

第20回位相幾何学シンポジウム
講演予稿集

1970年7月28日～30日
於 信州大学理学部

10113

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1911

第 20 回 位相幾何学 シンポジウム

1970 年

7 月 28 日

- 1 川久保 勝夫 (阪大理)
Surgery of compact manifold I 1
- 2 松本 幸夫 (東大理)
Wall の Surgery について II 22
- 3 岡部 恒治 (東大理)
Kirby の 結果 について 39

7 月 29 日

- 1 一 樂 重 雄 (阪大理)
Low Dimensional Handlebody Theory 54
- 2 三 村 護 (京大教養)
On p -equivalence in the sense of Serre 74
- 3 土 屋 昭 博 (名大理)
Iterated loop spaces の Homology operations 99

7 月 30 日

- 1 Immersions & Differentiable Actions の
Cobordism 理論による考察 114

Surgery of compact manifolds I

by C.T.C. Wall

川又保勝夫 (阪大理)

今のところは次の §0 ~ §12 までを扱う。

I からは §0 ~ §6 を II からは §7 ~ §12 を分担する。

§0. Basic homotopy notions.

§1. Surgery below the middle dimension.

§2. Finite Poincaré complex.

§3. Statement of results.

§4. An important special case.

§5. The even-dimensional case.

§6. The odd-dimensional case.

§7. The bounded odd-dimensional case.

§8. The bounded even-dimensional case.

§9. Completion of proof in the general case.

§10. Manifolds structures on Poincaré complexes.

§11. Application to submanifolds.

§12. Submanifolds : other techniques.

§0. Basic homotopy notions.

Def. $\{1, \dots, n\}$ の subset 全体を object として
 morphism を inclusion と定義する category
 を \mathcal{Z}^n と書く。

Def. CW $(n+1)$ -ad として \mathcal{Z}^n 上の
 CW-complexes を objects として inclusion を
 morphisms として category \mathcal{C} の intersection
 preserving functor S を言う。

CW $(n+1)$ -ad に属する n 次の様式 intersection
 preserving functor S は、2 operations により

induce される。

$S(1, \dots, \overset{\leftarrow \text{この意味}}{i}, \dots, n) = A_i$
 $S(1, \dots, \dots, n) = X$) と書く。これは S を使って

解釈出来る。

1) Permutations.

2) injective map $i: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
 により induce される operation. 特許に

$\sigma_i: \mathcal{Z}^{n-1} \rightarrow \mathcal{Z}^n \quad (1 \leq i \leq n)$
 を $j \rightarrow j \quad (j < i), j \rightarrow j+1 \quad (j \geq i)$
 と定義する。

$$Q_i : (X, A_1, \dots, A_n) \longrightarrow A_i$$

絵を書くと



$$3) f_i : \mathbb{Z}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \text{ を}$$

$$f_i(\alpha) = \alpha \cup \{i\} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

$$f_i : (X, A_1, \dots, A_n) \longrightarrow (X, A_1, \hat{A}_n)$$

絵を書くと



4) Q_i の inverse image をとると $i=1$ のとき

$$S_i : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-1} \text{ が定義される}$$

$$S_i : (X, A_1, \dots, A_{n-1}) \longrightarrow (X, A_1, \dots, A_{i-1}, X, A_i, \dots, A_{n-1})$$

(番号 $i = X \in A_i$)

5) initial object をとると Category への empty set
 又は base point をとると category への σ_i の
 operation が 1 次で定義される。

$$\text{始めに } l_i : \{1, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n-1\}$$

$$\text{を } l_i(j) = j \quad (j < i) \quad l_i(j) = j-1 \quad (j > i)$$

と定義した map である。 $l_i \in S_i$ と $\sigma_i \in$
 次の様に定義する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i S(\alpha) &= \phi \\ \sigma_i S(\alpha \cup \{i\}) &= S(\ell_i \alpha) \end{aligned} \right) \alpha \in \{1, \dots, n\}$$

X, A_i を使, σ 書 $< e$ 次の様になる

$$\sigma_i : (X, A_1, \dots, A_{n-1}) \rightarrow (X, A_1, \dots, A_{i-1}, \phi, A_{i+1}, \dots, A_{n-1})$$

6) $(m+1)$ -ad S と $(n+1)$ -ad T 2つある時

$(m+n+1)$ -ad $S \times T$ を次の様に定義する。

T は $\{m+1, \dots, m+n\}$ 上の関数と思, σ

$\alpha \in \{1, \dots, m\}, \beta \in \{m+1, \dots, m+n\}$

$$S \times T(\alpha \cup \beta) = S(\alpha) \times T(\beta) \text{ として定義する。}$$

$$\text{つまり } (X, A_1, \dots, A_m) \times (Y, B_1, \dots, B_n)$$

$$= (X \times Y, A_1 \times Y, \dots, A_m \times Y, X \times B_1, \dots, X \times B_n).$$

7) $S : (n+1)$ -ad σ と n -ad cS を

$$(X, A_1, \dots, A_n) \xrightarrow{c} (X, A_1, \dots, A_{n-1} \cup A_n)$$

として定義する。

◎ CW $(n+1)$ -ad S の homology gr を

$$H_* (X; A_1 \cup \dots \cup A_n) \text{ として定義する。}$$

注 X, A_i は前に使, c notation

◎ CW $(n+1)$ -ad S の homotopy group は

次の様に L として定義する。

$$I^{\{1, \dots, n\}} \longrightarrow X = S(1, \dots, n)$$

cont map Σ 次 n 群 S に属する Σ 。

- 1) $I^\alpha \times O^{\alpha'} \longrightarrow S(\alpha)$
 for $\forall \alpha \subset \{1, \dots, n\}$
 $\alpha' = \{1, \dots, n\} - \alpha$
- 2) α の方が α' より $1 > \alpha$ ならば Σ は proper face は base point に α かつ Σ は trivial map である。

この map 全体に compact open topology を入れる。 base point は trivial map である。

Σ の時 $\forall r \geq 0$ は Σ (2)

$$\pi_{n+r}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_r(F(S))$$

と定義する。 $r \geq 1$ の時 group Σ $r \geq 2$ の時 abelian group となる。

§1. Surgery below the middle dimension.

simply connected の時 Σ は homological にあつかい
 だが Σ は non simply connected のため homotopical
 に考える。中間次元 Σ 下の surgery は π_1 が
 あるか否か Σ が Σ であるか否か (本質的
 には technique の上では π_1 は問題にならない)。

後々のために bordism を定義しておく.

定義 CW-complex X とその上の bundle ν と
整数 m に対し m 次元の時 abelian group
 $\Omega_m(X, \nu)$ を次の様に定義する.

$$\begin{cases} M : \text{closed smooth or PL manifold} \\ \phi : M \rightarrow X \text{ cont map} \\ F : \tau_M \oplus \phi^* \nu \text{ の stable trivialization} \end{cases}$$

(但し τ_M は M の tangent vector bundle
又は tangent micro bundle を示す)

よって triple (M, ϕ, F) として

- 和 : disjoint sum
- 0 元 : empty set
- relation $(M_1, \phi_1, F_1) \sim (M_2, \phi_2, F_2)$

を次の様にして入れる

compact $(m+1)$ -manifold $\exists N$

$$\partial N = M_1 \cup M_2$$

$$\psi : N \rightarrow X, \quad \psi|_{M_i} = \phi_i, \quad i=1,2.$$

すなわち, $\tau_{M_1} \oplus \phi_1^* \nu|_{M_1} \subset N$ の

inward normal frame $\in \oplus \tau_{M_1} \oplus \nu$ の

$\tau_{M_2} \oplus \phi_2^* \nu|_{M_2} \subset N$ の outward

normal frame $\in \oplus \tau_{M_2} \oplus \nu$ の両者を拡張

して $\tau_N \oplus \psi^* \nu$ の stable trivialization

かある時 $(M_1, \phi_1, F_1) \sim (M_2, \phi_2, F_2)$ である。

明らかである equivalence relation となる relation
 を 定義したものを $\Omega_m(X, \nu)$ と書く。

$\Omega(M \times I) = M \times 0 \cup M \times 1$ により

(M, ϕ, F) の inverse として $(M, \phi, F \oplus (H))$
 があるから $\Omega_m(X, \nu)$ は abelian group
 となる。

Theorem 1.1

M^m ($\partial M = \emptyset$ or $\neq \emptyset$) : smooth or PL
 manifold, $\phi : M \rightarrow X$ cont map
 $\nu : X$ 上 の vector or PL bundle
 $F : \tau_M \oplus \phi^* \nu$ の stable trivialization

$\Rightarrow \alpha \in \pi_{r+1}(\phi)$ は immersion

$S^r \times D^{m-r} \rightarrow M^m$ の regular homotopy
 class を 決定する (但し $r \leq m-2$)。

↑
 (この意味は α と F により 自然に 決まる)
 (意味は 証明の中で 示す, する))

(証明がある) Hirsch, Haefliger, Poenaru による
 次の immersion classification theorem がある。

Proposition V^r, M^m smooth or PL-manifolds

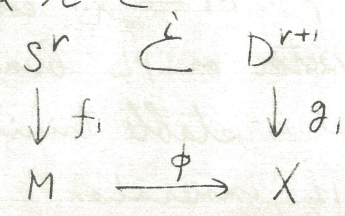
$f: V \rightarrow M$ cont map
 $V: (m-1)$ 以上の handle 分解
 handle decomposition $\{ \tau \}$
 $v \leq m$

$\Rightarrow \{ f = \text{homotopic to immersion or regular} \}$
 $\{ \text{homotopy class} \}$

\updownarrow 1:1 対応

$\{ \text{stable bundle monomorphism } \tau_V \rightarrow f^* \tau_M \}$
 $\{ \text{stable homotopy classes} \}$

α の代表元を



と書いた時 F による自然 ν

$$\tau_{S^r \times D^{n-r}} \longleftrightarrow f_1^* \tau_M$$

stable iso

が定まるので上の Proposition による自然 ν regular homotopy class に対応する。

Cor $m > 2r$ ならば $\alpha \in \text{surgery}$ 可能。

Theorem 1.2 (Th. 1.1 の仮定のとき)

M : compact, X finite simplicial complex

$\Rightarrow M$ 上の有限回の surgery で ϕ を k -connected に出来る。但し $m \geq 2k$ 。

$\therefore X$ を ϕ の mapping cylinder でおまかえられた M 上の ϕ の inclusion であると思えばよい。

$X-M$ の simplex で \dim が $\leq k$ のものを

\dim の低いものを順序を入れ替えてこれを $\{e_i\}$ とする。これにより i の induction を使えば証明する。

M を $(i-1)$ 回 surgery N_{i-1} と $\text{homotopy equivalence}$

$\psi_{i-1}: N_{i-1} \rightarrow X_{i-1}$ が得られたと仮定する。但し $X_0 = M, X_j = X_{j-1} \cup e_j$

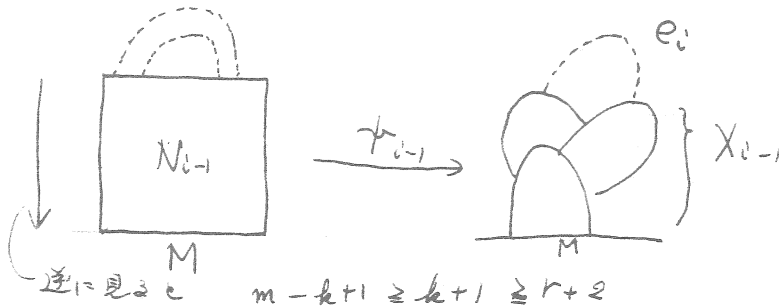
$N_0 = M \times I$ とする。

$N_{i-1} = M \cup M_{i-1}$

$\psi_{i-1}|_{M_{i-1}} = \phi_{i-1}: M_{i-1} \rightarrow X$

$\dim e_i = r+1$ とする。これは $\alpha \in \pi_{r+1}(X, X_{i-1})$

を決定する。



よって逆に \$S^1\$ は \$(r+2)\$ dimension 以上の handle を attach した結果である

$$\therefore \pi_j(N_{i-1}, M_{i-1}) = 0 \text{ for } j \leq r+1$$

$$\begin{array}{ccc} M_{i-1} & \xrightarrow{\phi_{i-1}} & X \\ \text{inclusion} \downarrow & & \uparrow \text{inclusion} \\ N_{i-1} & \xrightarrow[\psi_i]{\cong} & X_{i-1} \end{array}$$

よって次の diagram を得ることができる。

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{r+1}(M_{i-1}) & \rightarrow & \pi_{r+1}(X) & \rightarrow & \pi_{r+1}(\phi_{i-1}) & \rightarrow & \pi_r(M_{i-1}) \rightarrow \pi_r(X) \rightarrow \\ \downarrow \text{onto} & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \cong & \parallel \\ \pi_{r+1}(X_{i-1}) & \rightarrow & \pi_{r+1}(X) & \rightarrow & \pi_{r+1}(X, X_{i-1}) & \rightarrow & \pi_r(X_{i-1}) \rightarrow \pi_r(X) \rightarrow \end{array}$$

よって five lemma によって

$$\begin{array}{ccc} \pi_{r+1}(\phi_{i-1}) & \xrightarrow[\text{iso}]{\cong} & \pi_{r+1}(X, X_{i-1}) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \alpha' & \longrightarrow & \alpha \end{array}$$

\$\alpha'\$ は dimension が低いから Corollary 4 の surgery 可能。 handle を丁度 simplex \$e_i\$ の attaching map を対応してつけた。

$$N_i = N_{i-1} \cup \text{handle} \cong X_i = X_{i-1} \cup e_i$$

とある。 induction 終了。

- induction が完了した時 (X, X_j) k -connected
 - 逆から見ると (N_j, M_j) k -connected
 - $N_j \simeq X_j$
- ∴ $\phi_j : M_j \rightarrow X$, k -connected g.e.d. \square

§2 Finite Poincaré complex.

- X : finite connected CW-complex with base point $*$.
- manifold の 時 の first Stiefel Whitney class w^1 = 相当する τ のこと
- $w : \pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$ homo が given
($w \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ と見られる)
- $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$
- Λ の 元 に "bar" operation を 次の様に定義する。 Λ の 元 を $\sum n(g)g$ と書いた時
(但し $g \in \pi_1(X)$, $n(g) \in \mathbb{Z}$)

$$\overline{\left(\sum n(g)g \right)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum w(g) n(g) g^{-1}$$

- $C_*(X)$: X の universal covering space \tilde{X} の cellular chains からなる complex.
- $\pi_1(X)$ は \tilde{X} に cellular π_1 act するから $C_*(X)$ は $\pi_1(X)$ による Λ -module と考えられる。

定義: right Λ -module B に対し?

$$\begin{cases} H^*(X; B) \stackrel{\text{def}}{=} H(\text{Hom}_\Lambda(C_*(X), B)) \\ H_*^\Lambda(X; B) \stackrel{\text{def}}{=} H(C_*(X) \otimes_\Lambda B), \end{cases}$$

但し tensor product を定義する為 B に left Λ -module structure を次の様に入れる。

$$\lambda c \stackrel{\text{def}}{=} c \bar{\lambda}$$

⑤ coefficients を書かない時は $B = \Lambda$ と思ふ。

• ある元 $[X] \in H_n^\Lambda(X; \mathbb{Z})$ に関する

cap product を次の様に定義する。

但し \mathbb{Z} に Λ -module structure を $\pi_1(X)$ の action を trivial として入れる。

(注 left module として考えた時 $\pi_1(X)$ の元 g は $g \cdot 1 = 1$ として働くので trivial と限らなない。)

① $\pi_1(X)$ が finite の時。

$[X]$ を chain \mathbb{Z} で表わす transfer を tr と書くことにする。
 $tr: C^n(\tilde{X}) \rightarrow C_{n-r}(\tilde{X})$ を普通の cap product を定義する。

これより induce されたものとして

$$[X] \cap : H^r(X) \rightarrow H_{n-r}^\Lambda(X)$$

を定義する。

② $\pi_1(X)$ が infinite の時 finite cochain complex であることがよりよいことがよく知られている。

• 定義

$[X]_n : H^n(X) \rightarrow H_{n-r}^*(X)$ が任意の r について isomorphism の時 $[X]$ を fundamental class, X を formal dimension n の Poincaré complex と呼ぶ。

• 定義 X が finite connected Poincaré complex ならば X が finite connected CW-complex である fundamental class $[X]$ を代表するものは

$$\int_n : C^*(X) \rightarrow C_*(X)$$

chain homotopy equivalence である simple である時は言う。但しこれだけの base は $C_*(X)$ は all である。その dual basis を $C^*(X)$ の basis とする。その時上の map の Whitehead torsion が zero の時 simple と言う。

• 定義 finite Poincaré pair (Y, X) とは \int_n が代表する fundamental class である。

$$[Y] \in H_n^*(Y, X; \mathbb{Z}) \text{ がある。}$$

$$\int_n : C^*(Y) \rightarrow C_*(Y, X)$$

が simple homotopy equivalence である X が fundamental class $[Y]$ を含む finite Poincaré complex の時は言う。

§3 Statement of results.

X : finite Poincaré complex
 ν : X 上の vector (or PL-micro) bundle として
 stably ν は Spivak normal fibration に fibre
 homotopy equivalent である。
 ω : $\pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$ homomorphism

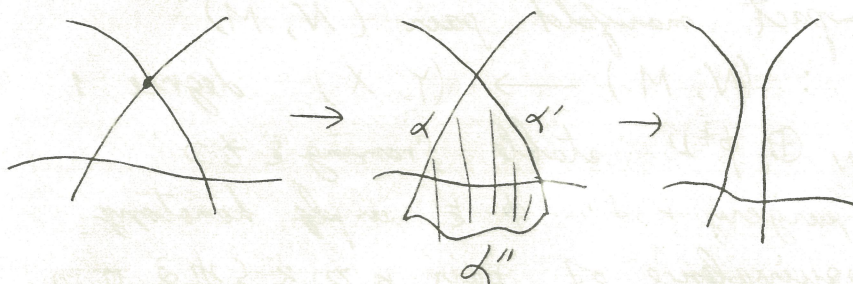
この時 $\pi_1(X)$, $\omega: \pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$, $m \bmod 4$
 の 3 つの ω は depend する abelian group
 $L_m(\pi_1(X), \omega)$ が $\neq 0$ である。

- M : closed manifold
 - $\phi: M \rightarrow X$ degree 1 の map
 - $F: \tau_M \oplus \phi^*\nu$ の stable trivialization
 - $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega'(\nu)$ (ν の first Stiefel Whitney class)
 - $\chi: (M, \phi, F)$ を表わす bordism class
- この時 次の Main theorem を示す。

定理 $\exists \theta(X) \in L_m(\pi_1(X), \omega)$

- χ が simple homotopy equivalence である
 代表元を χ と
 $\implies \theta(X) = 0$
- $\theta(X) = 0$ ならば $m \geq 5$
 $\implies \chi$ は simple homotopy equivalence である
 代表元を χ と。(この surgery 可能である)

結ぶ時地の double point を消すように
 する。 (N, M) 1-connected である
 2次元の3角形 Δ の map $\alpha, \alpha', \alpha''$
 3角形の - 辺は $\alpha'' \subset M$ 也可。 α は \dim の
 局所 Δ embedding である。



上の図の様な3角形 Δ を α による regular homotopy
 により交点をとり除ける。 α は imbeddable
 である surgery すればよい。 後は代数的な計算で
 ϕ が simple homotopy equivalence であることを示す。
 • $\dim [Y]$ odd の時

$M, N, (N, M)$ の間には simple homotopy
 equivalence がある。 省略

§5 even - dimensional case.

定義 Special Hermitian form $e, w: \pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$ homo,

$\Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1(X)]$, $G: \Lambda$ -module α Λ -free and based

$\lambda: G \times G \rightarrow \Lambda$

$\mu: G \rightarrow V_h = \Lambda / \{w - H^k w\}$

$A \lambda(x)(y) = \lambda(x, y)$ is a linear map

$A\lambda : G \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(G, \Lambda)$ or simple isomorphism is, 2. Under (I) ~ (V) is satisfied 2.1.3
 when (G, λ, μ) is a group.

i) $x \in G$ fixed, $y \mapsto \lambda(x, y)$ is Λ -homo : $G \rightarrow \Lambda$.

ii) $\lambda(y, x) = (-1)^k \overline{\lambda(x, y)}$ ($x, y \in G$)

iii) $\lambda(x, x) \equiv \mu(x) + (-1)^k \overline{\mu(x)}$ ($x \in G$)

iv) $\mu(x+y) - \mu(x) - \mu(y) \equiv \lambda(x, y)$ ($x, y \in G$)

v) $\mu(xa) = \bar{a} \mu(x) a$ $x \in G, a \in \pi_1(X)$ \square

o standard plane is Special Hermitian form 2. 2.1.9 base $\{e, f\}$ is 2.5

$\mu(e) = \mu(f) = 0, \lambda(e, f) = 1$ or $i = \frac{1}{5}$.

o Kernel = standard plane's direct sum

o 定義

$L_n(\pi_1(X), \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{Special Hermitian form 全体} \\ = \text{直和} = \text{和}, 2 \text{ 和} \lambda \text{ 和 } \pi \text{ semi-group} \} / \sim$

且 $G_1 \sim G_2$

$$\Leftrightarrow G_1 \oplus K_1 \cong G_2 \oplus K_2$$

$K_i : \text{Kernel } i=1, 2 \quad \square$

$(G, \lambda, \mu) \oplus (G, -\lambda, -\mu) \cong \text{Kernel}$ or 2.1.3.1.5

上 $L_n(\pi_1(X), \omega)$ is abelian group is 2.3.

α のものが上の様にならなくとも surgery (の
 結果が) 与えられる。それで「 α に関係した
 量」の surgery invariant な量であり
 この量がある性質を満たす時 逆に surgery (を
 kill 出来る) という不変量を見つけた。

◎ 定義

- $SU_r(\Lambda)$: standard kernel $\{e_i, f_i, 1 \leq i \leq r\}$ の module automorphism α λ, μ を保つもの全体。
- $TU_r(\Lambda)$: $SU_r(\Lambda)$ のうち $\{e_i\}$ の r 次元 space を invariant にするもの。
- $UU_r(\Lambda)$: $TU_r(\Lambda)$ のうち $\{e_i\}$ の各 e_i を fix するもの。
- $$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (H)^k & 0 \end{pmatrix}$$

◎ $RU(\Lambda)$: $TU(\Lambda)$ と σ により generate した $SU(\Lambda)$ の subgroup.

◎ 定義 $L_m(\pi_1(X)) \stackrel{\text{def}}{=} SU(\Lambda) / RU(\Lambda)$

$L_m(\pi_1(X))$ は abelian group なることを示し
 $m=2k+1$ と書ける時 m 次の因子を表現
 するのは \wedge の構造で $(-1)^k$ の λ を用いる
 $\therefore m \pmod{4}$ により等しい時 $L_m(\pi_1(X))$ は等しく
 なる。(但し m even の時も同様) \therefore この事から一般に
 L_m は $\pmod{4}$ により等しい時等しいことを示す)

◦ obstruction $O(X)$ の定義.

$$O(X) = [\tilde{\alpha}] \in L_m(\pi_1(X))$$

により定義する。

これは surgery invariant であり (つまり代表元によらず well define)

$O(X) = 0 \implies$ surgery $L_2(TU(N))$ の action
 に相当) α を σ の直和の形に出来る。

つまり $K_{2k+1}(M_0, 2U) \rightarrow K_k(U)$ は simple
 isomorphism となり $K_k(M) = 0$ となる \square
 詳しくは講演の時に。

Wall の surgery について II

松本幸夫

§0. Wall [12] において (non-simply-connected を含む) manifold の surgery obstruction group $L_m(\pi, W)$ が導入されました。

Wall [12] の第7～第9章まではもっと一般の manifold n -ad \wedge の拡張をあつかい、 L_m -functor の periodicity の幾何学的とらえあつかいなどをやっています。第10章以下は L_m の色々な application について述べています。例えば第10章では Novikov-Browder-Sullivan の理論の拡張、第11章では "homotopy-embedding" を smoothing or triangulate する問題、第12章では Farrell の fibering th. に類似の問題を含む色々な technique について述べています。第13章以下は予告だけにありますか。論文自身はあらかわいていない(?)
— 少くも日本には、ない。 — ようです。

これらの結果をひとつひとつ紹介するのは消耗

な感じもするので、ここで“は 2 つに 1 つ”って
 まとめた 11 とおきます。ひとつは具体的な
 $L_m(\pi, W)$ が “どこまで” なされているかということ
 もうひとつは、最も具体的でかつ重要と思われ
 れる homotopy Torus の分類 (な応用)
 です。(ですから Wall [12] の後半を使いますか”
 の紹介 という形ではありません。)

§1. 具体的な計算結果

まず当然のことながら $\pi = \{e\}$ 単位群の
 場合

$$\text{Theorem (1.1)} \quad L_m(e) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (m \equiv 0 \pmod{4}) \\ \mathbb{Z}_2 & (m \equiv 2 \pmod{4}) \\ 0 & (m: \text{odd}) \end{cases}$$

これかうとに Kerwair - Milnor [4] による
 homotopy-sphere の分類に使われたことはい
 までありません。

$\pi = \mathbb{Z}_2$ については Wall [11], あるいは S. L.
 Medrano [8] に詳しい記述があります。

$$\text{Theorem (1.2)} \quad L_m(\mathbb{Z}_2, +) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & L_m(\mathbb{Z}_2, -) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \\ 0 \\ \mathbb{Z}_2 \\ 0 \end{cases} \\ 0 & \\ \mathbb{Z}_2 & \\ \mathbb{Z}_2 & \end{cases}$$

いずれも $m: \pmod{4}$ は 上から
 $0, 1, 2, 3$.

Medrano [8] は $L_m(\mathbb{Z}_2, w)$ と Browder - Livesay invariant [3] との対応を詳しく調べています。Th. 1.2 の結果は homotopy-sphere 上の fixed point free involution (T, Σ) の分類問題にはかかせません。($\pi_1(\Sigma/T) \cong \mathbb{Z}_2$ から予想されるように。)

他の有限群については \mathbb{Z}_p の場合に部分的結果が知られています。

Theorem (1.3) (R. Lee [5])

$$L_{4k+3}(\mathbb{Z}_p) = 0 \quad p: \text{odd prime.}$$

この計算は極めて代数的です。彼 (Lee) はこの結果を S^{4k+3} 上の free \mathbb{Z}_p PL action の分類に使っています。

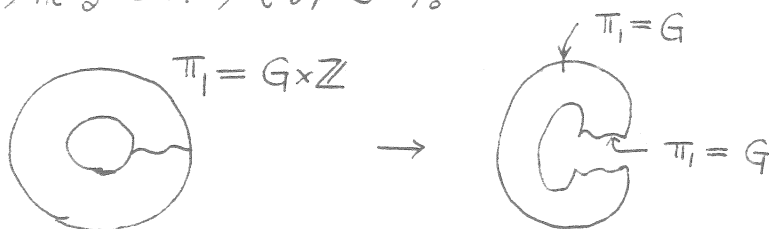
さて Shaneson [9] にある次の結果はあとで "homotopy tori の分類に必要になる。" 自身 L_m -functor の性質としては注自ずべきもので"す。

Theorem (1.4) 次の split exact seq. π がある。

$$0 \rightarrow L_n^s(G, w) \xrightarrow{\ell_*} L_n^s(G \times \mathbb{Z}, w_1) \rightarrow L_{n-1}^h(G, w) \rightarrow 0$$

ここには L_n^s は surgery して simple homotopy equivalent にするのための obstruction つまり Wall の L_n と同じ。 L_n^h は 単に homotopy equivalent にするのための obstruction です。

idea は 明解で、 $G \times \mathbb{Z}$ を基本群に持つ manifold の surgery は \mathbb{Z} の generator に 直交する方向に、 G を基本群とする codim. 1 の submanifold で 切り開いて n -次元の G -surgery と $(n-1)$ -次元の G -surgery に 帰着させることができるというものです。



もとの idea は Browder [2] にさかのぼれると思います。 $G \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ の特別な場合 筆者 [7] も同様の結果を得ました。

上の定理を使うと $\pi_1 = n\mathbb{Z}$ (free abelian group of rank n) に対する L_m を inductive に計算することが出来ます。この時、 $Wh(n\mathbb{Z}) = 0$ に注意すると、 $L_m^s = L_m^h$ となります。
例えば (次元)

Corollary 1 $L_m(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_2 \end{cases}$ $L_m(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \end{cases}$

11が1以上から $m \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$.

これらと Wall [13] は 次のようにまとめられますが、この π_1 は homotopy tori の分類には便利でず。

Corollary 2

$$L_m(n\mathbb{Z}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \text{Hom}(H^i(T^n; \mathbb{Z}), L_{m-i}(\mathbb{Z}))$$

その他 R. Lee [6] によつて $\widetilde{L}_{2k+1}(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \cong L_{2k+1}(\mathbb{Z}) \oplus L_{2k+1}(\mathbb{Z})$ 等の結果もあります。

以上が「主なもの」だと思いますが、その他に知られていいるかどうか筆者は知りません。

§2. Homotopy tori の分類

Wall [12] は 第10章で、Novikov-Browder [1] と Sullivan [10] の理論を 統一的な観点から論じています。

Definition (homotopy triangulation)

compact PL manifold X 上の homotopy-triangulation とは $f: M \rightarrow X$, M : PL-manifold, f は simple homotopy equivalence かつ $f|_{\partial M} = \text{PL homeo}$ なるものを。

(f_1, M_1) と (f_2, M_2) とは \exists PL homeo $h: M_1 \rightarrow M_2$ s.t. $f_2 \circ h \simeq f_1 \pmod{\partial M_1}$ かつ equivalent であるとき、 X の equivalence class を $\mathcal{S}(X, \partial X)$ と書く。

Theorem (2.1) (Wall [12], Sullivan [10])

次の set の exact sequence がある。 ($m \geq 5$)

$$\mathcal{S}(X \times I, X \times \partial I \cup \partial X \times I) \xrightarrow{\eta} [X \times I / \partial(X \times I), G/PL] \xrightarrow{\theta} L_{m+1}(\pi X)$$

$$\xrightarrow{\partial} \mathcal{S}(X, \partial X) \xrightarrow{\eta} [X / \partial X, G/PL] \xrightarrow{\theta} L_m(\pi X)$$

左端は $\mathcal{S}(X \times I, \partial(X \times I))$ です。この sequence は明らかに左の方に $1 < \infty$ まで延長できます。

η, θ, ∂ の定義

$\eta: \mathcal{S}(X, \partial X) \rightarrow [X / \partial X, G/PL]$ の定義

$\mathcal{J}(X, \partial X)$ の元を homotopy triangulation $\phi: M \rightarrow X$ (c.f. Def. p6) であらねすと、 $(\phi^{-1})^* \nu_M - \nu_X$ は trivial spherical fibration の PL-reduction とみなせ、 $\mathcal{E}_2 [X, G/PL]$ の元になります。
 $\phi|_{\partial M}$ は PL-homeo だから、実は $[X/\partial X, G/PL]$ の元になります。こうして η の定義ができました。

$\theta: [X/\partial X, G/PL] \rightarrow L_m(\pi_1 X)$ の定義

一般に X finite Poincaré complex, $\nu \in X$ 上の k -PL bundle $M \xrightarrow{\phi} X$ を degree 1 map $F: \phi^* \nu \oplus \tau_M \rightarrow$ trivialization とするとし、 (M, ϕ, ν, F) の bordism class は、 $\pi_{m+k}^S(X^\nu)$ ($= \pi_{m+k}^S(X^\nu)$ は Thom-complex) の degree 1 element と対応し、後者は X の Spivak normal fibration ν_X の PL-reduction $\nu \rightarrow \nu_X$ と 1-1 に対応します。 $\chi = \mathbb{Z}$, $\chi \in [X/\partial X, G/PL]$ とすると、 χ は \in^m ($m: \text{largest-trivial}$) の PL-reduction とみたと ν_X (この場合、 X は manifold) と加えて $\nu_X \oplus \in^m$ の PL-reduction と対応し、これは、上の対応に \mathcal{E}_2 得られる normal map (M, ϕ, ν, F)

の surgery obstruction ε $\theta(x) \in L_m(\pi_1 X)$ とすれば"511。

$\partial: L_{m+1}(\pi_1 X) \rightarrow \mathcal{S}(X, \partial X)$ の定義

任意の $\theta \in L_{m+1}(\pi_1 X)$ は $(X, \partial X) \xrightarrow{id} (X, \partial X)$ と、ある $(M, \partial M) \xrightarrow{\phi} (X, \partial X)$ (且し $\partial X \cong \partial M$) との間の cobordism W , $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ (ϕ : simple h. eq) $(W, X, M, \partial X) \xrightarrow{\varepsilon} (X \times I, X \times 0, X \times 1, \partial X)$ を surgery して S-cobordism による surgery obstruction ε に実現される $\partial(\theta)$ とした $(M, \partial M) \xrightarrow{\phi} (X, \partial X)$ なる homotopy-triangulation ε とすれば"511。

以上の定義から Th(2.1) は比較的形式的な議論から出てきます。

Th.(2.1) を使って homotopy-torus の分類, もっと一般に $\mathcal{S}(T^n \times D^k, T^n \times \partial D^k)$ の分類をするわけですが, そのあたりに Wall [13] に従って書くとします。

Theorem (2.2) 次の bijection がある。

$$H^3(T^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathcal{S}(T^n) \quad n \geq 5$$

$$H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathcal{S}(T^n \times D^k, T^n \times \partial D^k)$$

$$n+k \geq 5.$$

この bijection は covering $T^n \rightarrow T^n$ に関して natural である。

証明は次のようにする。

Surgery obstruction $L_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z})$ について。

$f: N \rightarrow T^n$ が π_1 -iso をひきおこして \mathbb{Z} になる。

$g: (N, \partial N) \rightarrow (G/PL, *)$ に対応する surgery obstruction (see. p7 の $\theta: [X/\partial X, G/PL] \rightarrow L_m(\pi_1 X)$ の定義) を計算します。p5 にあるように

$$L_m(\pi\mathbb{Z}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \text{Hom}(H^i(T^n; \mathbb{Z}), L_{m-i}(1))$$

と書けますから上の obstruction $\theta(N, f, g)$

は各 $x \in H^i(T^n; \mathbb{Z})$ に $L_{m-i}(1)$ の元

を対応させる homomorphism とは f だけ

だけでいいです。ところが x は $N \xrightarrow{f} T^n$

(π_1 -iso) で N にひきおこせば (f^*x は)

N をどんな風にも \mathbb{Z} として simply conn.

(二) すなわち "方向" を与えておきます。 - 亦、

Simply connected surgery obstruction について

Sullivan [10] は次のように定式化しておきます。

M^m かつ simply conn. $\dim \geq 5$ のとき、

$$g: (M, \partial M) \rightarrow (G/P, *)$$

の surgery obstruction は

$$\left\{ \begin{array}{l} m: \text{odd} \text{ のとき } 0 \\ m \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき } W(M) \cdot g^* \mathcal{K} [M] \\ \quad \mathcal{K} = k_2 + k_6 + k_{10} + \dots \in H^{4*+2}(G/P, \mathbb{Z}_2) \\ \quad W(M) \text{ は } M \text{ の total Stiefel-Witney class,} \\ m \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき } L(M) \cdot g^* \mathcal{L} [M] \\ \quad \mathcal{L} = l_4 + l_8 + l_{12} + \dots \in H^{4*}(G/P, \mathbb{Q}) \\ \quad L(M) \text{ は } M \text{ の total Hirzebruch class.} \end{array} \right.$$

$\theta(N, f, g) \in L_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z})$ は次のように与えられ

ます。但し $N = D^r \times T^n$, $r = k+n$.

Lemma (2.3)

$$\theta(N, f, g)(x) = \begin{cases} 0 & r-i: \text{odd} \\ f^*(x) g^*(k_{r-i}) [N, \partial N], r-i \equiv 2 \pmod{4} \\ f^*(x) g^*(l_{r-i}) [N, \partial N], r-i \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

induction で証明されます。(n=1 は明らか)

$n=0$ のとき $(N, \partial N) = (D^r, \partial D^r)$ であり、

$W(N) = 1 \in \mathbb{Z}_2$, $L(N) = 1 \in \mathbb{Q}$ に注意すれば、Lemma は Sullivan の定式化の ξ の Z である。

$(n-1)$ 次元 Z を示すことができる。 $N = M \times S^1$ とし $\pi_1(M) \xrightarrow{\cong} \pi_1(T^{n-1})$ とする。 $f: (N, \partial N) \rightarrow (G/PL, *)$ に対する obstruction $\theta(N, f, g)$ は shaneson に示すように

$$\theta(N, f, g) = \theta(M \times I, f', g) + \theta(M, f', g, i).$$

Case 2 $\rightarrow 1$ に示す。

$x \in H^i(\square \times S^1; \mathbb{Z})$ が $x = y \cup [S^1]$ と書けるとする。 ($y \in H^{i-1}(T^{n-1}; \mathbb{Z})$)

$$\theta(M, f', g, i)(x) = \theta(M, f', g)(y)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} 0 \\ f'^*(y^{i-1}) g^*(k_{r-1-(i-1)}) [M, \partial M] \\ f'^*(y^{i-1}) g^*(l_{r-1-(i-1)}) [M, \partial M] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \\ f^*(y \cup S^1) g^*(k_{r-1}) [M \times S^1] \\ f^*(y \cup S^1) g^*(l_{r-1}) [M \times S^1] \end{cases} \end{aligned}$$

$p: T^{n-1} \times I$ の "両端" を同一視する map p を示す。 明らか $p^*(y \cup S^1) = 0 \in H^i(T^{n-1} \times I)$

$$\therefore \theta(M \times I, f, g)(x) = \theta(M \times I, f, g)(y \cup S^1) = 0$$

以上より $x = y \cup [S^1]$ のとき O.K.

次に $x \in H^i(T^n; \mathbb{Z})$ から $H^{i-1}(T^{n-1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{U[S^1]} H^i(T^n; \mathbb{Z})$ の image となるものとする、前項とは逆に

$$\theta(M, f: g \circ i)(x) = 0$$

$$\theta(M \times I, f, g)(x) = \begin{cases} 0 \\ \textcircled{1} \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} f^*x \cdot g^*(k_{r-1}) [M \times I, \partial] \\ f^*x \cdot g^*(l_{r-1}) [M \times I, \partial] \end{array} \right. \end{cases}$$

により やはり Lemma から $T \circ T = 0$.

注意するべきは $\theta: [T^n \times D^k / \mathbb{Z}^n \times \partial D^k, G/PL] \rightarrow L_{n+k}(\pi_1 T^n)$ を上のように与える。これは任意の $n \geq 0, k \geq 1$ について 定義される ということである (すなわち $n+k \geq 5$ のとき 実際には surgery obstruction となる)

Lemma (2.4) $\theta: [T^n \times D^k / \mathbb{Z}^n \times \partial D^k, G/PL] \rightarrow L_{n+k}(\pi_1 T^n)$

は任意の $n \geq 0, k \geq 1$ について injective である。

(証明) $n=0$ のとき $\theta: [D^k / \partial D^k, G/PL] \rightarrow$

$L_k(1)$ は $\pi_k(G/PL) \rightarrow L_k(1) \cong P_k$ に

一致する。すなわち Sullivan の "定理" $\forall k \geq 1$

に π_1 は injective. ($k \neq 4$ のとき同様.)

(2) $k = 4$ のとき $\pi_k(G/PL) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.)

($n-1$) まで示されたことより $D^k \times T^{n-1} \subset D^k \times T^n$

を考へる。これより $D^k \times T^{n-1} / \partial D^k \times T^{n-1} \subset$

$D^k \times T^n / \partial D^k \times T^n$ に包含され、これは 1-1 対応

(6) Puppe の exact sequence を示す。次の diagram:

$$[D^{k+1} \times T^{n-1} / \partial D^{k+1} \times T^{n-1}, G/PL] \rightarrow [D^k \times T^n / \partial D^k \times T^n, G/PL]$$

$$\downarrow \theta_{k+1, n-1}$$

$$\downarrow \theta_{k, n}$$

$$0 \rightarrow L_{n+k}(\mathbb{Z}) \rightarrow L_{n+k}(\mathbb{Z})$$

$$\rightarrow [D^k \times T^{n-1} / \partial D^k \times T^{n-1}, G/PL] \rightarrow 0$$

$$\downarrow \theta_{k, n-1}$$

$$\rightarrow L_{n+k-1}(\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

を考へる。 $\theta_{k+1, n-1}$, $\theta_{k, n-1}$ は 帰納法から injective

だから上の diagram から $\theta_{k, n}$ は injective.

(Q. E. D.) $D^{k+1} \times T^{n-1}$

($D^k \times T^{n-1} / \partial D^k \times T^{n-1} \subset D^k \times T^n / \partial D^k \times T^n$ の mapping cone は $D^{k+1} \times T^{n-1}$)

最後に θ は onto か? を考えます. 今のために
 $\theta_{n,k} : [D^k \times T^n / \partial D^k \times T^n, G/PL] \rightarrow L_{n+k}(n\mathbb{Z})$ の
 cokernel を $C_{n,k}$ とします.

Lemma (2.5) $C_{n,k} \cong H^{4-k}(T^n; \mathbb{Z}_2), \begin{cases} n \geq 0 \\ k \geq 1 \end{cases}$

(証明) $n=0$ のとき, $0 \rightarrow \pi_k(G/PL) \rightarrow L_k(1) \rightarrow C_{0,k} \rightarrow 0$.
 Sullivan [10] によれば $\pi_k(G/PL) \rightarrow L_k(1)$ は $k \neq 4$
 のとき同型. $k=4$ のとき $\mathbb{Z} \xrightarrow{x^2} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

$$C_{0,k} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (k=4) \\ 0 & (k \neq 4) \end{cases} \cong H^{4-k}(*; \mathbb{Z}_2)$$

($n-1$) を示すことにする. 次の diagram

$$\begin{array}{ccccc} [D^{k+1} \times T^{n-1} / \partial D^{k+1} \times T^{n-1}, G/PL] & \rightarrow & [D^k \times T^n / \partial D^k \times T^n, G/PL] & \xrightarrow{\theta_{k,n}} & [D^k \times T^{n-1} / \partial D^k \times T^{n-1}, G/PL] \\ \downarrow \theta_{k+1, n-1} & & \downarrow \theta_{k,n} & & \downarrow \theta_{k, n-1} \\ 0 \rightarrow L_{n+k}(n-1\mathbb{Z}) & \rightarrow & L_{n+k}(n\mathbb{Z}) & \rightarrow & L_{n+k-1}(n-1\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow C_{n-1, k+1} & \rightarrow & C_{n,k} & \rightarrow & C_{n-1, k} \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

7.5 $C_{n,k} \cong C_{n-1, k+1} \oplus C_{n-1, k}$

$$\cong H^{4-(k+1)}(T^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \oplus H^{4-k}(T^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$$

(帰)

$$= H^{3-k}(T^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \oplus H^{4-k}(T^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$$

$$= \sum_{i+j=4-k} H^i(T^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \otimes H^j(T^1; \mathbb{Z}_2)$$

$$= H^{4-k}(T^n; \mathbb{Z}_2) \quad (\text{Q.E.D.})$$

(Kürzeth)

Lemma(2.4), (2.5) は $\forall n \geq 0, \forall k \geq 1 \Rightarrow$ \mathbb{Z} 成'立'します。 $\epsilon=3$ かつ Th.(2.1) に'よ'る 次の diagram は $n+k \geq 5$ かつ \mathbb{Z} 成'立'します。

$$0 \rightarrow [D^{k+1} \times T^n / \partial D^{k+1} \times T^n; G/\mathbb{Z}] \rightarrow L_{n+k+1}(n\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{J}(D^k \times T^n, \partial) \rightarrow 0$$

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

($k+1 \geq 1$)

$$\mathcal{J}(D^k \times T^n, \partial) \cong C_{n, k+1} \cong H^{4-(k+1)}(T^n; \mathbb{Z}_2)$$

$$= H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2)$$

この式が $\left(\begin{matrix} n \geq 0, & k \geq 0 \\ n+k \geq 5 \end{matrix} \right)$ かつ \mathbb{Z} 成'立'するときは明らか。

$T^n \xrightarrow{\text{Cov}} T^n$ に'関'する naturality は容易です。

(終リ)

文 献

- [1] Browder, W. "Homotopy Type of diff. manif." Proc. of the Aarhus Symp. 1962
- [2] ———, "Manifolds with $\pi_1 = \mathbb{Z}$ " Bull. A.M.S. 1966
- [3] ———, and Livesay "Fixed point free involutions on n -spheres" Bull. A.M.S. 73. (1967)
- [4] Kervaire - Milnor "Groups of homotopy spheres I" ~~Bull.~~ Ann. of Math. 77 (1963)
- [5] Lee, R. "Computation of Wall groups" (preprint)
- [6] ———, "Bott periodicity of the Wall's obstruction groups and the unlinking problem".
- [7] Matsumoto, Y. "Hauptvermutung for $\pi_1 = \mathbb{Z}$ " Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1969
- [8] Medrano S.L. "Involutions" (thesis)
- [9] Shaneson J.L. "Wall's surgery obstruction groups for $G \times \mathbb{Z}$ " (thesis)
- [10] Sullivan, D. "Triangulating and Smoothing homotopy equivalences and homeomorphisms"

- [11] Wall, C.T.C. "Free piecewise linear involutions on spheres" Bull. A.M.S. 74. (1968)
- [12] ———, "Surgery of compact manifolds"
- [13] ———, "On homotopy Tori and the annulus theorem" Bull. London M.S. (1969)

§0 はじめに.

Kirby と Siebenmann は topological manifold の三角形分割問題及び基本予想を否定的に解決した。これによって、topological topology が P.L. topology から独立した一つの分野として確立するに至った。ここでは特にその証明の根幹をなす handle straightening の理論及び三角形分割問題の周辺について、Kirby [1] を中心に解説する。

§1. Kirby の図式

基本予想あるいは分割問題を解決する為には handle ごとに P.L. homeo に直せるか? あるいは P.L. structure を compatible に入れることが可能か? と考えていく立場を Kirby は取った。この際 handle の厚みは本質的でない。ここで下の命題 $HS_{k,n}$ が提出される。

<定義> Q^q を top mfd Q の中の k -handle とは

$$h: B^k \times R^n \longrightarrow Q \quad (k+n=q) \text{ なる embedding } \alpha \text{ こと.}$$

<命題 $HS_{k,n}$ > Q を P.L. mfd とする, h を Q の中の k -handle とし, $h|_{S^{k-1} \times R^n}$ が P.L. embe. かつ, P.L. locally flat であるとする。その時 $\exists h_t: h$ の isotopy s.t.

$$(1) h_t|_{B^k \times B^n} : \text{P.L.}$$

$$(2) h_t|_{(S^{k-1} \times R^n) \cup (B^k \times (R^n - IB^n))} = h|_{-}, \text{ 概 } \exists \epsilon > 0$$

(上の命題を満足するような h を straightenable という)

この命題が成立すれば、当然のことながら、三角形分割問題

は肯定的に解決されることわかる。(Kirby [1])

<定理 1.1.> $HS_{k,n}$ O.K. for $\forall k, n$ s.t. $k+n=q$
 $\Rightarrow \forall q$ -manifold は triangulable

さて Kirby は $HS_{k,n}$ を条件つきで証明した。それは次の定理である

<定理 1.2.> Q^q が P.L. manifold, $q \geq 5, k \neq 3$
 $\Rightarrow HS_{k,n}$ O.K.

この定理の証明には Kirby's diagram とおもうべき巧妙な方法を用いることができる。大まかな証明を述べる。次の lemma は簡単な計算で得られる。 $(k \geq 4$ のときの) (Kirby [1] にもと一般的に形で証明されている)

<Lemma 1.3> $\forall G: B^k \times R^n \rightarrow B^k \times R^n$ homeo

s.t. ① R^n factor に関し bounded, ② $G|_{B^k \times R^n} = id$

$\Rightarrow \exists \Gamma, \exists H$, s.t. 下の diagram が commutative

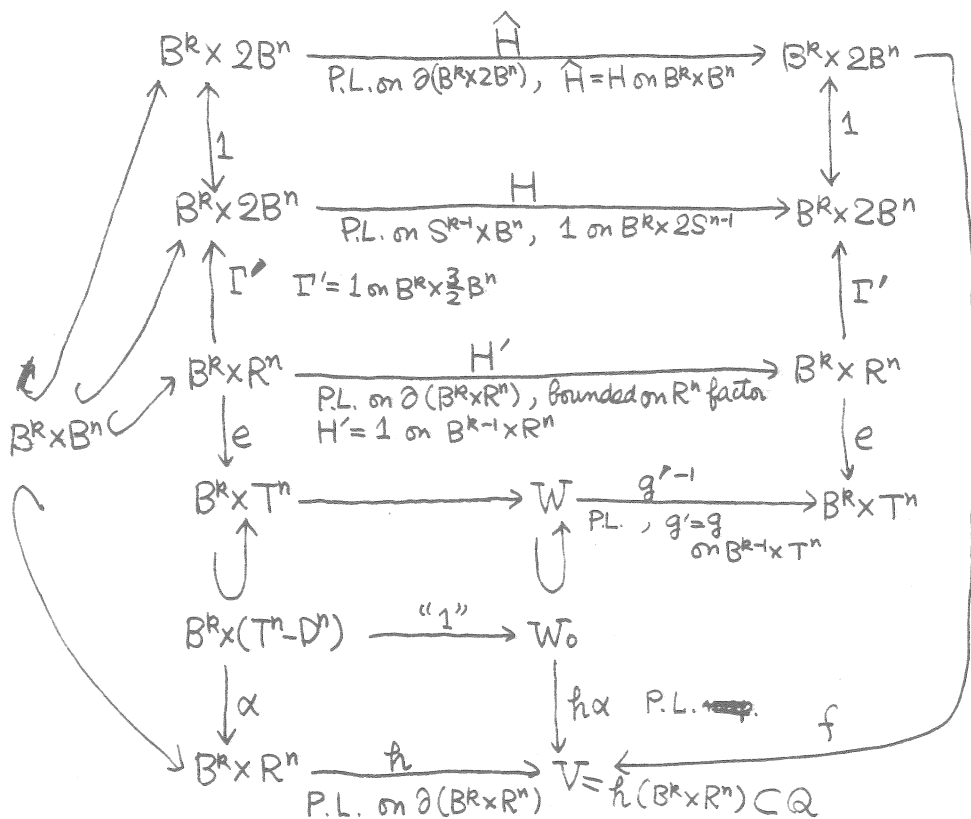
$$\begin{array}{ccc} B^k \times 2B^n & \xrightarrow{H} & B^k \times 2B^n \\ \uparrow \Gamma & \curvearrowright & \uparrow \Gamma \\ B^k \times R^n & \xrightarrow{G} & B^k \times R^n \end{array}$$

かつ $\Gamma|_{B^k \times \frac{3}{2}B^n} = 1, H|_{(B^k \times 2S^{n-1}) \cup B^k \times 2B^n} = 1$.

さて Kirby の diagram とは次頁にあるようなものである。これを順に説明してゆこう。(定理の成立しているとする)

[e] $e': R^n \rightarrow T^n$ を (普通の) covering map とする

と $e = 1 \times e'$ とおく。



Kirby's diagram

[α] — $\exists \iota : 5B^n \rightarrow T^n$ P.L. embedding to $e(B^n) \cap \iota(5B^n)$

$= \emptyset$ に取ることも出来る。 $\iota(\partial B^n) = \partial D^n$ とおくと $\iota(B^n) = D^n$ 。

Hirsch によつて、 $\alpha' : T^n - D^n \rightarrow R^n$ なる immersion が存在

して、 $\alpha' \circ e (: R^n \xrightarrow{e} T^n \xrightarrow{\alpha'} R^n) = \text{id. on } B^n$ とできる

この α' を用いて、 $\alpha = 1 \times \alpha'$ とする。

[W_0] — $B^R \times (T^n - D^n)$ に $(h\alpha)^{-1}$ で P.L. structure を入れた

manifold を W_0 とおく。 h を $B^R \times T^n$ で P.L. と考えてよい
(の近傍)

から W_0 に $S^{k-1} \times D^n$ の近傍 N をつけ加えて, compatible P.L. structure を N に置く. (Zeemann [2])

[1] — topological manifold としての identity (P.L. とは限らぬ)

[W] — $W_0 \cup N$ は topological に $T^n \times B^k$ から, disk: D_0^{n+k} を引いたものと考えてよい。
 ∂D_0^{n+k} と D_0^{n+k} の間のふちを含まぬ

open set を \tilde{A} とおく。 $n+k \geq 5$ であるから G.P.C., Browder [3], Wall [4] 等の結果から $\tilde{A} \approx S^{n+k-1} \times (0,1)$ になる。 $W' = (W_0 \cup N) \cup \gamma$

$(S^{n+k-1} \times (0,1))$ (但し $\gamma: S^{n+k-1} \times (0,1) \rightarrow \tilde{A}$) とおく。

そうすると $S^{n+k-1} \times \{1\}$ は $n+k$ -ball を bound する。この P.L. ball をつけ加えたものを $W = W' \cup_{\eta} B^{n+k}$ とおく。 η は上のぬい合わせを示す。

[g] — $\gamma(S^{n+k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$ が flat sphere in ∂D_0^{n+k} であるから Schoenflies th. により $T^n \times B^k$ 上で $n+k$ -ball を bound する。一方 W 上でも明らかに $n+k$ -ball を bound している。よって

\mathbb{R} の g が定義できる $g(x) = \begin{cases} "1" (x) ; & x \in T^n \times B^k - D_0^{n+k} - \gamma(S^{n+k-1} \times \{\frac{1}{2}\}) \\ \text{cone-wise extension ;} & x \text{ otherwise} \end{cases}$

[g'] — g が $\partial(T^n \times B^k)$ 上で P.L. に延びているから $g(B^k \times T^n) = g(I \times B^{k-1} \times T^n) = W$ に P.L. h-cobordism theory を適用して, $\exists g' : B^k \times T^n = (0 \times B^{k-1} \times T^n) \times I \longrightarrow W ; \text{P.L.}$

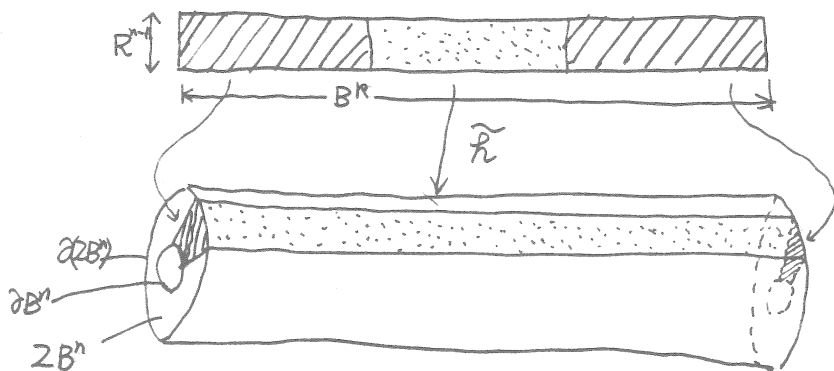
s.t. $g' = g$ on $B^{k-1} \times T^n$ とできる。

[H'] — $g'^{-1}g$ の lifting を H' とおく。

[H], [Γ'] — lemma 1.3 より与えられる。

[Ĥ] — ここで induction を用いる。 $\tilde{K}: B^k \times R^{n-1} \rightarrow \partial(B^k \times ZB^n)$

P.L. embedding を下図のようにとる。



$H\tilde{K}$ は open k -handle in the $(k+(n-1))$ -sphere

として induction より、 $\exists H_t: \partial(B^k \times ZB^n) \rightarrow \partial(B^k \times ZB^n)$, $0 \leq t \leq 1$

s.t. $H_0 = H|_{\partial(B^k \times ZB^n)}$, $H_1|_{\tilde{K}(B^k \times B^{n-1})}$ が P.L. map $\partial(B^k \times ZB^n)$

$-\tilde{K}(B^k \times B^{n-1}) \cup (\partial B^k \times B^n) \approx B^{k+n-1}$ であるから、Alexander

trick を用いて、 $\partial(B^k \times ZB^n)$ 上で P.L. に直せる。 $\exists H_t$

$:\partial(B^k \times ZB^n) \hookrightarrow \partial(B^k \times ZB^n)$, $1 \leq t \leq 2$, s.t. H_2 は P.L. map,

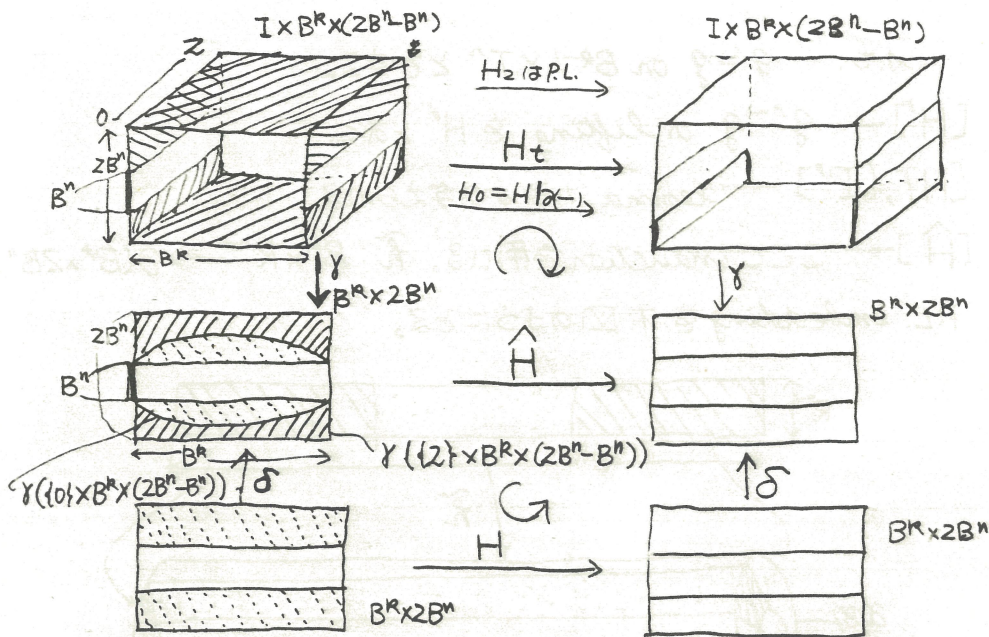
$H_t|_{S^{k-1} \times B^n} = H|_{S^{k-1} \times B^n}$.

\hat{H}_t は この H_t $0 \leq t \leq 2$ を用いて 次の図が可換と

なるように作る。

[f] — $f = (h\alpha) \circ (\Gamma')^{-1}$ とする。 \hookrightarrow 3頁の図が可換

となるようにする。



但し δ は \square を homeo で行先の \square に押し込める homeo
 γ は上半分の \square を行先の上半分の \square に, 下半分も同様に
 入る map.
 \hat{H} は $B^R \times B^n$ では id, \square では H を通って δ で引き戻す map
 \square では H_t を通って γ で引き戻す map とすればよい。

このようにして作った map と空間は Kirby diagram の様に
 書いてある条件を満たす。

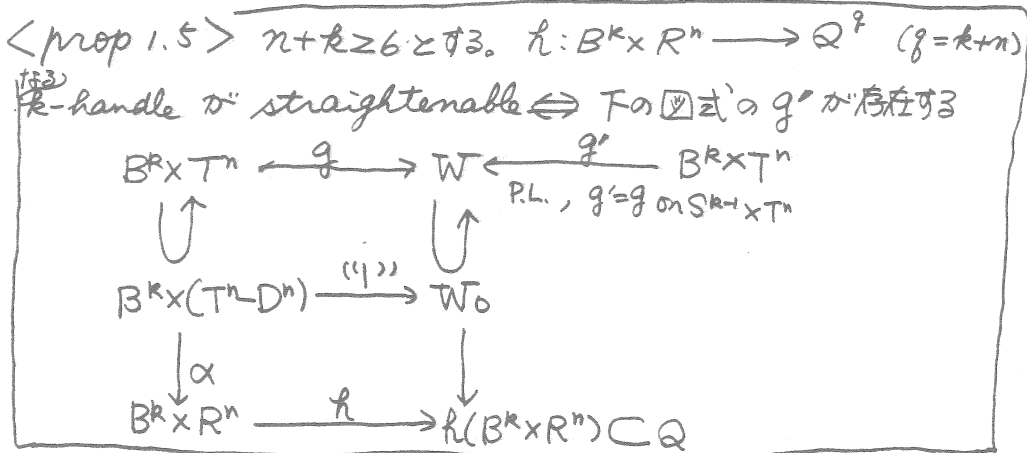
さて, 証明に入る。Alexander trick を用いると $\exists \hat{H}_t$
 s.t. $\hat{H}_0 = \hat{H}$, $\hat{H}_1 = P.L.$, \hat{H}_t は $(B^R \times 2B^n)$ fix. この \hat{H}_t を
 用いて $f_t = \begin{cases} \hat{H}_t \hat{H}^{-1} f^{-1} h(x) & \text{if } h(x) \in f(B^R \times 2B^n) \\ h(x) & \text{if } h(x) \notin f(B^R \times 2B^n) \end{cases}$

とおけばよい。induction の最初の step は Zeemann [2],

Siebenmann [] による。 ■

<注意 1.4> Kirby の図式の下部部分に $B^k = \{0\} = B^0$ を入れて
 用いると $n \neq 4$ の n -次元 stable homeo conjecture (従って
 annulus conjecture) が解ける。むしろ、stable homeo conj
 の証明の方法を handle straightening にまで拡張したと云うべき
 か? ■

Kirby の diagram の本質を煮つくと 次の proposition
 が出る。



<rough proof> (\Leftarrow) g' を入れて Kirby-diagram を構成する
 と、 H は $H|_0 = 1$ とできて \hat{H} を作る必要はない (id. induction の
 仮定は必要はない)。P.L. Lemma 1.3 の代りにもっと一般的な Lemma を要する。

(\Rightarrow) 条件の $\exists \bar{h}: I \times B^k \times R^n \rightarrow I \times h(B^k \times R^n)$
 s.t. ① $\bar{h}(0, x, y) = (0, h(x, y))$, ② $\bar{h}|_{\{1\} \times B^k \times B^n}$
 は P.L., ③ $\bar{h}|_{I \times S^{k-1} \times R^n} = id \times h|_{\text{---}}$ 。この \bar{h} をとて
 して、次の diagram を構成する。

$$\begin{array}{ccc}
 I \times B^R \times T^n & \xrightarrow{\bar{g}} & I \times W \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 I \times B^R \times (T^n - D^n) & \xrightarrow{\text{"1"}} & I \times W_0 \\
 \downarrow I \times \alpha & & \downarrow \bar{R}(I \times \alpha) \\
 I \times B^R \times R^n & \xrightarrow{\bar{h}} & I \times V
 \end{array}$$

$\bar{g} \in [0, 1/4] \times B^R \times T^n$ のときは $\bar{g} = 1 \times g$ とおき
 $[3/4, 1] \times B^R \times T^n$: $\bar{g} = 1$ とおき

(ここで与えるのは $\bar{h} | [3/4, 1] \times B^R \times R^n \in P.L.$ と考えることが出来る)

残りの部分は定理 1.2 の証明の中で g を作った時と同じこと
 をすれば良い。 $\bar{g}: (I \times B^R \times T^n, I \times S^{R-1} \times T^n) \rightarrow (I \times W, I \times W_0)$

と考えると \bar{g} は simple homotopy equivalent になっている。

一方 $\bar{g} | I \times S^{R-1} \times T^n$ が P.L. であるから、 $\exists \bar{g}': I \times B^R \times T^n \rightarrow I \times W$ P.L. homeo s.t. $\bar{g}' = \bar{g}$ on $I \times S^{R-1} \times T^n$ である。よって $g' = \bar{g}' | I \times B^R \times T^n$ とおけば良い。 ■

§2 $\pi_k(\text{Top}/\text{PL})$ と P.L. structure の分類

$\text{Top}_m (\text{PL}_m)$ を k -simplex が fibre preserv.

(P.L.) homeo $f: \Delta^R \times R^m \rightarrow \Delta^R \times R^m$ で $f|_{\Delta^R \times 0}$

= id となるものの集合であるよって semi simplicial complex

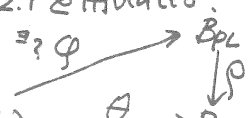
とする。 $\pi_k(\text{Top}_m, \text{PL}_m) = [(\Delta^R, \partial \Delta^R); (\text{Top}_m, \text{PL}_m)]$

, $\pi_k(\text{Top}, \text{PL}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_k(\text{Top}_m, \text{PL}_m)$ とおくと。 Wall [5]

Lees [6] から、次の定理が導かれる。

$$\langle \text{定理 2.1} \rangle \quad \pi_r(\text{Top}, \text{PL}) = \begin{cases} 0 & (k \neq 3) \\ \mathbb{Z}_2 & (k=3) \end{cases}$$

$B_{\text{PL}}, B_{\text{Top}}$ を PL.-bundle, Top-bundle の classifying space とすると. $\text{Top/PL} \longrightarrow B_{\text{PL}} \longrightarrow B_{\text{Top}}$ が fibration であることがわかる。よって, $E(V_Q)$ から $B_{\text{Top}} \wedge \text{map}$ を $B_{\text{PL}} \wedge \text{lift}$ する為の obstruction は 定理 2.1 を用いれば, $H^4(Q; \mathbb{Z}_2)$ にのみ存在する。



又, lift が exist したとすると lift の homotopy class と $H^3(Q; \mathbb{Z}_2)$ が 1:1 に対応することが直ちにわかる。Smoothing の議論 (Milnor [7]) と同様にして。

$\langle \text{定理 2.2} \rangle$ Q を top mfd とし, $Q \supset Q_0$ を submfd で P.L. structure

をもつとし, $\partial Q \subset Q_0$ とする。もし, $H^4(Q, Q_0; \mathbb{Z}_2) = 0$ ならば, $Q \times \mathbb{R}^k$ は $Q_0 \times \mathbb{R}^k$ の P.L. structure を拡張した P.L. structure をもつ。また, $Q \times \mathbb{R}^k$ の P.L. structure mod $Q_0 \times \mathbb{R}^k$ は up to concordance の意味で $H^3(Q, Q_0; \mathbb{Z}_2)$ によって分類される。

一方, handle などの extension と prop 1.5 の証明の方法から, 次の定理が導かれる。

$\langle \text{定理 2.3} \rangle$ $q \geq 5$ かつ $\partial Q \subset Q_0$ あるいは $q \geq 6$ かつ $Q_0 \subset \text{int } Q$ とし, Q が 2 つの P.L. structure Σ, Θ をもち, Σ と Θ が Q_0 で一致しているとする。もし, Σ と Θ が concordant mod $Q_0 \Rightarrow \text{id}: Q \rightarrow Q$

は Σ から Θ への P.L. homeo \wedge ε -isotopic mod Q_0 である

次の定理は stable な議論を元に戻す役割を果たす。

<定理 2.4> $q \geq 5$ かつ $\partial Q \subset Q_0$, または $q \geq 6$ かつ $Q_0 \subset \text{int} Q$

$\Rightarrow Q \times R^{\varepsilon}$ の P.L. structure の concordance class mod $Q_0 \times R^{\varepsilon}$ は Q の P.L. structure の concordance class mod Q_0 に 1:1 対応する

本質的には次のことを示せば良い。 $Q \times R$ の P.L. structure の concordance class の中に $\Sigma \times R$ というものが存在する, 但し Σ は Q の P.L. structure. これは定理 1.2 の証明法を注意深く適用すれば, handle straightening 出来るか否かは stable には R を cross しても変わらないことがわかり, handle ごとく議論で証明される。 ■

<系 2.5> Q, Q_0 は 2.4 と同様, \tilde{Q}_0 を Q の nbd in Q とし,

$Q \times R = \tilde{Q}_0 \times 0$ が P.L. であるような P.L. structure Θ を λ して与えるとする。そのとき, \exists P.L. structure Θ on $Q \times R$ s.t. ① $\Theta|_{Q \times (-\infty, -2] \cup [2, \infty)} = \Sigma|_{-}$, ② $\Theta|_{Q_0 \times 0} = \Sigma|_{Q_0 \times 0}$, ③ $Q \times 0$ は P.L. submanifold となっている。

<証明> 定理 2.4 から, $\exists \Lambda$: P.L. structure on Q s.t. $\Lambda \times R$ と Σ とが concordant. 定理 2.3 から, $\exists \hat{h}_t: (Q \times R)_{\Sigma} \rightarrow (Q \times R)_{\Lambda \times R}$ ε -isotopy s.t. \hat{h}_1 が P.L. Edward-

Kirby [8] の isotopy extension theorem ^(により) $\hat{h}_t: \mathbb{Q} \times [-1, 1]$ を適当に extend することができる。ここで $h_t^{-1}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ において P.L. structure を導入する。

さて次の定理が我々の目標であった。

<定理 2.6> \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_0 は 2.4 と同様、その時。

(1) $H^4(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_0; \mathbb{Z}_2) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}_0$ の P.L. structure は \mathbb{Q} に extend できる。

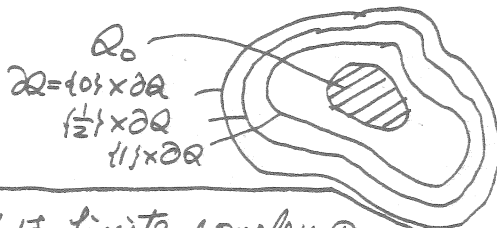
(2) \mathbb{Q} に P.L. structure があるとき、 \mathbb{Q} の P.L. structure は up to isotopy (fix \mathbb{Q}_0) の意味で $H^3(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_0; \mathbb{Z}_2)$ において分類される。

<証明> (i) $\partial\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_0$ のときは 2.2-2.4 より明らか

(ii) $\mathbb{Q}_0 \subset \text{int}\mathbb{Q}$ のときは、 $[0, 1) \times \partial\mathbb{Q}$ を考える。但し

$[0, 1) \times \partial\mathbb{Q}$ は open collar of $\partial\mathbb{Q}$ 。(i) の case から、 $\mathbb{Q} - \partial\mathbb{Q}$ に P.L. structure が入るから、 $(0, 1) \times \partial\mathbb{Q}$ にも P.L. submanifold の structure が入る。故に系 2.5 より、 $(\frac{1}{2}) \times \partial\mathbb{Q}$ が P.L. submfd になるより P.L. structure を少し変え、 $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} - [0, \frac{1}{2}) \mathbb{Q}$ に注意せよ。

§3 若干の応用と考察



<定理 3.1> $\forall M^m$ compact mfd は finite complex の homotopy type をもつ

<証明> $\partial M = \emptyset$ のとき M を \mathbb{R}^s (s 十分大) に埋め込み

normal bundle ν を考える。系 2.5 より, sphere bundle $S(\nu)$ が P.L. submfd としてよい。よって, disk bundle $D(\nu)$ も又そうであると考えることが出来る。 $D(\nu) \simeq M$ よりよい。 $\partial M \neq \emptyset$ のときは double ZM で同様のことをする。 ■

<定理 3.2> (Whitehead torsion の topological invariance)
 compact mfd に simple homotopy type を一意に決めることが出来る。とくに $\mathcal{h}: M_I \rightarrow M_\theta$ (Σ, θ は compact manifold M 上の 2 つの P.L. structure) が homeo $\Rightarrow \text{Wh}(\pi_1(M)) \ni \tau(\mathcal{h}) = 0$.

<証明> 上の定理 3.1 の $D(\nu)$ の simple homotopy type を M の simple homotopy type とせよ。 M が P.L. mfd ならばこの定義は普通の定義と等しくなることは直ちにわかる。この定義が imbedding によらばいことは次の事実によって示される。 s が十分大きければ, 2 つの imbedding $i_0, i_1: M \rightarrow R^s$ が isotopic とは $\exists F: M \times I \rightarrow R^s \times I$ s.t. $F|_{M \times 0} = i_0, F|_{M \times 1} = i_1$ 。この F による $M \times I$ の埋め込みによる normal bundle ν に Hirsch [9][10] 著に於ける topological normal bundles の stable uniqueness up to isotopy を考えれば $D(\nu(i_0))$ と $D(\nu(i_1))$ の ^(P.L.) concordance ができる。これは定理 2.3 を適用せよ。 ■

<定理 3.3> Q^q ($q \geq 7$) は topological handle body 且 ∂Q が handle body decomposition をもっている (特に $\partial Q = \emptyset$ ならば) $q \geq 6$ で成立つ。

<証明> まず $\partial Q = \emptyset$ のとき。coordinate nbd ごとに handle body decomposition をひきいてゆく。ball neighborhood は、それ自体 handle body。さて Q の中の ^(closed) submfd A にまで handle body structure が入っているとす。今勝手な座標近傍 (U, φ) をとる。但し、 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeo into. φ^{-1} によって U に P.L. structure を入れると、系 2.5 によって $\partial A \cap U$ は P.L. submfd of U と考えてよい。 U の中で $\partial A \cap U$ から出発して $U - A$ に handle body structure を拡張してゆく。 U の取り方をうまくすると (例之は $2B^n$ に homeo に取り、handle body structure が B^n を覆うようにすると) 全体を cover できる。 $\partial Q \neq \emptyset$ のときは、 ∂Q の collar nbd に handle body structure を入れておき、そこから出発する。

さて、我々が最初に述べた、三角形分割問題の否定的解決は、次のように formulate される。

<定理 3.4> 6次元 manifold で P.L. structure をもたないものが存在する。

<証明> $H^3(S^3 \times S^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ であるから、定理 2.6 により、(up to isotopy の意味で) 2つ違う P.L. structure がある。それを、それぞれ Σ, Θ とする。そのとき、 $f: (S^3 \times S^2)_{\Sigma} \rightarrow (S^3 \times S^2)_{\Theta}$ P.L. map, a.t. f は id に isotopic ではない。 $R^4 \times S^2$ の 2つの copies を $f \times \text{id}: R^4 \times S^2 - (0 \times S^2) = S^3 \times S^2 \times R^2$ でぬい合わせる。こうしてできた M^6 は P.L. structure をもたない。これは $f: (S^3 \times S^2)_{\Sigma} \rightarrow (S^3 \times S^2)_{\Theta}$ による P.L. map に

isotopic でよいことより導かれる。

さて、定理 3.3 は非常に強力な結果で、これにより、次元 ≥ 6 の topological manifold について、topological Morse function が得られることがわかる (top Morse function については M. Morse [11] を参照)。同時に、trajectory のようなものを考え合わせることにによりほとんど differentiable case と parallel に topological k -cobordism theorem を得ることが出来る。(Okabe [12], Kirby-Liebenmann [13])。一方この証明の中で、rearrangement theorem ^(index の) (ie. 小さい順に handle をつけることができる) ということが導かれるが、*) これによって、top mfd に、P.L. の手法を導入できる。

*) 一般的に rearrangement theorem は次元 ≥ 6 で証明されるが (Okabe [12]), 1-skeleton (ie. 0-handle, 1-handleのみからなる) 0, 1-handle をおいて含むような submfd) の存在は次元によらない。

- <References> (詳しくは Kirby[1] の References を見よ)
- [1] Kirby: "Lectures on triang. of mfd's" (mimeographed)
 - [2] Zeeman: "Seminar on combinatorial top"
 - [3] Browder: "Structure on $M \times R$ "
 - [4] Wall: "On bundles over a S^n with fibre R^k "
 - [5] = : "On homotopy tori and annulus ~~theorem~~^{theorem}"
 - [6] Lees: "Immersion and surgeries on top mfd"
 - [7] Milnor: "Micro bundles I"
 - [8] Edwards-Kirby: "Deformations of spaces of imbe"
 - [9] Hirsch: "On normal bundles"
 - [10] = : "On tub nbd of P.L and top mfd"
 - [11] Morse: "Top. non-deg. functions on a compact mfd"
 - [12] Okabe: "Existence of top. Morse f. and its application" to-appear
 - [13] Kirby-Siebenmann: to-appear
 - [14] Siebenmann: "Disruption of low dim handlebody th'y"

Low Dimensional Handlebody Theory

— 樂重雄 (阪大理)

L.C. Siebenmann の論文 "Disruption of Handlebody Theory by Rohlin's Theorem" (preprint) を紹介する。

(§1. 主要な結果

次の Theorem 0, 1, 2 は, PL, Diff. どちらの category でも成り立つ。簡単のために PL の場合だけ扱う。

Theorem 0. 次の命題のうち、少くとも一つは誤りである。

(1) W^5 が $S^3 \times S^1 \times \mathbb{R}$ と proper homotopy equivalent な (noncompact) PL manifold とすると, closed PL manifold M^4 が存在して, $M^4 \times \mathbb{R} \cong W^5$ 。

(2) W^4 が $S^3 \times \mathbb{R}$ と proper homotopy equivalent なら, $\exists M^3$ s.t. $W^4 \cong M^3 \times \mathbb{R}$

(3) 3次元 Poincaré Conjecture

注1) \cong は PL homeomorphic を表わす。

注2) proper homotopy equivalent とは, compact set の 連続写像 f が compact な continuous map (proper map) の Category \mathcal{Z} の homotopy equivalence をいふ。

Definition $(W^n; V^{n-1}, \hat{V}^{n-1})$ が h-cobordant (mod boundary) とは, 次のときをいふ。

W^n : compact (connected) n -manifold

V, V' : disjoint compact $(n-1)$ -submanifold of ∂W s.t.

$$\partial W - (\text{int } V \cup \text{int } V') \cong \partial V \times [0, 1] \cong \partial V' \times [0, 1]$$

$\partial V \hookrightarrow W, \partial V' \hookrightarrow W$ が homotopy equivalence

Theorem 1. $k=0, 1$, n は 2 \mathcal{Z} fix.

次の様な invertible PL h-cobordism

$(W^5; V^4, \hat{V}^4)$ n は $(W^4; V^3, \hat{V}^3)$ が存在する。

(perhaps both possible)

$$\textcircled{1} \quad V^4 \cong V^4 = B^k \times T^{4-k}$$

$$V^3 \cong V^3 = B^k \times T^{3-k}$$

② Top. Category \mathcal{C} は product .

③ PL Category \mathcal{C} は product \mathcal{C} ではない。
 (ただし、任意の finite odd order covering
 も PL product \mathcal{C} ではない。)

Theorem 2 $j=0$ 又は 1 を fix する。

次の様な PL homeomorphism

$$\alpha: I \times M^4 \longrightarrow I \times M^4 \quad \text{又は}$$

$$\alpha: I \times M^3 \longrightarrow I \times M^3 \quad \text{が存在する。}$$

(perhaps both possible)

$$\textcircled{1} \quad M^4 = B^j \times T^{4-j}$$

$$M^3 = B^j \times T^{3-j}$$

$$\textcircled{2} \quad \alpha|_{\partial(I \times M)} = \text{id.}$$

③ α は Top. \mathcal{C} には $\alpha(I \times M)$ を \mathcal{C} に
 identity に isotopic .

④ PL では, α は $I \times \partial M \cup 0 \times M$ を $f \times L$ として $\text{id}_{I \times M}$ に isotopic ではない。(±5に, どのような finite odd order covering of α も存在する。)

Theorem 3. closed, orientable, $w_2 = 0$ なる topological manifold として, topological handlebody 分解をもたないものが, 5次元又は4次元に存在する。

注) 6次元以上の (closed) topological manifold は, Kirby - Siebenmann ([5]) によつて, Top. Handlebody 分解を持つ。([6])。

§ 2. 証明のあらまし

ここでは, Theorem 0 と 3 の証明を
与える。 Theorem 1, 2 は, Theorem 0 と同
様の考え方で証明される。

X を compact PL manifold with
boundary ∂X とする。このとき, homotopy
triangulation (mod boundary) $\mathcal{S}(X, \partial X)$
を次の様に定義する。

Definition $\mathcal{S}(X, \partial X) = \{ f: W \rightarrow X$
 $\mid \text{homotopy equivalence, } f|_{\partial W}: \text{PL homeo.} \} / \sim$
で,

$f_0: W_0 \rightarrow X$ と $f_1: W_1 \rightarrow X$ が "equivalent"
とは,

$\exists \Phi: W_0 \rightarrow W_1$ PL homeo.

s.t. $f_0 \circ \Phi = f_1$ on ∂W

$f_0 \circ \Phi \simeq f_1$ relative ∂W

注) 以後, $f: W \rightarrow X$ の表わす equivalence class
を $\{f: W \rightarrow X\} \in \mathcal{S}(X, \partial X)$ で表わす。

注) $\mathcal{S}(X, \partial X)$ は $\mathcal{S}(X, \emptyset)$ と書くことにする。

次の定理が基本的。

Theorem W. (Wall ([12]), Hsiang-Shaneson ([3]))

$n+k \geq 5$, 次の bijection がある。

$$[*] : \mathcal{S}(B^k \times T^n, \partial) \cong H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2)$$

Complement 1. 上の bijection は 次の naturality を持つ。 $n+k \geq 5$

$$\{f: W \rightarrow B^k \times T^n\} \in \mathcal{S}(B^k \times T^n, \partial)$$

$p: B^k \times T^n \rightarrow B^k \times T^n$ を finite covering

$\bar{f}: \bar{W} \rightarrow B^k \times T^n$ を上の covering p の v にお
きかえる f の covering とする。

このとき,

$$[\bar{f}] = p^*[f] \quad \text{が成り立つ。}$$

$$(p^*: H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2))$$

Complement 2.

$\{f: W \rightarrow B^k \times T^n\} \in \mathcal{S}(B^k \times T^n, \partial)$
 f は $B^k \times T^{n-1} \subset B^k \times T^n$ に, t -regular \mathbb{Z}_2
 $f_1 = f|_{f^{-1}(B^k \times T^{n-1})}: f^{-1}(B^k \times T^{n-1}) \rightarrow B^k \times T^{n-1}$
 \neq , $B^k \times T^{n-1}$ の homotopy triangulation を
 与えたとする。このとき,

$$[f_1] = i^*[f] \text{ が 成り立つ。}$$

$(i: B^k \times T^{n-1} \hookrightarrow B^k \times T^n, i^*: H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{3-k}(T^{n-1}; \mathbb{Z}_2))$

上の bijection を使って, $n+k < 5$ の時 (\neq)

$$[*] = \mathcal{S}(B^k \times T^n, \partial) \rightarrow H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2) \text{ を}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}(B^k \times T^n, \partial) & & H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2) \\
 \downarrow \times \text{id}_{T^5} & & \uparrow i^* \\
 \mathcal{S}(B^k \times T^n \times T^5, \partial) & \xrightarrow{\cong} & H^{3-k}(T^n \times T^5; \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

の composition として定義しておく。

準備.

M^3 を compact PL 3-manifold, $\pi_1(M)$ が free abelian とする。

次の (i), (ii), (iii) を満たす homotopy triangulation $\{f: W^{n+3} \rightarrow M^3 \times T^n\} \in \mathcal{S}(M^3 \times T^n, \partial)$ に對して, invariant $\Theta_M(f) \in \mathbb{Z}_2$ を次の様にして定義する。

(i) $\exists (X; M^3 \times T^n, W^{n+3})$ cobordism
s.t. $w_1(X) = w_2(X) = 0$

(ii) $\exists \gamma: \partial X - \{\text{int } M^3 \times T^n \cup \text{int } W^{n+3}\} \rightarrow \partial M^3 \times T^n \times I$
PL homeo. s.t.
 $\gamma(x) = (x, 0)$ for $x \in \partial M^3 \times T^n$
 $\gamma(x) = (f(x), 1)$ for $x \in \partial W$

(iii) $\exists g: X \rightarrow M^3 \times T^n$ retraction
s.t. $g|_W = f$
 $g|_{\partial X - \{\text{int } M^3 \times T^n \cup \text{int } W^{n+3}\}} = \gamma^{-1} \circ \text{proj.} \circ \gamma$
(proj. : $\partial M^3 \times T^n \times I \rightarrow \partial M^3 \times T^n$)

まず, codimension 1 の $M^3 \times T^n$ の submanifold の列.

$M^3 \times T^{n-1} \supset M^3 \times T^{n-2} \supset \dots \supset M^3 \times T^1 \supset M^3$
を考える。今, 次の事を仮定する。

(Assumption) $f = g|_W : W \rightarrow M^3 \times T^n$ が
 $M^3 \times T^i$ ($0 \leq i \leq n-1$) に $\#$ して, t -regular
で, $f|_{f^{-1}(M^3 \times T^i)} : f^{-1}(M^3 \times T^i) \rightarrow M^3 \times T^i$ が
 $M^3 \times T^i$ の homotopy triangulation (mod 2)
を与えたとする。

この時, g を M^3 に $\#$ して, t -regular として,
($\exists X$ を f_X したまま.)

$$X^4 = g^{-1}(M^3), \quad \theta_M(f) = \frac{\mathfrak{S}(X^4)}{8} \pmod{2}$$

と定義する。 $\mathfrak{S}(X^4)$ は X^4 の signature。

上の (Assumption) を満たす様に, 一般に
する事はできないので, 実際には, すべての
議論を, $2k$ -次元 complex projective
space P^p ($p = 4k \geq 8$) をかけて, 高次元

の問題に直して, 次の Farrell の定理を用いて, $\Theta_n(f) \in \mathbb{Z}_2$ を定義する。

Theorem F. (Farrell ([2]))

$n > 6$, $\pi_1(M)$: free abelian とする。

$\{f' : W^n \rightarrow M^{n-1} \times S^1\} \in \mathcal{S}(M^{n-1} \times S^1, 2)$
 が与えられた時, 代表元を取り直して,
 $f' : W^n \rightarrow M^{n-1} \times S^1$ が, $M^{n-1} \times 0$ に対して,
 τ -regular かつ, $f'|_{f'^{-1}(M^{n-1} \times 0)} : f'^{-1}(M^{n-1} \times 0)$
 $\rightarrow M^{n-1}$ が, $\mathcal{S}(M^{n-1}, 2)$ の元を表わす様
 にできる。

この様にして, 定義したのが well-defined
 なことは, 次の Rohlin の定理を用いることによ
 って, 示される。

Theorem R. ([4], [10])

closed, orientable PL (or Diff.) manifold
 M^4 で, $w_2(M^4) = 0$ ならば

$\mathcal{S}(M^4)$ は 16 で割り切れる。

Sullivan - Wall の exact sequence ([11]) を
 考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & [\Sigma(N/\partial), \mathbb{G}/PL] & \xrightarrow{\theta'} & L_{m+1}(\pi_1 N) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{S}(N, \partial) \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ & & [(N/\partial), \mathbb{G}/PL] & \xrightarrow{\theta} & L_m(\pi_1 N) & & \end{array}$$

ここで、 $m = n + k$, $N = B^k \times T^n$, L_m は Wall の
 (non-simply connected) surgery obstruction
 group. このとき、 θ, θ' は injective になる
 ことが分り、(Wall ([12]), Hsiang-Shaneson ([3]))
 ∂ が onto であるから、

$$\{f: W \rightarrow B^k \times T^n\} \in \mathcal{S}(B^k \times T^n, \partial)$$

が、準備での (i), (ii), (iii) を満たすことが
 分る。 ([12]).

$$H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(H_{3-k}(B^k \times T^n), \mathbb{Z}_2)$$

から、

$$\langle [f], \{B^k \times T^{3-k}\} \rangle = \theta_m(f) \in \mathbb{Z}_2$$

で、 $[f] \in H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2)$ は定義する。

ここで、 $\{B^k \times T^{3-k}\}$ は $H_{3-k}(B^k \times T^n)$ の $\binom{n}{3-k}$ の
 generator。

この定義が、実は、bijection

$$[*] : \mathcal{J}(B^k \times T^n, \partial) \cong H^{3-k}(T^n; \mathbb{Z}_2)$$

を与えている。この定義によれば、Complement 1, 2 は、ほぼ明らかである。

Theorem 0. の証明

$\mathcal{J}(B^3 \times T^2, \partial) \cong H^0(T^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ の non-zero element $\{g: W_0^5 \rightarrow B^3 \times T^2\}$ をとる。

$\{f: W^5 \rightarrow S^3 \times T^2\} \in \mathcal{J}(S^3 \times T^2)$ を次のように定める。

$$W^5 = W_0^5 \cup B^3 \times T^2$$

$$f|_{W_0^5} = g$$

$$f|_{B^3 \times T^2} = \text{id}_{B^3 \times T^2} \quad \text{このとき}$$

$$[f] = \theta_{S^3}(f) = \theta_{B^3}(g) = [g] \quad \text{と決める。}$$

$S^3 \times T^2$ の infinite cyclic covering $S^3 \times S^1 \times \mathbb{R}$ を考え、 f の covering を

$\bar{f}: \bar{W}^5 \rightarrow S^3 \times S^1 \times \mathbb{R}$ とすれば, \bar{f} は proper homotopy equivalence を与えるから, Theorem 0. の (1) を仮定して,

$\exists W^4$; $\bar{W}^5 \cong W^4 \times \mathbb{R}$ が言える。

このことから, boundary とおき compact set の外を fix した \bar{f} の homotopy \bar{f}_t 2', \bar{f}_1 が $S^3 \times S^1 \times 0$ に t -regular かつ $\bar{f}_1^{-1}(S^3 \times S^1 \times 0) = W^4$ なるものがある。この \bar{f}_t は, 十分大きい order の finite covering の homotopy

$f'_t: W' \rightarrow S^3 \times S^1 \times S^1$ をひきおこす。

このとき, $f'_0 = \text{covering of } f$

f'_1 は $S^3 \times S^1 \times 0$ に t -regular かつ,

$f'^{-1}_1(S^3 \times S^1 \times 0) = W^4$ 2' がある。

Complement 1.2. から, $[f'_1 | W^4] = [f'_1] = [f'_0] = [f] = [g] \neq 0$

またく同じ議論を, Theorem 0. の (2) を仮定して, $f_1|_{W^4}: W^4 \rightarrow S^3 \times S^1$ に $\#$ して行くと.

$$f_2: W^3 \rightarrow S^3 \quad \text{homotopy equivalence}$$

s.t.

$[f_2] \neq 0$ が得られ, この W^3 は Poincaré Conjecture の反例になる.

Remark $J: \pi_3(SO) \rightarrow \pi_3(SG)$ onto から.

W^3 は parallelizable 4-manifold M^4 を bound する. この時.

$$[f_2] = \mathcal{S}(M^4)/8 \pmod{2} \neq 0$$

だから.

$\mathcal{S}(M^4)$ は 16 で割りきれない.

従って, Rohlin の定理によつて, W^3 は S^3 と h -cobordant でさえない。

Theorem 3. の証明

P^4 を S^2 の tangent bundle を下図に従って plumbing して得られる Milnor's plumbing とする。



∂P^4 は integral homology sphere. ([1])

$D(P^4) = P_1^4 \cup P_2^4$, ($P_1^4 = P_2^4 = P^4$) を double とする。

$X^4 = P_1^4 \cup P_2^4 / P_2^4$ (つまり) P^4 の boundary に cone を張ったものとする。

X^4 は orientable homological manifold であり、 $\omega_2(X^4) = 0$ である。(☺ $X^4 = \text{int } P$ は parallelizable)
また、signature $\sigma(X^4) = 8$ である。

Lemma 1.

$X^4 \times T^n$ ($n \geq 1$) と homotopy equivalent な closed topological manifold W が存在する。

この証明は、Wall の non-simply-connected

surgery の §4. ([11]) の結果と, to appear の Kirby - Siebenmann ([17]) の結果を用いて証明される。 $n=1$ の時には、さらに、Siebenmann の Thesis の Topological Version (for $\dim.=6$) も用いられている。(証明は、略す。)

Lemma 2. Lemma 1 での W^5 が (もしくは、 W^5 の ∞ -cyclic covering \bar{W}^5) Top. Handlebody 分解を持つは、Rohlin の定理は Topological Category では成り立たない。

略解 \bar{W}^5 の handlebody 分解を \rightarrow きめ、十分大きな finite subhandlebody H をとる。 ∂H の \rightarrow の component M^4 があって、 $H_{n-1}(M^4) \rightarrow H_{n-1}(\bar{W})$ が non-zero にできる。 W^5 の \rightarrow 方から、実は、 $w_2(W^5) = 0$ 従って、 $w_2(M^4) = 0$ 。 この時、Nobikov ([9]) によつて、

$$S(M^4) = S(X^4) = \pm 8 \text{ が分り、}$$

Rohlin の定理が M^4 に対して成り立たない。

Lemma 2. での M^4 は Top. handlebody 分解を持たない。もし、持ったならば、attaching 面 $(= \partial(B^k \times B^{4-k}))$ が 3-次元で、Moise ([8]) の結果から、PL triangulation を持つ。従って (PL での) Rohlin の定理 に反する。

以上で、Theorem 3. の証明が完了した。

References

- [1] W. Browder, Surgery on simply connected manifolds, to be published in book form
- [2] F.T. Farrell, The obstruction to fibering a manifold over a circle, Yale University Thesis, 1967
- [3] W.C. Hsiang and J.L. Shaneson, Fake tori the annulus conjecture and the conjecture of Kirby, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 62 (1969), 687-691
- [4] M. Kervaire and J. Milnor, Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin, Proceedings I.C.M., Edinburgh, 1958, 454-458
- [5] R.C. Kirby, Lectures on triangulation of manifolds, (mimeographed) U.C.L.A. 1969

[6] R.C. Kirby and L.C. Siebenmann, On the triangulation of manifolds and Hauptvermutung, Bull. A.M.S. 75 (1969) 742-749

[7] _____, sequel to [~~5~~]⁶, to appear

[8] E. Moise, Affine structures on 3-manifolds, Ann. of Math. 56 (1952), 96-114

[9] S.P. Novikov, Homotopic and topological invariance of certain rational class of Pontrjagin, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 162 (1965). Sov. Math. 6 (1965), 854-857

[10] V.A. Rohlin, A new result in the theory of 4-dimensional manifolds, Doklady 8 (1952), 221-224.

[11] C.T.C. Wall, Surgery of compact manifolds, mimeographed at U. of Liverpool, (to appear in book form)

[12] C.T.C. Wall, On homotopy
tori and the annulus theorem, Bull.
London Math. Soc. 1 (1969)

On p -equivalence in the sense of Serre

by

Mamoru Mimura, Ronald C. O'Neill and Hirosi Toda

§1. Introduction.

Let p be a prime or zero. We denote $Z_p = Z/pZ$ for $p \neq 0$ and $Z_p = Q$ the rational field for $p = 0$. We define that a space X is p -equivalent to a space Y if there exists a map $f: X \rightarrow Y$ such that f induces isomorphisms $f^*: H^*(Y; Z_p) \cong H^*(X; Z_p)$. We call f a p -equivalence. Clearly this relation satisfies reflexivity and transitivity. However it is not known if it satisfies symmetry.

Consider a compact, connected, simply connected, simple Lie group G . Then the real cohomology of G is isomorphic to $X(G)$, where $X(G)$ is a product of odd dimensional spheres: $X(G) = \prod_{i=1}^{\ell} S^{n_i}$, $\ell = \text{rank of } G$, $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = \text{dim. } G$. Then G is defined to be p -regular if $X(G)$ is p -equivalent to G . In his paper [10], Serre writes "Il serait intéressant de savoir si le fait que p est régulier entraîne l'existence d'une p -équivalence $g: G \rightarrow X(G)$. Plus généralement est-il possible de bâtir une théorie du \hat{L}_p type d'homotopie d'un espace?".

In this paper we show that the answer to his first question is always "Yes". The major portion of this paper is devoted to the second question.

In §2, we prove a theorem showing six equivalent conditions for a space. We define a space to be p -universal if it satisfies one of them. §3 is then devoted to obtaining general properties of p -universality. For example, we show that if one of the spaces is p -universal in the p -equivalence $f:X \rightarrow Y$, then there is a converse p -equivalence $g:Y \rightarrow X$. Various examples of a p -universal space are given in §4. In the section 5 Serre's first problem is discussed as application.

Throughout this paper \mathcal{L}_p , $p \neq 0$, denotes the class of finitely generated abelian groups whose orders are prime to p . \mathcal{L}_0 denotes the class of finite abelian groups. $H^i(X)$ and $H_i(X)$ denote the integral cohomology and homology group respectively.

§2. A main theorem.

The object of this section is to prove the following Theorem 2.1. For a simply connected, finite CW-complex K the following six conditions are equivalent:

(a) For any given p -equivalence $k:X \rightarrow Y$, where X and Y are simply connected, and for an arbitrary map $g:K \rightarrow Y$, there is a map $h:K \rightarrow X$ and there is a p -equivalence $f:K \rightarrow K$ such that the following diagram commutes up to homotopy:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{k} & Y \\
 \uparrow h & & \uparrow g \\
 K & \xrightarrow{f} & K
 \end{array}$$

(b) For any prime q , $q \neq p$, and for any integer $n > 0$, there exists a p -equivalence $f:K \rightarrow K$ such that f^* is trivial on $H^n(K; \mathbb{Z}_q)$.

(c) For any $G \in \mathcal{L}_p$, there exists a p -equivalence $f:K \rightarrow K$ such that f^* is trivial on $H^*(K; G)$.

(a)' For any given p -equivalence $k:X \rightarrow Y$, where X and Y are finite CW-complexes, and for an arbitrary map $g:Y \rightarrow K$, there is a map $h:Y \rightarrow X$ and there is a p -equivalence $f:K \rightarrow K$ such that the following diagram

commutes up to homotopy:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{k} & Y \\
 g \downarrow & & \downarrow h \\
 K & \xrightarrow{f} & K
 \end{array}$$

(b)' For any prime q , $q \neq p$, and for any integer $n > 0$, there exists a p -equivalence $f:K \rightarrow K$ such that $f_* \otimes 1$ is trivial on $\pi_n(K) \otimes \mathbb{Z}_q$.

(c)' For any $G \in \mathcal{L}_p$ and any integer $N > 0$, there exists a p -equivalence $f:K \rightarrow K$ such that $f_* \otimes 1_G$ and $f_* * 1_G$ are trivial on $\pi_n(K) \otimes G$ and $\pi_n(K) * G$ respectively for all $n < N$.

The rest of this section is devoted to the proof of the theorem.

((a) implies (b).) Let β_i , $1 \leq i \leq s$, be a basis of $H^n(K; \mathbb{Z}_q)$ and $g_i:K \rightarrow K(\mathbb{Z}_q, n)$ be their representatives.

Put $N = \dim. K$. Let X be a one point space. Then there is a p -equivalence $k:X \rightarrow \prod_{i=1}^s K(\mathbb{Z}_q, n)$, since $H^*(\mathbb{Z}_q, n; \mathbb{Z}_p) = 0$. Now we consider the diagram

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{k} & \prod_{i=1}^s K(\mathbb{Z}_q, n) \\
 h \uparrow & & \uparrow (g_1, \dots, g_s) \\
 K & \xrightarrow{f} & K
 \end{array}$$

By (a), there exists a p -equivalence $f:K \rightarrow K$ such that $(g_1, \dots, g_s) \circ f$ is homotopic to zero, and hence so is $g_i \circ f$ for $1 \leq i \leq s$. Let $u \in H^n(Z_q, n; Z_q)$ be a fundamental class such that $g_i^*(u) = \beta_i$. Then we have that $f^*(\beta_i) = f^*g_i^*(u) = (g_i \circ f)^*(u) = 0$. So f^* is trivial on $H^n(K; Z_q)$.

(b) implies (c.) We prepare

Lemma 2.2. (b) implies the following $(b)_r$ for any integer $r \geq 1$.

$(b)_r$: For any prime $q, q \neq p$, and any integer $n > 0$, there exists a p -equivalence $f_r:K \rightarrow K$ such that f_r^* is trivial on $H^n(K; Z_q^t)$ for $1 \leq t \leq r$.

First we show how Lemma 2.2 implies (c). Let s be the order of G . Then $s = \prod_{i=1}^a q_i^{r(i)}$, where q_i is a prime in the order of G with $q_i \neq p$, and $r(i)$ is a positive integer, since $G \in \mathcal{C}_p$. Then by the above lemma there exists a p -equivalence $f_{r(i)}:K \rightarrow K$ for each q_i such that $f_{r(i)}^*$ is trivial on $H^n(K; Z_{q_i}^t)$ for $1 \leq t \leq r(i)$. Then the composite $f_n = f_{r(1)} \circ \dots \circ f_{r(a)}$ $:K \rightarrow K$ of these maps is a p -equivalence and the induced homomorphism f_n^* is trivial on $H^n(K; G)$. Put $f = f_N \circ \dots \circ f_2$, where $N = \dim. K$. Then f satisfies the required condition.

Now we will prove the lemma by induction on r .

The case $r = 1$ is clear. Suppose that $(b)_r$ is true.

A short exact sequence $0 \rightarrow Z_q^t \rightarrow Z_q^{t+1} \rightarrow Z_q \rightarrow 0$ derives the Bockstein exact sequence

$$H^n(K; Z_q^t) \xrightarrow{\iota} H^n(K; Z_q^{t+1}) \xrightarrow{\rho} H^n(K; Z_q)$$

Then we get that $\rho(f^*(x)) = f^*(\rho(x)) = 0$

for any x of $H^n(K; Z_q^{t+1})$, and hence there exists an element y of $H^n(K; Z_q^t)$ such that $\iota(y) = f^*(x)$. Put

$f_{r+1} = f \circ f_r$. Then we have $f_{r+1}^*(x) = (f \circ f_r)^*(x) = f_r^*(f^*(x)) = f_r^*(\iota(y)) = \iota(f_r^*(y)) = 0$. Thus we get $(b)_{r+1}$.

(c) implies (a.) We regard X as a subcomplex of Y with inclusion $k: X \subset Y$, replacing Y by the mapping cylinder of f if necessary. The map $g: K \rightarrow Y$ is said to be n -deformable into the subcomplex X if g is homotopic to a map $g': K \rightarrow Y$ such that $g'(K^{(n)}) \subset X$. We will prove it by induction on the skeleta of K .

It is clear from our assumption that g is 1-deformable into X . Suppose a map $\bar{g}: K \rightarrow Y$ is $(k-1)$ -deformable into X . The obstruction to a k -deformation of \bar{g} into X is a cohomology class $\gamma^k(\bar{g})$ of $H^k(K; \pi_k(Y, X))$, [3]. But $k: X \subset Y$ is a p -equivalence, so $\pi_k(Y, X) \in \mathcal{C}_p$. Let $f_k: K \rightarrow K$ be a p -equivalence such that the induced homomorphism $f_k^*: H^k(K; \pi_k(Y, X)) \rightarrow H^k(K; \pi_k(Y, X))$ is zero. Then the obstruction to a k -deformation of $\bar{g} \circ f_k: K \rightarrow Y$

into X is $\gamma^k(\bar{g} \circ f_k) = f_k^*(\gamma^k(\bar{g})) = 0$. Set $f = f_N \circ \dots \circ f_2$, and then $g \circ f$ is homotopic to a map $h: K \rightarrow X$, where $N = \dim. K$.

((a)' implies (b)'). Let $\beta_i, 1 \leq i \leq s$, be a basis of $\pi_n(K) \otimes \mathbb{Z}_q$ and $g_i: S^n \rightarrow K$ be their representative. Denote by $q\iota: S^n \rightarrow S^n$ the map of degree q . Then $\bigvee_{i=1}^s q\iota: \bigvee_{i=1}^s S^n \rightarrow \bigvee_{i=1}^s S^n$ is a p -equivalence, since $q \neq p$. Now we consider the diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigvee_{i=1}^s S^n & \xrightarrow{\bigvee_{i=1}^s q\iota} & \bigvee_{i=1}^s S^n \\
 \downarrow \{g_1, \dots, g_s\} & & \downarrow h \\
 K & \xrightarrow{f_n} & K
 \end{array}$$

By (a)', there is a p -equivalence $f: K \rightarrow K$ and there is a map $h: \bigvee_{i=1}^s S^n \rightarrow K$ such that $f \circ \{g_1, \dots, g_s\} \simeq h \circ (\bigvee_{i=1}^s q\iota)$, and hence there is a map $h_i: S^n \rightarrow K$ such that $f \circ g_i \simeq h_i \circ (q\iota)$. Therefore $f_*(\beta_i) = q\{h_i\} = 0$ in $\pi_n(K) \otimes \mathbb{Z}_q$. We get the triviality of f_* on $\pi_n(K) \otimes \mathbb{Z}_q$.

Before showing that (b)' implies (c)', we prepare Lemma 2.3. Let G be a finite abelian group and A a finitely generated abelian group. Let φ be an endomorphism of A such that $1_G \otimes \varphi: G \otimes A \rightarrow G \otimes A$ is trivial.

Then there exists a positive integer r such that $l_G * \varphi^r : G * A \rightarrow G * A$ is trivial, where $\varphi^r = \varphi \circ \dots \circ \varphi$, r times.

Proof. Let b be a prime. It suffices to show the lemma for the case $G = \mathbb{Z}_b^t$ and A is a b -group, since the free part of A vanishes in the torsion product $G * A$. Put $q = b^t$. For any element a of A , there exists an element a' of A such that $\varphi(a) = qa'$, since $l_G \otimes \varphi$ is trivial on $G \otimes A$. In general, for any $a \in A$, there exists an element $a^{(s)} \in A$ such that $\varphi^s(a) = q^s a^{(s)}$. Note that $\mathbb{Z}_q * A = \{a \in A \mid qa = 0\} \subset A$. We have $(l_G * \varphi^s)(a) = \varphi^s(a) = q^s a^{(s)}$. Let n be the maximum power of b among the orders of the direct summand of A .

Take a positive integer r such that $rt \geq n$. Then we have that $(l_G * \varphi^r)(a) = \varphi^r(a) = q^r a^{(r)} = b^{rt} a^{(r)} = 0$. Q.E.D.

(b)' implies (c)' We need the following

Lemma 2.2' (b)' implies the following (b)'_r for any integer $r \geq 1$:

(b)'_r: For any prime q , $q \neq p$, and any integer $n > 0$, there exists a p -equivalence $f_r : K \rightarrow K$ such that $f_r * \text{id}$ is trivial on $\pi_n(K) \otimes \mathbb{Z}_q^t$ for $0 < t \leq r$.

This is proved by a quite similar way to Lemma 2.2 by using the exact sequence

$$\pi_n(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q^t \longrightarrow \pi_n(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q^{t+1} \longrightarrow \pi_n(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q$$

derived from a short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_q^t \longrightarrow \mathbb{Z}_q^{t+1} \longrightarrow \mathbb{Z}_q \longrightarrow 0.$$

So we omit it.

Let $G \in \mathcal{C}_p$. Then by a similar argument to the proof of ((b) implies (c)), we know from Lemma 2.2' the existence of a p-equivalence $f'_n: K \rightarrow K$ such that $f'_{n*} \otimes 1_G$ is trivial on $\pi_n(K) \otimes G$. By Lemma 2.3, there exists an integer $r > 0$ such that $(f'_{n*})^r \otimes 1_G$ is trivial on $\pi_n(K) * G$. Set $f_n = (f'_n)^r = f'_n \circ \dots \circ f'_n$, and then $f_{n*} \otimes 1_G$ and $f_{n*} * 1_G$ are trivial on $\pi_n(K) \otimes G$ and $\pi_n(K) * G$ respectively. Further we put $f = f_{N-1} \circ \dots \circ f_2$. Then it satisfies the required conditions in (c)'.

((c)' implies (a)') As before we regard X as a subcomplex of Y . We prove it by induction on the skeleta of (Y, X) , denoting by $(Y, X)^{(n)} = Y^{(n)} \cup X$. By the general assumption, $g: X \rightarrow K$ is extendable over $(Y, X)^{(2)}$. Suppose a map $g': X \rightarrow K$ is extendable to $(Y, X)^{(n)}$ and let $\bar{g}': (Y, X)^{(n)} \rightarrow K$ be the extension. The obstruction to extending \bar{g}' over $(Y, X)^{(n+1)}$ is the element $\gamma^{n+1}(\bar{g}') \in H^{n+1}(Y, X; \pi_n(K))$, which is isomorphic to $\pi_n(K) \otimes H^{n+1}(Y, X) + \pi_n(K) * H^{n+2}(Y, X)$ by Theorem 10 (p. 246) of [11]. We note that the splitting is

functorial Since $k: X \subset Y$ is a p -equivalence, we get that $H^i(Y, X) \in \mathcal{L}_p$ for $i > 0$. Put $N = \dim. (Y, X) - 1$. By (c)' there is a p -equivalence $f'_n: K \rightarrow K$ such that $f'_n * 1$ is trivial on $\pi_n(K) \otimes H^{n+1}(Y, X)$. Similarly we have a p -equivalence $f''_n: K \rightarrow K$ such that $f''_n * 1$ is trivial on $\pi_n(K) * H^{n+2}(Y, X)$. Put $f_n = f'_n \circ f''_n$. Then the obstruction to extending $f_n \circ \bar{g}: X \rightarrow K$ over $(Y, X)^{(n+1)}$ is an element $\gamma^{n+1}(f_n \circ \bar{g}) = (f_{n*})_* \gamma^{n+1}(\bar{g}) = 0$, since $(f_{n*})_* = f_{n*} \otimes 1 + f_{n*} * 1$. So $f_n \circ \bar{g}: X \rightarrow K$ is extendable over $(Y, X)^{(n+1)}$.

Put $f = f_N \circ \dots \circ f_2$. Then $f \circ g$ is extendable to a map $Y \rightarrow K$. Thus we get (a)'.

Before proving the equivalence between (b) and (b)', let us recall some properties of the n -connective space. The n -connective space $(K, n+1)$ is a fibering over K with a fibre map $p: (K, n+1) \rightarrow K$ inducing isomorphisms $p_*: \pi_i((K, n+1)) \cong \pi_i(K)$ for all $i \geq n+1$ and $\pi_i((K, n+1)) = 0$ for all $i < n+1$. Further we have two fiberings:

$$(2.4)_n \quad K(\pi_n(K), n-1) \rightarrow (K, n+1) \rightarrow (K, n).$$

$$(2.5)_n \quad (K, n) \rightarrow (K, n-1) \rightarrow K(\pi_{n-1}(K), n-1)$$

Let $f: K \rightarrow K$ be a p -equivalence. Then it induces maps

$$f_n: (K, n) \rightarrow (K, n) \quad \text{and} \quad \bar{f}_n: K(\pi_n(K), n-1) \rightarrow K(\pi_n(K), n-1)$$

such that the following diagram commutes up to homotopy:

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccccc} K(\pi_n(K), n-1) & \longrightarrow & (K, n+1) & \longrightarrow & (K, n) \\ \downarrow \bar{f}_n & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n \\ K(\pi_n(K), n-1) & \longrightarrow & (K, n+1) & \longrightarrow & (K, n) \end{array}$$

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccccc} (K, n) & \longrightarrow & (K, n-1) & \longrightarrow & K(\pi_n(K), n-1) \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow \bar{f}_{n-1} \\ (K, n) & \longrightarrow & (K, n-1) & \longrightarrow & K(\pi_n(K), n-1) \end{array}$$

Then it is not so difficult to check that f_n and \bar{f}_n are p -equivalences.

((c) implies (b).¹) We need the following

Lemma 2.8. (c) implies the following $(T)_i$ for any integer $1 < i < N$.

$(T)_i$: For any prime $q, q \neq p$, there exists a p -equivalence $f(i): K \rightarrow K$ such that the derived p -equivalence $f(i)_i: (K, i) \rightarrow (K, i)$ induces zero homomorphisms on $H_j((K, i); Z_q)$ for $0 < j < N$.

Proof. $(T)_2$ is clear. For $(K, 2) = K$ and $f = f(2)_2$.

Supposing $(T)_n$, we will prove $(T)_{n+1}$. Consider the homology spectral sequence $\{E_{a,b}^r\}$ with Z_q -coefficient associated

with a fibering (2.4)_n. Since $f(n)_{n*}$ is trivial on $H_i((K,n); Z_q)$ for $0 < i < N$ by the assumption, the induced homomorphism $f(n)_*$ is trivial on $E_{a,b}^2 = H_a((K,n); H_b(\pi_n(K), n-1; Z_q))$ for $0 < a < N$, and hence it is trivial on $E_{a,b}^\infty$ for $0 < a < N$. We have the isomorphism $E_{a,b}^\infty \cong D_{a,b}/D_{a-1,b+1}$, where $H_{a+b}((K,n+1); Z_q) = D_{a+b,0} \supset \dots \supset D_{-1,a+b+1} = 0$. Hence the triviality of $f(n)_*$ on $E_{a,b}^\infty$ deduces that $f(n)_*(D_{a,b}) \subset D_{a-1,b+1}$ for $0 < a < N$.

Therefore the map $(f(n))^N = f(n) \circ \dots \circ f(n)$, which is a p-equivalence, induces the zero homomorphisms on $H_i((K,n+1); Z_q)$ for $0 < i < N$. So we name it $f(n+1)$.

Thus we get $(T)_{n+1}$.

Q.E.D.

By the universal coefficient theorem and the Hurewicz isomorphism, we get $H_n((K,n); Z_q) \cong H_n((K,n)) \otimes Z_q \cong \pi_n((K,n)) \otimes Z_q \cong \pi_n(K) \otimes Z_q$. Therefore the triviality of $f(n)_{n*}$ on $H_n((K,n); Z_q)$ induces the triviality of $f(n)_{* \otimes 1}$ on $\pi_n(K) \otimes Z_q$.

((c)' implies (b).) We prove the following:

Lemma 2.8' (c)' implies the following (I)_i for any integer $2 < i \leq N$, where $N = \dim. \text{ of } K$:

(I)_i: For any prime q , $q \neq p$, there exists a p-equivalence $f(i): K \rightarrow K$ such that the derived p-equivalence

$f(i)_i: (K, i) \rightarrow (K, i)$ induces zero homomorphisms on $H_j((K, i); Z_q)$ for all $j \leq N$.

Proof. I_N is clear. In fact, we have the isomorphisms

$$H_N((K, N); Z_q) \cong H_N((K, N)) \otimes_{Z_q} \cong \pi_N((K, N)) \otimes_{Z_q} \cong \pi_N(K) \otimes_{Z_q}.$$

So the map f derives a map $f(N)$ inducing the trivial map on $H_N((K, N); Z_q)$. Supposing $(I)_n$, we will prove

$(I)_{n-1}$. Consider the homology spectral sequence $\{E_{a,b}^r\}$ with Z_q -coefficient associated with a fibering

$(2.5)_n$. Then $E_{a,b}^2 = H_a(\pi_{n-1}(K), n-1; H_b(K, n); Z_q)$. So the induced homomorphism $f(n)_*$ is trivial on $E_{a,b}^2$ for all $b \leq N$, and hence it is trivial on $E_{a,b}^\infty$ for all

$b \leq N$, where $E_{a,b}^\infty \cong D_{a,b} / D_{a-1, b+1}$ and $H_{a+b}((K, n-1); Z_q) = D_{a+b, 0} \supset \dots \supset D_{-1, a+b+1} = 0$. So we have $f(n)_*(D_{a+1, b-1}) \subset D_{a,b}$ for $b \leq N$. As before, we conclude that the map

$(f(n))^{N+1} = f(n) \circ \dots \circ f(n)$ induces the zero homomorphisms on $H_i((K, n-1); Z_q)$ for $i \leq N$. We put $f(n-1) = (f(n))^{N+1}$

Thus we have shown that $(I)_i$ is true for all $i \leq N$. Q.E.D.

In particular $(I)_2$ shows that X satisfies (b) of Theorem 2.2, since $(X, 2) = X$.

Thus the proof of Theorem 2.1 is completed.

Proposition 2.9.

(1) If a map $f: X \rightarrow Y$ is a p -equivalence, then it is 0 -equivalence.

(2) If a map $f: X \rightarrow Y$ is a 0-equivalence, then it is a p -equivalence for all but a finite number of primes p .

The proof is straight forward.

Proposition 2.10. If a simply connected, finite CW-complex K *satisfies one of the conditions in Theorem 2.1.*

~~is p -universal as well as q -universal for~~ different two primes p and q , then K ~~is 0-universal.~~ *satisfies one of them for zero.*

Proof. Let r be an arbitrary prime. Then one of

p and q is different from r . Suppose $p \neq r$. By the

assumption there exists a p -equivalence $f: K \rightarrow K$

such that f^* is trivial on $H^*(K; \mathbb{Z}_r)$. Further, f is

a 0-equivalence by (1) of Proposition 2.9. Q.E.D.

§3. p-universal spaces and properties.

We work in the category of simply connected, finite CW-complexes.

Definition 3.1. A space K is called p-universal if it satisfies one of the conditions in Theorem 2.1.

This section is devoted to obtaining general properties of p-universal spaces. The following is a direct consequence of Theorem 2.1.

Theorem 3.2. Let $k:X \rightarrow Y$ be a p-equivalence. If either X or Y is p-universal, then there is a converse p-equivalence $h:Y \rightarrow X$.

Proof. If Y is p-universal, we take $K = Y$ and $g = 1_Y$ in (a) of Theorem 2.1. If X is p-universal, we take $K = X$ and $g = 1_X$ in (a)' of Theorem 2.1.

Lemma 3.3. Let p be a prime. Let $f:Y \rightarrow Y$ be a p-equivalence. Then there exists an integer $r > 0$ such that $(f^r)^*$ is the identity of $H^*(Y;Z_p)$.

Proof. Since $H^*(Y;Z_p)$ is finite, the automorphism group of $H^*(Y;Z_p)$ is a finite group. Hence f^* is of finite order, say r . That is, $(f^r)^* = (f^*)^r$ is the identity. Q.E.D.

Definition 3.4. A space X is said to be p-dominated by a space Y if there are maps $j:X \rightarrow Y$ and $k:Y \rightarrow X$ such that $k \circ j:X \rightarrow X$ is a p-equivalence.

Theorem 3.5. A space X is p -universal if and only if it is p -dominated by a p -universal space Y .

Proof. The necessity is clear.

(The Sufficiency.) Case I. $p \neq 0$. Let q be a prime with $q \neq p$ and let $f:Y \rightarrow Y$ be a p -equivalence such that f^* is trivial on $H^*(Y;Z_q)$. By Lemma 3.3 there is an integer $r > 0$ such that $(f^r)^*$ is the identity on $H^*(Y;Z_p)$.

Then $k \circ f^r \circ j: X \rightarrow X$ is a p -equivalence inducing a trivial endomorphism of $H^*(X;Z_q)$.

Case II. $p = 0$. It follows from (2) of Proposition 2.9. that X is s -dominated by Y for all but a finite number of primes s . For any given prime q , there exists a 0 -equivalence $f:Y \rightarrow Y$ such that f^* is trivial on $H^*(Y;Z_q)$, since Y is 0 -universal. $k \circ j$ is also 0 -equivalence. By (2) of Proposition 2.9. there exists a prime t for which $k \circ j$ and f are t -equivalences. As before, there is an integer $r > 0$ such that $k \circ f^r \circ j$ is a t -equivalence. It follows from (1) of Proposition 2.9 that $k \circ f^r \circ j$ is a 0 -equivalence. Q.E.D.

Corollary 3.6. Let $k:X \rightarrow Y$ be a p -equivalence.

If one of them is p -universal, so is the other one.

Proof. It follows from Theorems 3.2 and 3.5. Q.E.D.

Corollary 3.7. The p-equivalence is an equivalence relation in the category of p-universal spaces.

Theorem 3.8. (i) A cartesian product of a finite number of spaces is p-universal if and only if each of them is p-universal.

(ii) A wedge of a finite number of spaces is p-universal if and only if each of them is p-universal.

(iii) $X \wedge Y$ is p-universal if either X or Y is p-universal.

Proof. (i) Let K_i be p-universal for $1 \leq i \leq n$. Let q be a prime different from p and let $f_i: K_i \rightarrow K_i$ be a p-equivalence inducing the trivial endomorphism on $\pi_j(K_i) \otimes \mathbb{Z}_q$. Then the cartesian product of these maps:

$$\prod_{i=1}^n f_i : \prod_{i=1}^n K_i \longrightarrow \prod_{i=1}^n K_i \text{ is a p-equivalence and}$$

it induces the trivial homomorphism on $\pi_j(\prod_{i=1}^n K_i) \otimes \mathbb{Z}_q$.

Conversely, if $\prod_{i=1}^n K_i$ is p-universal, then each K_i is p-dominated by $\prod_{i=1}^n K_i$. So K_i is p-universal by Theorem 3.5.

(ii) will be proved similarly using the cohomology group instead of the homotopy group.

(iii) It is sufficient to show this for the case X is p-universal. Let q be a prime with $q \neq p$.

Let $f: X \rightarrow X$ be a p -equivalence inducing the trivial homomorphism on $H^i(X; Z_q)$ for all $i > 0$. Then the map $f \wedge 1_Y : X \wedge Y \rightarrow X \wedge Y$ is a p -equivalence and induces the zero homomorphism on $H^n(X \wedge Y; Z_q)$, since we have the Künneth formula:

$$H^n(X \wedge Y; Z_q) \cong \sum_{i=1}^{n-1} H^i(X; Z_q) \otimes H^{n-i}(Y; Z_q). \quad \text{Q.E.D.}$$

Remark 3.8. More generally, one can prove the following.

Let K_i , $1 \leq i \leq n$, be spaces and let $T_k(K_1, \dots, K_n) \subset$

$(K_1 \times \dots \times K_n)$ be the generalized wedge products:

$T_k(K_1, \dots, K_n) \subset \{x_1, \dots, x_n \mid x_i = * \text{ for at least } k \text{ values}$

of $i\}$. Thus $T_{n-1}(K_1, \dots, K_n) = \bigvee_{i=1}^n K_i$ and $T_1(K_1, \dots, K_n)$

is the fat wedge. Then $T_k(K_1, \dots, K_n)$ is p -universal

if and only if each of K_i is p -universal.

§4. Examples.

Throughout this section we maintain the conventions and notations of the former sections. We work in the category of simply connected finite CW-complexes.

Definition 4.1. Let p be a prime or zero. A space X is a co H-space mod p if there is a map $\varphi: X \rightarrow XVX$ and a p -equivalence $h: X \rightarrow X$ such that, for each of the canonical projections $p_1, p_2: XVX \rightarrow X$, $p_1 \circ \varphi \simeq h \simeq p_2 \circ \varphi$.

Definition 4.1'. Let p be a prime or zero. A space X is an H-space mod p if there is a map $u: XXX \rightarrow X$ and p -equivalence $h: X \rightarrow X$ such that, for each of the canonical injections $i_1, i_2: X \rightarrow XXX$, $u \circ i_1 \simeq h \simeq u \circ i_2$.

Theorem 4.2. (i) Every co H-space mod p is p -universal.

(ii) Every H-space mod p is p -universal.

Proof. (i) Let X be a co-H-space mod p . We show that X satisfies (c) of Theorem 2.1. Let $\varphi: X \rightarrow XVX$ be the co-H-structure mod p and for every integer $q > 1$, let

$$\Phi(q) = \nabla_q \circ \varphi^{q-1}: X \rightarrow X_{(1)} \vee \dots \vee X_{(q)} \rightarrow X$$

denote the q -fold map, where $\varphi^2 = \varphi$ and $\varphi^q = (\varphi^{q-1} \vee h) \circ \varphi$

for $q > 2$; ∇_q is the folding map.

Let $p_i: X_{(1)} \vee X_{(2)} \rightarrow X_{(i)}$ be the canonical projection. Then $p_1^* + p_2^*$ induces an isomorphism:

$\mathbb{H}^*(X;A) + \mathbb{H}^*(X;A) \cong \mathbb{H}^*(X_{(1)} \vee X_{(2)};A)$ for any coefficient group A . By Definition 4.1 we have, for any α, β of $\mathbb{H}^*(X;A)$, $\varphi^*(p_1^*(\alpha) + p_2^*(\beta)) = h^*(\alpha) + h^*(\beta)$. More generally, by the definition of φ^{q-1} , one gets $(\varphi^{q-1})^*(\sum_{i=1}^q p_i^*(\alpha_i)) = \sum_{i=1}^q (h^{q-1})^*(\alpha_i)$, where $p_i: X_{(1)} \vee \dots \vee X_{(i)} \vee \dots \vee X_{(q)} \longrightarrow X$ is the canonical projection. Clearly $\nabla_q^*(\alpha) = \sum_{i=1}^q p_i^*(\alpha)$. Thus we get $\mathcal{O}(q)^*(\alpha) = (\varphi^{q-1})^* \nabla_q^*(\alpha) = q(h^{q-1})^*(\alpha)$, where $h^{q-1} = h \circ \dots \circ h$.

Given any $G \in \mathcal{C}_p$, let q be the order of G , so $(q,p) = 1$. Then we have $\mathcal{O}(q)^*: H^n(X;Z_p) \cong H^n(X;Z_p)$ for all $n \geq 0$, and $\mathcal{O}(q)^*: H^n(X;G) \longrightarrow H^n(X;G)$ is the zero homomorphism. Then (c) of Theorem 2.1 follows directly.

(ii) Let X be a simply connected H -space mod p . By a quite similar argument one can show that X satisfies (c)' of Theorem 2.1. The proof is left to the reader. Q.E.D.

Corollary 4.3. (i) Every co H -space is p -universal for every prime p and for $p = 0$. In particular, every simply connected suspended space is p -universal for every prime p and for $p = 0$.

(ii) Every H -space is p -universal for every prime p and for $p = 0$. In particular, every simply connected compact Lie group is p -universal for every prime p and for $p = 0$.

§5. Applications.

Let K be a complex whose real cohomology is isomorphic to that of a space $X(K)$, which is a product of spheres: $X(K) = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_\ell}$.

Definition 5.1. A space K is said to be p -regular if there exists a p -equivalence $f: X(K) \rightarrow K$.

In particular, if G is a compact, connected, simply connected, simple Lie group, then, by a well known result of Hopf, $X(G)$ is a product of odd dimensional spheres: $X(G) = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_\ell}$, n_i : odd, $\ell = \text{rank } G$ and $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = \text{dim. } G = n$. Serre and Kumpel ([10] and [6]) proved the following: G is p -regular if and only if $p \equiv \frac{n}{\ell} - 1$. And Serre stated in his paper [10] that "Il serait intéressant de savoir si le fait que p est régulier entraîne l'existence d'une p -équivalence $g: G \rightarrow X(G)$ ".

Then the theorem below answers his question in the affirmative:

Theorem 5.2. There exists a p -equivalence $g: G \rightarrow X(G)$ if and only if $p \equiv \frac{n}{\ell} - 1$.

Actually, since G is p -universal by Corollary 4.4, there exists a converse p -equivalence by Theorem 3.2.

Remark 5.3. One can easily generalize this to the quasi p -regularity of G . (For quasi p -regularity, see [9]).

Remark 5.4. The same argument as above gives the existence of the following p -equivalences for every prime $p > 2$:

$$SU(2n) \longrightarrow Sp(n) \times SU(2n) / Sp(n),$$

$$SU(2n+1) \longrightarrow Spin(2n+1) \times SU(2n+1) / SO(2n+1),$$

$$E_6 \longrightarrow F_4 \times E_6 / F_4$$

(The converse direction of p -equivalences were originally obtained by Harris [2] and Kumpel [5]). Incidentally one can know by Theorem 3.5. that the symmetric spaces $SU(2n)/Sp(n)$, $SU(2n+1)/SO(2n+1)$, and E_6/F_4 are p -universal for every prime $p > 2$, since they are p -dominated by $SU(2n)$, $SU(2n+1)$ and E_6 respectively. Hence the corresponding results to Theorem 5.2 and Remark 5.3 can be obtained for these symmetric spaces (cf. [7] and [8]). Further, it is not so difficult to prove

Proposition 5.5. There exists a p -equivalence $f: Spin(2n+1) \longrightarrow Sp(n)$ for every prime $p > 2$.

References

- [1] M. Arkowitz -C.R. Curjel: Zum Begriff des H-Raumes mod J . Arch. Math. 16(1965), 186-190.
- [2] B. Harris: On the homotopy groups of the classical groups, Ann. of Math., 74(1961), 407-413.
- [3] S. T. Hu: Cohomology and deformation retracts, Proc. London Math. Soc., (2) 53(1951), 191-219.
- [4] I. M. James: On H-spaces and their homotopy groups, Quart. J. Oxford, 11(1960), 161-179.
- [5] P. G. Kumpel, Jr.: On the homotopy groups of the exceptional Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 120(1965), 481-498.
- [6] —————: Lie groups and products of spheres, Proc. Amer. Math. Soc., 16-II(1965), 1350-1356.
- [7] —————: Symmetric spaces and products of spheres, Michigan Math. J. 15(1968), 97-104.
- [8] M. Mimura: The products of bundles and the symmetric space, (to appear).
- [9] M. Mimura and H. Toda: Cohomology operations and the homotopy of compact Lie groups, I, (to appear in Topology).

[10] J-P. Serre: Groupes d'homotopie et classes des groupes abéliens, Ann. of Math., 58(1953), 258-294.

[11] E. H. Spanier: Algebraic topology, McGraw-Hill, New York, (1966).

Kyoto University and Michigan State University,

Michigan State University,

Kyoto University and Northwestern University.

Iterated loop spaces の homology operations,

名大. 理. 土屋 昭博

§1. Iterated loop spaces $\Omega^n X$, $n \geq 2$, の loop 積 による H-space structure は homotopy-commutative に なる 事は よく 知られて いる。

Kudo-Araki [1] は この homotopy commutativity を 測る こと により, homology operations, $Q_j : H_k(\Omega^n X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{2k+j}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_2)$, $0 \leq j \leq n-1$, を 導入 した。この 結果 は, W-Brouder [3] による 拡張 を あわせると, some connected space X についで, $H_*(\Omega^\infty S^n X; \mathbb{Z}_2)$ を $H_*(X; \mathbb{Z}_2)$ に 備えて, functorial に 決定 できる だけ 十分 な もの を もって いる。

さて, 上の 結果 を \mathbb{Z}_p -係数, p : odd prime, に 拡張 する ことは, Dyer-Lashof [2] により, 一応 の 成功 が みられた。しかし 彼等 は, homotopy commutativity を 測る 程度 の 悪し の ために, operations, $Q_j : H_k(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_{pk+j}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$, $0 \leq j \leq n-1$ まで しか, define できず, この ため, $H_*(\Omega(X); \mathbb{Z}_p)$, $\Omega(X) = \varinjlim_n \Omega^n S^n X$, を $H_*(X; \mathbb{Z}_p)$ の functor と して 表わす こと に しか, 成功 しなかつた。 $H_*(\Omega^\infty S^n X; \mathbb{Z}_p)$ を 表わす ため には, operations Q_j $0 \leq j \leq (p-1)(n-1)$

まで define できることが必要らしく思われる。

我々は、ここでは、実際に、上の Ω_j が define できることを示し、 $H_*(\Omega^* S^n X; \mathbb{Z}_p)$ が $H_*(X; \mathbb{Z}_p)$ により、depend して決まることを示す。

最初の予定の題は、"Iterated loop spaces" の特徴づけとその応用、だったのですが、特徴づけの方がうまくいかないう所があるため、今回は応用だけとなりましたが、おしからず。

§2.

2-1. 記号.

• $I = [0, 1]$, $S^1 = [0, 1] / \sim_{0, 1}$.

• space X は \ast のとき、pointed とし、map.

$f: X \rightarrow Y$ とし、base point preserving とす。

• $F(X, Y)$: $f: X \rightarrow Y$, base point preserving map 全体.

• $X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \times \ast \cup \ast \times Y}$, $X \rtimes Y = \frac{X \times Y}{X \times \ast}$.

• $SX = S^1 \wedge X$, $S^n X = S^1 (S^{n-1} X) = S^n \wedge X$.

• $\Omega^n X = \{ \ell: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, \ast) \}$: n -the loop space.

• $X_n \cdot g = S^n \vee \dots \vee S^n$: g 個の 1-point union.

• Σg : perm g element の置換群.

• Π_p : cyclic group of order p .

$W(\pi_p) = W$: π_p -free acyclic C.W-complex.

各次元の cell の数が p 位の standard のもの
 である. p : prime number.

W^n : W の n -skeleton.

2-2. $\Omega^n X$ に loop による積を定めるとは. Π である
 何なのかを. 反省してみる. 従つて $\mu_1 : \Omega^n X \times \Omega^n X \rightarrow \Omega^n X$
 なる product は次のようにおたえらる. $l_1, l_2 \in \Omega^n X$.

$$\mu_1(l_1, l_2)(t_1 \cdots t_n) = \begin{cases} l_1(zt_1, t_2, \cdots t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ l_2(2t_1 - 1, t_2, \cdots t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

しかし. 上のようにオI座標に拘り. 和をとることは. 何の
 必然性があるわけでは. ない. すると次の事に気がつく.

今 $w \in F(S^n, S^n V S^n)$ を一つとり. $\mu_w : \Omega^n X \times \Omega^n X \rightarrow$
 $\Omega^n X$ なる積を次のように define する.

$$\mu_w(l_1, l_2) : S^n \xrightarrow{w} S^n V S^n \xrightarrow{l_1 V l_2} X.$$

(ただし. μ_w が H-space structure を define する
 ためには. $w : S^n \rightarrow S^n V S^n$ が $S^n V S^n$ の各 S^n
 に π_1 を "degree 1" であることが. 必要.) しかる. この
 μ_w に naturality をみたす. $f : X \rightarrow Y$ に対し.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n X \times \Omega^n X & \xrightarrow{\Omega^n f \times \Omega^n X} & \Omega^n Y \times \Omega^n Y \\ \downarrow \mu_w & \begin{array}{c} \cong \\ \Omega^n f \end{array} & \downarrow \mu_w \\ \Omega^n X & \xrightarrow{\Omega^n f} & \Omega^n Y. \end{array}$$

更に. 最初の μ_1 はある $w_1 \in F(S^n, S^n V S^n)$ に対する μ_{w_1} .

に定まっている。そこで w に特定のものをとる必要はなかった
 のだから。

$\mu: \Omega^n(X_{n,2}) \times (\Omega^n X \times \Omega^n X) \rightarrow \Omega^n X$ を
 $\mu(w: l_1, l_2): S^n \xrightarrow{w} S^n \vee S^n \xrightarrow{l_1 \vee l_2} X$ とし
 define しよう。

もっと一般に、 g 個の積 μ が次のように define される。

(*) $\mu: \Omega^n(X_{n,g}) \times (\Omega^n X)^g \rightarrow \Omega^n X$
 $\mu(w: l_1, \dots, l_g): S^n \xrightarrow{w} S^n \vee \dots \vee S^n \xrightarrow{l_1 \vee \dots \vee l_g} X$.

今 Σ_g を $X \vee \dots \vee X$, g 個の 1 無和, に次のように operate
 する。 $\sigma((x, i)) = (x, \sigma(i))$. ただし, $x \in X$, i は
 i 番目にある事を示す。又 $\Sigma_g \in X \times \dots \times X$ にも $\sigma(x_1, \dots, x_g)$
 $= (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(g)})$. ~~又~~ $F(Y, X \vee \dots \vee X)$ には,
 $\sigma(l) = \sigma \cdot l$ で define する。

Proposition 2-1. 上の (*) の μ は Σ_g equivariant.
 ただし, 左側には上に define したように, 右側には trivial
 に operate している。 ”

さて上の $\Omega^n X_{n,g}$ は g -th product $(\Omega^n X)^g \rightarrow$
 $\Omega^n X$ に対し universal なものであることを示そう。

今, $n \geq 1, g \geq 1$ を fix しておく。 $G: \Sigma_g$ の subgroup.
 とし, $E: G$ -space, (not pointed), とする。今,
 $(\mu_E: E)$ とは次のようなものとする。各 pointed X へ
 $\mu_E(X): E \times (\Omega^n X)^g \rightarrow \Omega^n X$. なる G -equiv-

variant continuous map が対応し. 各 $f: X \rightarrow Y$ に対応. 次の diagram を commute する. ~~これは~~

$$\begin{array}{ccc} P X (\Omega^n X)^{\otimes} & \xrightarrow{\mu_P(X)} & \Omega^n X \\ \downarrow \text{id}_X (\Omega^n f)^{\otimes} & & \downarrow \Omega^n f \\ P X (\Omega^n Y)^{\otimes} & \xrightarrow{\mu_P(Y)} & \Omega^n Y \end{array}$$

Proposition 2-2. 上の便宜のもとに. $\exists \theta: P \rightarrow \Omega^n X_{n.g}$: θ -equivariant. なる map が unique に存在して. 上の μ_P はこの θ から induce されたものとなる. すなわち次の diagram が任意の X に対して可換.

$$\begin{array}{ccc} P X (\Omega^n X)^{\otimes} & \xrightarrow{\theta \times \text{id}^{\otimes}} & \Omega^n X_{n.g} X (\Omega^n X)^{\otimes} \\ & \searrow \mu_P(X) & \downarrow \mu \\ & & \Omega^n X \end{array} \quad \square$$

さて. 上の proposition 2-2 により. $\Omega^n X_{n.g}$ は. n 回 loop spaces の g -th product についての universal parameter space になっている事がわかった. この考察を更にすすめることにより. iterated loop spaces の characterization にはまつくはすであるが, ここでは先にすすもう.

ここで, 上の結果により. operations を define する操作は 次のようになるものと思われ.

(1) $x \in H_*(\Omega^n X; A)$ に対し. functorial に $\xi(x) \in$

$H_*^{\Sigma_g}(\Omega^n X_{n,g} \times (\Omega^n X)^g : B)$ を対応させる。

(B) $\xi(x)$ の $\mu_* : H_*^{\Sigma_g}(\Omega^n X_{n,g} \times (\Omega^n X)^g : B) \longrightarrow$

$H_*(\Omega^n X : B)$ image を考える。これにより、 $x \mapsto$

$\mu_*(\xi(x))$ なる operation を define できる。

ここで ξ をつくるには、 $H_*^{\Sigma_g}(\Omega^n X_{n,g})$ の元を使うのが

都合がよいようである。しかし、これを直接しらべるのはうまく

ゆかない。そこで $\Omega^n X_{n,g}$ をうまく G -complex E で

G -equivariant に近似する：と考える。ここに G は

Σ_g の subgroup. すると、Kudo-Araki [1] が考慮

したのは、 $g=2$. $E = I^{n+1}$ である。Dyer-Lashof [2]

は $g=p$. prime number $G = \Sigma_p$. $E = J^n \Sigma_p = \Sigma_p^{k_1} \times \dots \times \Sigma_p^{k_r}$

n 個の join 積。であることがわかる。我々は $g=p$.

$G = \Pi_p$. $E = W^{(n-1)(p-1)}(\Pi_p)$ で $\Omega^n X_{n,p}$ を近似する。

了。まず最初に次のことを示そう。

Proposition 3-1. p : prime number. $n \geq 1$. とする。

次のような Π_p equivariant map Θ_n が存在する。

$$\Theta_n : W^{(n-1)(p-1)} \longrightarrow \Omega^n X_{n,p}.$$

i) Θ_n の image の connected component は、 $n \geq 2$ とし、

$\pi_0(X_{n,p}) \cong \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$ の $1 + \dots + 1$ で代表される部分。 $n=1$

のと $\Theta_1(e)$ は $\pi_0(X_{1,p}) \cong \pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1)$, free group

generated by $z_j, j=1, \dots, n$. したがって $S^1 \longrightarrow S^1 \vee \dots \vee S^1$.

は i 番目に degree 0, 他は 0, とすると, $x_1 \cdots x_p$ で代表する component の元.

ii) θ_n は $(p-1)(n-1)-1$ skeleton 上を考えると, π_p equivariant homotopy のもとに unique.

iii) 次の diagram は commutative.

$$\begin{array}{ccc} W^{(n-1)(p-1)} & \xrightarrow{\theta_n} & \Omega^n X_{n,p} \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ W^{(n-2)(p-1)} & \xrightarrow{\theta_{n-1}} & \Omega^{n-1} X_{n-1,p} \end{array} \quad \gg$$

上の Proposition の証明は, Bredon [5] による equivariant cohomology theory を用い.

Obstruction theory により, θ の存在及び一意性を示す. この時存在のための obstruction は

$H_{\pi_p}^i(W; \pi_{i-1}(\Omega^n X_{n,p}))$. π_p homotopic のための obstruction は $H_{\pi_p}^i(W; \pi_i(\Omega^n X_{n,p}))$ に存在する.

ここに $H_{\pi_p}^i(\ ; \)$ は, たとえば Steenrod [4], V 章に書かれている, equivariant cohomology theory.

この時 $\pi_i(\Omega^n X_{n,p})$ は Hilton [6] により, Whitehead product の言葉で云い表わす. $i < (p-1)(n-1)$ まで.

π_p -module とし, regular 表現の形のみに

表わす. cohomology は消える. $i = (p-1)(n-1)$ のとき

はじめて, たとえば $[e_1, e_2, \dots, [e_{p-1}, e_p], \dots]$ とその

π_p -image の元が 出てきて, cohomology が消えなく

なる。こゝに $e_j \in \pi_n(X_{n,p}) = \pi_n(S^n V \cdots VS^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$.

j 番目に degree 1. 他に 0. とする generator.

§4. 4.2. 必要なる operations $Q_j^{(p)}, \psi_n^{(p)}, \phi_n^{(p)}$.

± define しよう. p : prime number. $n \geq 1$.

4-1). $Q_j^{(p)} = Q_j$. $j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)(p-1)$.

• $Q_j: H_\ell(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H_{p\ell+j}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$. $\ell \geq 0$.

• $x \in H_\ell(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$. $\ell \geq 0$.

こゝとき. $Q_j(x) \equiv \mu \circ (\theta_n \times \text{id}) \cdot t(e_j \otimes_{\mathbb{Z}} (x)^p)$.

$e_j \otimes_{\mathbb{Z}} (x)^p \in H_{p\ell+j}^{\pi p} (W^{(n-1)(p-1)} \otimes (\mathbb{H}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p))^p)$

$\cong \downarrow t$

$H_{p\ell+j}^{\pi p} (W^{(n-1)(p-1)} X (\Omega^n X)^p; \mathbb{Z}_p)$

$\downarrow \theta_n \times \text{id}$

$H_{p\ell+j}^{\pi p} (\Omega^n X_{n,p} X (\Omega^n X)^p; \mathbb{Z}_p)$

$\downarrow \mu$

$H_{p\ell+j}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$.

4-2). $\psi_{n-1}^{(p)}: H_\ell(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p) \otimes H_m(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$

$\longrightarrow H_{\ell+m+n-1}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$.

• $x \in H_\ell(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$. $y \in H_m(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$

• $\Delta = \sigma^{-1}$, $\Gamma = \sigma + 1$ in $\mathbb{Z}[\pi_2]$. group ring.

σ : generator of π_2 .

• $\psi_{n-1}^{(p)}(x, y) = \int \mu \cdot (\theta_n \times \text{id}) \cdot t(e_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta(x \otimes y))$

106

if. n : odd.

$$\downarrow \mu \cdot (\theta_n \times \text{id}) \cdot t(e_{n-1} \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma(x \otimes y)).$$

if n : even.

$$\begin{array}{l} e_{n-1} \otimes_{\mathbb{F}} \Delta(x \otimes y) \\ e_{n-1} \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma(x \otimes y) \end{array} \in H_{\ell+m+n-1}^{\pi_2} (W^{(n-1)}(\pi_2) \otimes (H(\Omega^n X: Z_p))^2)$$

$$\cong \downarrow t$$

$$H_{\ell+m+n-1}^{\pi_2} (W^{(n-1)} X (\Omega^n X)^2 : Z_p)$$

$$\downarrow \theta_n \times \text{id}.$$

$$H_{\ell+m+n-1}^{\pi_2} (\Omega^n X_{n-2} X (\Omega^n X)^2 : Z_p)$$

$$\downarrow \mu$$

$$H_{\ell+m+n-1}(\Omega^n X: Z_p).$$

$$4-3). \phi_{n-1}^{(p)} : H_{\ell_1}(\Omega^n X: Z_p) \otimes \dots \otimes H_{\ell_p}(\Omega^n X: Z_p)$$

$$\longrightarrow H_{\ell_1 + \dots + \ell_p + (n-1)(p-1)}(\Omega^n X: Z_p).$$

$$\cdot x_i \in H_{\ell_i}(\Omega^n X: Z_p), \ell_i \geq 0, i=1, \dots, p.$$

$$\cdot \phi_{n-1}^{(p)}(x_1, \dots, x_p) = \mu \cdot (\theta_n \times \text{id}) \cdot t(e_{(n-1)(p-1)} \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)).$$

$$e_{(n-1)(p-1)} \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)$$

$$\in H_{\ell_1 + \dots + \ell_p + (n-1)(p-1)}^{\pi_p} (W^{(n-1)(p-1)}(\pi_p) \otimes (H(\Omega^n X: Z_p))^p)$$

$$\cong \downarrow t$$

$$H_{\ell_1 + \dots + \ell_p + (n-1)(p-1)}^{\pi_p} (W^{(n-1)(p-1)}(\pi_p) X (\Omega^n X)^p : Z_p)$$

$$\downarrow \theta_n$$

$$H_{\ell_1 + \dots + \ell_p + (n-1)(p-1)}^{\pi_p} (\Omega^n X_{n-p} X (\Omega^n X)^p : Z_p)$$

$$\downarrow$$

$$H_{k_1 + \dots + k_p + (n-1)(p-1)}(\mathbb{Q}^n X; \mathbb{Z}_p).$$

4.4). 上記 $Q_{(n-1)(p-1)}$. $\phi_{n-1}^{(p)}$. $\psi_{n-1}^{(p)}$ は θ_n のと一方
に depend して いる. Q_j . $j < (n-1)(p-1)$ は indep.

4-5). ϕ_{n-1} . ψ_{n-1} は m 回 loop space $m \neq n$.
では. 1つを せよ える.

• Q_j は 定義 でき ている か ぎら. m 回 loop space
と して 考え たら m には depend. して いる はず.

4-6)

Proposition 4-1. 次の 事 が 成 立 する.

① Q_j . ψ_{n-1} . ϕ_{n-1} : natural for n -th iterated
loop. map.

② Q_j : homomorphism. if $j \leq (n-1)(p-1)$.
($\mathbb{R}E^L$. n 回 loop space 上 で 考え てる.)

$$Q_{(n-1)(p-1)}(x+y) = Q_{(n-1)(p-1)}(x) + Q_{(n-1)(p-1)}(y) + \sum \phi_{n-1}^{(p)}(x, \dots, y).$$

③ Q_0 : Pontryagin p -th power.

④ $\beta_p Q_{2j} = Q_{2j-1}$ if $2j < (n-1)(p-1)$

$$\beta_p Q_{(n-1)(p-1)}^{(x)} = Q_{(n-1)(p-1)-1}(x) + \phi_{n-1}^{(p)}(\beta_p x, x, \dots, x).$$

⑤ p : odd prime number と する と.

$Q_{2j}(x) = 0$, unless $2j + (p-1) \deg x \equiv 0 \pmod{2(p-1)}$.

$$\phi_{n-1}^{(2)} = \psi_{n-1}^{(2)}.$$

Proposition 4-2. 次の意味で Cartan formula を成りたつ。

$x \in H_r(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p), y \in H_s(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p), 2i < (n-1)(p-1).$

a) $Q_{2i}(x \otimes y) = \sum_{j=0}^i (-1)^{r \cdot s \binom{p-1}{j}} \cdot Q_{2j}(x) \otimes Q_{2(i-j)}(y).$

b) $p=2$ のとき.

$Q_i(x \otimes y) = \sum_{j=0}^i Q_j(x) \otimes Q_{i-j}(y)$

c). $x \in H_r(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p), y \in H_s(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$

$Q_{2i}(x \cdot y) = \sum_{j=0}^i (-1)^{r \cdot s \binom{p-1}{j}} Q_{2j}(x) \cdot Q_{2(i-j)}(y)$

d) $p=2$ のとき

$Q_i(x \cdot y) = \sum_{j=0}^i Q_j(x) \cdot Q_{i-j}(y).$

更に $Q_i Q_j$ なる iteration に対応して Adem-relations

が成りたつ。 Q_i と reduced power P^j との間の Nishida [8] による relations を成りたつ。

4-7). $Q_j, \psi_{n-1}, \phi_{n-1}$ と suspension σ :

$H_*(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H_{*+1}(\Omega^{n+1} X; \mathbb{Z}_p)$ との関係。

成りたつ。 Spectral sequence に対応する Kudo's

Transgression theorem が次の意味で成りたつ。

Proposition 4-3. $x \in H_{2j}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p).$

$\sigma Q_{j+p-1}(x) = (-1)^{\binom{p-1}{j}} \cdot \left(\binom{p-1}{j}\right)! Q_j(\sigma(x))$

$j+p-1 \leq (n-1)(p-1).$

Proposition 4.4. $x \in H_{r-1}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$, $y \in H_{s-1}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$.
 $\sigma \psi_{n-1}^{(p)}(x, y) = (-1)^{r+s-1} \psi_{n-2}^p(x, \sigma y)$.

Proposition 4.5. p : odd prime number.

$x_i \in H_{2i-1}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p)$ $i=1, \dots, n$

$$\sigma \phi_{n-1}^{(p)}(x_1 \cdots x_p) = (-1)^* \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right) \cdot \phi_{n-2}^p(\sigma x_1, \dots, \sigma x_p).$$

Proposition 4-6. p : odd. $n \geq 2$.

$\Omega^{n+1} X \rightarrow P\Omega^n X \rightarrow \Omega^n X$ is associate to Serre spectral sequence $E_{**}^2 \cong H_*(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p) \otimes H_*(\Omega^{n+1}; \mathbb{Z}_p)$ にかゝり、 $x \in E_{2n,0}^2$ は transgressive とする。

$d_{2n}(x) = \{y\}$. $y \in E_{0,2n-1}^2$. このとき、

a) $d_{2np}(x^p) = d_{2np}(Q_0(x)) = \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right)^{p-1} Q_{p-1}(y)$.

b) $d_{2n(p-1)}(x^{p-1}y) = \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right)^{p-1} Q_{p-2}(y)$.

• Prop. 4-3. 4-4. 4-5. は θ_n をうまくとったときに成りたつてゐることを意味してゐる。

• Prop. 4-6 は $n \geq 1$ で成立してゐるように思ふ。

又、あとに $n=1$ の場合にも、 $n=1$ のときの Prop. 4-6 を使つた。しかし、証明できた。とこそ、Clark [7] による別の方法によつて、 $n=1$ のときは Prop. 4-6 type の次の Prop. が証明されてゐる。

Proposition 4-7. Clark [7].

$X: \pi_0(X) = \pi_1(X) \neq 0$ なる H-space. $H_*(X):$ finite type.

今 $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ に associate した Serre Spectral sequence に於いて. $x \in H_{2m}(X; \mathbb{Z}_p)$ から $y \in H_{2m-1}(\Omega X; \mathbb{Z}_p)$ に transgressive とする. このとき.

a) $x^p \in H_{2mp}(X; \mathbb{Z}_p)$ は $y' \in H_{2mp-1}(\Omega X; \mathbb{Z}_p)$ に transgressive.

b) $\beta_p x^p$ は $w \in H_{2mp-2}(\Omega X; \mathbb{Z}_p)$ に transgressive

c) $d_{2m(p-1)}(x^{p-1} \cdot y) = \{1 \otimes (\beta y' + w)\} \in E_{0, 2m(p-1)}.$

とすると我々は. Prop. 4-3 & " Prop. 4-4 に於いて.

$y' = ((\frac{p-1}{2})!)^{p-1} Q_{p-1}(y)$. $w = (-1)^k ((\frac{p-1}{2})!)^{p-1} \phi_1(\beta_p y, y, \dots, y)$

とわかることを知らせている。又 Prop. 4-1. ④ ⑤) $\beta_p Q_{p-1}(y)$

$= \phi_1^{(p)}(\beta_p y, y, \dots, y) \in Q_{p-2}(y)$ とわかることを知らせている。

このことは $n=1$ のとき. Prop. 4-6 の $d_{2m(p-1)}(x^{p-1} y)$

$= ((\frac{p-1}{2})!)^{p-1} Q_{p-2}(y)$ から Clark に於いて証明

できるはず(?) であることを示している。

§5. $X: arcwise connected$. $H_*(X; \mathbb{Z}_p)$ locally

finite とする。今 $H_*(X; \mathbb{Z}_p)$ の homogenous basis

x_1, x_2, \dots を一つ用意する。

Proposition 5-1. Hilton [6].

$H_*(\Omega SX; \mathbb{Z}_p) \cong$ Tensor algebra generated

b_j, x_1, x_2, \dots over \mathbb{Z}_p . \therefore (2.1), $p: \text{odd}$ とする.
 とする. Poincaré - Birkhoff - Witt の定理 (2.1).
 $T(\{x_1, \dots\}) \cong \Lambda(b_j) \otimes P(b_R, (b_j)^2)$. \therefore (2.2).
 $\{b_j, b_R\}$ は $T(\{x_1, \dots\})$ の中で x_1, x_2, \dots で generate
 される graded Lie algebra の basis で "1" のゆる
 basis monomial と云う形にかけられるもの. [6].
 $\deg b_j = \text{odd}$. $\deg b_R = \text{even}$. とつづける. ただし
 上の同型は \mathbb{Z}_p -module とし. 今上の分解に
 対応して $H_*(\Omega^m S^n; \mathbb{Z}_p)$, $m \geq 2$, の元. ξ_i, η_j を
 次のようにおく. 今 $b_j = [x_{i_1} \cdots [x_{i_{k-1}}, x_{i_k}] \cdots]$ の
 形のとて $\xi_j = \psi_{n-1}^{(p)}(x_{i_1} \cdots \psi_{n-1}^{(p)}(x_{i_{k-1}}, x_{i_k}) \cdots)$ とおき.
 $(b_j)^2$ に対応し. $\eta_j = \psi_n^{(p)}(\xi_j, \xi_j)$ とおく. \therefore (2.3). あらた
 め ξ_i, η_j を ξ_1, ξ_2, \dots とおき. ξ_1, ξ_2, \dots とする.
 今. $I = (j_1, \dots, j_r)$. \therefore 次のような列とする.

1) $j_i \equiv 0, -1 \pmod{p-1}$.

2) $j_1 \leq \dots \leq j_r$.

3) $j_r \leq (n-1)(p-1)$.

4) $j_s \equiv 0 \pmod{p-1} \Rightarrow j_{s-1}, \text{ or } j_{s-1} + 1$ と j_s とは
 same parity mod $(p-1)$.

$j_s \equiv -1 \pmod{p-1} \Rightarrow j_{s-1}$ or $j_{s-1} + 1$ と j_s とは
 odd parity mod $(p-1)$.

5) $I = \emptyset$ をゆるす.

$I = (j_1, \dots, j_r)$ として $j_r \equiv 0, +1: (2(p-1))$ の倍数の \mathbb{Z} even type
 $j_r \equiv (p-1), \alpha(p-2); (2(p-1))$ の倍数の \mathbb{Z} odd type とする.

今 $\deg \xi_j = \text{even}$ のときは $Q_I(\xi_j)$. $I: \text{even type}$

$\deg \xi_j = \text{odd}$. $Q_I(\xi_j)$. $I: \text{odd type}$.

とし. $\deg Q_j(x) = j + p \deg x$ として inductively to

$\deg Q_I(\xi_j)$ を define する. 上の ような $Q_I(\xi_j)$

を allowable element とする. \mathbb{Z} 上. $Q_\phi(\xi_j) = \xi_j$

Proposition 5-1. $p: \text{odd}$. とし. $n \geq 2$

$H_*(\Omega^n S^n X; \mathbb{Z}_p)$: free commutative algebra
 generated by $Q_I(\xi_j)$: allowable elements.

$p=2$ のときは上の形はもつとカバタシに成って来る. [3]

参考文献.

[1] Araki-Kudo "The topology of H_m -spaces ..."

[2] Dyer-Lashof: "Homology of iterated loop spaces."

[3] W-Browder "Homology operations and loop spaces."

[4] Steenrod "Cohomology operations."

[5] Bredon "Equivariant cohomology theory."

[6] Hilton "On the homotopy groups of the union of spheres."

[7] Clark "A homology transgression theorem."

[8] Nishida "Cohomology operations on iterated loop spaces."

Immersion 及び Differentiable Actions の Cobordism 理論による考察

阪大理 内田伏一

Cobordism による immersions の分類 (Part I),
semi-free S^1 -actions の cobordism group 及び semi-free
 S^1 -action の fixed point set の index (Part II), につ
いて報告するのが本稿の目的である。

Part I. Immersions

§1. Cobordism of immersions

M, N が夫々次元 $n, n+k$ の closed C^∞ -manifolds
であり, $f: M \rightarrow N$ が C^∞ -immersion であるとき,
 (f, M, N) を次元 (n, k) の immersion と呼ぶ。

2つの immersions $(f, M, N), (f', M', N')$ に対して,
diffeomorphisms $\varphi: M \rightarrow M', \psi: N \rightarrow N'$ で
 $\psi f = f' \varphi$ を満たすものがあるとき, $(f, M, N) = (f', M', N')$
と書く。

次元 (n, k) の immersion (f, M, N) は, 次の条件 (i), (ii)
を満たす (F, V, W) が存在するとき, cobordant to
zero であると呼び, $\partial(F, V, W) = (f, M, N)$ と書く。

(i) V, W は 夫々次元 $n+1, n+k+1$ の compact C^∞ -manifolds であり, $\partial V = M, \partial W = N$,

(ii) immersion $F: V \rightarrow W$ は $F(\partial V) \subset \partial W$ 且つ, ∂W 上で t -regular であり, $F|_M = f$.

2つの immersions $(f_1, M_1, N_1), (f_2, M_2, N_2)$ は disjoint union $(f_1, M_1, N_1) + (f_2, M_2, N_2)$ が cobordant to zero のとき, cobordant であるという。これは同値関係であり, (f, M, N) の属する class を $[f, M, N]$ と書く。

次元 (n, k) の immersions の, この同値関係による同値類全体を $I(n, k)$ と書き, disjoint union によって和を定義すれば, $I(n, k)$ は可換群になる。

$$\partial(f \times 1, M \times [0, 1], N \times [0, 1]) = (f, M, N) + (f, M, N)$$

だから, 各元 $[f, M, N]$ は, それ自身の逆元である。

次に, 積 $I(p, k) \times \mathcal{R}_g \rightarrow I(p+g, k)$ を

$$([f, M, N], [L, J]) \mapsto [f \times 1, M \times L, N \times L]$$

によって定義すれば, 各 $k \geq 0$ について, 直和 $I^{(k)} = \sum_{n \geq 0} I(n, k)$ は graded right \mathcal{R}_* -module になる。

ここに $\mathcal{R}_* = \sum_{n \geq 0} \mathcal{R}_n$ は unoriented cobordism ring である。この \mathcal{R}_* -module $I^{(k)}$ の構造を調べるのが当初の目標であったが, このままでは, ホモトピー群による表現や, その他の幾何学的考察も困難に思われるので, 次の generic immersions に限って考えることにする。

§2. Generic immersions

M, N を夫々次元 $n, n+k$ の compact C^∞ -manifolds とし, immersion $f: M \rightarrow N$ は $f(\partial M) \subset \partial N$ 且つ ∂N 上 t -regular なるものとする。更に次の条件 (a), (b) を満たすとき, $f \in$ generic immersion と呼ぶ。

$$(a) \quad y = f(x) = f(x'), x \neq x' \Rightarrow df(M_x) + df(M_{x'}) = N_y,$$

(b) f は triple point を持たない。(cf [2], §2.5)

この generic immersion $f: M \rightarrow N$ について

$$D = \{x \in M \mid \exists x' \in M, x \neq x', f(x) = f(x')\}$$

は M の $n-k$ 次元 closed submanifold であり, $\partial D \subset \partial M$ 且つ inclusion $D \subset M$ は ∂M 上 t -regular である。また, $\Delta = f(D)$ は N の $n-k$ 次元 closed submanifold であり, $\partial \Delta \subset \partial N$ 且つ inclusion $\Delta \subset N$ は ∂N 上 t -regular である。

fixed point free C^∞ -involution $T: D \rightarrow D$ が $f(T(x)) = f(x)$ により定義され, orbit manifold D/T は Δ と diffeomorphic である。

更に $\nu, \hat{\nu}$ を夫々 embeddings $D \subset M, \Delta \subset N$ の normal bundles とし, $T^*\nu$ を involution $T: D \rightarrow D$ による ν の induced bundle とする。このとき, bundle map

$$\begin{array}{ccc}
 V \oplus T^*V & \xrightarrow{\hat{T}} & V \oplus T^*V \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D & \xrightarrow{T} & D
 \end{array}$$

が $\hat{T}(u, v) = (v, u)$ によって定義され、一方 *generic immersion* の条件 (a) より, *bundle map*

$$\begin{array}{ccc}
 V \oplus T^*V & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{V} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D & \xrightarrow{f|_D} & \Delta
 \end{array}$$

が存在し, $\hat{f}\hat{T} = \hat{f}$ を満たす。従って, Δ 上の *bundle* \hat{V} は D/T 上の *bundle* $T^*V \equiv (V \oplus T^*V)/\hat{T}$ と同一視出来る。

注1. §1 の $I(n, k)$ の定義における "immersion" を, "embedding" 及び "generic immersion" で置き換えることによって, *cobordism group of embeddings* $E(n, k)$, *cobordism group of generic immersions* $G(n, k)$, 及び \mathbb{N}_* -modules $E^{(k)} = \sum_{n \geq 0} E(n, k)$, $G^{(k)} = \sum_{n \geq 0} G(n, k)$ を定義する。

注2. (1) Haefliger の定理 ([2], Th. 2.5) によって, $2k > n+1$ のとき, $G(n, k) \cong I(n, k)$.

(2) $E(n, k) \cong \mathcal{N}_{n+k}(MO(k))$, $E^{(k)} \cong \mathcal{N}_*(MO(k))$. 後者は \mathcal{N}_* -modules としての同型 (cf. [4], p.249. (d)).

§3. Cobordism of bundles over manifolds with involution.

前節で見るように, triple (M, T, ξ) の考察が重要であることが分った. 但し $T: M \rightarrow M$ は compact C^∞ -manifold M 上の fixed point free C^∞ -involution であり, ξ は M 上の k -plane bundle である.

$(M, T, \xi), (M', T', \xi')$ に対して equivariant diffeomorphism $\varphi: M \rightarrow M'$ ($\varphi T = T' \varphi$) 及び, φ を cover する bundle map $\xi \rightarrow \xi'$ があるとき, $(M, T, \xi) = (M', T', \xi')$ と書く.

$M_1, M_2 \in$ closed n -manifolds とするとき, $(M_1, T_1, \xi_1), (M_2, T_2, \xi_2)$ は, triple (W, T, ξ) として

$$(\partial W, T/\partial W, \xi/\partial W) = (M_1, T_1, \xi_1) + (M_2, T_2, \xi_2)$$

を満たすものがあるとき, cobordant であると呼ぶ. equivariant collared neighborhood の存在 ([1], Th. 21.2) により, これは同値関係であり, (M, T, ξ) の属する class を $[M, T, \xi]$ と書き, 同値類の全体を $B(n, k)$ と書く. disjoint union によって和を定義すれば, $B(n, k)$ は可換群になり, 各元は, それ

自身の逆元である。

$$\text{積 } B(p, k) \times \mathcal{R}_2 \longrightarrow B(p+\beta, k) \in$$

$$([M, T, \xi], [N]) \longmapsto [M \times N, T \times 1, \xi \times 0]$$

によって定義すれば、各 $k \geq 0$ について、直和 $B^{(k)} = \sum_{n \geq 0} B(n, k)$ は graded right \mathcal{R}_* -module になる。

§4. 主定理

準同型写像

$$\alpha_* : E(n, k) \longrightarrow G(n, k)$$

$$\beta_* : G(n, k) \longrightarrow B(n-k, k)$$

$$P_* : B(n, k) \longrightarrow G(n+k, k)$$

を次のように定義する (すべて \mathcal{R}_* -module hom. になる)

- (1) α_* : forgetting homomorphism,
- (2) §2 の記号で, $\beta_*([f, M, N]) = [D, T, \nu]$,
- (3) $P_*([M, T, \xi]) = [P(\pi h \otimes 1), P(\xi \otimes 1_R), P(T_* \xi \otimes 1_R)]$,

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \longleftarrow & E(\xi) & \longrightarrow & P(\xi \otimes 1_R) \\
 \downarrow \text{id.} & & \downarrow h & & \downarrow P(h \otimes 1) \\
 M & \longleftarrow & E(\xi \otimes T^* \xi) & \longrightarrow & P(\xi \otimes T^* \xi \otimes 1_R) \\
 \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi & & \downarrow P(\pi \otimes 1) \\
 M/T & \longleftarrow & E(T_* \xi) & \longrightarrow & P(T_* \xi \otimes 1_R)
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} P(\pi h \otimes 1)$$

このとき.

定理 1.1. [5] $0 \rightarrow E(n, k) \xrightarrow{\alpha_*} G(n, k) \xrightarrow{\beta_*} B(n-k, k) \rightarrow 0$
 は split exact sequence であり, $\beta_* \alpha_* = \text{id}$.

準同型写像

$$\varphi_* : \mathcal{N}_n(BO(k) \times BO(k)) \longrightarrow B(n, k)$$

$$\psi_* : B(n, k) \longrightarrow B(n-1, k)$$

$$\rho_* : B(n, k) \longrightarrow \mathcal{N}_n(BO(k) \times BO(k))$$

を次のように定義する (すべて \mathcal{N}_* -module hom. にする)

$$(4) \varphi_*([M, \xi, \eta]) = [M \times 0 \cup M \times 1, T, \xi \times 0 \cup \eta \times 1],$$

$$T(x, l) = (x, 1-l), \quad \forall x \in M, l = 0, 1$$

$$(5) \psi_*([M, T, \xi]) = [V, T|_V, \xi|_V],$$

$\exists A, B, V$: closed submanifolds of M , s.t.

$$M = A \cup B, \quad V = A \cap B = \partial A = \partial B, \quad T(A) = B.$$

$$(6) \rho_*([M, T, \xi]) = [M, \xi, T^* \xi].$$

このとき.

定理 1.2. [5] 次の列は exact である

$$\dots \xrightarrow{\psi_*} B(n, k) \xrightarrow{\rho_*} \mathcal{N}_n(BO(k) \times BO(k)) \xrightarrow{\varphi_*} B(n, k) \xrightarrow{\psi_*} B(n-1, k) \xrightarrow{\rho_*} \dots$$

この二つの定理により、各 $B(n, k), G(n, k)$ は有限群であり、また、 \mathcal{R}_* -module $G^{(k)} = \sum_{n \geq 0} G(n, k)$ は、二つの \mathcal{R}_* -modules $E^{(k)} \cong \mathcal{R}_*(MO(k))$ と $B^{(k)} = \sum_{n \geq 0} B(n, k)$ との直和になる。

従って、 $B^{(k)}$ の構造を調べるのが次の問題になる。これについて、次の結果を得る。

$\{\chi_w, w \in \Lambda\}$ を free \mathcal{R}_* -module $\mathcal{R}_*(BO(k))$ の base とすれば、free \mathcal{R}_* -module $\mathcal{R}_*(BO(k) \times BO(k))$ の base は $\{\chi_w \times \chi_w, w, w \in \Lambda\}$ で与えられる。今、 $\{\chi_w \times \chi_w, w \in \Lambda\}$, $\{\chi_w \times \chi_w + \chi_w \times \chi_w, w, w \in \Lambda, w \neq w\}$ を bases とする \mathcal{R}_* -submodules を $A^{(k)}, S^{(k)}$ と書く。また、 $C^{(k)} = \psi_*(B^{(k)})$ とするとき、

定理 1.3. [6] \mathcal{R}_* -modules として次の同型を得る。

$$B^{(k)} \cong C^{(k)} \oplus S^{(k)}, \quad C^{(k)} \cong H_*(RP^\infty; \mathbb{Z}_2) \otimes A^{(k)}$$

この結果、 $B^{(k)}$ は free \mathcal{R}_* -module となり、 $G^{(k)} \cong E^{(k)} \oplus B^{(k)}$ より、 $G^{(k)}$ も free \mathcal{R}_* -module になる。

Part II. Semi-free S^1 -actions

§ 5. Cobordism of semi-free S^1 -actions.

$f: G \times M \rightarrow M$ を compact Lie group G の compact C^∞ -manifold M 上の C^∞ -action とし, F を action f の stationary points 全体の集合, 即ち

$$F = \{x \in M \mid \forall g \in G : f(g, x) = x\}$$

とすれば, F の各連結成分は, M の closed C^∞ -submanifold になることが知られている。以下, F の k 次元成分を F^k と書く。

action f は, $M - F$ 上で fixed point free のとき, semi-free であるといふ。以下, $G = S^1$ (circle group) とし, compact oriented C^∞ -manifolds 上の semi-free S^1 -actions について考える。

2つの semi-free S^1 -actions $(M, f), (M', f')$ に対して, orientation preserving diffeomorphism $\varphi: M \rightarrow M'$ で, 次の図式を可換にするものがあるとき,

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow 1 \times \varphi & & \downarrow \varphi \\ S^1 \times M' & \xrightarrow{f'} & M' \end{array}$$

$(M, f) = (M', f')$ と書く。

closed n -manifolds 上の semi-free S^1 -actions (M_1, f_1) , (M_2, f_2) は compact $(n+1)$ -manifold 上の semi-free S^1 -action (W, f) で

$$(\partial W, f|_{\partial W}) = (M_1, f_1) + (-M_2, f_2)$$

を満たすものがあるとき, cobordant であるという。
equivariant collared neighborhood の存在 (cf [1], Th. 21.2) によって, これは同値関係であり, (M, f) の属す class を $[M, f]$ と書き, 同値類全体を $SF_n(S^1)$ と書く。
disjoint union によって和を定義すれば $SF_n(S^1)$ は可換群になり, $[M, f]$ の逆元は $[-M, f]$ である。

§ 6. Normal bundle of stationary point set

semi-free S^1 -action (M^n, f) の stationary points 全体 $F = \bigcup_k F^k$ について, embedding $F^k \subset M^n$ の normal bundle は complex structure をもち, induced S^1 -action が complex numbers の scalar 積 になることが知られている。従って, $k \neq n/2$ のとき $F^k = \emptyset$ であり, $F^{n-2k} \subset M^n$ の complex normal bundle を ν^k とするとき, ν^k には自然に orientation が定まり,

bundle map $\tau(F^{n-2k}) \oplus \nu^k \longrightarrow \tau(M^n)$ が

orientation を保つように, F^{n-2k} の orientation を

定めることが出来る。

ここで、準同型写像

$$\nu_* : SF_n(S^1) \longrightarrow \sum_k \Omega_{n-2k}(BU(k))$$

$$\partial_* : \Omega_n(BU(k)) \longrightarrow \Omega_{n+2k-2}(CP^\infty)$$

を次のように定義する。

(1) 前頁の記号によつて, $\nu_*([M^n, f]) = \sum_k [F^{n-2k}, \nu_k]$,

(2) $\partial_*([M^n, \xi^k]) = [CP(\hat{\xi}^k), \hat{\xi}^k]$, 但し, $\hat{\xi}^k$ は complex projective bundle の total space $CP(\hat{\xi}^k)$ 上の canonical complex line bundle であり, $\partial_*(\Omega_n(BU(0))) = 0$ とする。

このとき,

定理 2.1. [7] 次の列は split exact である。

$$0 \longrightarrow SF_n(S^1) \xrightarrow{\nu_*} \sum_k \Omega_{n-2k}(BU(k)) \xrightarrow{\partial_*} \Omega_{n-2}(CP^\infty) \longrightarrow 0$$

ξ を oriented closed C^∞ -manifold V^n 上の complex k -plane bundle とし, lc を trivial complex line bundle とする。 $\xi \oplus lc$ に associate した complex projective bundle の total space $CP(\xi \oplus lc)$ 上に, S^1 -action

$$\mu : S^1 \times CP(\xi \oplus lc) \longrightarrow CP(\xi \oplus lc)$$

を, $\mu(\lambda, \langle u, v \rangle) = \langle \lambda u, v \rangle$ によつて定義する。但し,

$\lambda \in S^1$, u, v は夫々 $\xi, 1c$ の vectors とする。このとき, μ は semi-free C^∞ -action であり, fixed point set は V^n と $CP(\xi)$ の disjoint union である。

準同型写像

$$CP_* : \Omega_n(BU(k)) \longrightarrow SF_{n+2k}(S^1)$$

を $CP_*([V^n, \xi]) = [CP(\xi \oplus 1c), \mu]$ によって定義すれば,

定理 2.2. [7]

$$CP_* \nu_* = \text{identity}, \quad CP_* : \sum_{k \geq 1} \Omega_{n-2k}(BU(k)) \cong SF_n(S^1)$$

§7. Index of a semi-free S^1 -action

(M^n, f) を oriented closed C^∞ -manifold M^n 上の semi-free S^1 -action とし, F^{n-2k} を stationary point set の oriented $(n-2k)$ 次元成分とする。更に, ν^k を embedding $F^{n-2k} \subset M^n$ の complex normal bundle とすれば, 定理 2.1, 2.2 によって

$$(2.3) \quad \sum_{k \geq 1} [CP(\nu^k)] = 0, \quad \sum_{k \geq 0} [CP(\nu^k \oplus 1c)] = [M^n] \quad \text{in } \Omega_*.$$

一般に ξ^k を oriented closed n -manifold V^n 上の complex k -plane bundle とし, $CP(\xi^k)$ を ξ^k に associate

k complex projective bundle の total space とすれば、
 $CP(\xi^k)$ は自然な orientation をもち、oriented
 manifolds に対する index の定義及び、Leray-
 Hirsch の定理を $H^*(CP(\xi^k); \mathbb{R})$ に使うことにより、

$$(2.4) \quad I(CP(\xi^k)) = \begin{cases} I(V^n) & k: \text{odd} \\ 0 & k: \text{even} \end{cases}$$

従って、(2.3), (2.4) により

$$\sum_{k: \text{odd}} I(F^{n-2k}) = 0, \quad \sum_{k: \text{even}} I(F^{n-2k}) = I(M^n)$$

辺々加えて、

$$\text{定理 2.5. [3]} \quad I(M^n) = \sum_k I(F^{n-2k})$$

Conner-Floyd [1] が、involution について、次の
 結果を出している。

定理. odd Euler characteristic をもつ k closed C^∞ -
 manifold M^{2k} 上の C^∞ -involution $T: M^{2k} \rightarrow M^{2k}$ に対し、
 必ず、次元 $\geq k$ の fixed point set の連結成分がある。

定理 2.5 を用いれば, この Conner-Floyd の定理の証明と同様にして, 次の結果を得る.

定理 2.6. [3] $I(M^{4k}) \neq 0$ なる oriented closed C^∞ -manifold M^{4k} 上の semi-free S^1 -action に対して, 必ず, 次元 $\geq 2k$ の fixed point set の連結成分がある.

参考文献

- [1] P.E.Conner-E.E.Floyd:Differentiable Periodic Maps, Springer-Verlag,1964.
- [2] A.Haefliger:Plongements differentiables de varietes dans varietes, Comm.Math.Helv.36(1961),47-82.
- [3] K.Kawakubo-F.Uchida:On the index of a semi-free S^1 -action(to appear).
- [4] R.E.Stong:Cobordism of maps, Topology 5(1966), 245-258.
- [5] F.Uchida:Exact sequences involving cobordism groups of immersions,Osaka J.Math.6(1969),397-408.
- [6] ———:The structure of the cobordism groups $B(n,k)$ of bundles over manifolds with involution (to appear).
- [7] ———:Cobordism groups of semi-free S^1 - and S^3 -actions(to appear).
- [8] T.Watabe: $SO(r)$ -cobordism and embedding of 4-manifolds,Osaka J.Math.4(1967),133-140.
- [9] R.Wells:Cobordism groups of immersions,Topology 5(1966),281-294.



株式会社

竹内書店

本社：東京都港区北青山2の12の35

Tel. 404-8571 (代) ~ 5

大阪営業所：大阪市東区高麗橋5-45 興銀ビル別館

TEL: 202-5545~6 ☎ 541

札幌営業所：札幌市北8条西4丁目 中屋ビル

TEL: 72-6243 ☎ 065



海外出版貿易株式会社

東京都千代田区神田司町 2-21

☎ 03 (292) 4 2 7 1 (代表)

振替口座東京 5 2 4 5 3

名古屋支社 京都支社

名古屋市 中区 栄南具服町ビル
☎ 052(261)7506(代)
振替名古屋 13578

広島支社 福岡支社

広島市 鉄砲町
8-15-201 中央ビル
☎ 0822 (21) 0568
振替広島 18058

新橋店 横浜支社

東京都港区 西新橋1-15-6
☎ 03(503)3891(代)

大阪支社 岡山支社

大阪市 北区 網笠町堂ビル
☎ 06(363)4691(代)
振替大阪 13877

仙台支社

仙台市 国分町1-6-15
奥田金物ビル
☎ 0222 (25) 0865
振替仙台 4881

ドイツ駐在所
c/o Schenker &
Co., GmbH
4 Düsseldorf 1,
Steinstrasse 34,
West Germany
Postfach 7209

欧米学術書籍・雑誌 バックナンバー

迅速・丁寧・確実な

当社へ御用命の程……

株式会社 独亜書院

大阪市北区芝田町56番地
Tel. 大阪372-代0051番

ナウカ 株式会社

東京都豊島区南池袋2丁目30番19号
電話 (00) 981-5261 (代)

KANDA
(264) 0021

OSAKA
(313) 2388

KYOTO
(771) 3898

NAGOYA
(241) 9501

SAPPORO
(72) 0391

SENDAI
(23) 5535

FUKUOKA
(64) 6844

