varphi_* Wh(Z_5)$ の generator. すると lemma より異なる $i,j\geq 0$ に対し $\theta_*(\tau(c_i))=\pm i\beta$ は $\tau(c_j)=\pm j\beta$ 又は $\tau(\bar{c}_j)=\pm j\bar{\beta}=\pm j(\pm\beta)$ に等しくない。

$n=4$ の場合は construction が複雑であるから省略する。

定理5. $n\geq 5$ に対し S^n に p. w. l. imbed された $(n-2)$-sphere K_1^{n-2}, K_2^{n-2} が存在して

$h:(S^n, K_1)\to(S^n, K_2)$ は Topological homeomorphism だが p. w. l. homeomorphism でない。
更に h は K_1 上と, S^n-p 上で p. w. l. であるように出来る。但し $p\in K_1$.

証明： $C_k=\{(\overline{W}_k, M_k);(S^{n-1}, L^{n-3}), (S^{n-1}, L_k^{n-3})\}$
$n\geq 5$ とする。$(S^n, K_k^{n-2})=c(S^{n-1}, L^{n-3})\cup(\overline{W}_k^n, M_k^{n-2})\cup c(S^{n-1}, L_k^{n-3})$ とする。（但し $C(L)$ は cone over L ）
任意の C_k に対し $C_k'=C\cup(S^{n-1}, L_k^{n-3})\times[0,1]$ は定理1' によって $C_k'\cong(S^{n-1}, L^{n-3})\times[0,1]$.
従って (S^n, K_i^{n-2}) と (S^n, K_j^{n-2}) の2つの cone point を各々対応させれば Topological homeomorphism

$H:(S^n, K_i^{n-2})\to(S^n, K_j^{n-2})$ が得られる。

所が H は C_k' で p. w. l. 且つ $H|c(S^{n-1}, L^{n-3})$ は明らかに p. w. l. 従って H は S^n-p_i で p. w. l. homeo.
但し p_i は $c(S^{n-1}, L_i^{n-3})$ の cone-point である。
次に $h:K_i\to K_j$ を $h|cL=H|cL$, かつ $h(p_i)=p_j$ なる様な p. w. l. homeo. とする。すると H は S^n-p_i で p. w. l. homeo だから $H|K_i-p_i=h|K_i-p_i$ と出来る。そして one-compactification より $H|K_i=h$.
従って h は p. w. l. homeo だから $H|K_i$ は p. w. l. homeo.
以上より homeo $H:(S^n, K_i)\to(S^n, K_j)$ は S^n-p_i と K_i 上で p. w. l. である。しかしながら H は全体では p. w. l. とならない。もし H が全体で p. w. l であると (S^n, K_i) の2つの cone-points の open-star を除いた部分は H によって p. w. l. に (S^n, K_j) の2つの cone-points の open-star を除いた部分に移る。すなわち $H|(\overline{W}_i, M_i)=(\overline{W}_j, M_j)$ 一方 Prop. より $H_*\tau(C_i)\neq\tau(C_j)$ or $\tau(\overline{C}_j)$ それ故矛盾。
故に H は全体で p. w. l. homeo. ではない。

参考文献

[1] R.H. Bing, On alternative proof that 3-manifold can be triangulated.
Ann. of Math. 69 p.37~65.

[2] E. H. Connel. Approximating stable homeomorphism.
Bull. Amer. Math. Soc. 69(1963). p.88~90.

[3] H. Gluck. The weak Hauptvermutung for cells and spheres.
Bull. Amer. Math. Soc. 66(1960). p 282~284.

[4] T. Homma. On Hauptvermutung and triangulation of n-manifold.
The Yokohama Math. J. XI (1963) p51~56

[5] Luft. On combinatorial Schoenflies Conjecture.
Proc. of the Amer. Math. Soc. vol16. No 5. p1008-1011.

[6] B. Mazur. Combinatorial equivalence versus topological equivalence.
Trans. of the Amer. Math. Soc. 111, p.288~316.

[7] J. Milnor. Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct.
Ann. of Math. (2). 74. (1961). p575-590.

[8] E. Moise. Affine structures on 3-manifolds. V.
Ann. of Math. (2) 56. (1952) p. 96~114.

[9] J. Munkres, Elementary Differential Topology.
Ann. of Math. Studies. No 54.

[10] H. Noguchi: 組合せ多様体の最近の結果. 数学の歩み, 1961.

[11] C.D. Papakyriakopoulos. A new proof of the invariance of the homology groups of a complex. (Greek)
Bull. Soc. Math. Greek. 22. (1943) p 1~152

[12] T. Radó. Über den Begriff der Riemannschen Fläche,
Acta Univ. Szeged. vol 2 (1924~1926) p 101~121.

[13] L. Siebenmann, J. Sondow, Some homeomorphic sphere pair that are combinatorially distinct.
to appear. 神戸大. 小林 の所に在り。

[14] S. Smale. Differentiable and combinatorial structures on manifolds.
Ann. of Math. 74 (3). (1961) p. 498~502.

[15] J. Stallings. On infinite process leading to the differentiability in the complement of a point.
Princeton Math. Ser. 27
Differential and Combinatorial Topology. p. 245-2[illegible]

[16] B. Mazur, Relative neighborhoods and the theorems of Smale
Ann. of Math. 77 (1963) p. 232-249

例外リー群のホモトピー群

名大 可知偉行

1. 例外リー群 E_6, E_7, E_8 のホモトピー群は Bott-Samelson により,

$$\pi_i(E_6) = 0 \quad 4 \leq i \leq 8, \quad \pi_9(E_6) = Z$$
$$\pi_i(E_7) = 0 \quad 4 \leq i \leq 10, \quad \pi_{11}(E_7) = Z$$
$$\pi_i(E_8) = 0 \quad 4 \leq i \leq 14, \quad \pi_{15}(E_8) = Z$$

なる結果が与えられている。コホモロジー群は Z_2 係数で荒木[ ], 荒木, 四方[ ]により完全に決定されている。

ここでは例外リー群 E_6, E_7, E_8 のホモトピー群の 2-要素を計算する. そして次の結果がえられる。

(1.1)

i	15	16	17	18	19	20	21	22
$\pi_i(E_8)$の2要素	Z	Z_2	Z_2	Z_8	0	0	Z_2	0

i	23	24	25	26	27	28
$\pi_i(E_8)$の2要素	$Z+Z_2$	Z_2+Z_2	Z_2	0	Z	0

(1.2)

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\pi_i(E_7)$の2要素	Z	Z_2	Z_2	0	Z	Z_2	Z_2	Z_4	$Z+Z_2$	Z_2	Z_2

(1.3)

i	9	10	11	12	13	14	15	16
$\pi_i(E_6)$の2要素	Z	0	Z	Z_4	0	0	Z	0

2. X, Y を CW-複体とし, $f: X \to Y$ を連続写像とする。その写像錐を $K_f = Y \cup_f CX$ とする。$i: Y \to K_f$ を包含写像とし, $p: K_f \to SX$ を Y を一点に写す写像とする。又, X を p 連結, Y を m 連結とする。

(2.1) $\pi_j(X) \xrightarrow{f_*} \pi_j(Y) \xrightarrow{i_*} \pi_j(K_f) \xrightarrow{\Delta} \pi_{j-1}(X) \xrightarrow{f_*} \pi_{j-1}(Y)$

を考えるとき, $j \leq 2 \times \mathrm{Min}(m, n)+1$ に関して完全である.

但し $\Delta = E^{-1} \circ j_* : \pi_j(K_f) \longrightarrow \pi_j(SX) \xleftarrow{E} \pi_{j-1}(X)$ とする。

3. Y を 3-connective fibre space over E_8 とすると, 連続写像 $g : Y \longrightarrow E_8$ が存在し,

(3.1) $g_* : \pi_j(Y) \longrightarrow \pi_j(E_8)$

は全ての $j \geq 4$ に関して同型であり, triple

(3.2) $(Y \; g \; E_8)$

は $K(\pi_3(E_8), 2)$ を fibre にもつ fibre space である。

但し $\pi_3(E_8) = Z$ である。(3.2) の fibration に mod 2 spectral sequence を適用すれば, Y のコホモロジー群は次のように計算される。

(3.3) $H^*(Y, Z_2) = Z_2[y_{15}, y_{32}]/(y_{15})^4$
$\otimes \Lambda(Sq^8 x_{15}, Sq^4 Sq^8 x_{15}, Sq^2 Sq^4 Sq^8 y_{15}, y_{33}, y_{35}, y_{39}, y_{47})$

但し $H^*(E_8; Z_2) = Z_2[x_3, Sq^2 x_3, Sq^4 Sq^2 x_3, x_{15}]/(x_3)^{16}, (Sq^2 x_3)^8, (Sq^4 Sq^2 x_3)^4 (x_{15})^4$
$\otimes \Lambda(Sq^8 Sq^4 Sq^2 x_3, Sq^8 x_{15}, Sq^4 Sq^8 x_{15}, Sq^2 Sq^4 Sq^8 x_{15})$

である。

cell complex $M = S^{15} \cup_{\sigma_{15}} e^{23} \cup_{\nu} e^{27} \cup_{\eta} e^{29}$ を考えるとき, inclusion $i : M \longrightarrow Y$ が存在して,

$i^* : H^*(Y, Z_2) \longrightarrow H^*(M, Z_2)$

は degree ≤ 29 に関して同型である。J-P. Serre の C-theory と (3.1) により

(3.4) $\pi_j(E_8) \approx \pi_j(M)$: C_2-同型, $4 \leq j \leq 28$

を得る

$\sigma_{15} \in \pi_{22}(S^{15} : 2) \approx Z_{16}$ の $\sigma_{15} : S^{22} \longrightarrow S^{15}$ に列 (2.1) を適用すれば 次の結果を得る

(3.5)

i	$i \leq 14$	15	16	17	18	19	20	21	22
$\pi_i(K_\sigma)$の2要素	0	Z	Z_2	Z_2	Z_8	0	0	Z_2	0

23	24	25	26	27	28
$Z+Z_2$	Z_2+Z_2	Z_2	Z_{64}	0	0

$L = K_{\sigma_{15}} \cup e^{27}$ とし, $f : S^{26} \longrightarrow K_{\sigma_{15}}$ を e^{27} の attaching map とし, この f に 列 (2.1) を適用すれば, $j \leq 28$ に関して次の exact and commutative diagram が得られる.

(A)
$$\begin{tikzcd}
 & \pi_i(S^{22}) \arrow[d, "\sigma_{15*}"] & & & \\
 & \pi_i(S^{15}) \arrow[d, "i_*"] & & & \\
\pi_i(S^{26}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "E^{-1}j_*"'] & \pi_i(K_\sigma) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\Delta"] & \pi_i(L) \arrow[r, "\Delta"] & \pi_{i-1}(S^{26}) \arrow[r, "f_*"] & \pi_{i-1}(K_\sigma) \\
 & \pi_{i-1}(S^{22}) \arrow[d, "f_*"] & & & \\
 & \pi_{i-1}(S^{15}). & & &
\end{tikzcd}$$

が得られ, この diagram より

(3.6)

i	26	27	28
$\pi_i(L)$の2-要素	0	Z	Z_2

特に $\pi_{28}(L : 2) \overset{\Delta}{\approx} \pi_{27}(S^{26})$ であるから, $M = L \cup_g e^{29}$ に (2.1) を apply すれば

(3.7) $\pi_{28}(M : 2) = 0$

を得る. よって (3.4) 〜 (3.7) により (1.1) の結果を得る.

4. 例外リー群の コホモロジー群は

$$H^*(E_7;Z_2) = Z_2[x_3, Sq^2x_3, Sq^4Sq^2x_3]/(x_3)^4(Sq^2x_3)^4(Sq^4Sq^2x_3)^4$$
$$\otimes \Lambda(x_{15}; Sq^8Sq^4Sq^2x_3, Sq^8x_{15}, Sq^4Sq^8x_{15})$$

で与えられている。E_8と同様に E_7の 3-connective fibre space Yを考えると，そのコホモロジー群は．

$$H^*(Y,Z_2) = Z_2[y_{32}] \otimes \Lambda(y_{11}, y_{15}, Sq^8y_{11}, Sq^8y_{15}, Sq^4Sq^8y_{15}, y_{33}, y_{35})$$

である。

特に $\pi_{14}(E_7)=0$ であることから．$Sq^4y_{11}=y_{15}$ を得る．

cell complex $N=S^{11}\cup_{\nu_{11}}e^{15}\cup e^{19}$ を考えると，（但し e^{19} は σ_{11}で attach されている）と inclusion $i: N\to Y$があって，コホモロジーの同型（Z_2係数で）を degree ≤ 21 に関して induce する。J.P. Serre の C-theory により，又 Yの性質に依

(4.1) $\qquad \pi_j(E_7)\approx\pi_j(N)\quad C_2$-isomorphism onto for $4\leq j$

$\pi_j(N)$の計算は，$\pi_j(M)$の計算とまったく同様にする。

又は $H^*(E_8/E_7;Z_2)=Z_2[y_{12}]/y_{12}^4\otimes\Lambda(Sq^8y_{20}, y_{29}, Sq^1y_{30})$ より次の表を得る。

(4.2)

i	$i\leq 11$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\pi_i(E_8/E_7)$の2要素	0	Z	Z_2	Z_2	Z_8	0	0	Z_2	0	$Z+Z_2$	Z_2+Z_2	Z_2

fibration $(E_8, E_8/E_7, E_7)$ に関する ホモトピー完全系列 から $\pi_j(E_7)$の２要素は 完全に計算される。

5. fibration $(E_8, E_8/E_6, E_6)$ に関する ホモトピー完全系列 と $\pi_j(E_8)=0\quad 4\leq j\leq 14$ とから

(5.1) $\qquad \pi_j(E_6)\approx\pi_{j+1}(E_8/E_6)\qquad 4\leq j\leq 13$

一方，$H^*(E_8/E_6;Z_2)=Z_2[y_{10}, Sq^2y_{10}]/y_{10}^4(Sq^2y_{10})^4$
$$\otimes\Lambda(Sq^8y_{10}, y_{27}, y_{29}, y_{30})$$

であるから，E_8の場合と同様にして，

i	$i\leq 9$	10	11	12	13	14	15	16	17
$\pi_i(E_8/E_7)$の2要素	0	Z	0	Z	Z_4	0	Z_8	Z_2	0

一方 $H^*(E_7/E_6;Z_2)=\Lambda(y_{10}, Sq^8y_{10}, y_{27})$ より $\pi_{14}(E_7/E_6)=\pi_{15}(E_7/E_6)=0$

よって $\pi_{14}(E_6)=\pi_{14}(E_7)=0$

E_6の 3 connective fibre space を Y とすれば

$$H^*(Y,Z_2)=Z_2[y_{32}]\otimes\Lambda(y_9, y_{11}, y_{15}, y_{17}, y_{23}, y_{33})$$

で $Sq^2y_9=y_{11}$．$Sq^4y_{11}=y_{15}$，$Sq^8y_{15}=y_{23}$，$Sq^8y_9=y_{17}$ である．から．Cartan-Serre の方法 [4] を apply すれば

$$\pi_{15}(E_6)=Z$$

を得る。

fibration $(E_7, E_7/E_6, E_6)$ に関する ホモトピー完全系列より

$$\pi_{16}(E_6)=0$$

を得る。

参考文献

[1] S. Araki : Cohomology modulo 2 of the compact exceptional groups E_6 and E_7. J. of Math. Osaka C. U. vol 12 (1961) 43–65

[2] S. Araki and Y. Sikata : Cohomology mod 2 of the compact exceptional group E_8. Proc. Japan. Acad. 37 (1961) 619–622

[3] H. Cartan and J.P. Serre Espaces fibrés et group
d'homotopie I, II. C.R. Acad Sci. Paris 234 (195
288 – 290, 393 – 395

[4] J. P. Serre : Groupes d'homotopie et classes de gro
abelian. Ann of Math. 58 (1953) 258 ~ 294

[5] ———— : Cohomology modulo 2 des complex
d'Eilemberg MacLane. Comm Math. Helv 27. (1953)
198 ~ 231.

[6] H. Toda : Composition Methods in Homotopy group
of spheres. Ann of Math. Studies

[7] R. Bott and H. Samelson ; Application of the theo
of Morse to symmetric spaces. Amer. J. Math. 80
(1958) 964 - 1027

[8] Y. Nomura ; On mapping sequence : Nagoya Math
J. vol 17 (1960) 111 - 145.

マイクロバンドルのオイラークラスについて

埴内伸彦（愛知大学）

0. 序

ここではベクトルバンドルについて成り立っていて マイクロバンドル（以下 m.b. と略す）についても成り立っている二,三の結果について解説する。

1. Thom isomorphism の一般化.

m.b. の一般論は仮定する（Milnor [1]）

定理 I

$\mathfrak{X}$; $B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$ を paracompact な base space B 上の n 次元 oriented m.b. とする. この時下のことが成り立つ。

i) $0 \leq i < n$ なる任意の i に対して
$H^i(E, E_0; \mathbb{Z}) = 0$ 　ここで $E_0 = E - i(B)$

ii) 次の性質をもつ $U_E \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ がただ一つ存在する。
B の任意の点 b と inclusion map
$j_b : (F_b, F_{b_0}) \longrightarrow (E, E_0)$ に関して
$j_b^* U_E = U_b$ 　が成り立つ。
ここで $F_b = j^{-1}(b)$ 　$F_{b_0} = F_b \cap E_0$ 　U_b は orientation によって一通りに定まる cohomology class

iii) $i \geq 0$ なる任意の i に対して $H^i(B; \mathbb{Z})$ から $H^{n+i}(E, E_0; \mathbb{Z})$ への isomorphism Φ がある。Φ は次式で与えられる。
$\Phi(c) = j^*(c) \smile U_E$ 　ここで $\smile$ は cup product

定理 I において orientation を考えない場合, 係数 $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_2$ に入らせば, そのままの形で成立つ。

2. characteristic class について

上の結果を使う事により, m.b. $\mathfrak{X}$; $B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$ が与えられた時

Total Stiefel-Whitney class $\tilde{W}(\mathfrak{X})$ や Euler class $\tilde{\chi}(\mathfrak{X})$ は下の式で定義される.

$$\tilde{W}(\mathfrak{X}) = \Phi'^{-1} S_q \Phi'(1) \qquad 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}_2)$$

ここで Φ' は $\mathbb{Z}_2$ 係数の Thom isomorphism

$$\tilde{\chi}(\mathfrak{X}) = \Phi^{-1}(U_E \smile U_E)$$

この時 次のことが成立つ。（証明は略す）

i) $\tilde{W}(\mathfrak{X})$, $\tilde{\chi}(\mathfrak{X})$ の bundle map に関する naturality

ii) $\tilde{W}(\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2) = \tilde{W}(\mathfrak{X}_1) \cdot \tilde{W}(\mathfrak{X}_2)$
$\tilde{\chi}(\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2) = \tilde{\chi}(\mathfrak{X}_1) \cdot \tilde{\chi}(\mathfrak{X}_2)$

iii) vector bundle $\mathfrak{u}$ の underlying m.b. $|\mathfrak{u}|$ に関して
$W(\mathfrak{u}) = \tilde{W}(|\mathfrak{u}|)$, $\chi(\mathfrak{u}) = \tilde{\chi}(|\mathfrak{u}|)$
ここで W, χ はそれぞれ vector bundle の場合の Total Stiefel-Whitney class, Euler class である

3. Euler class について

まず Euler class と Euler characteristic との関係について述べる。M を topological n-manifold とする。M が oriented であるとは. M の tangent m.b. t_M が oriented であることと定義する。この定義は differentiable case の orientation の定義の拡張になっている。

定理 II

M が closed connected oriented topological n-manifold であり. $H^i(M; \mathbb{Z})$ が有限生成であると仮定すれば, $\tilde{\chi}(t_M)$ は μ の Euler characteristic 倍となる。ここで μ は $H^n(M; \mathbb{Z})$ の fundamental class である。

この定理は次の三つの事に注意すれば vector bundle における [2] の証明と同様に示される。

i) Mが定理と同じ仮定の時、次の条件をみたす homology class $\bar{\mu} \in H_n(M;Z)$ が唯一つ存在する。 Mの任意の点bと inclusion map

$i;\, M \longrightarrow (M, M-b)$ に関して $i_* \bar{\mu} = w_b$

ここで $w_b \in H_n(M, M-b; Z)$ は orientation を定める homology class である。

ii) $\langle \mu, \bar{\mu} \rangle = 1$ なる $\mu \in H^n(M;Z)$ が唯一つ存在する。 μを fundamental class と呼ぶ。

iii) 次の性質をもつ diagonal set Δの開近傍 V がある。

a) $\Delta \subset V \subset M \times M$

b) Δ はVの deformation retract である。

i), ii) は [3] による。 iii) は topological manifold が ANR である事と、Kister の結果[4]を使えば得られる。

次に Euler class と obstruction との関係について述べる。obstruction の一般論は仮定する[5]

Bを有限次元の connected simplicial complex とする。Kister の結果により、 oriented m.b. $\xi;\, B \xrightarrow{i} E' \xrightarrow{j} B$ が与えられた時、これを一部けずった fibre bundle $\tilde{\xi} = \{E, j|_E, B, R^n, H_0(n)\}$ が得られる。 今、次の事を仮定しよう。

$\tilde{\xi}$において、$E - i(B) = E_0$ は simplicial complex で、Bの任意の頂点bに対して $(j|_E)^{-1}(b) \cap E_0 = F_{b,0}$ は E_0の sub complex となっている。 この時 下の定理が成立つ。

定理III $\quad \tilde{\mathcal{X}}(\xi) = \sigma$

ここで σ は ξの non zero cross section の primary obstruction である。

(証明) [6]の中の diagram を借用する。

bundle of coefficients が product bundle である事は $\tilde{\xi}$が oriented という事から容易にわかる。

次の diagram を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n-1}(F_{b,0}) \arrow[dl, "\delta_0"'] \arrow[dr, "\delta_1"] \arrow[dd, "\delta"] & \\
H^n(F_b, F_{b,0}) & & H^n(E_0, F_{b,0}) \\
 & H^n(E, F_{b,0}) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd, "\mu"] & \\
H^n(E, E_0) \arrow[uu, "\lambda_0"] \arrow[ur] \arrow[dr, "\mu_0"'] & & H^n(E, F_b) \arrow[uu, "\lambda_1"'] \arrow[ul] \arrow[dl, "\mu_1"] \\
0 \arrow[u] & H^n(E) & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ここで $\delta_0, \delta, \delta_1$ は coboundary homomorphism. $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1, \mu$ は inclusion map によってひきおこされた homo. また、まっすぐに続く矢印は exact sequence を表わす。

λ_0が mono である事は下の diagram よりわかる ($\approx$ は iso)

$$\begin{tikzcd}
H^0(b) \arrow[r, "\approx"'] & H^n(F_b, F_{b,0}) \\
H^0(B) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[r, "\approx"'] & H^n(E, E_0) \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

λ_1が mono である事は次の二つの diagram よりわかる。

$$\begin{tikzcd}
H^n(E) & H^n(E, F_b) \arrow[l, "\approx"'] \\
\sigma \in H^n(B) \arrow[u, "\approx"'] & H^n(B, b) \ni c(f) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[u, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

$$0 = H^0(B, b) \longrightarrow H^n(B, b) \longrightarrow H^n(E, F_{b,0}) \longrightarrow \cdots$$

(Relative Gysin sequence)

λ_0, λ_1 が mono である事と、初めの diagram の exactness より 次式が成立つ。

$\mu_0 \lambda_0^{-1} \delta_0 = -\mu_1 \lambda_1^{-1} \delta_1$

$\bar{d}(F_{b.0}) \in H^{n-1}(F_{b.0})$ を primary obstruction to contracting $F_{b.0}$ into y_0 とする。ここで y_0 は $F_{b.0}$ における頂点。

$\bar{d}(F_{b.0})$ の作り方[5]より

$$\delta_0(-\bar{d}(F_{b.0})) = U_b$$

更に[5]より.

$$\delta_1(\bar{d}(F_{b.0})) = p_1^*(c(f))$$

ここで f は b を $F_{b.0}$ の任意の頂点へうつす map.

$p_1 : (E_0, F_{b.0}) \longrightarrow (B.b)$ は projection.

以上の事と obstruction の naturality より定理が証明される。特に、例として oriented PL m. b. をもってくれば上の定理は成立っている。

特に M を oriented PL manifold とする。M の tangent PL m. b. を Kister の結果を使ってつくった fibre bundle を B とする

系 B が non zero cross section をもつ為の必要十分条件は $\bar{\chi}(B)=0$ となる事である。

参考文献

[1] Milnor. Microbundles I

[2] Milnor. Lectures on characteristic classes.

[3] Puppe. Topologie II

[4] Kister. Microbundles are fibre bundles.

[5] Steenrod. Topology of fibre bundles.

[6] Thom Espaces fibres en spheres et carres de Steenrod.

Lens space の K-ring について

京大 上部 恒和

奇数次元球面 S^{2n+1} に Z_p が free に operate してできる orbit space を lens space $L^n(p)$ という。この K-ring が次のように与えられることを示そう。

<u>定理.</u>

p を素数，$n = s(p-1)+r$ とするとき，

$$K(L^n(p)) \approx Z + (Z_{p^{s+1}})^r + (Z_{p^s})^{p-r-1}$$

こゝに，$(Z_a)^b$ は order a の cyclic group の b 個の直和を表わす。

なを，証明中に generator，および ring structure が明らかにされる。

fibre space $\pi : L^n(p) = S^{2n+1}/Z_p \to S^{2n+1}/U(1) = CP^n$ を考えよう。こゝに $K(CP^n) = Z[\mu]/\mu^{n+1}$ はよく知られている。ただし $\mu = \eta - 1$ で η は CP^n 上の canonical line bundle。

補題 1.

$\pi^! : K(CP^n) \longrightarrow K(L^n(p))$ は全射である。

補題 2

$K(L^n(p))$ は p^n- elements から成る。

$\pi^! \mu = \sigma$ とおく。このとき.

補題 3.

(i) $(1+\sigma)^p = 1$.

(ii) $p^{1+\left[\frac{n-i}{p-1}\right]} \sigma^i = 0$ （ただし p が素数のとき）

[補題の証明]

$H^0(L^n(p)) = H^{2n+1}(L^n(p)) = Z$, $H^{2i}(L^n(p)) = Z$ ただし
…, $H^j(L^n(p)) = 0$ (その他のjについて) はよく知られている。従って補題2は spectral sequence $H^* \Rightarrow K^*$ より明らか。又 Gysin sequence より $\pi^* : H^*(CP^n) \to H^*(L^n(p))$ は全射。従って $\pi^!\eta$ の chern class は $c(\pi^!\eta) = \pi^!(c(\eta)) = 1 + x$, x は $H^2(L^n(p))$ の generator. 故に $(\pi^!\eta)^p = 1$, すなわち $(1+\sigma)^p = 1$, 又 $\mu^{n+1} = 0$ より $\sigma^{n+1} = 0$, この二つの relation から補題3の(ii)は証明される。補題1については, π^* が全射なることと, 各 spectral sequence $H^*(CP^n) \Rightarrow K^*(CP^n)$, $H^*(L^n(p)) \Rightarrow K^*(L^n(p))$ が trivial なることより明らか。なを これらの補題について, 直接的証明が [1] にある。

[定理の証明]

補題1より ring として $\tilde{K}(L^n(p))$ は σ より生成される。又補題2と補題3の(ii)より $\sigma, \cdots, \sigma^r$ の order は p^{s+1}, $\sigma^{r+1}, \cdots, \sigma^{p-1}$ の order は p^s なることがわかる。従って, $K(L^n(p))$ の各 direct summand は, それぞれ $1, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{p-1}$ によって生成され, その ring structure は $\sigma^p = -\sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \sigma^i$ であることがわかる。

最近 Atiyah は奇数次元の sphere に有限群が free に operate してできる orbit space の K を求める一般的方法を与えている。よく知られているように, 偶数次元の sphere には Z_2 のみ free に operate し, この時の orbit space は real projective space で その K は容易に求まるから, この種の space に対しては, その K-環が一応求まることになる。なを lens space の場合に これを適用すると, いま, 求めた定理より やゝ一般に, 任意の正の整数 p に対して $K(L^n(p)) = Z[\sigma] / \sigma^{n+1}, (1+\sigma)^p - 1$ であることがわかる。しかし, この定理は最初の方法からも得られるし, これのみから素数でない q について group-extension を決めることは容易でない。

Lens space の immersion

東北大　内田伏一

<u>定理</u>

任意の奇素数 p と任意の正整数 n に対して

$$L^n(p) \subseteq R^{2\cdot[\frac{3n+4}{2}]}$$

$L^n(p)_0 = L^n(p) - \{x_0\}$ とするとき

<u>補題1</u>

$2n \geqq 4k+5$ 且つ $n \geqq k+3$ のとき

$L^n(p)_0 \subseteq R^{4n-2k}$ ならば $L^n(p)_0 \subseteq R^{4n-2k-2}$ である。

[証明] Hirsch の定理によって, $L^n(p)_0 \subseteq R^{4n-2k}$ が transversal 2-field をもつことを示せばよいが, この obstruction は

$H^{i+1}(L^n(p)_0, \pi_i(V_{2n-2k-1,2}))$　$2n-2k-2 \leq i \leq 2n-1$

に属するが, $r \geqq 3$ が奇数のとき, $\pi_i(V_{r+2,2})$ は $i \leq 2r$ において finite group で 2-primary component だけをもつことが容易に示されるので, $2n \geqq 4k+5$, 且つ $n \geqq k+3$ のとき 上の obstruction はすべて消える。従って $L^n(p)_0 \subseteq R^{4n-2k-2}$ が示された。(終)

<u>補題2</u>

$n \geqq 2k+1$ ならば $L^n(p)_0 \subseteq R^{4n-2k}$ である。

$L^n(p) \subseteq R^{4n+2}$ を出発点として，補題1を繰返し使うことによって証明される。この結果は
$L^n(p) \subseteq R^{2\cdot[\frac{3n+2}{2}]}$ と同値である。

<u>系.3</u>

$$L^n(p) \subseteq R^{2[\frac{3n+5}{2}]}$$

<u>定理4</u>

n が奇数のとき，$L^n(p) \subseteq R^{3n+3}$ である。

[証明]

補題2より m が偶数のとき $L^m(p)_0 \subseteq R^{3m+2}$ であり，補題1の証明と同様にして，$L^{m-1}(p)$ 上で transversal 2-field をもつことが示される。
即ち $L^{m-1}(p) \subseteq R^{3m}$ （終）

系3，定理4より 最初に述べた定理を得る。

Non-embeddability and non-immersibility of lens spaces mod 3

京大　小林貞一

1. まえがき

Lens spaces $L^n(p)$ の $\widetilde{KO}$ rings の構造の応用から得られる上部の定理 [1]：

「$L^n(p) \not\subset R^{2n+2L(n,p)+1}$，　$L^n(p) \not\subseteq R^{2n+2L(n,p)}$

但し $L(n,p) = \max\left\{ i \leq \left[\frac{n}{2}\right] \,\middle|\, \binom{n+i}{i} \not\equiv 0 \mod p^{1+\left[\frac{n-2i}{p-1}\right]} \right\}$」

は，任意の奇素数 p 及び自然数 n に対する一般的な結果であるが，少し細かく議論するために，$p=3$ 及び $n=3^m$ 又は $n=3^l+3^k$ の場合について調べる．上の定理から直ちに次が得られる．

「$n=3^m \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n}$，　$L^n(3) \not\subseteq R^{3n-1}$

$n=3^l+3^k \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n-1}$，　$L^n(3) \not\subseteq R^{3n-2}$」

我々の目的は，次の証明である．

「$n=3^m \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n+1}$，　$L^n(3) \not\subseteq R^{3n}$

$n=3^l+3^k \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n}$，　$L^n(3) \not\subseteq R^{3n-1}$」

証明は，$\subset$ 乃至 $\subseteq$ と仮定して矛盾を導くのであるが，その際，dual Pontrjagin class $\bar{p}$ が使われる．
$\pi : L^n(p) \longrightarrow CP_n$ を natural projection とするとき，

$$\tau(L^n(p)) = \pi^! \tau(CP_n) \oplus 1$$

（$\tau(M)$ は M の tangent bundle を表わす）と分解されること，

及び $L^n(p)$ が 2-torsion を持たないことから, Pontrjagin class $p(L^n(p))$ は, $p(CP_n)$ から求められる. 即ち $x \in H^2(L^n(p); Z_p)$ を generator とすると, mod p Pontrjagin class p 及 dual Pontrjagin class $\bar{p}$ は, 次で与えられる:

(1) $p(L^n(p)) = (1+x^2)^{n+1}$, $\bar{p}(L^n(p)) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^{i+1} \binom{n+i}{i} x^{2i}$

2. Non-embeddability of $L^n(3)$. [5]

1° 「$n = 3^m \ (m>0) \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n+1}$」 (中川, 小林)

Massey [4] が real projective spaces に対して行なった方法を用いる. $L^n(3) \subset S^{3n+1}$ と仮定し, $L^n(3)$ の tubular neighborhood を考える. このとき, associated sphere bundle を $(E, p, L^n(3)) = \nu$ とすると, Euler class $x = 0$ より, 分解する Gysin exact sequence

$$0 \to H^q(L^n(3); Z_3) \xrightarrow{p^*} H^q(E; Z_3) \xrightarrow{\psi} H^{q-n+1}(L^n(3); Z_3) \to 0$$

が得られる. $\psi(a) = 1 \in H^0(L^n(3); Z_3)$ なる元 $a \in H^{n-1}(E; Z_3)$ に対して,

(2) $\mathcal{P}^i a = p^* \alpha_i + a \cdot p^* \beta_i$

($\mathcal{P}^i$ は mod 3 reduced power operation) とおくと, β_i は, a のとり方によらない bundle ν の invariant で,

(3) $\beta_i = \bar{p}_i \ (\in H^{4i}(L^n(3); Z_3))$

であること, 及び subring $A^* = \sum A^q \subset H^*(E; Z_3)$ で, 次の性質を満足するものが存在することが証明される.

(4) A^* は cohomology operations の下で閉じている.

(5) $H^q(E; Z_3) = A^q + p^* H^q(L^n(3); Z_3)$, $0 < q < 3n$

(6) $A^q = 0$, $q \geq 3n$

また, (1), (2), (3) から,

(7) $a^3 = \mathcal{P}^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a \cdot p^* x^{n-1}$

が成立する. これらのことから, 矛盾が導かれる.

2° 「$n = 3^l + 3^k \ (l \geq k \geq 0,\ l \geq 1) \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n-1}$」

も, 同じ様にして証明される.

3. Non-immersibility of $L^n(3)$. [3]

ξ を canonical line bundle over CP^n とし, $\eta = \pi^! r \xi \ (\in KO(L^n(p)))$ とする. 但し r は real restriction である. $\bar{\sigma} = \eta - 2 \ (\in \widetilde{KO}(L^n(p)))$ とおくと, 上部の定理により,

(1) $p^{s+\varepsilon} \bar{\sigma} = 0$

である. 但し $n = s(p-1) + r \ (0 \leq r < p-1)$ で, ε は, $[\frac{r}{2}] = 0$ 又は ≥ 1 に応じて 0 又は 1 である. また,

(2) $\tau \oplus 1 = (n+1)\eta$, 但し $\tau = \tau(L^n(p))$

が成り立つ. [1]

今, $k > 0$ とし, $L^n(p) \subseteq R^{2n+1+k}$ with normal bundle ν と仮定する．このとき，

(3) $\qquad \tau \oplus \nu = 2n+1+k$

これらから，

(4) $\qquad \nu \oplus \{2ap^{s+\varepsilon} - (2n+2+k)\} = \{ap^{s+\varepsilon} - (n+1)\}\eta$

但し a は，$2ap^{s+\varepsilon} > 4n+3$ なる整数．

α を vector bundle over X とするとき，X^{α} をその Thom complex を表わすとする．stunted lens spaces に関する 上部-松永-戸田 の定理 [2]：

" natural homeomorphism

$$L^n(p) / L^{n-k-1}(p) \approx (L^k(p))^{(n-k)\eta}$$

が存在する"

を用いて，(4) より，$t = 2ap^{s+\varepsilon} - (2n+2+k)$ とおいて，

$$S^t (L^n(p))^{\nu} \approx L^{a\cdot p^{s+\varepsilon}-1}(p) / L^{a\cdot p^{s+\varepsilon}-n-2}(p)$$

を得る．

今，更に $k = 2l$ とし，normal bundle ν の Euler class $\chi \neq 0$ を仮定すると，全ての（Z_p 係数の）cohomology 群の同型を induce する map

$$g : S^t (L^n(p) / L^{l-1}(p)) \longrightarrow L^{ap^{s+\varepsilon}-l-1}(p) / L^{ap^{s+\varepsilon}-n-2}(p)$$

が存在することが証明される．

reduced power operations を用いて，かかる map g が存在し得ないことを示すことにより，次の結果が得られる．

3° 「$n = 3^m \quad (m > 0) \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n}$」

4° 「$n = 3^l + 3^k \quad (l-1 > k \geqq 0) \Rightarrow L^n(3) \not\subset R^{3n-1}$」

<u>注意</u>　Adams operations を用いることにより，4° における仮定 $l-1 > k \geqq 0$ は，$l \geqq k \geqq 0$ & $l > 1$ に弱めることが出来る．

<u>注意</u>　一般の素数 $p \geqq 5$ に対しても，上と同じような議論が出来る．(cf. [3])

文献

[1] T. Kambe, The structure of K_Λ-rings of the lens space and their applications, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 135-146.

[2] T. Kambe, H. Matsunaga and H. Toda, A note on stunted lens space, J. Math. Kyoto Univ., 5 (1966), 143-149.

[3] T. Kobayashi, Non-immersion theorems for lens spaces.

[4] W. S. Massey, On the imbeddability of the real projective spaces in Euclidean space, Pacific J. Math., 9 (1959), 783-789.

[5] R. Nakagawa and T. Kobayashi, Non-embeddability of lens spaces mod 3, J. Math. Kyoto Univ., 5 (1966), 313-324.

[6] H. Toda, On iterated suspensions II, J. Math. Kyoto Univ., 5 (1966), 209-250.

[7] F. Uchida, Immersions of lens spaces.