第２８回

トポロジー・シンポジウム講演集

昭和55年7月21日～24日

於　茨　城　大　学

昭和55年度科学研究費総合A
課題番号　434002

序

この講演集は、昭和５５年７月２１日から７月２４日の間、茨城大学で開かれる第２８回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解するための一助にすることと、記録として残すことにより後にも資料として役立てることにある。

この講演集は科学研究費総合Ａ「位相幾何学と関連諸分野の総合的研究」（課題番号434002）の補助金により作られたものであることを附記しておく。

昭和５５年７月

科学研究費総合Ａ　課題番号４３４００２

研究代表者　　服　　部　　晶　　夫

目　次

Ultrafilter の積空間への埋め込み

愛媛大・理　野倉 嗣紀

位相空間が或る性質 $\mathcal{P}$ をもつとき、そのような空間の有限積空間 又は 可算無限積空間が再び性質 $\mathcal{P}$ をもつか否かは様々な $\mathcal{P}$ について広く検べられている。$\mathcal{P}$ として Lašnev, bi-sequential, strongly Fréchet をとりあげ その可算積の部分空間が どの程度"悪く"なり得るか否かを $N\cup\{p\}$ (N は自然数, $p\in\beta N\setminus N$, βN は N の Stone-Čech compactification) が埋め込めるか否かで判定する。上記空間には次図の関係がある。

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Lašnev} \arrow[rrr] & & & \text{Fréchet} \\
\text{距離空間} \arrow[ur] \arrow[r] & \text{第一可算} \arrow[r] & \text{bi-sequential} \arrow[r] & \text{strongly Fréchet} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

可算空間で non-isolated な点が一つだけある空間を $N\cup\{q\}$ で表す。$\mathcal{F}_q=\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ を q の近傍filter を N に制限したものとする。$F_q=\bigcap\{cl_{\beta N}F_\alpha:\alpha\in A\}$ は $\beta N\setminus N$ の閉集合になっており、この閉集合の近傍filter を N に制限したものは $\mathcal{F}_q$ になっている。この F_q を q の βN への表現と云い、$N\cup\{q\}$ の代りに

$N \cup \{F_q\}$ と表す。

§1. Lašnev 空間の性質

<u>定義 1-1([1])</u> 位相空間 X が Fréchet とは $A \subset X$ で $x \in cl A$ ならば $\exists \{x_n ; n \in N\} \subset A$ で $\lim x_n = x$ とできる。

<u>定義 1-2([2])</u> 位相空間 X が bi-sequential とは $\mathcal{F}$ を cluster point x にもつ filter としたとき $\mathcal{H}$; 可算 filter base で

(1) $\mathcal{H}$ は点 x に収束する.

(2) $\forall H \in \mathcal{H}, \forall F \in \mathcal{F} \quad H \cap F \neq \phi$.

となるものが存在するものとする。上の定義の $\mathcal{F}$ として可算 filter base に限ったとき X を strongly Fréchet 空間と云う。

<u>補題 1-1([3])</u> $F \subset \beta N \setminus N = N^*$ とする。

(1) $X = N \cup \{F\}$ が Fréchet である必十条件は $F = cl_{\beta N}(Int_{N^*} F)$

(2) $X = N \cup \{F\}$ が strongly Fréchet である必十条件は $F = \{x \in N^* ; \forall Z ; \text{zero set in } N^* \text{ で } x \in Z, Z \cap Int_{N^*} F \neq \phi\}$.

(3) $X = N \cup \{F\}$ が bi-sequential である必十条件は F が N^* の zero set の和に表されることである.

<u>定理1-1</u> $X = N \cup \{F\}$ を Lašnev 空間 (=距離空間の閉連続写像による像空間) とする. そのとき $\forall p \in F$ $\exists Z_p$; N^* の zero set で $p \in Z_p \subset F$ 又は $p \in Z_p \subset N^* - \mathrm{Int}_{N^*} F$ が成立する.

§2. Bi-sequential 空間と strongly Fréchet 空間.

<u>補題 2-1.</u> $\mathcal{F}_n$ を N の filter で $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ とする $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ が 極大 filter ならば $\exists\, n_0 \in N$ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n_0}$

<u>定理 2-1</u> X を bi-sequential 空間, Y を任意の空間とする. $N \cup \{p\}$ が $X \times Y$ に埋め込めるならば, $N \cup \{p\}$ は Y に埋め込める. ここで $p \in N^*$.

<u>定理 2-2 (CH)</u> strongly Fréchet 空間 X, Y で $X \times Y$ に $N \cup \{p\}$ が埋め込めるものがある. ここで p は N^* の P-point である.

§3. Lašnev 空間 T.

$R = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$ $S = \oplus R_n$ ここで $R_n = R$ で $\oplus$ は disjoint union とする. $A = \{0_n \in R_n ;$

$O_n = O \,; n \in N\}$ とし $T = S/A$ を A を1点 $\{A\}$ に identify した quotient space とする.

<u>定理 3-1.</u> $p \in N^*$ とする. $N \cup \{p\}$ は T^ω に埋め込むことはできない.

References

1. S.P. Franklin, Spaces in which sequences suffice, Fund. Math. 57 (1965) 107-115
2. N. Lašnev, Closed image of metric spaces, Soviet Math. Dokl. 7 (1966) 1219-1221
3. V.I. Malyhin, On countable space having no bicompactification of countable tightness, Soviet Math. Dokl. 13 (1972), 1407-1411
4. E. Michael, Bi-sequential space and bi-k-space Pittsburg International Topology Conference, 1970
5. T. Nogura, The subsequentiality of product spaces, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 391-399.

位相ゲームと積空間について

矢島幸信（神奈川大・工）

§1．位相ゲームの定義．

位相ゲームとは，ポーランドの数学者 Telgársky が，1975年に論文［8］において定義したもので，いわゆる応用数学におけるゲームの理論とは関係がない。また，位相ゲームを理解するための特別な知識は全く必要としない。ここで説明する位相ゲームは，最近［9］で彼が形式的に修正したものを採用する。

一般に，$\mathfrak{K}$ を空間のあるクラスとしておく。位相空間 X における $\mathfrak{K}$ に関する位相ゲーム $G(\mathfrak{K}, X)$ とは，次のように定義される。プレーヤーは，2人（Player I と Player II）によって争われる。まず，Player I が，X の閉集合 $E_1 \in \mathfrak{K}$ をとる。その後，Player II が，開集合 U_1 を $E_1 \subset U_1$ となるようにとる。再び，Player I が，閉集合 $E_2 \in \mathfrak{K}$ をとる。その後，Player II が，開集合 U_2 を $E_2 \subset U_2$ となるようにとる。以下これを交互にくり返す。ここで，この無限列 $\langle E_1, U_1, E_2, U_2, \cdots \rangle$ を $G(\mathfrak{K}, X)$ の play という。ただ

し，各E_nまたは$\mathcal{V}_n$をそれぞれいままで選ばれたE_1, $\mathcal{V}_1$, ……，E_{n-1}, $\mathcal{V}_{n-1}$またはE_1, $\mathcal{V}_1$, ……, $\mathcal{V}_{n-1}$, E_nを完全に知った上で各プレーヤーは選べるものとする。
さて，このゲーム$G(\mathbb{L}, X)$におけるplay $\langle E_1, \mathcal{V}_1, E_2, \mathcal{V}_2, \cdots\rangle$の勝敗は，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n = X$となるとき，Player Iの勝ち，そうでないときはPlayer IIの勝ちとする。

Player Iが，$G(\mathbb{L}, X)$においてwinning strategy sをもつとは，各play $\langle E_1, \mathcal{V}_1, E_2, \mathcal{V}_2, \cdots\rangle$に対して，各$E_n$が$E_n = s(\mathcal{V}_1, \cdots, \mathcal{V}_{n-1})$によって選ばれるならば，常に$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n = X$となるときである。つまり，Player Iはwinning strategy sに従ってとれば，Player IIがどのようにとろうとも必ず勝つことができる（さらに言えば，Player Iは$G(\mathbb{L}, X)$において必勝法をもつ）ということである。ここでは，以下この陳述を略記して，$\mathrm{I}(\mathbb{L}, X)$で表わすことにする。

以下扱う位相空間は，すべてHausdorffとする。また特に，空間のクラス$\mathbb{L}$として，次のものを考える。

$\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$をそれぞれ閉集合に関してhereditaryであるような空間のあるクラスとする。これらに対して，

$\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 = \{X \times Y \mid X \in \mathbb{K}_1, Y \in \mathbb{K}_2\}$ とおく。

また，空間のあるクラス $\mathbb{K}$ に対して，

$\mathbb{D}\mathbb{K} = \{X \mid X$ は $\mathbb{K}$ に属する部分空間からなる discrete cover をもつ$\}$ とおく。 さらに，

$\mathbb{1}$ ……1点空間全体からなるクラス，

$\mathbb{C}$ ……compact space 全体からなるクラス

とおく。

$I(\mathbb{K}, X)$ に関する具体的な結果としては，次のものがよく知られている。

<u>定義</u>（Michael [3]）。 X の closed cover $\mathcal{F}$ が，<u>closure-preserving</u> であるとは，任意の $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ に対して，$\cup\{F \mid F \in \mathcal{F}'\}$ が X の閉集合であるとき。 また，$\mathcal{F}$ が，<u>σ-closure-preserving</u> であるとは，$\mathcal{F}$ が可算個の closure-preserving subcollection の和であるとき。

<u>Potoczny の定理</u> [6]。 空間 X が，compact set からなる σ-closure-preserving cover をもつならば，$I(\mathbb{D}\mathbb{C}, X)$ である。

§2. C-product と D-product.

2つの空間 X，Y に対して，$I(\mathbb{K}_1, X)$ と $I(\mathbb{K}_2, Y)$

とを仮定する。 このとき，$X\times Y$に対して，Player I はどのような位相ゲームにおいて winning strategy をもつかを考える。

<u>定理</u>（Telgársky [9]）。 $\mathrm{I}(\mathbb{I}, X)$かつ$\mathrm{I}(\mathbb{I}, Y)$ならば，$\mathrm{I}(\mathbb{I}, X\times Y)$。

この結果のクラス$\mathbb{I}$を，一挙に一般的なクラス$\mathbb{K}_1$，$\mathbb{K}_2$に拡張する。

<u>定義</u>． 積空間$X\times Y$が，<u>D-product</u>（<u>C-product</u>）であるとは，$X\times Y$の各閉集合Mと各開集合Oで，$M\subset O$となるものに対して，$X\times Y$の closed rectangle からなる σ-discrete（countable）collection $\mathcal{F}$で，$M\subset\bigcup\{F \mid F\in\mathcal{F}\}\subset O$となるものが存在する。

（注） $F\subset X\times Y$が，$X\times Y$の closed rectangle であるとは，$F=F'\times F''$，F'とF''はそれぞれXとYの閉集合，と表わされるとき。

<u>定理1</u>。 積空間$X\times Y$を，C-product とする。
$\mathrm{I}(\mathbb{K}_1, X)$かつ$\mathrm{I}(\mathbb{K}_2, Y)$ならば，$\mathrm{I}(\mathbb{K}_1\times\mathbb{K}_2, X\times Y)$。

<u>定理2</u>。 積空間$X\times Y$を，D-product とする。
$\mathrm{I}(\mathbb{K}_1, X)$かつ$\mathrm{I}(\mathbb{K}_2, Y)$ならば，

$$\mathrm{I}(\mathbb{D}(\mathbb{K}_1\times\mathbb{K}_2), X\times Y)。$$

例. S を Sorgenfrey line とする。 S^2 は, D-product であるが, C-product ではない。

§3. Pasynkov の次元論の積定理について。

この §3 に限り, 位相空間はすべて completely regular (cozero-set 全体を base とする空間) とする。 ここで, X の cozero-set とは, $\{x \in X \mid f(x) > 0\}$ の形の集合。ただし, f は X から $[0, 1]$ への連続関数。

空間 X に対して, $\dim X \leqq n$ であるとは, X の任意の finite cozero cover $\mathcal{U}$ が, ある cozero refinement $\mathcal{V}$ で, $\mathrm{ord}\,\mathcal{V} \leqq n+1$ ($\mathrm{ord}\,\mathcal{V}$ は共通点をもつ $\mathcal{V}$ の元の数の最大値) となるものをもつとき。

normal space X に対して, $\mathrm{Ind}\, X \leqq n$ であるとは, X の任意の閉集合 F と開集合 G で $F \subset G$ となるものに対して, ある開集合 U で, $F \subset U \subset \overline{U} \subset G$ かつ $\mathrm{Ind}\, \mathrm{Bd}(U) \leqq n-1$ ($\mathrm{Bd}(U)$ は U の境界を表わす) となるものが存在するとき。 ただし, $\mathrm{Ind}\, \emptyset = -1$ とおく。

次元論の積定理とは, "いかなる空間 X, Y に対して,

$$\dim(X \times Y) \leqq \dim X + \dim Y \quad \cdots\cdots (*)$$

または, $$\mathrm{Ind}(X \times Y) \leqq \mathrm{Ind}\, X + \mathrm{Ind}\, Y \quad \cdots\cdots (**)$$

という次元の不等式が成り立つか?" という問題に，X，Y の十分条件を与えることである。 一般に，これらは無条件では成立しない。 最近，(*) は normal space $X \times Y$ に対して，不成立であることが示された (cf. [7], [11])。 また，(**) は compact space X，Y に対しても成りえたない (cf. [2])。

さて，この次元の積定理に対しては，次の Pasynkov の結果がほとんど万能のようにさえ思われている。

<u>定義</u> (Pasynkov [5])。積空間 $X \times Y$ が <u>rectangular</u> であるとは，$X \times Y$ の任意の finite cozero cover が，cozero rectangle から成る σ-locally finite refinement をもつときをいう。

(注) $R = R' \times R'' \subset X \times Y$，$R'$ と R'' はそれぞれ X と Y の cozero-set であるとき，R は $X \times Y$ の cozero rectangle という。

<u>Pasynkov の積定理 1</u> ([5])。 積空間 $X \times Y$ が，rectangular とする。 このとき，(*) が成り立つ。

<u>Pasynkov の積定理 2</u> ([5])。 積空間 $X \times Y$ が，normal かつ rectangular とする。 Ind に関して，finite sum theorem ($\{F_i\}_{i=1}^{k}$ なる有限個の X の閉

集合に対して，$\mathrm{Ind}(\bigcup_{i=1}^{k} F_i) \leqq \max_{1\leqq i\leqq k} \mathrm{Ind}\, F_i)$ が，成り立てば，このとき，(**) も成り立つ。

次の表は，$X\times Y$ が rectangular になる場合の代表的なものをあげている。表において，(1)〜(3)の確認は容易であり，(4)は [13] で証明された。

	X	Y	X×Y
1	metric	――	normal
2	paracompact かつ locally compact	――	――
3	――	――	一方への projection が，closed map
4	paracompact かつ I(DC, X)	paracompact	――

上の表からもわかるように，今までのほとんどの次元論の積定理は，この rectangular product という概念によって統一的に述べることができてしまう。

(注) 上に述べた Pasynkov の積定理 1，2 の証明は知る限りいまだに公表されていない。

§4. 位相ゲームの次元論の積定理への応用.

$\mathrm{Dim}(n) = \{X \mid \dim X \leqq n\}$,

$\mathrm{Ind}(n) = \{X \mid X$ は normal かつ $\mathrm{Ind}\, X \leqq n\}$

なる2つの空間のクラスを定義しておく。

<u>命題A</u>（[10]）． Xを normal space とする。
$\mathrm{I}(\mathrm{Dim}(n), X)$ ならば，$\dim X \leqq n$。

<u>命題B</u>（[12]）． Xを totally normal space とする。 $\mathrm{I}(\mathrm{Ind}(n), X)$ ならば，$\mathrm{Ind}\, X \leqq n$。

（注） normal space Xが，totally normal とは，任意の開集合Gが，Xの cozero-set からなる locally finite (in G) collection の和で表わせるとき (cf. [1])。

$$\begin{array}{ccc} \text{perfectly normal} & \longrightarrow & \text{totally normal} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \text{hereditarily paracompact} & & \text{hereditarily normal} \end{array}$$

上の2つの命題が，位相ゲームを次元論へ応用するとき，極めて基本的な役割を演じる。

ここでの目的は，non-rectangular product で，(*)および(**)の不等式が成り立つものを見つけることである。 つまり，Pasynkov の積定理からは，直接にしろ間接にしろ従わない新しい次元の積定理を得ようということである。

<u>定理3</u>。 積空間$X \times Y$を D-product とする。さらに，$\mathrm{I}(\mathbb{DC}, X)$とする。 このとき，

(i) $X \times Y$が normal ならば，(*)が成立。

(ii) $X \times Y$ が totally normal ならば，(＊＊)が成立。

これは，前の定理2，命題A，Bから従う。

では，どのような積空間がD-productかを考える。

<u>定理4</u>． X，Yを subparacompact space とする。Xは regular で，$I(\mathbb{DC}, X)$ならば，$X \times Y$は，subparacompact D-product である。

(注) 空間Xが subparacompact であるとは，Xの任意の open cover が，σ-discrete（または，σ-locally finite）closed refinement をもつとき。

いままでの結果から

<u>系</u>． X，Yを subparacompact space とする。さらに，Xが compact set からなるσ-closure-preserving cover をもつとする。このとき，

(i) $X \times Y$が normal ならば，(＊)が成立。

(ii) $X \times Y$が totally normal ならば，(＊＊)が成立。

そこで，これより次の問題が提出される。

<u>問題</u>． 次の条件(a)～(d)をみたす空間X，Yが存在するか？（当然，存在することが望ましい）。

(a) X，Yはともに subparacompact space。

(b) Xは compact set からなる closure-preserving cover をもつ。

(c) $X\times Y$ は (totally) normal.

(d) $X\times Y$ は rectangular では無い。

ところが、ごく最近この問題は、大田 [4] によって肯定的に解決された。

参考文献

[1] C. H. Dowker, Inductive dimension of completely normal spaces, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 4 (1953), 267–281.

[2] V. V. Fillipov, On the inductive dimension of the product of bicompacta, Soviet Math. Dokl. 13 (1972), 250–254.

[3] E. Michael, Another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 822–828.

[4] H. Ohta, On normal, non-rectangular products, (to appear).

[5] B. A. Pasynkov, On the dimension of rectangular products, Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 344–347.

[6] H. B. Potoczny, Closure-preserving families of

compact sets, General Topology and its Appl. 3 (1973), 243-248.

[7] T. C. Przymusiński, On the dimension of product spaces and an example of M. Wage, Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), 315-321.

[8] R. Telgársky, Spaces defined by topological games, Fund. Math. 88 (1975), 193-223.

[9] ————, On point-open games and their generalizations, Topics in Topology. Colloq. Math. Soc. János Balyai, 23.

[10] ———— and Y. Yajima, On order locally finite and closure-preserving covers, Fund. Math. (to appear).

[11] M. Wage, The dimension of product spaces, (preprint).

[12] Y. Yajima, On order star-finite and closure-preserving covers, Proc. Japan Acad. 55 (1979), 19-22.

[13] ————, Topological games and products, Fund. Math. (to appear).

Expansiveness and entropy-expansiveness on compact manifolds

東海大.理.（郡山　彬）

§1. Introduction.

Expansive homeomorphism（以下.E.H.と略記）の概念は.最初 unstable homeomorphism の名で.W.R.Utz [33] によって.導入されたものである。$X=(X,d)$を.距離dを持つ metric space とする。homeo. $f: X\to X$ が expansive であるとは、f の expansive const. と呼ばれる正数 $C=C(X,f)$ が存在して、異なる任意の2点 $x, y\in X$ に対して、

$$d(f^n(x), f^n(y)) > C \quad \text{for some } n\in\mathbb{Z}$$

となることである。

ex.　$X=\mathbb{R}^2$とし、$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を次の様に定義する。

$$\begin{cases} f(0)=0 & (0\in\mathbb{R}^2 \text{ は原点}). \\ f(p)=q & (\forall p\in\mathbb{R}^2, p\neq 0), \quad \text{ここに}, \ \overrightarrow{0q} = 2\cdot\overrightarrow{0p} \end{cases}$$

fは.任意の$C>0$を expans. const. とするE.H.である。
実際.$d(p_1,p_2)=r$ ならば.$d(f^n(p_1),f^n(p_2))=2^n\cdot r$ である。

[33]に於る研究は、主としてE.H.の asymptotic behavior の研究であって、具体的なE.H.の例としては.symbolic dynamics を.あげているにすぎない。従って.『どの様な空間が.E.H.を持つか』が問題となった。　この問に対して、

R.F.Williams が[35]に於て、compact continum 上のE.H.として次の例を構成した。

<u>ex.</u>　C: unit circle in complex $\mathbb{C}$,　map $g: C \to C$ を $g(z) = z^2$ と定義し、g による inverse limit space を Σ_2 とおく。i.e. $\Sigma_2 = \{(a_0, a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in C$ かつ $g(a_{i+1}) = a_i \ (\forall i)\}$.

$d(a,b) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} |a_i - b_i|$ for $a, b \in \Sigma_2$ と定義すると、Σ_2 は compact, indecomposable continume となる。map $f: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ を次式で定義する。

$f(a) = (g(a_0), g(a_1), \cdots)$ for $a = (a_0, a_1, \cdots) \in \Sigma_2$.

このとき、$f(a) = (a_0^2, a_0, a_1, \cdots)$ および $f^{-1}(a) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$ より、$f: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ は onto homeo. となる。簡単な計算から、$c=1$ は f の1つの expans. const. であることがわかる。

この研究の後、X が loc. connected sp. あるいは、manifold の場合にはどうか、ということが問題となった。(例えば W.H.Gottschalk [14] 参照). この問題は様々な人達によって研究されてきたが(§3参照)、未だ完全には解けてはいない(例えば、n次元球面 S^n ($n \geqq 2$) が E.H. を許容するかどうか未解決)。

一方、B.F.Bryant, R.Bowen, P.Walter etc. による

E.H.の性質に関する研究がある．特に，R.Bowenによる精力的な研究により，E.H.の重要性が認識されたといってよい．実際，E.H.は力学系の様々な分野に登場し，基本的な役割を演じている．以下いくつかの例を述べる．

<u>ex.</u> compact, C^∞ mfd 上の Anosov diffeo. は expansive である．([24], [32])． より一般に，M を compact, C^∞ mfd, $f: M \to M$ を Axiom A diffeo. とする．さらに Ω_i を non wandering set $\Omega(f)$ の spectral decomposition に於る basic set とすると，$f|_{\Omega_i} : \Omega_i \to \Omega_i$ は E.H. である ([31])．

<u>ex.</u> 全ての E.H. は適当な subshift の quotient である．即ち，$^\exists$integer $k > 0$， および

$^\exists$shift σ で不変な closed set $E \subset \prod_{-\infty}^{\infty}\{0, 1, \cdots, k-1\}$

s.t.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sigma_E"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

([17], [28])。

ここでもしXが0次元ならばfはsubshift と topologically conjugate である．

<u>ex.</u> Adler, Konheim and McAndrew は [1] に於て

topological entropyの概念を定義したが、与えられたhomeo.のtopological entropyを具体的に求めることは、易しくはない。しかし $f: X \to X$ がE.H.の場合には、f のtop. entropy $h_{top}(f)$ は f のperiodic pt.の個数によって次の様な評価ができる。([3], [4], [8])。

$$h_{top}(f) \geqq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N_n(f),$$

$$N_n(f) = \#\{f^n \text{ の fixed point}\}.$$

<u>ex.</u> X : compact metric sp., $T: X \to X$: homeo.(これを (X, T) と略記)とする。X 上の T-inv. Borel probability meas.全体を $\mathfrak{M}_T(X)$ とする。$\forall m \in \mathfrak{M}_T(X)$ に対して、よく知られているように、T のmeas. theoretical entropy $h_m(T)$ が定義される([34], [10])。従って、T に対して、二種類のentropy $h_{top}(T)$, $h_m(T)$ が定義される。[1]に於て、$h_{top}(T) = \sup_{m \in \mathfrak{M}_T(X)} h_m(T)$ が予想として出された。上の関係式を、the variational principle for top. entropy(以下 V.P.と略)と呼ぶ。[13]に於てGoodwynは、

$$h_m(T) \leqq h_{top}(T) \quad \text{for any } m \in \mathfrak{M}_T(X)$$

を証明した。さらにDinaburg[11]およびGoodman[12]は、全ての (X, T) に対してV.P.が成立することを示した。V.P.のsupremumを実現する $m \in \mathfrak{M}_T(X)$ をmaximal meas.

あるいは. equilibrium state と呼ぶ. max. meas 全体を, $\mathcal{M}_{max}(T)$ とおく. さて, T が expans. ならば $\mathcal{M}_{max}(T) \neq \phi$ i.e. $^{\exists} m \in \mathcal{M}_T(X)$ s.t. $h_{top}(T) = h_m(T)$ である. また, T が expans. かつ, specification property を満せば, max. meas. は unique, かつ, この meas. は T の ergodic meas である ([4]). (注: X が solenoidal gr. の時は. specification と expansiveness は同値になる ([2])).

上の結果から, expansiveness は max. meas. の存在を保障するが, 一般に max. meas. の存在から expansiveness はでない. 従って, max. meas. の存在と同値となる概念は何か, という問題が生じる. [5] に於て Bowen は entropy-expansiveness (今後. h-expansiveness と略記) を定義した. 続いて, Misiurewicz は [23] に於て asymptotically entropy-expans. homeo. の研究を行った. さて, T が asymptotically h-expans. と仮定すると, 関数 $h_{(\ )}(T): \mathcal{M}_T(X) \to \mathbb{R}: m \mapsto h_m(T)$ は $\mathcal{M}_T(X)$ の weak topology に関して upper semiconti. になり, V.P. の成立することがわかる. 一方. Denker は [9] に於て. locally h-expans. maps の研究を行い, この概念が, max. meas. の存在と同値であることを証明した (Th. 5.2 参照). 今, X を metric sp. とし, $\mathcal{H}(X)$ を X 上の homeo.

全体の空間で $d(f,g)=\sup d(f(x),g(x))$ なる metric が入っているとする。さらに、$\mathcal{E}(X),\mathcal{E}^h(X),\mathcal{E}^{ah}(X),\mathcal{E}^{lh}(X)$ をそれぞれ expans. homeo ; h-expans. homeo ; asymp. h-expans. homeo. ; locally h-expans. homeo. の全体の作る $\mathcal{H}(X)$ の subset とする。$\mathcal{E}^{lh}(X)\supset\mathcal{E}(X)\subset\mathcal{E}^h(X)\subset\mathcal{E}^{ah}(X)$ なる関係があり、一般に各集合は一致しないことが知られている ([23])。以下これら subsets に関する (主として topological な) 研究の概略を述べることにする。

§2. Expansive homeo. の基本的性質

E.H. の定義は明らかに次の様にも述べられる。

2.1. Def. homeo. $f: X\to X$ が expansive
$\Leftrightarrow$ $^\exists$expans. const. $C=C(X,f)>0$ s.t.
$d(f^n(x),f^n(y))<C$ for all $n\in\mathbb{Z}$ implies $x=y$.

2.2. Remark. X が compact ならば f が expansive であることは X の metric に依らない (§4 参照)。しかし、non-compact の場合には metric に依存する。例えば $\mathbb{R}^1$ 上には E.H. が存在するが、開区間 $(0,1)$ 上には存在しない (§3 参照)。

2.3. Prop. ([33]). X: compact metric sp. $f: X\to X$: E.H.
$\Rightarrow$ $\forall$整数 $m\neq 0$ に対して、$f^m: X\to X$ も E.H.

2.4. Remark　上の命題はXが non-compact の時は一般には不成立。$\mathbb{R}^1$上に具体例を構成できる([7])。

Xが compact のときfが無限個の不動点を持てばfは expans. ではない。従って Prop. 2.3 より次の系を得る。

2.5. Cor. ([33]). X: compact metric sp., $f: X \to X$: E.H.

$\Rightarrow$ $\forall$ positive integer k に対して period k の periodic pt は有限個である。従ってfの periodic pt は高々可算個である。

2.6. Prop.　X, Yを任意の metric sp. $f: X \to X$をX上の E.H. とする。$h: X \to Y$が homeo. かつh^{-1}が一様連続ならば $hfh^{-1}: Y \to Y$ も expans.　　従って、

2.7. Cor.　X: compact metric sp.　, $f, g: X \to X$: homeo. とする。fが expans. かつ $g \sim f$: topologically conj.

$\Rightarrow$ gも expans.

§3. Expans. homeo. の存在に関する諸結果

3.1. Th.

(1) ([6], [27]) 閉区間$[0,1]$上には E.H. は存在しない。

(2) ([16], [27]). simple closed curve 上には存在しない。従って closed 2-cell 上にも存在しない。

(3) ([27]).　open 2-cell 上には存在する。従って open $2n$-cell $(n \geq 1)$上にも存在する。(metric sp. X, Yが共に

E.H.を持てば$X\times Y$上にもE.H.が存在することは明らか).

(4).([26],[27]). n-torus T^n $(n\geqq 2)$ 上には存在する.

(5).([14]). infinite torus $T^\infty = \mathbb{R}^\infty/\mathbb{Z}^\infty$ 上には. expans. linear homeo.は存在しない。(尚. この論文には. Mañéが expans. homeo.が存在しないことを証明したというコメントがあるが.未確認).

(6)([15]). X, Y : compact metric sp. とする. $\phi: X\to Y$: covering map; $f: X\to X$, $g: Y\to Y$: homeo. s.t. $\phi\cdot f = g\cdot\phi$ とする. この時. fが expans. $\Leftrightarrow$ gが expans.

より一般に. (詳しい定義は[26]参照).

(7)([26]). M, Nを.それぞれ. 距離ρ, dを持つ compact mfd.とする. さらに$\phi: M\to N$: branched-covering, $f: M\to M$: fibre-preser. homeo. with $f(B_\phi) = B_\phi$. $g: N\to N$: homeo. induced by f とする. このとき、

gが expans. $\Leftrightarrow$ fは expans. on fibres.

今. M_gを closed, orientable surface of genus $g\geqq 1$とすると. M_gはT^2上の branched-covering として実現できることから. (7)の系として.

(8)([25],[26]). M_g上には常にE.H.が存在する.

open mfd に関しては次の結果がある。

(9).([22]). Mを closed n-mfd ($n \geqq 1$) とする.

(i) Jを open intervalとすると. M×J上には E.H.が存在する.

(ii) Int(M∗{p}) 上には存在する. ここで P∗Q はPとQの joinを表わす.

(iii) (ii)の系として. $\forall n \geqq 2$ に対して. open n-cell 上には常に E.H.が存在する.

§4. Expansiveness と generator

4.1. Def. X: compact metric sp.; $\mathcal{A}=\{A_i ; 1 \leqq i \leqq s\}$ を X の finite open covering とする. $\mathcal{A}$が homeo. $\varphi: X \to X$ の generatorとは.

$\Leftrightarrow$ 任意の sequence $(k_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ($1 \leqq k_i \leqq s$) に対して.

intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(\overline{A_{k_i}}) = \phi$ or 1点.

4.2. Th. ([17], [28], [30]). X: compact metric sp., とする.

$f: X \to X$ が E.H. $\Leftrightarrow$ $^{\exists}$generator $\mathcal{A}$ for f.

4.3. Cor. X が compactならば. expansiveness は metricに依らない.

§5. h-expansiveness.

以下で述べる topological entropy の定義は. Bowenに依る. X が compactならば. [1]の定義と一致する.

5.1 Def. $X=(X,d)$: compact metric sp., $f: X \to X$: homeo. $E \subset X$: given set とする. $\delta > 0$: given とする.

set $S \subset X$ が (fに関して) E を (n, δ)-span するとは.

$\Leftrightarrow$ 各点 $y \in E$ に対して、$\exists x \in S$ s.t.

$d(f^k(x), f^k(y)) \leqq \delta$ for all $0 \leqq k < n$.

E を (n, δ)-span する S 達の cardinality の最小値を $r_n(E, \delta)$ とおき、compact subset $K \subset X$ に対して、

$$\overline{r}_f(K, \delta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_n(K, \delta),$$

$$h(f, K) = \lim_{\delta\to 0} \overline{r}_f(K, \delta),$$

$$h_{top}(f) = \sup\{h(f, K)\,;\, K \subset X : \text{compact subset}\}$$

と定義する. $h_{top}(f)$ は f の topological entropy と呼ばれる.

さらに、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n} B_\varepsilon(f^n(x)) = \{y\,;\, d(f^n(x), f^n(y)) \leqq \varepsilon \text{ for } \forall n \in \mathbb{Z}\},$$

$$h_f^*(\varepsilon) = \sup_{x\in X} h(f, \Gamma_\varepsilon(x))$$ と定義する.

$h_f^*(\varepsilon) = 0$ for some $\varepsilon > 0$ のとき f は h-expansive,

$\lim_{\varepsilon\to 0} h_f^*(\varepsilon) = 0$ のとき f は asympto. h-expansive と呼ぶ.

一方、X の open cover の列 $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して、

$\sum_{n=1}^{\infty} H(f, \mathcal{A}_n) < \infty$ かつ、$\lim_{n\to\infty} H(f, \bigvee_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k) = h_{top}(f)$.

となるとき f は locally h-expans. と呼ばれる。ここに、$H(f, \mathcal{A}_n)$ は f の $\mathcal{A}_n$ に関する entropy ([1]) である。

5.2. Th. ([9]). X : compact metric sp. とする。homeo. $f: X \to X$ に対して次の条件は同値である.

(1) f は locally h-expansive.

(2). $h_{top}(f) < \infty$ かつ $\mathcal{M}_{max}(f) \neq \phi$.

5.3. Note. f が expans. $\Rightarrow$ generator を持つ $\Rightarrow$ loc. h-expans.

§6. Expansive homeo. and h-expans. homeo. on a compact mfd.

以上述べてきたことから、多くの X に対して $\mathcal{E}(X) \neq \phi$, かつ $\mathcal{E}(X)$ は、かなり多くの要素を含むことがわかる。また X が compact, C^∞ mfd で Anosov diffeo. を許容するならば、expans. diffeo. 全体は diffeo. 全体の空間内で open set を内部に含むことがわかる。それでは『$\mathcal{E}(X), \mathcal{E}^h(X), \mathcal{E}^{ah}(X), \mathcal{E}^{lh}(X)$ 等は $\mathcal{H}(X)$ に於て interior point を持つか?』 X が Cantor set ([29]). 又は、$X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ ([18], [20]) の場合には $\mathcal{E}(X)$ が $\mathcal{H}(X)$ で interior point を持たないことが容易に示される。一般の metric sp. X に対して、上記の問題を解くことは、それ程容易ではない。そこで、X を mfd に限ることにする。次の結果を得る (Th. A～C は [19] 参照)。

Th. A. M を compact PL m-mfd, $\mathcal{H}_{PL}(M)$ を M 上の PL homeo. 全体, $\mathcal{E}_{PL}(M)$ を expans. PL homeo. 全体とする。$m > 1$ のとき、$\mathcal{E}_{PL}(M)$ は $\mathcal{H}_{PL}(M)$ で interior pt を全く持たない。

i.e. $^\exists M$ 上の PL homeo. の列 $\{g_k\}$ s.t.

(i) 各 g_k は not expans. かつ (ii) $g_k \to f$ as $k \to \infty$.

Cor. 1. 上の仮定の下で、任意の $f \in \mathcal{E}_{PL}(M)$ は $\mathcal{H}_{PL}(M)$ で

構造安定ではない。

Th.B. M: compact PL m-mfd, $m \geq 3$ のとき、
$\mathcal{E}^{h}_{PL}(M)$, $\mathcal{E}^{ah}_{PL}(M)$ は共に $\mathcal{H}_{PL}(M)$ で interior pt を持たない。

Cor. 2. 上の仮定の下で、任意の $f \in \mathcal{E}^{h}_{PL}(M)$、および任意の $f \in \mathcal{E}^{ah}(M)$ は $\mathcal{H}_{PL}(M)$ で、構造安定ではない。

Th.C. M: compact topological m-mfd, $m > 1$ のとき、
$\mathcal{E}(M)$ は $\mathcal{H}(M)$ で interior pt を持たない。

Cor. 3. 上の仮定の下で、任意の $f \in \mathcal{E}(M)$ は $\mathcal{H}(M)$ で、構造安定ではない。

Th.D. ([21]). M: compact topological m-mfd,
$m > 1$ かつ $m \neq 4$ ならば、$\mathcal{E}^{h}(M)$ および $\mathcal{E}^{ah}(M)$ は $\mathcal{H}(M)$ で interior pt を持たない。

Cor. 4. 上の仮定の下で、任意の $f \in \mathcal{E}^{h}(M)$ および、任意の $f \in \mathcal{E}^{ah}(M)$ は構造安定ではない。

References.

[1]. R.L. Adler, A.G. Konheim and M.H. McAndrew, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc., 114 (1965), 309-319.

[2] N. Aoki, M. Dateyama and M. Komuro, Solenoidal automorphisms with specification, to appear.

[3] R. Bowen, Topological entropy and Axiom A, Proc. Sympos. Pure. Math., 14 (1970), 23-41.

[4] ——, Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 154 (1971), 377-397.

[5] ——, Entropy-expansive maps, Trans. Amer. Math. Soc., 164 (1972), 323-331.

[6] B. F. Bryant, Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space, Amer. Math. Month., 69 (1962), 386-391.

[7] B.F. Bryant and D.B. Coleman, Some expansive homeomorphisms of the reals, Amer. Math. Month., 73 (1966), 370-373.

[8] J.P. Conze, Points périodiques et entropie topologique, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 267 (1968), 149-152.

[9] M. Denker, Measure with maximal entropy, Theorie Ergodique, Springer L.N. 532 (1976), 70-112.

[10] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces, Springer L.N. 527 (1976).

[11] E.I. Dinaburg, The relation between topological entropy and metric entropy, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 190 (1970). (Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 13-16).

[12] T.N.T. Goodman, Relating topological entropy with

measure theoretic entropy, Bull. London Math. Soc., 3(1971), 176–180.
[13] L. Goodwyn, Topological entropy bounds measure theoretical entropy, Proc. Amer. Math. Soc., 23(1969), 679–688.
[14]. W.H. Gottshalk, Minimal sets: an introduction to topological dynamics, Bull. Amer. Math. Soc., 64(1958), 336–351.
[15] E. Hemmingsen and W.L. Reddy, Lifting and projecting expansive homeomorphisms, Math. Syst. Theory, 2(1968), 7–15.
[16]. J.F. Jakobsen and W.R. Utz, The nonexistence of expansive homeomorphisms of closed 2-cell, Proc. J. Math., 10(1960), 1319–1321
[17] H.B. Keyness and J.B. Robertson, Generators for topological entropy and expansiveness, Math. Syst. Theory, 3(1969), 51–59.
[18] A. Koriyama, On expansive homeomorphisms on certain compact metric spaces (homeomorphisms with fixed points), Proc. Colloq. on Qualitative theory of differential equations, Szeged, Hungary, 1979.
[19] ———, Expansiveness, h-expansiveness and asymptotical h-expansiveness on compact manifolds, to appear.
[20]. A. Koriyama and Y. Matsuoka, On expansive homeomorphisms on certain compact metric spaces, Proc. Faculty Sci.

Tokai Univ., 15 (1979), 1–6.

[21] A. Koriyama and T. Nagase, On h-expansive homeomorphisms and asymptotically h-expansive homeomorphisms on a topological manifold, to appear.

[22] M. Kouno, On expansive homeomorphisms on manifolds, to appear.

[23] M. Misiurewicz, Topological conditional entropy, Studia Math., 55 (1976), 175–200.

[24] Z. Nitecki, Differentiable dynamics; An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms, the M.I.T. Press (1971).

[25] T. O'Brien, Expansive homeomorphisms on compact manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970), 769–771.

[26] T. O'Brien and W. Reddy, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphisms, Pacific J. Math., 35 (1970), 737–741.

[27] W. L. Reddy, The existence of expansive homeomorphisms on manifolds, Duke Math. J., 32 (1965), 627–632.

[28] ———, Lifting expansive homeomorphisms to symbolic flows, Math. Syst. Theory, 2 (1968), 91–92.

[29] M. Sears, Expansive self-homeomorphisms of the Cantor

set, Math. Syst. Theory, 6(1972), 129–132.

[30] ———, Expansiveness on locally compact spaces, Math. Syst. Theory, 7(1973), 377–382.

[31] M. Shub, Thesis, Univ. California, Berkeley, 1967.

[32] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747–817.

[33] W. R. Utz, Unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 769–774.

[34]. P. Walters, Ergodic Theory – Introductory Lectures, Springer L.N. 458 (1975).

[35]. R. F. Williams, A note on unstable homeomorphisms, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 308–309.

Heegaard Diagrams of 3-Manifolds

大阪大学　理学部　数学科
落合豊行

３次元多様体をより簡単なものから再構成する為のいくつかの方法がある。　まずHeegaard [9] は閉３次元多様体がその三角形分割により、二つのハンドルの表面を貼り合わせて得られることを示した。　これが３次元多様体のHeegaard分解と呼ばれるものである。　次にKneser [40] は、任意の閉３次元多様体がprimeな多様体の連結和へと分解されることを示した。　Haken [8] はHeegaard分解とKneserの分解が既約でない３次元多様体の場合にはcompatibleであることを示した。（しかしHakenのこの主張の証明は長く難解で理解を超えるgapがあるので、より簡単な再証明が望まれる）　さらに、Lickorish [41] は全ての可付向閉３次元多様体は３－球面内のlinksに沿ったDehn's surgeryによって得られる

ことを示した。　又、Hilden [43] と Montesinos [44] は、全ての可付向3次元多様体が3－球面内の links を分岐線とする3－球面上の3－fold 分岐被覆空間となる（もちろん必ずしも cyclic ではない）ことを示した。上に述べた後の二つの事実は、曲面の homeomorphism が常に Dehn twist の積でかけるという Lickorish の定理と3次元多様体が常に Heegaard 分解をもつという二つの事実をうまく利用して証明されている。Heegaard 分解も二つのハンドルをそれら表面で貼り合わせて得られるということを考えると、3次元多様体を研究することは曲面の homeomorphism のよい性質を発見することにあるといっても過言ではない。

本論の目的は、3－球面の Heegaard 分解を与える曲面の homeomorphism の良い性質を導きだし、その性質により、3次元多様体が3－球面であるかどうかを判定する為のアルゴリズムを構成することにある。そして、本間－落合－高橋 [15] はこのアルゴリズムが genus 2 の Heegaard 分解をもつ3次元多様体が3－球面であるかどうかを判定する為の真のアルゴリズムであることを示した。

この本間－落合－高橋の定理の一つの応用として non-trivial 2-bridge knot に沿った non-trivial Dehn surgery によって得られる3次元多様体は3-球面でないことを示す。

最後に、曲面の homeomorphism を具体的に与えそれから様々な3次元多様体を構成することを試みる。

§1. Heegaard 分解と Whitehead graph.

3次元多様体 M の Heegaard 分解 $(V, W; F)$ とは,

(1) V, Wはある genus n のハンドル
($V \cong W \cong D_1^2 \times S^1 \# \cdots \# D_n^2 \times S^1$ or
$P_1 \times I \# \cdots \# P_n \times I$, ここで
P_iはMöbius band, $\#$はdisk sun)

(2) $V \cap W = \partial V = \partial W = F$

(3) $M = V \cup W$

Xを genus n のハンドルとするとき、X内に proper に embedされた互いに交わらないn個の disks、$x_1, \cdots, x_n$ が次を満たすとき,

(1) $cl(X - \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, X))$ が3-ball

$\{x_1, \cdots, x_n\}$ のことをXの complete system of meridian-disks という。

又、$\{\partial x_1, \cdots, \partial x_n\}$ のことを$X(\partial X)$の complete system of meridians という。

$(V, W; F)$ をMの Heegaard 分解, $\bar{v} = \bar{v}_1 \cup \cdots \cup \bar{v}_n$, $\bar{w} = \bar{w}_1 \cup \cdots \cup \bar{w}_n$ をV, Wの complete system of meridian-disks とする。このとき $(F; v, w)$ のことを $(V, W; F)$ の Heegaardの図式と呼ぶ。

(但し $v = \partial \bar{v}$, $w = \partial \bar{w}$)

$(F; e, d)$ を図-1によって与えられる Heegaardの図式とするとき、この図式によって決まる Heegaard分解は3-球面を与える。$(F; e, d)$ を3-球面の genus n の標準的図式といい $(1n)$ と書く。

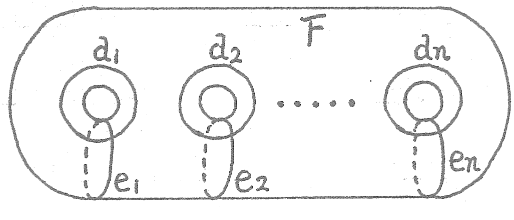


図-1

Waldhausen [ ] は3-球面の genus n の Heegaard 分解が常に $(1n)$ をその図式としてもつことを示した。

次に3－球面のHeegaard図式を特徴づける性質を定義する。　Mをホモロジー3－球面とする。　MのHeegaard分解を（V，W；F）、その一つの図式を（F；v，w）とする。　以下では図式は全てorientedであるものとする。すなわちv，wの各々のmeridianは適当に方向づけられているものとする。　このときFをvとwに沿って切り開くと、いくつかの領域Uの集まり$\mathcal{U}$が得られる。（（F；e，d）の場合には$\mathcal{U}$は唯一の領域より成り、この領域は（n－1）個の穴のあいた2－diskである。）

Uの境界はv_i，w_jの一部分より成るが、このsegmentのことをedgeと呼ぶ。　Uは次の性質をもつときdistinguished（以下では単にd－領域と呼ぶ）であるという。

(1)　∂U上の二つのedges e_1，e_2があって、e_1とe_2とが共にv又はwの単一のmeridian uに含まれる。

(2)　∂Uは単一のcircleより成り、このcircleを一周したとき、uにより決まるe_1とe_2の向きが共に同向きである。（図－2参照）

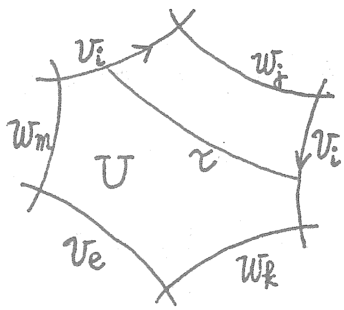


図-2

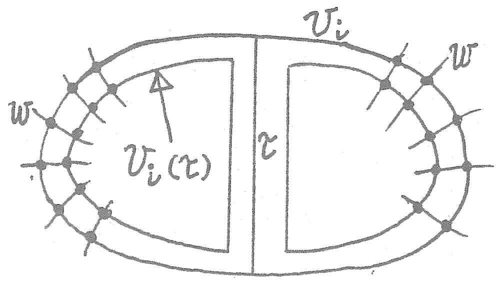


図-3

Uをd-領域とするときU内のarc τでその両端点がe_1, e_2上にあるものをwaveと呼ぶ。(図-2参照) Heegaad図式がd-領域を含むとき、可約な図式という。"可約"である理由は次の如くである; $u = v_i$とすると$v_i(\tau)$を$\partial N(v_i \cup \tau, F)$の三つのcirclesのうちで$v - v_i$のどの要素ともF上でisotopicでないものとする。(図-3参照) ($n \geqq 2$のときはさらに以下の条件を付加する; Fを$v - v_i$で切り開いて得られる2-manifoldをF(v_i)とする。このときInt(F(v_i)) − $v_i(\tau)$がconnectedである。) このとき$v' = v_1 \cup \cdots \cup v_{i-1} \cup v_i(\tau) \cup v_{i+1} \cup \cdots \cup v_n$とするとき、$H(\tau) = (F; v', w)$のことを$H = (F; v, w)$のwave-move(τに沿った)と呼ぶ。明らかに$v' \cap w$の交点数は$v \cap w$のそれより小さくなっている。すなわち$H(\tau)$はHより簡単な図式である。

次にFをv（又はw）で切り開くと，$2n$個の穴のあいた一つの2-diskが得られるが，このときw（又はv）はこれらの穴を結ぶarcsとなる。そこでこれらの穴を頂点とし，arcを辺とする平面グラフが作れる。このグラフのことをHのWhitehead-graph（単にW-グラフ）と呼ぶ。そのとき次が言える[22]；

Theorem 1. genus 2のHeegaardの図式の定めるW-グラフは以下の三つの平面グラフと同型である；

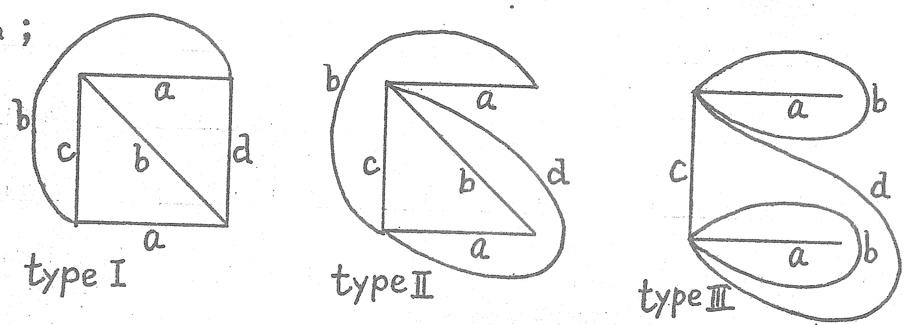


図-4

（上図でa，b，c，dは辺の多重度である。）

次にxをv又はwのどちらかとする。ここでは$x=v$とする。そのときF上のarc αはv_iとv_jとを結ぶ$\mathrm{Int}(\alpha)\cap v=\phi$なるものとする。このとき$v_i'$を$\partial N(v_i\cup\alpha\cup v_j, F)$の三つのcirclesのうちで$v_i, v_j$にF上でisotopicでないものとする。
$v'=v_1\cup\cdots\cup v_{i-1}\cup v_i'\cup v_{i+1}\cup\cdots\cup v_n$とする。その

ときH′=（F；$\mathcal{V}'$，$\mathcal{W}$）をHの（αに沿った）band－move と呼ぶ。 そのとき Zieshang［39］によって次が言える；

<u>Lemma a.</u>　　H_1=（F；$\mathcal{V}^1$，$\mathcal{W}$），（F；$\mathcal{V}^2$；$\mathcal{W}$）を（V，W；F）の二つのHeegaard の図式とする。このときH_2 はH_1 から有限回の band－move を繰り返して得られる。

ところでWaldhousen［36］は次の様に3－球面のHeegaard 分解を特徴づけた；

<u>Lemma b.</u>　　（V，W；F），（V′，W′；F′）を3－球面の same genus の二つの Heegaard分解とする。このとき3－球面の homeomorphism h で、h（F）＝F′（h（V）＝V′，h（W）＝W′）を満たすものがある。（このLemmaの証明については本間の近著［11］に詳細に説明されているので参照のこと。）

§2.　本間－落合－高橋の定理。

この節では本間－落合－高橋［15］に従って genus 2の3－球面の（1_2）以外の Heegaard 図式は必ず可約

であることを示す。　さらにWhitehead－Volodin－Kuznetsou－Fomenko〔35〕,〔38〕によって与えられたAlgorithm（A）を説明する。　まず次が言える；

<u>Main Lemma.</u>　Hを3－球面の可約な図式とする。　ここでもしH′が一回のband-moveだけでHより得られる図式とする。　このときH′も又可約である。

証明。<u>概略</u>　証明は以下の如く帰納的になされる。　P（k）；Hを3－球面のk－可約な図式とする。　すなわちHは（I_2）よりk回のwave-moveで得られるものとする。　このときH′がHより一回のband-moveで得られるならば、H′も又可約である。　P（0）は明らかに自明であるがP（k－1）を仮定して<u>P</u>（k）を示すにはTheorem 1によってHのW－グラフがtype I，II，IIIに限定されることを利用する。　そして各々のtypeに対して又多くの場合が考えられる。詳細については本間－落合－高橋〔15〕を参照されたし。

<u>Main Theorem</u>（Homma－Ochiai－Takahashi）.
Hを（I_2）以外の3－球面のHeegaardの図式とする。このときHは可約な図式である。

証明。　H＝（F；v，w）とする。　F（0）

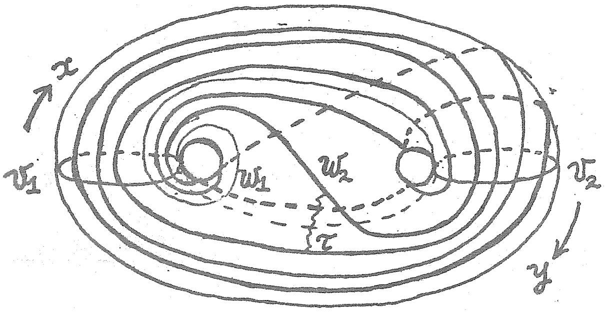
を3－球面内のHeegaard－曲面（（S^3－F）の二つの成分の各々の閉包がgenus nのハンドル）とする。 このときLemma bにより．3－球面のhomeomorphism h でh（F）＝F（o）となるものがある。 ここで h（H）＝（F（o）；h（v），h（w））． ところが Lemma aによって、h（H）は（I_2）から有限回の band－moveをほどこして得られる，

次にここで以下の帰納的命題を設定する；

R（k）；Hは（I_2）にk回のband－move を施して得られる図式とする。 そのときHは可約であるか又（I_2）である。 R（1）は自明でありR（k－1）を仮定して R（k）を示す。 Main Lemmaによりこれは自明。

ところで．Whitehead－Volodin－Kuznetsou－Fomenko〔35〕，〔38〕はgenus nの可約な図式をInputとして与えoutputとして可約でない図式を得るためのアルゴリスムを定義した。 これがAlgoritm（A）と呼ばれるものであるが．上の本間－落合－高橋の定理はgenus 2の場合には．Algorithm（A）が3－球面を判定する為の真のアルゴリスムであることを示している。しかし図－5で与えられる図式が示す如く、このアルゴ

リスムは図式にあくまで依存するものであり，基本群の表示のみから判定することは不可能なのである。



図－5

（注意；上の図式の与える3－球面の$\pi_1(S^3)$の表示は
$\langle x, y \mid x^2y = 1,\ yxyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1} = 1 \rangle$）

さらにAlgorithm（A）は彼らの予想に反して，genusが3以上の図式に対しては3－球面を判定する真のアルゴリズムとはならないことが，O. BIRO and V. KOBEL'SKII [34]，落合〔21〕，森川〔18〕によって示されている。ところが，これら三つの反例は全て，ある簡単な付加的条件をつけることによって，Algorithm（A）を真のアルゴリズムとする可能性を残す。
（Volodin〔35〕達は10^6個の3－球面の図式をcomputerでcheckした結果，genus 2以上の図式を含めて，Algorithm（A）が真のアルゴリズムではないかと予想した。） 付加的条件をつけ加えたAlgorithm（A）が

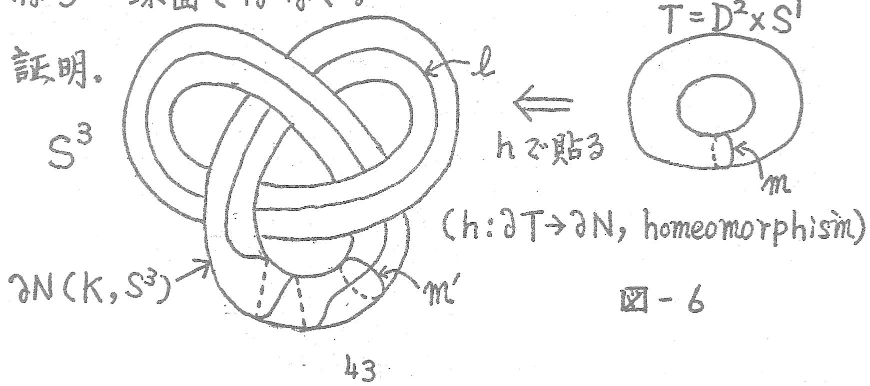
genus n ($n \geqq 3$) なる図式をもつ3－球面を判定する真のアルゴリズムであることを示す試みはまだ始まったばかりであり、これからの発展が望まれる。しかしもしこのことが正しいと示されるならばKnot Theory及び、Knotに沿ったDehn's surgeryより得られる3次元多様体の分類に多くの結果をもたらすものと思われる。(注 本間－落合－高橋の定理の日本語による適切な解説が加藤[16]にあるので参照すると良い)

§3. 2-bridge knot の Dehn's surgery.

この節では2－bridge knotのDehn's surgeryによって得られる3次元多様体が3－球面でないことを本間－落合－高橋の定理を使って示す。すなわち次がいえる[20];

<u>Theorem</u>(落合). non-trivial 2-bridge knotに沿ったDehn's surgeryにより得られる3次元多様体は3－球面ではない。

証明。



図－6

1. trivial surgery h_0; $h_0(m)=m' \Rightarrow M \cong S^3$

2. non-trivial surgery h; $h(m)$は∂N上でm'とisotopicでない。 (例えば、$h(m)=\ell$)

2-bridge knot Kは3-球面S^3内に標準的に埋めこまれたgenus 2のハンドルVの境界上にm_1, m_2とそれぞれ一点で交わるように埋めこめる。 そこで、

$V \underset{c_K}{\cup} D^2 \times I = E(k) \longleftrightarrow S^3 - \mathring{N}(K, S^3)$

(ここでc_Kは$\partial N(m_1 \cup K_1 \cup m_2, \partial V)$のうちで$m_1$, m_2とisotopicでないもの)

$$S^3 - \mathring{E}(K) \longleftrightarrow N(K, S^3) \supset K = K_1 \cup K_2$$

$$m_1,\ m_2 \longleftrightarrow m'$$

$$w_2 \longleftrightarrow h(m)$$

$$(F;\ v_1 \cup v_2,\ c_K \cup m_1) \underset{1}{\longleftrightarrow} h(m) = m'$$

$$(F;\ v_1 \cup v_2,\ c_K \cup w_2) \underset{2}{\longleftrightarrow} h(m) \not\sim m' \text{ in } \partial V = F$$

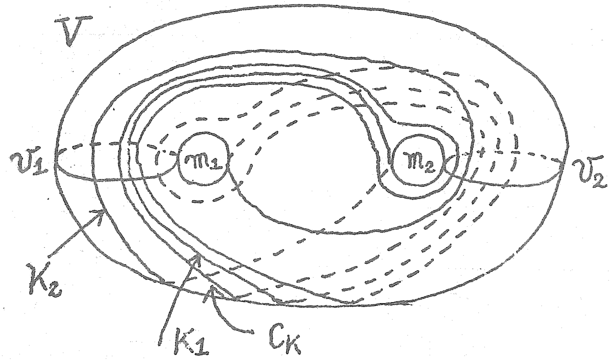


図-7

このときknot Kに沿ったDehn's surgery $h(m)$で、

得られる3次元多様体Mはgenus 2の図式（F；$v_1 \cup v_2$, $C_k \cup w_2$）をもつがsurgeryがnon-trivialのときは可約でないことが示せる。 詳細については〔20〕を参照のこと。

ところで高橋〔32〕は最近上のMに対して$\pi_1(M^3) \neq 0$であることを示したので付記しておく。

具体的に様々な3次元多様体を構成してみたかったのであるが紙数の関係で他稿にゆずる。 興味ある読者は、L, Moser〔19〕，Osborne〔24, 25〕，落合〔13〕，落合－高橋〔23〕，高橋〔33〕，本間〔12〕，Jahanson〔17〕Rolfsen〔27〕を参照されると良い。

References

[1] R.H.Bing and J.M.Martin, Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Soc.,155(1971)217-231.

[2] J.S.Birman and H.M.Hilden, Heegaard splittings of branched coverings of S^3, Trans. Amer. Math. Soc.,213(1975) 315-352.

[3] J.S.Birman, Heegaard splittings, Diagrams and Sewings for Closed, Orientable 3-manifolds, Lecture Notes for CBMS conferences at Blacksburg, Va., Oct. (1977)8-120.

[4] J.S.Birman, F.Gonzalz-Acuna, and J.M.Montesinos, Heegaard splittings of prime 3-manifolds are not unique, Mich. Math. J., 23(1976)97-103.

[5] D.B.A.Epstein, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math., 115(1966)83-107.

[6] F.Gonzalez-Acuna, Dehn's construction on knots, Boletin Sol. Mat. Mexicana 15 (1970) 58 - 79.

[7] W.Haken, Theorie der Normalflachen, Acta Math., 105(1961) 245-375.

[8] , Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in Modern Topology MAA Studies in Math., 5(1968)39-98.

[9] P.Heegaard, Sur l'Analysis Situs, Bulltin de la Societe Math. de France, 44(1916)161-242.

[10] J.Hempel, 3-manifolds, Ann. Math. Studies 86.

[11] 本間龍雄,　組合せ位相幾何学,　共立出版 (1980)
[12] T.Homma,　On presentations of fundamental groups of 3-manifolds of genus two, preprint.
[13] T.Homma and M.Ochiai,　Presentations for the fundamental group of a homology 3-spheres of genus two, 京都大学数理解析研講究録, 309 (1977) 72-79
[14] ,　On relations of Heegaard Diagrams and Knots, Math. Sem. Notes of Kobe Univ.,6(1978)383-393.
[15] T.Homma, M.Ochiai,and M.Takahashi,　An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, to appear in Osaka J. Math.,
[16] 加藤十吉,　ポアンカレ予想の周辺, 数学 31(4)
[17] K.Johannson,　Homotopy Equivalences of 3-manifolds with Boundaries, Springer-Verlag 761.
[18] O.Morikawa,　A counterexample of Whitehead conjecture, to appear in Math. Sem. Notes of Kobe Univ.,
[19] L.Moser,　Elementary surgery along a torus knot, Pacific J. Math., 38(1971)737-745.
[20] M.Ochiai,　Dehn's surgery along 2-bridge knots, The Yokohama Math. J., XXVI(1)(1978)69-75.
[21] ,　A counterexample to a conjecture of Whitehead and Volodin-Kuznetsov-Fomenko, J. Math. Soc. Japan 30(4)(1979)697-702.
[22] ,　Heegaard-Diagrams and Whitehead-Graphs, Math. Sem. Notes of Kobe Univ.,7(1979)573-591.

[23] M.Ochiai and M.Takahashi, Heegaard Diagrams of Torus Bundles over S^1, preprint.

[24] R.P.Osborne, The simplest closed 3-manifolds, Pacific J., 74(1978)481-495.

[25] , On the Seifert fibered spaces that are not sufficiently large, preprint.

[26] R.Riley, Knots with the parabolic property P, Quart. J. Math., 25(1974)273-283.

[27] D.Rolfson, Knots and links, Publish or Perish Inc.,1976.

[28] J.Singer, Three manifolds and their Heegaard diagrams, Trans. AMS 35(1933)88-111.

[29] H.Schubert, Knoten mit zwei Brucken, Math. Zeitschur 65(1956)133-170.

[30] S.Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handle-body, Canad. J. Math., 29(1977)11-124.

[31] M.Takahashi, An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem, Tsukuba J. Math., 2(1978)27-34.

[32] , Two-bridge knots have Property P, to appear

[33] , Some simple cases of Poincare conjecture, J. Math. Soc. Japan 32(2)(1980) 373 - 397.

[34] O.BIRO and V.KOBEL'SKII, The Volodin-Kuznetsov-Fomenko conjecture on Heegaard diagrams of a three dimensional sphere is false, USPEKHI MATH. NAUK XXXII(5)(1977)175-176.

[35] I.A.Volodin, V.E.Kuznetsov, and A.T.Fomenko, The Problem of Discriminating Algorithmically The Standard Three-

Dimensional Sphere, Russian Math. Surveys 29:5(1974)71-172.

[36] F.Waldhausen, Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphere, Topology 7(1968)195-203.

[37] , Uber Involutionen der 3-Sphere, Topology 8(1969)81-91.

[38] J.H.C.Whitehead, On certain sets of elements in a free groups, London Math. Soc.,(2)41(1936)48-56.

[39] H.Zieschang, Under einfach kurven auf Voll brezeln, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25(1962)231-250.

[40] H.Kneser, Geschlossene Flachen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Jahresbericht der Deut. Math. Verein., 38(1929)248-260

[41] W.B.R.Lickorish, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, Ann. of Math., 76(1962)531-540.

[42] , A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold, Proc. Camb. Phil. Soc. 60(1964)769-778.

[43] H.M.Hilden, Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3, Bull. Amer. Math. Soc., 80(1974)1243-1244.

[44] J.M.Montesinos, A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched covers of S^3, Bull. Amer. Math. Soc.,80(1974)845-846.

Topological entropy について

東大理　矢野公一

統計力学のものであったエントロピーの概念はShannon [75]，Kolmogorov [44] [45] 等によってエルゴード理論にとり入れられ，いわゆる同型問題に多くの結果を残している。[1] 一方1965年，Adler-Konheim-McAndrew [1] はこれの類似として位相力学系に対する不変量である位相的エントロピーを定義した。以来，その研究は多岐に渡っているが，ここではおもにエントロピー予想（Shub [76]）に関連して，筆者の結果 [86]，[87] を交えながら解説する。

---

1) 測度論的エントロピー あるいは一般に測度論的な力学系の理論（エルゴード理論）に関しては Arnol'd-Avez [4] 十時 [84] を参照されたい。

§0 位相力学系

コンパクト空間 X 及び連続写像 $f: X \to X$ が与えられたとき，(X, f) あるいは単に f を力学系と呼ぶ。2つの力学系 (X, f)，(Y, g) は次の図式を可換とする同相写像 $h: X \to Y$ が存在するとき位相的に共役であると云われる。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

力学系 f に対して非遊走集合 $\Omega(f)$ を

$$\Omega(f) = \left\{ x \in X ;\ \begin{array}{l} \text{任意の } x \text{ の近傍 } U\text{，任意の } n_0 \text{ に} \\ \text{対し，} n \geq n_0 \text{ なる整数が存在} \\ \text{して } f^n(U) \cap U \neq \phi \text{ を満たす。} \end{array} \right\}$$

で定義する。これは f-不変な閉集合となる。また f と g とが Ω 共役とは $(\Omega(f), f|_{\Omega(f)})$ と $(\Omega(g), g|_{\Omega(g)})$ とが位相的に共役となることを云う。

さて力学系全体を分類することを目的とすれば

不変量が問題となるが，現在迄のところ知られているものは周期点の個数などを除けば，位相的エントロピーが殆んど唯一のものである。

§1 定義と基本的性質

(X, f) を力学系，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を X の開被覆とするとき，自然数 $N(\mathfrak{a})$，開被覆 $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$，$f^{-1}(\mathfrak{a})$ が次で与えられる。

$$N(\mathfrak{a}) = \min\{\#\mathfrak{a}' \,;\, \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}' \text{ 部分被覆}\},$$

$$\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \{A \cap B\}_{A \in \mathfrak{a},\, B \in \mathfrak{b}},$$

$$f^{-1}(\mathfrak{a}) = \{f^{-1}(A)\}_{A \in \mathfrak{a}}.$$

これらを用いて開被覆 $\mathfrak{a}$ に対する f のエントロピーが

$$\mathrm{ent}(f, \mathfrak{a}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathfrak{a} \vee f^{-1}\mathfrak{a} \vee \cdots \vee f^{-n+1}\mathfrak{a})$$

で定義され これは有限の値をとる。今 $N(\mathfrak{a})$ は被覆 $\mathfrak{a}$ の効率の悪さを表現すると解釈されるから $\mathrm{ent}(f, \mathfrak{a})$ は f が空間 X を混合する度合を"尺度 $\mathfrak{a}$"で計ったものと考えることができる。

最後に位相的エントロピーは

(1.1) $$\mathrm{ent}(f) = \sup_{\mathfrak{A}} \mathrm{ent}(f, \mathfrak{A})$$

で定義される。[2] 以上は Adler-Konheim-McAndrew [1] による定義であるが，実際の計算などに於ては Bowen [10] による次の定義が有用である。

(X, d) をコンパクト距離空間，f をその上の力学系とする。正整数 n および正数 δ に対して X の部分集合 X' が f に関して X を (n, δ)-span するとは任意の $x \in X$ に対し $x' \in X'$ が存在して $d(f^i(x), f^i(x')) < \delta$ $i = 0, 1, \cdots, n-1$ を満たすときを云う。$S_f(n, \delta)$ でこのような集合の濃度のうちで最小のものを表わすとすれば

(1.2) $$\mathrm{ent}(f) = \sup_{\delta > 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_f(n, \delta) .$$

基本的性質

(1.3) $$\mathrm{ent}(f^n) = |n| \, \mathrm{ent}(f) .$$

---

[2] $\mathrm{ent}(f) = \infty$ もありうる。(4.2) 参照。

(1.3′) $\{f_t\}$ を 1 径数族とするとき,

$$ent(f_t) = |t|\, ent(f_1)$$

(1.4) 上への連続写像 $h: X \to Y$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

となるとき, $ent(f) \geqq ent(g)$ 。

特に位相的エントロピーは位相共役で不変。

(1.5) (Bowen [9])

$$ent(f) = ent(f|_{\Omega(f)})$$

特に位相的エントロピーは Ω 共役で不変。

(1.6) (Ito [36], Bowen [10]) M を m 次元コンパクト C^∞ 多様体, $f: M \to M$ を C^1 写像とするとき,

$$ent(f) \leqq \max\{0, m \log \sup_{x \in M} \|df|_{T_xM}\|\}。$$

ここで $\| \ \|$ は M 上の Riemann 計量に関するノルム。

特に可微分力学系のエントロピーは有限。

(1.7)（Goodman [23]） 力学系 (X, f) に対し，f-不変な X 上の確率測度全体を $\mathfrak{M}(f)$ と書く。[3] $\mu \in \mathfrak{M}(f)$ に対して f は確率空間 (X, μ) 上の保測変換と考えられるから，自然に測度論的エントロピー $\mathrm{ent}_\mu(f)$ が定義される。

このとき
$$\mathrm{ent}(f) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}(f)} \mathrm{ent}_\mu(f) \text{。}$$

<u>例</u>

(1.8) <u>shift automorphism</u>

$\Sigma_n = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} ; x_i = 1, 2, \cdots, n\}$ に自然な積位相を入れる。[4] $\sigma : \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_n$ を shift，即ち $(\sigma(x))_j = x_{j-1}$ とするとき
$$\mathrm{ent}(\sigma) = \log n$$

<u>証明)</u> $\mathfrak{A} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ ，$A_i = \{x ; x_0 = i\}$ とすれば，$N(\mathfrak{A} \vee \cdots \vee \sigma^{-k+1}\mathfrak{A}) = n^k$ より $\mathrm{ent}(\sigma, \mathfrak{A}) = \log n$。

---

3) Kryloff–Bogolioubof [46] によって，例えば X が距離空間ならば常に $\mathfrak{M}(f) \neq \phi$ である。

4) Cantor set となる。

一方 $\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^{-k}(\mathfrak{A})$ は各点分割となっているから，$\mathrm{ent}(\sigma)=\mathrm{ent}(\sigma,\mathfrak{A})$。よって結論が従う。□

(1.9) <u>subshift of finite type</u>

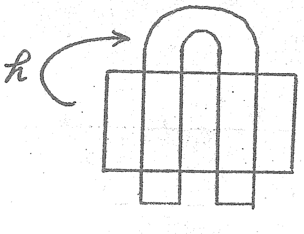
$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を各要素が 0 もしくは 1 よりなる $n\times n$ 行列とし，$\Sigma_n \supset \Sigma_A = \{(x_i)\,;\ a_{x_i x_{i+1}}=1\}$ とおけばこれは σ-不変な閉集合。$\sigma_A=\sigma|\Sigma_A$ とおくとき，これのエントロピーは

$$\mathrm{ent}(\sigma_A)=\log sp(A)$$

で与えられる。ただし $sp(A)$ は A の固有値の絶対値のうちで最大のものを表わす。

(1.10) <u>Smale の horse shoe (Smale [80])</u>

$h: S^2 \to S^2$ 可微分同相写像が局所的に



となっているものとする。四角形の外側で h が"すなお"であればエントロピーは，

$$\mathrm{ent}(h)=\log 2$$

を満たす。

(1.11) 系　$S^2 \times S^1$ 上に互いに位相共役とならぬ可微分力学系が非可算濃度存在する。

証明）　$S^2 \times S^1 \cong S^2 \times \mathbb{R} / (h^n(x), t) \sim (x, n+t)$ 上にベクトル場 $\frac{\partial}{\partial t}$ で定義される流れ F_t を考えれば $F_1 = h \times id_{S^1}$。

$$\therefore \; ent(F_1) = ent(h) = \log 2 \text{。}$$

これと (1.3′) より結果が従う。 □

(1.12) T^n の自己同型

$A \in SL(n, \mathbb{Z})$ は自然に Lie 群 T^n の自己同型 $f_A : T^n \to T^n$ をひきおこす。このとき

$$ent(f_A) = \log sp(A) \text{。}$$

§2 エントロピー予想

以下では多様体上の力学系のみを問題とする。1974年，Shub は [76] に於て，可微分力学系

(M, f) に対して

(2.1) $$\mathrm{ent}(f) \geqq \log sp(f_*)$$

であろうとの予想を立てた。ここで $sp(f_*)$ は線型写像 $f_*: H_*(M:\mathbb{R}) \longrightarrow H_*(M:\mathbb{R})$ の固有値の絶対値のうちの最大のもの。但し，Shub は同じ論文に於て連続写像に関しては (2.1) は成立しないことを注意している。

(2.2) <u>反例</u>　$S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とし，$f: S^2 \to S^2$ を $f(z) = \dfrac{z^2}{|z|+1}$ で定義すれば，$\deg f = 2$。一方，$\Omega(f) = \{0\} \cup \{\infty\}$ より $\mathrm{ent}(f) = 0$ 。

上の反例からも予想されることであるが，同相写像に関しても (2.1) は成立しない。

(2.3) <u>反例</u>（Pugh [70]）
8次元 C^∞ 多様体 N と $f: N \to N$ PL 同相写像が存在して，$\mathrm{ent}(f) = 0$ かつ $sp(f_*) > 1$ を満たす。

一方，肯定的な方向では以下が知られている。

(2.4) Shub-Williams [79]

可微分同相写像 $f: M \to M$ が Axiom A かつ条件 no cycle を満たすならば[5)]，

$$\mathrm{ent}(f) \geqq \log sp(f_*) \ 。$$

(2.5) Manning [48]

任意の連続写像 $f: M \to M$ に対して

$$\mathrm{ent}(f) \geqq \log sp(f_*|_{H_1(M:\mathbb{R})}) \ 。$$

(2.6) Shub [78]

$\hat{H}^*(M:\mathbb{R})$ で $H^1(M:\mathbb{R})$ で生成される $H^*(M:\mathbb{R})$ の部分環を表わすとき，任意の連続写像 $f: M \to M$ に対して

$$\mathrm{ent}(f) \geqq \log sp(f^*|_{\hat{H}^*(M:\mathbb{R})}) \ 。$$

次の結果は，連続の場合は反例が存在する

---

5) Axiom A，条件 no cycle などに関しては Smale [81] 参照。

(2.2) という意味で特筆すべきものである。

(2.7) <u>Misiurewicz–Przytycki [60]</u>
任意の C^1 写像 $f: M \to M$ に対して
$$\operatorname{ent}(f) \geqq \log|\deg f| 。$$

次の § では 上の結果のある意味での一般化について述べる。

(2.8) <u>注意</u>

Bowen [15] によって (2.5) の改良である次の結果が知られている。これを用いれば 評価 (2.1) が成立しても、(2.1) が best possible ではないようなホモトピー類が存在することがわかる。

Γ を有限生成群, $S=\{s_1, \cdots, s_k\}$ を生成元, $\gamma \in \Gamma$ に対して $L_S(\gamma)$ を γ を S の語として表現したときの語の長さの最小値 を表わすものとする。今, 群の準同型 $\alpha: \Gamma \to \Gamma$ に対して その<u>成長率</u>を
$$g(\alpha) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \limsup_{m \to \infty} L_S(\alpha^m \gamma)^{\frac{1}{m}}$$

で定義する。これは S のとり方に依らぬ。

さて，$f: M \to M$ を任意の連続写像とするとき，

$$\mathrm{ent}(f) \geq \log g(f_{\#})$$

ただし，$f_{\#}: \pi_1(M) \to \pi_1(M)$。

§3 葉層構造を保つ写像のエントロピー [87]

次の状況を考えよう。M を m 次元 C^∞ 多様体で向きづけられた p 次元 C^∞ 葉層構造 $\mathcal{F}$ が与えられているとする。このとき Plante [69]，Sullivan [82] によって $\mathcal{F}$ の foliation cycle が定義されている。これらによって表現される $H_p(M;\mathbb{R})$ の元全体を $\mathcal{F}$ と書くとき，$\mathcal{F}$ は"$\mathcal{F}$"の最高次のホモロジーを表わしていると見ることができる。さて可微分同相写像 f が $\mathcal{F}$ を保つとき，そのエントロピーと $sp(f_*|_{\mathcal{F}})$ に次の関係があることが知られる。

(3.1) 定理　$\mathrm{ent}(f) \geq \log sp(f_*|_{\mathcal{F}})$。

以下でこの定理の証明の概略を述べる。

まず M に Riemann 計量を定め，d および $L\in\mathcal{F}$ に対しての d_L をそれぞれこの計量より定まる M 上，L 上の距離とする。

$$B_r(x)=\{y\in M\,;\,d(x,y)\leqq r\}$$

$$D_r(x)=\{y\in L_x\,;\,d_L(x,y)\leqq r\}$$

とおく。ただし，L_x は x を通る $\mathcal{F}$ の葉。これを用いて f の体積増大率 $\rho(f)$ が次で定義される。

$$\rho(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sup_{x\in M}\mathrm{volume}(f^n(D_r(x)))\right)。$$

上の定義は Riemann 計量および r に依らない。

(3.2) 定理　$\mathrm{ent}(f)\geqq\rho(f)$

証明）特殊葉層近傍系 $\{D_i^p\times D_i^{m-p}\}_{i=1,\cdots,N}$ を固定し，$z\in D_i^{m-p}$ に対し，$P_z=D_i^p\times\{z\}$ とおく。更に $\hat{P}(x)=\bigcup_{x\in P_z}P_z$，$\hat{B}_r(x)=B_r(x)\cap\hat{P}(x)$ とするとき，f の一様連続性より次が従う。

(3.3) 正数δを充分小さくとれば，任意の$x \in M$に対して $f(\hat{B}_\delta(x)) \cap B_\delta(f(x)) \subset \hat{B}_\delta(f(x))$。

さて(3.2)を証明しよう。$\rho(f)>0$と仮定してさしつかえない。今$\rho(f)>\rho>0$なるρを固定し，更に(3.3)のδに対して正数rを充分小さくとって任意の$x \in M$に対し$D_r(x) \subset \hat{B}_\delta(x)$となるようにする。このとき$y \in D_r(x)$ならば，$D_r(x) \subset \hat{B}_\delta(y)$となることに注意しておく。$\rho(f)$の定義より，勝手な正整数$n_0$に対し，次を満足する$n \geq n_0$および$D=D_r(x)$が存在する。

(3.4) $\quad \mathrm{volume}(f^n(D)) \geq \exp(n\rho)$。

$S=S_f(n+1, \frac{\delta}{2})$，$\{x_1, \cdots, x_S\}$が$M$を$(n+1, \frac{\delta}{2})$-spanするものとする。$X_j=\{y \in D\,;\, d(f^i(x_j), f^i(y))<\frac{\delta}{2}$ $i=0, \cdots, n\}$としたとき$X_1 \neq \phi, \cdots, X_{S'} \neq \phi$，$X_{S'+1}=\cdots=X_S=\phi$と仮定してよい。$j=1, \cdots, S'$に対して$y_j \in X_j$とすれば定義より$f^k(X_j) \subset B_\delta(f^k(y_j))$ $k=0, \cdots, n$。一方，$X_j \subset D \subset \hat{B}_\delta(y_j)$より(3.3)を繰り返し用いて$f^n(X_j) \subset \hat{B}_\delta(f^n(y_j))$を得る。

ここで $\hat{P}(x)$ の体積には上限が存在するから，それを K とおくと，$\mathrm{volume}(f^n(X_j)) \leq K$。
これと (3.4) をあわせて

$$S_f(n+1, \frac{\delta}{2}) \geq S' \geq \frac{1}{K} \exp(n\rho) \text{。}$$

n は任意に大きくとることができ，また $\rho < \rho(f)$ も任意であったから，定義 (1.2) より (3.2) の結論が従う。 □

さて foliation cycle の定義を復習しよう。$\mathcal{D}_p$ で M 上の滑らかな p form 全体のなす線型空間，$\mathcal{D}_p'$ でその双対空間を表わす。v を $\mathcal{F}$ に接し，かつ $\mathcal{F}$ の向きに適合する p-vector，δ_v を v での Dirac current とするとき，このようなもの全体で張られる $\mathcal{D}_p'$ の閉かつ凸な錐を $\mathcal{C}$ とおく。Sullivan [82] は $\mathcal{C}$ の元で current として閉じているものを foliation cycle と呼んだ。我々は都合上 Sullivan の意味の foliation cycle の差として表わされるものを <u>foliation cycle</u> と呼ぶ。次は foliation cycle が $\mathcal{F}$ に横断的な方向の測度と見なせることを示す。

(3.4) <u>Sullivan [82]</u>

α を foliation cycle とするとき，各 D_i^{m-p} 上に符号つき測度 μ_i が存在して，任意の p-form η 及び任意の $\{D_i^p \times D_i^{m-p}\}$ に附随した1の分解 $\{\lambda_i\}$ に対して

$$\langle \alpha, \eta \rangle = \sum_i \int_{D_i^{m-p}} \left(\int_{P_z} \lambda_i \eta \right) d\mu_i(z) 。$$

これを用いて，foliation cycle α の<u>体積</u>が次で定義される。$\mu_i = \mu_{i+} - \mu_{i-}$ を Hahn の分解，$\overline{\mu_i} = \mu_{i+} + \mu_{i-}$ とするとき

$$(3.5) \qquad \mathrm{volume}(\alpha) = \sum_i \int_{D_i^{m-p}} \left| \int_{P_z} \lambda_i v \right| d\overline{\mu_i}(z)$$

ただし，v は Riemann 計量より定まる P_z 上の体積要素。(3.5) より次が従う。

(3.6) 任意の foliation cycle α に対して

$$\rho(f) \geq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mathrm{volume}((f_*)^n \alpha)) 。$$

(3.6) より次の2つが定理(3.2)の系として得られる。

(3.7) 系　任意の foliation cycle α に対して

$$\mathrm{ent}(f) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mathrm{volume}((f_*)^n \alpha))。$$

(3.8) 系　任意の foliation cycle α 及び p-form η に対して

$$\mathrm{ent}(f) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left| \langle (f_*)^n \alpha, \eta \rangle \right|。$$

さて問題の定理(3.1)は上の系(3.8)より直ちに結論される。

§4 Homeo(M) 上の函数としてのエントロピー [86]

多様体 M 上に距離 d を定めれば，M の同相写像全体のなす空間 Homeo(M) に自然な距離 $\bar{d}$ が

$$\bar{d}(f,g) = \sup_{x\in M} d(f(x), g(x)) + \sup_{x\in M} d(f^{-1}(x), g^{-1}(x))$$

によって導入され，Homeo(M) は完備距離空間となる。これによって次の定義が意味をもつ。

ある性質が Homeo(M) で<u>一般的</u>であるとはそれが開かつ稠密な部分集合の可算共通部分上で成立することを云う。いいかえれば，その性質を持たぬ元全体が高々第一類であるときを云う。

さて，この § では，実は"一般的"たる見地に立てば，写像 $ent : \mathrm{Homeo}(M) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は完全に決定されてしまうことを示す。

(4.1) <u>定理</u>　M を次元が 2 以上の位相多様体，K を任意の実数とするとき，Homeo(M) の開かつ稠密な部分集合 O_K が存在して

$$f \in O_K \text{ ならば } ent(f) \geqq K$$

を満たす。

(4.2) <u>系</u>　次元が 2 以上の位相多様体 M に対して，次の 2 つの性質は Homeo(M) で一般的。

(i) $ent(f) = \infty$

(ii) $\mathrm{ent}: \mathrm{Homeo}(M) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ は f で連続。

(4.2) (i) と (1.6) をあわせて次を得る。

(4.3) <u>系</u>　M を次元が 2 以上の可微分多様体とするとき，一般的な $\mathrm{Homeo}(M)$ の元は可微分同相写像と位相的に共役とならぬ。

エントロピー予想 (2.1) についても次がわかる。

(4.4) <u>系</u>　任意の位相多様体 M に対し，$\mathrm{Homeo}(M)$ の開かつ稠密な部分集合上，エントロピー予想が成立する。[6)]

<u>(4.1) の証明の概略</u>

次の pseudo horse shoe の概念が有用である。

$D^m=\{x=(x_i)\in\mathbb{R}^m;\ \sum_i|x_i|\leq 1\}$ とおき，U を D^m を含む $\mathbb{R}^m$ の開集合とする。

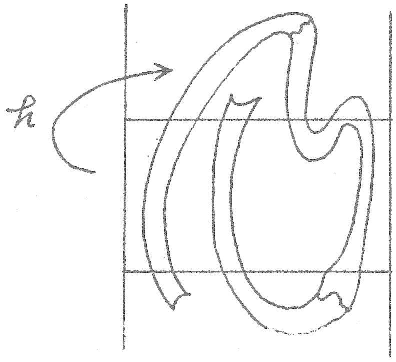
---

6) Palis-Pugh-Shub-Sullivan [67] 参照。

(4.5) 定義　中への同相写像 $h: U \to R^m$ は次の (1), (2) を満たすとき, n型の pseudo horse shoe と呼ばれる。[7]

(1) $h(D^m) \subset \mathrm{int}\, D^{m-1} \times R$,

(2) $h(D^{m-1} \times \{-1+\frac{4i}{n}\}) \subset \mathrm{int}\, D^{m-1} \times (-\infty, -1)$
$$i = 0, 1, \cdots, [\tfrac{n}{2}],$$
$h(D^{m-1} \times \{-1+\frac{4i+2}{n}\}) \subset \mathrm{int}\, D^{m-1} \times (1, \infty)$
$$i = 0, 1, \cdots, [\tfrac{n-1}{2}].$$



―― 3型の pseudo horse shoe ――

(4.5) を用いて Homeo(M) の部分集合 $\mathcal{H}_N$ が次のように定義される。$f \in \mathrm{Homeo}(M)$ が $\mathcal{H}_N$ に

---

[7] (1.10), Smale [80] 参照。

属するのは，ある正整数 k が存在して，f^k が局所的に N^k 型の pseudo horse shoe となるとき。この定義より $\mathcal{H}_N$ は Homeo(M) の開集合となるから，定理(4.1)の証明は次の2つの命題に帰着される。

(4.6) <u>命題</u>　$\mathcal{H}_N$ は Homeo(M) で稠密。

(4.7) <u>命題</u>　$f \in \mathcal{H}_N$ ならば $\mathrm{ent}(f) \geq \log N$。

(4.6), (4.7) の証明は略す。

文献表作製にあたっては白岩先生の Differentiable Dynamical Systems 文献表(1979.12)を参考にさせて頂いた。また東大数学教室の笹野一洋氏にもお世話になった。

文献（#を附したものは位相的エントロピーに関するもの）

[1]# Adler, R. L., Konheim, A. G. and McAndrew, M. H. : Topological entropy, Trans. A. M. S., 114 (1965) 309–319.

[2]# Adler, R. L. and Marcus, B. : Topological entropy and equivalence of dynamical systems, Memoirs A. M. S., 219 (1979).

[3]# Aoki, N. : Topological entropy of distal affine transformations on compact abelian groups, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971) 11–17.

[4] Arnol'd, V. I. et Avez, A. : Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, (1967).

[5]# Block, L. : Non-continuity of topological entropy of maps of the Cantor set and of the interval, Proc. A. M. S., 50 (1975) 388–397.

[6]# ________ : An example where topological entropy is continuous, Trans. A. M. S., 231 (1977) 201–213.

[7]# ________ : Topological entropy at an Ω-explosion, Trans. A. M. S., 235 (1978) 323–330.

[8]# ________ : Mappings of the interval with finitely many periodic points have zero entropy, Proc. A. M. S., 67 (1977) 357–360.

[9]# Bowen, R. : Topological entropy and Axiom A, Proc. Symp. Pure Math., 14 (1970) 23–41.

[10]# ________ : Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, Trans. A. M. S., 153 (1971) 401–414 and Erratum, Trans. A. M. S., 181 (1973) 509–510.

[11]# ________ : Entropy expansive maps, Trans. A. M. S., 164 (1972) 323–331.

[12]# Bowen, R. : Maximizing entropy for a hyperbolic flow, Math. Syst. Theory, 7 (1973) 300–303.

[13]# ________ : Entropy versus homology for certain diffeomorphisms, Topology, 13 (1974) 61–67.

[14]# ________ : Entropy for maps of the interval, Topology, 16 (1977) 465–467.

[15]# ________ : Entropy and the fundamental group, Springer Lecture Note, 668 (1978) 21–29.

[16]# Bowen, R. and Franks, J. : The periodic points of maps of the disk and the interval, Topology, 15 (1976) 337–342.

[17]# Conze, F. P. : Points periodique et entropie topologique, C. R. Acad. Sci. Paris, 267 (1968) 149–152.

[18]# Denker, M. D. : Une démonstration nouvelle du théorèm de Goodwyn, C. R. Acad. Sci. Paris, 15 (1972) 735–738.

[19]# Dinaberg, E. I. : The relation between topological entropy and metric entropy, Soviet Math. Dokl., 11 (1970) 13–16.

[20]# ________________ : On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems, Math. USSR Izv., 5 (1971) 337–378.

[21]# Fathi, A. and Shub, M. : Some dynamics of pseudo-Anosov diffeomorphisms, Astérisque, 66–67 (1979) 181–207.

[22]# Fried, D. and Shub, M. : Entropy, linearity and chain recurrence, I. H. E. S. Publ., 50 (1979) 203–214.

[23]# Goodman, T. N. T. : Relating topological entropy and measure entropy, Bull. London Math. Soc., 3 (1971) 176–180.

[24]# ________________ : Maximal measures for expansive homeomorphisms, J. London Math. Soc., 5 (1972) 439–444.

[25]# Goodwyn, L. W. : Topological entropy bounds measure-theoretic entropy, Proc. A. M. S., 23 (1969) 679–688.

[26]# ____________ : A characterization of symbolic cascades in terms of expansiveness and topological entropy, Math. Syst. Theory, 4 (1970) 157–159.

[27]# ____________ : The product theorem for topological entropy, Trans. A. M. S., 158 (1971) 445–452.

[28]# ____________ : Comparing topological entropy with measure theoretic entropy, Amer. J. Math., 94 (1972) 366–388.

[29]# ____________ : Axioms for topological entropy, to appear.

[30]# Guinez, J. : Entropie topologique et rayon de convergence de la function zêta des endomorphismes dilatants de variétés compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 270 (1970) 1408–1411.

[31]# Gurevič, B. M. : Topological entropy of enumerable Markov chains, Soviet Math. Dokl., 10 (1969) 911–915.

[32]# ____________ : The invariant measure with maximal entropy for an Anosov diffeomorphism, Funct. Analy. Appl., 4 (1970) 282–289.

[33]# Hamachi, T. and Totoki, H. : A remark on the topological entropy, Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ., 25 (1971) 300–303.

[34]# Hurley, D. : Topological entropy of the geodesic flows on manifolds of hyperbolic type, J. London Math. Soc., 12 (1976) 149–159.

[35]# Ito, S. : On the topological entropy of a dynamical system, Proc. Japan Acad., 45 (1969) 838–840.

[36]# ______ : An estimate from above for an entropy and the topological entropy of a C^1-diffeomorphism, Proc. Japan Acad., 46 (1970) 226–230.

[37]# Ito, S., Tanaka, S. and Nakada, H. : On unimodal linear transformations and chaos I and II, Tokyo J. Math., 2 (1979) 221–239 and 241–259.

[38]# Jonker, L. : Periodic points and kneading invariants, Bull. London Math. Soc., 39 (1979) 428–450.

[39]# Jonker, L. and Rand, D. A. : A lower bound for the entropy of certain maps of the unit interval, to appear.

[40]# ______________________ : Bifurcations in one dimension, I The non-wandering set, II A versal model for bifurcations, to appear.

[41]# Katok, A. : Liapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, to appear.

[42]# Keyens, H. B. and Robertson, J. B. : Generators for topological entropy and expansiveness, Math. Syst. Theory, 3 (1969) 51–59.

[43]# Koike, T. : On endomorphisms of a product space of surfaces, to appear.

[44] Kolmogorov, A. L. : A new invariant for transitive dynamical systems, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 119 (1958) 861–864.

[45] ________________ : Entropy per unit time as a metric invariant of automorphism, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 124 (1959) 754–755.

[46] Kryloff, N. and Bogoliouboff, N. : La théorie générale de la measure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire, Ann. Math., 38 (1937) 65–113.

[47]# Ledrappier, F. : A variational principle for the topological conditional entropy, Springer Lecture Note, 729 (1979) 78–88.

[48]# Manning, A. : Topological entropy and the first homology group, Springer Lecture Note, 468 (1975) 185–190.

[49]# __________ : Toral automorphisms, topological entropy and the fundamental group, Astérisque, 50 (1977) 273–281.

[50]# __________ : Topological entropy for geodesic flows, Ann. Math., 110 (1979) 567–573.

[51]# Marcus, B. and Newhouse, S. : Measures of maximal entropy for a class of skew products, Springer Lecture Note, 729 (1979) 105–125.

[52]# Marczyńska, B. : On a generalization of topological conditional entropy, Astérisque, 50 (1977) 283–292.

[53]# Matsumoto, S. : Topological entropy of circle endomorphisms, Yokohama Math. J., 27 (1979) 73–76.

[54]# Milnor, J. and Thurston, W. : On iterated maps of the interval, I The kneading matrix, II Periodic points, to appear.

[55]# Misiurewicz, M. : On non-continuity of topological entropy, Bull. Acad. Polon. Sci., 19 (1971) 319–320.

[56]# ______________ : Diffeomorphisms without any measure with maximal entropy, Bull. Acad. Polon. Sci., 21 (1973) 903–910.

[57]# ______________ : Topological conditional entropy, Studia Math., 55 (1976) 175–200.

[58]# ______________ : Invariant measures for continuous transformations of [0,1] with zero topological entropy, Springer Lecture Note, 729 (1978) 144–152.

[59]# ______________ : Horseshoes for mappings of the interval, Bull. Acad. Polon. Sci., 27 (1979) 167–169.

[60]# Misiurewicz, M. and Przytycki, F. : Topological entropy and the degree of smooth mappings, Bull. Acad. Polon. Sci., 25 (1977) 573–574.

[61]# ______________________________ : Entropy conjecture for tori, Bull. Acad. Polon. Sci., 25 (1977) 575–578.

[62]# Misiurewicz, M. and Szlenk, W. : Entropy of piecewise monotone mappings, Astérisque, 50 (1977) 299–310.

[63]# Newhouse, S. : Topological entropy and Hausdorff dimensions for area preserving diffeomorphisms of surfaces, Astérisque, 51 (1978) 323–334.

[64]# Ohno, T. : A weak equivalence and topological entropy, Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ., 16 (1980) 289–298.

[65]# Oshikawa, M. and Hamachi, T. : Topological entropy of a non-irreducible intrinsic Markov shift, Mem. Fac. Kyushu Univ., 25 (1971) 296–299.

[66]# Palis, J. and Pugh, C. : Fifty problems in dynamical systems, Springer Lecture Note, 468 (1975) 241–250.

[67]# Palis, J., Pugh, C., Shub, M. and Sullivan, D. : Genericity theorems in topological dynamics, Springer Lecture Note, 468 (1975) 257–261.

[68]# Pesin, Ja. B. : Equations for the entropy of a geodesic flow on a compact Riemannian manifold without conjugate point, Math. USSR Izv., 11 (1977) 1195–1228.

[69] Plante, J. : Foliations with measure preserving holonomy, Ann. Math., 102 (1975) 327–361.

[70]# Pugh, C. : On the entropy conjecture, Springer Lecture Note, 468 (1975) 257–261.

[71] Ruelle, D. and Sullivan, D. : Currents, flows and diffeomorphisms, Topology, 14 (1975) 257–261.

[72]# Sacksteder, R. and Shub, M. : Entropy on sphere bundles, Adv. Math., 28 (1978) 174–177.

[73]# ______________________ : Entropy of a differentiable map, Adv. Math., 28 (1978) 181–185.

[74]# Sasano, K. : Topological entropy and periodic points of maps of the circle, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[75] Shannon, C. : A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J., 27 (1948) 379–423, 623–656.

[76]# Shub, M. : Dynamical systems, filtrations and entropy, Bull. A. M. S., 80 (1974) 27–41.

[77]# ______ : Topological entropy and stability, Springer Lecture Note, 468 (1975) 39–40.

[78]# ______ : Alexander cocycles and dynamics, Astérisque, 51 (1978) 395–413.

[79]# Shub, M. and Williams, R. F. : Entropy and stability, Topology, 14 (1975) 329–338.

[80] Smale, S. : Diffeomorphisms with many periodic points, Differentiable and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, (1965) 63–80.

[81] ______ : Differentiable dynamical systems, Bull. A. M. S., 73 (1967) 747–813.

[82] Sullivan, D. : Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, Invent. Math., 36 (1976) 225–255.

[83]# Takahashi, Y. : A formula for topological entropy of one-dimensional dynamics, to appear.

[84] 十時東生：エルゴード理論入門，共立出版 (1971).

[85]# Walters, P. : A variational principle for the pressure of continuous transformations, Amer. J. Math., 97 (1976) 937-971.

[86]# Yano, K. : A remark on the topological entropy of homeomorphisms, to appear in Invent. Math..

[87]# ______ : Topological entropy of foliation preserving diffeomorphisms, to appear.

[88]# Young, L. : Entropy of continuous flows on compact 2-manifolds, Topology, 16 (1977) 469-471.

追加.

[89]# Denker, M. : Measures with maximal entropy, Springer Lecture Note, 532 (1976) 70-112.

[90]# Denker, M., Grillenberger, C. and Sigmund, K. : Ergodic theory on compact spaces, Springer Lecture Note, 527 (1976).

[91]# Walters, P. : Ergodic theory. Introductory lectures, Springer Lecture Note, 458 (1975).

ロッホリン不変量の消滅

大阪市大・理・河内明夫

Σを oriented $\mathbb{Z}_2$-homology 3-sphere (即ち, oriented PL 3-manifold で, $H_*(\Sigma;\mathbb{Z}_2)\cong H_*(S^3;\mathbb{Z}_2)$, S^3, 3-sphere) とするとき, Rochlin invariant とか μ-invariant とか呼ばれ, $\mu(\Sigma)$で表わされる, Σの不変量が $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$の中に存在する.(§1で正確に定義される)

次の定理はこのμ-invariantの1つの研究の動機になる.

定理0 (T. Matumoto [21], Galewski-Stern [17]). すべての, 5次元以上の, boundary をもたない metrizable topological manifold が simplicial complex としての triangulation をもつことと, 次の(1)と(2)を満たす $\mathbb{Z}$-homology 3-sphere Σが存在することとは同値である:

(1) $\mu(S) \neq 0$,

(2) oriented connected sum $S \# S$ は $\tilde{H}_*(W;Z)=0$ となる, あるcompact PL 4-mainfold W の boundary.

例えば, Z-homology 3-sphere S が向き逆転のPL自己同相写像をもち, かつ $\mu(S) \neq 0$ ならば, このSは上の定理0の(1), (2)を満たす.

従って, 次の問題が考えられる:

問題1. SをZ_2-homology 3-sphereとする. もしSが向き逆転のPL自己同相写像をもつならば, $\mu(S)=0$か?

当講演では次の定理を示すのを主目的とする.

定理1. Sをoriented Z_2-homology 3-sphereとする。もしSが向き逆転のPL自己同相写像hで有限位数となるもの,(即ち, あるnで $h^n = id.$)をもてば $\mu(S)=0$である。

(注意)あらかじめ,$h^2=id.$ の場合は Birman [1], W.C.Hsiang-P.Pao [12], Galewski-Stern [8] 及び筆者 [18] により,それぞれ異なる方法で $\mu(S)=0$ が得られた.上記定理の証明は筆者 [18] の方法から出る([19]).[他の方法 [1], [12], [8] では難しいようです.] L.C. Caballero [2], [3] は S が Z-homology 3-sphere で $\mathrm{order}(h)\equiv 0 \pmod 4$ のとき $\mu(S)=0$ を示し,$h^2=id.$ のときの結果と結ぶことによって,S が Z-homology 3-sphere のときの上記定理を独立に示した.[この方法はそのまま Z_2-homology 3-sphere に対して使えない点を注意されたい.]

Siebenmann [26] は定理1から次を得た。

定理2([26]). S を oriented, irreducible sufficiently large Z_2-homology 3-sphere とする.もし S が向き逆転の PL 自己同相写像 h(有限位数でなくてよい)をもてば,$\mu(S)=0$ である.

(証明のあらすじ)まず Siebenmann は Jaco-Shalen [13], Johannson [14] 及び Thurston の hyperbolization theorem㊟ による次の定理に注目する:

Sufficiently large 3-manifold の構造定理

M を closed (connected) orientable irreducible (sufficiently large) 3-manifold とする.

㊟ S^2 上の fiber bundle になる 3-manifold については D. Sullivan [27] がある.

そのとき，$T=\coprod_{i=1}^{r} T_i$ $(T_i \cong S^1\times S^1)$で次の(a)，(b)を満たすものがある：

(a) Tの正則近傍$N(T)$に対して，$M-\mathring{N}(T)$の各成分はSeifert fiber spaceか，有限体積のcomplete hyperbolic 3-manifold，

(b) ${}^{\forall}f: M \circlearrowleft$ 同相写像に対して，$f(T)$とTはambient isotopic.

今，Sに対して，(a)，(b)を満たす$T\subset S$をとる．(b)より$h(T)=T$としてよい．$S-\mathring{N}(T)$の各成分S_0や$N(T)$の成分$N(T_i)$に$S^1\times D^2$を適当にはりつけて，Z_2-homology 3-sphere，S_{0+}や$N(T_i)_+$を一意的につくれる．そのとき，

$$(\#)\qquad \mu(S)=\sum_{S_0\subset S-\mathring{N}(T)} \mu(S_{0+})-\sum_i \mu(N(T_i)_+)$$

が成り立つ．$N=S_0$又は$N(T_i)$とおく．$h(N)=N$となるNについては，$h|N$は同相写像$h_+: N_+\circlearrowleft$に一意的に拡張できる．

(1) NがSeifert fiber space ($N=N(T_i)$のとき必ず)のとき，N_+はSeifert fiber spaceか，少なくともそれらのconnected

sum で, $h_+ : N_+ \cong N_+$, 従って h_+ は向き逆転の involution に isotopic. 定理1より $\mu(N_+) = 0$.

(2) N が hyperbolic のとき, Mostow rigidity theorem [23] により, $h|N$ は有限位数の PL 同相に homotopic, 従って $h_+ : N_+ \circlearrowleft$ は有限位数をもつと考えてよい. 定理1より, $\mu(N_+) = 0$.

一般に, かってな N に対して $h^{p}(N) = N$ となる $p \geq 1$ がある. p が奇数のとき, 上の(1), (2)と同様の議論から $\mu(N_+) = 0$, 従って $\mu(h^{i} N_+) = 0$, $0 \leq i \leq p-1$. p が偶数のとき, $p = 2p'$, $\sum_{k=1}^{p'} [\mu(h^{2(k-1)} N_+) + \mu(h^{2k-1} N_+)] = 0$.
従って, (#) より $\mu(S) = 0$ が得られる//

<u>現時点での結論</u>. Z_2-homology 3-sphere S が次のどれかであるとする:

(i) irreducible かつ sufficiently large,

(ii) Seifert fiber space,

(iii) complete hyperbolic 3-manifold,

(iv) (i), (ii), (iii) のどれかを満たすものの connected sum.

そのとき, S が向き逆転の PL 同相写像をもてば, $\mu(S) = 0$ になる.

問題2. closed, connected orientable, irreducible 3-manifoldで, sufficiently largeでないものは, Seifert fiber spaceか complete hyperbolic 3-manifoldになるか?

この問題が肯定されるならば, 問題1は肯定されることがわかる. この問題を肯定する例のみ知られている. (Thurston [28], Hatcher-Thurston [9] 参照)

§1. ロッホリン不変量の定義(例えば, [11] 参照)

oriented Z_2-homology 3-sphere Sは必ず, ある compact, oriented, spin ($w_1=w_2=0$) PL 4-manifold W ← Stiefel-Whitney class
$\Updownarrow$
$v_1=v_2=0$ ← Wu class
のboundaryになる([22], [15]).

そのとき

定義[*] $\mu(S)=\mathrm{sign}\,W/16 \in Q/Z$.

これが well-defined であることは次の Rochlin の定理から出る:

[*] [11]では $-\mathrm{sign}\,W/16$ を"μ-invariant"と呼んでいる.

Rochlinの定理. closed, oriented spin PL 4-manifold W は $\operatorname{sign} W \equiv 0 \pmod{16}$ をもつ.

このoriginalな証明はRochlin [25]によるが, 現在では, Freedman-Kirby [6], Y. Matsumoto [20]による証明がある.

§2. Z_2-ホモロジーハンドルのあるコボルディズム理論([18]参照)

Z_2-homology handle, M, とは, $H_*(M;Z_2) \cong H_*(S^1\times S^2;Z_2)$ かつ $H_1(M;Z)$ が無限群となるPL 3-manifold M をいう. (M は non-orientable でもかまわない.) そのような M については, 次の(イ), (ロ)をみたす PL map $f: M \to S^1$ がある:

(イ) $f_*: H_1(M;Z)/\text{odd torsion} \cong H_1(S^1;Z)(\cong Z)$

(ロ) ある $p \in S^1$ で, $F = f^{-1}(p) \subset M$ は closed orientable surface で, 厚み $F\times[0,1] \subset M$ をもてる.

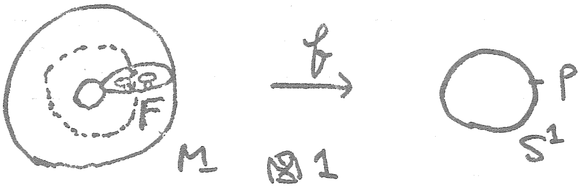


図1

この $F\times[0,1]\subset M$ を1つ固定して，双写像

$$L: H_1(F;\mathbb{Z}_2)\times H_1(F;\mathbb{Z}_2)\to\mathbb{Z}_2$$

を

$$L(\{x'\},\{y'\}) = M\text{での } x'\times 0 \text{ と } y'\times 1 \text{ の } \mathbb{Z}_2\text{-からまり数}$$

により定義する．（Mの中で $x'\times 0\sim 0$, $y'\times 1\sim 0 \pmod 2$ だから Lはうまく定義される．）これが成りたつ：

$$L(x,y)+L(y,x)=x\cdot y,$$

$\forall x, \forall y\in H_1(F;\mathbb{Z}_2)$（$\cdot$ は F上での$\mathbb{Z}_2$-交叉数）．このとき，写像

$$q: H_1(F;\mathbb{Z}_2)\to\mathbb{Z}_2$$

を

$$q(x)=L(x,x)$$

により定義すると，

$$q(x+y)=q(x)+q(y)+x\cdot y,$$

つまり，qは quadratic form (mod 2) になる．
そこで，

<u>定義</u> $\varepsilon(M)=$ Arf invariant of q $(\in\mathbb{Z}_2)$

とする．

$\varepsilon(M)$ は次の諸性質をもつ.

命題(0) $\varepsilon(M)$ は M の位相不変量,

(1) $A(t)$ を M の Z_2-Alexander 多項式[※]とするとき, $\varepsilon(M)=0$ ならば, $A(t)$ は $a(t)(t^4+1)+t^b$ の形にかけ, $\varepsilon(M)=1$ ならば, $A(t)$ は $a(t)(t^4+1)+t^b(t^2+t+1)$ の形にかける,

(2) M' を M の connected double cover とすると, M' も Z_2-homology handle になり, $A(t), A'(t)$ を M, M' の Z_2-Alexander 多項式とするとき, $A(t)=A'(t)$ となり, 従って $\varepsilon(M)=\varepsilon(M')$.

※ $\boxed{Z_2\text{-Alexander 多項式の定義}}$ $\langle t\rangle$ を固定した, t で生成された無限巡回群とする. 上への準同型 $\gamma: \pi_1(M)\to\langle t\rangle$ を使って被覆 $\tilde{M}$ を作る. $H_1(\tilde{M};Z_2)$ は ($H_1(M;Z_2)=Z_2$ により) 有限生成 $Z_2\langle t\rangle$-torsion module になる. $A(t)$ をその order ideal の任意の generator とし, M の Z_2-Alexander 多項式と呼ぶ. $H_1(M;Z_2)=Z_2$ より $A(1)=1$. (また) $A(t)=t^m A(t^{-1})$ を示せるので, t の積を無視した $A(t)$ は γ (丁度2つある) のとり方によらず, 従って M の位相不変量になる. $A(1)=1$ より

$A(t)$ は必ず $a(t)(t^4+1)+t^b$ 又は $a(t)(t^4+1)+t^b(t^2+t+1)$ のどちらかの形をもつことがわかる.（両方の形を同時にとることはない.）

次の $\varepsilon(M)$ の特徴づけは我々の目的のためには有益である:

定理3. $\varepsilon(M)=0$ であることと, M を boundary とする compact connected PL 4-manifold W で, 次の (1), (2) を満たすものが存在することとは同値になる:

(1) $M \subset W$ は同型 $H_1(M;\mathbb{Z})/\text{odd torsion} \xrightarrow{\cong} H_1(W;\mathbb{Z})/\text{odd torsion}$ $(\cong \mathbb{Z})$ を生成し,

(2) $\mathbb{Z}_2$-交叉数 $x \cdot x = 0$, $\forall x \in H_2(W;\mathbb{Z}_2)$（即ち, $v_2(W)=0$）.

↖ Wu class

（注意）ここで, M は orientable に限っていないことに注意すること. 明らかに,

M, orientable $\Leftrightarrow$ W, orientable $\Leftrightarrow$ W, spin.

§3. 定理1の証明

$h^n = id.$ とするとき，h は S の向きを逆転するから，n は偶数でなければならない：$n=2^u m$, m 奇数，とおく．h^m は向きを逆転し，位数 2^u をもつ．こうして，h の位数はあらかじめ 2^u $(u \geq 1)$ と仮定できるので，仮定する．

定理A. $u=1$ (RP5, h は involution) とする．そのとき，必ず対 (S, h) を boundary とする対 $(W, \bar{h})$ で

(1) W は compact spin PL 4-manifold, かつ

(2) $\bar{h}$ は W 上の向き逆転の PL involution (i.e., $\bar{h}^2 = id.$), (3) $H_1(W; Z_2) = 0$,

となるものが存在する．

$u \geq 2$ とする．そのとき Smith theory により，$1 \leq i \leq u-1$ に対しては $Fix(h^{2^i}) = k$ $(\cong S^1)$ ，また $Fix(h)$ は k の中の2点であることがわかる．今，S^3 の中の，次に描かれた knot (figure eight knot と呼ばれ，4_1 で表わされる) を考える：

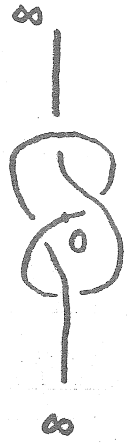


図2

ここで, $S^3=R^3\cup\{\infty\}$ と考えて図の部分を R^3 の中に proper に入れる.(0は原点). 変換 $(x_1,x_2,x_3)\to(-x_1,-x_2,-x_3)$ により, このknot は集合として不変であることがわかる. こうして $(4_1\subset S^3)$ は向き逆転の PL involution α をもつ. $S^3(4_1)_{2^{n-1}}$ を 4_1 にそった S^3 の 2^{n-1}-fold cyclic branched cover とする.(必ず Z_2-homology 3-sphere になる.) そのとき, α は $S^3(4_1)_{2^{n-1}}$ の位数 2^n の向き逆転の PL自己同相写像 $\tilde{\alpha}$ に持ち上がる. Fix(α) は2点からなるので, Fix($\tilde{\alpha}$), Fix(h) から各1点ずつをとり, それぞれ $\tilde{\alpha}$-, h-不変な小さな3球を考えることによって, connected sum

$$(S\# S^3(4_1)_{2^{n-1}},\ h\#\tilde{\alpha})$$

をうまく定義できる. ここで, $h\#\tilde{\alpha}$ はまた位数 2^n をもつ.

定理B. $u\geq 2$ とする. 対 (Σ, h) が $(\Sigma \# \Sigma^3(4,1)_{2^{u-1}}, h\#\tilde{\alpha})$ に対し, それを boundary とする対 $(W, \bar{h})$ で,

(1) W は compact spin PL 4-manifold,

(2) $\bar{h}$ は W の向き逆転の PL 自己同相写像で位数 2^u, かつ

(3) $H_1(W; Z_2)=0$

となるものが存在する.

定理 A, B の中の W は明らかに $\operatorname{Sign} W=0$ をもつ. $\mu(\Sigma^3(4,1)_{2^{u-1}})=0$ $(\forall u\geq 2)$ は知られているので, 定理 A, B から

$$\mu(\Sigma)=0$$

がわかる//

<u>定理Aの略証</u>. Smith theory により, $\operatorname{Fix}(h)=S^0$ か S^2. $\operatorname{Fix}(h)=S^2$ ならば S^2 は Σ を2つの部分に分ける: $\Sigma=B_1\cup_{S^2}B_2$. h は B_1 と B_2 を交換する. $W=B_1\times[-1,1]$ とおき, $(x,t)\to(x,-t)$ となる W の向き逆転の involution $\bar{h}$ を考えると $(\partial W, \bar{h}|\partial W)$ は (Σ, h) に同値. $\tilde{H}_*(W;Z_2)=0$ だから, この場合に定理Aを

得る. $Fix(h)=S^0$ とする. $Fix(h)\subset k$ かつ $h(k)=k$ となる knot $k\subset S$ をとる. k の h-不変な tube 近傍を $T(k)$ とする. 今, PL 4-manifold $S\times[0,1]\cup D^2\times D^2$ を考える, ここでは同一視 $T(k)\times 1\equiv(\partial D^2)\times D^2$ を次の (1), (2) を満たすように行っている:

(1) $h\times 0$ は $S\times[0,1]\cup D^2\times D^2$ 上の PL involution $\bar{h}_0$ で,

$Fix(\bar{h}_0)=k\times[0,1]\cup pt\times D^2$ $(k\times 1\equiv pt\times\partial D^2,\ pt\in\mathring{D}^2)$

となるものへ拡張し,

(2) $M=\partial(S\times[0,1]\cup D^2\times D^2)-S\times 0$ とおくと, $h_1=\bar{h}_0|M$ は M に free に作用し, $\underset{\sim}{M}=M/h_1$ は Z_2-homology handle. (従って, M も Z_2-homology handle, cf. 命題(2).)
[$\underset{\sim}{M}$ は non-orientable manifold であることに注意すること.]

$\varepsilon(\underset{\sim}{M})=0$ のとき, 定理3より $\underset{\sim}{M}$ は, 4-manifold $\underset{\sim}{W}_1$ で $H_1(\underset{\sim}{M};Z)/\text{odd torsion}\xrightarrow{\cong}H_1(\underset{\sim}{W}_1;Z)/\text{odd torsion}\ (\cong Z)$ かつ $v_2(\underset{\sim}{W}_1)=0$ となるものの boundary である. $\underset{\sim}{W}_1$ の orientation cover を W_1 とすると, $v_2(W_1)=0$ かつ $H_1(M;Z)/\text{odd torsion}\xrightarrow{\cong}H_1(W_1;Z)/\text{odd torsion}\ (\cong Z)$ がわかるので,

$$W=S\times[0,1]\cup D^2\times D^2\cup W_1$$

とおくと, W は spin, $H_1(W;Z_2)=0$, かつ $\bar{h}_0$ は W 上の PL involution $\bar{h}$ へ拡張できることがわかる. $\partial(W,\bar{h})=(M,h)$ より, この場合も定理Aが示された.

$\varepsilon(\tilde{M})=1$ とする. (このとき命題(2)より $\varepsilon(M)=1$.) $\mathrm{Fix}(h)=S^0$ の1点の h-不変な 3-球近傍 B をとると, $B\cap k$ は B の中の unknotted (standard) な proper arc としてよい. この部分を図2の (h-不変な) figure eight knot の arc でおきかえる. こうして新しい knot $k'(=k\#4_1)\subset S$ を得る. k の代りに k' を使うとき, M に対応した M' は $\varepsilon(\tilde{M}')=0$ をもつ. [実際, M, M' の Z_2-Alexander 多項式を $A(t)$, $A'(t)$ とすると, ある奇数 r があって, $A'(t)=A(t)(t^{2r}+t^r+1)$ となる. $\varepsilon(M)=1$ より, 命題(1)を使うと, $\varepsilon(M')=0$ が出る. 命題(2)より $\varepsilon(\tilde{M}')=0$.] こうして $\varepsilon(\tilde{M})=0$ の場合に reduce でき, 定理Aの証明が終る//

定理Bの略証. $S_*=S/h^2$ とおく. $k=\mathrm{Fix}(h^2)$ の S_* での像を k_* とする. (knot になる.) S は k_* にそった S_* の 2^{n-1}-fold cyclic branched cover である. S_* はまた Z_2-homology 3-sphere になり, この branched covering は $H_1(S_*-k_*;Z)\xrightarrow{\text{onto}} Z_{2^{n-1}}$ により生成されたものであることがわかる. h は S_* の向き逆転の PL involution h_* を生成する. $\mathrm{Fix}(h_*)=S^0\subset k_*$. 定理Aの略証で述べたように, k_* か又は (h_*-不変な) knot sum $k_*\#4_1$ に対して, $S_*\times[0,1]\cup D^2\times D^2$ の boundary の中の Z_2-homology handle M_* は $\varepsilon(M_*)=0$ をもつ.

h_* の $S_*\times[0,1]\cup D^2\times D^2$ への拡張を $\bar{h}_{0*}$ とかく。またその M_* への制限を $\bar{h}_{1*}$ とかく。定理Aの略証から、M_* を boundary とする spin 4-manifold W_* で $H_1(M_*;Z)/\text{odd torsion} \xrightarrow{\cong} H_1(W_{1*};Z)/\text{odd torsion}$ $(\cong Z)$ かつ h_{1*} が W_{1*} の free involution $\bar{h}_{1*}$ に拡張できるようなものが存在する。

$W_* = S_*\times[0,1]\cup D^2\times D^2\cup W_{1*}$, $\bar{h}_* = \bar{h}_{0*}\cup\bar{h}_{1*}$ とおく。

W_* の $D_* = k_*\times[0,1]\cup pt\times D^2$ にそった、次の図式中の写像

$$\begin{tikzcd}
H_1(W_*-D_*;Z) \arrow[dr, "\text{onto}"] & \\
 & Z_{2^{u-1}} \\
H_1(S_*-k_*(\text{又は } k_*\#q_1);Z) \arrow[uu] \arrow[ur, "\text{onto}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

により生成される branched cover を W とし、$\bar{h}_*$ の W 上への lift を $\bar{h}$ とする。$k\#q_1$ にそった S_* の 2^{u-1}-fold cyclic branched cover は $S\#S^3(q_1)_{2^{u-1}}$、従って $(W,\bar{h})$ の boundary は (S,h) 又は $(S\#S^3(q_1)_{2^{u-1}}, h\#\tilde{\alpha})$ になる。さらに、

$$W = S(\text{又は } S\#S^3(q_1)_{2^{u-1}})\times[0,1]\cup D^2\times D^2\cup W_1,$$

ここに W_1 は W_{1*} の (unbranched) $Z_{2^{u-1}}$-cover (従って spin) で、$H_1(\partial W_1;Z)/\text{odd torsion} \xrightarrow{\cong} H_1(W_1;Z)/\text{odd torsion}$ $(\cong Z)$ となる。

結局、W は spin, $H_1(W;Z_2)=0$, $\bar{h}^{2^u}=id$. がわかり、定理Bの証明が終る //

References

(1) J.S. Birman, Orientation-reversing involutions on 3-manifolds (出版されない)

(2) L. Contreras-Caballero, Periodic transformations in homology 3-spheres and the Rohlin invariant Proc. London Math. Soc. (to appear)

(3) L. Contreras-Caballero, Periodic transformations in homology 3-spheres and the Rohlin invariant, To appear in Proc. on the Conf. of Low-dimensional Topology, Bangor, 1979.

(4) S.E. Cappell and J.L. Shaneson, Branched cyclic coverings, Ann. of Math. Studies 84 (Papers dedicated to the memory of R.H. Fox)(1975), 165–173.

(5) S.E. Cappell and J.L. Shaneson, Invariants of 3-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 81(1975), 559–561.

(6) M. Freedman and R. Kirby, A geometric proof of Rochlin's theorem, Proc. Symp. Pure Math. 32(1977), 85–97.

(7) D. Galewski and R. Stern, Classification of simplicial triangulations of topological manifolds, Ann. of Math.

111 (1980), 1–34.
(8) D. Galewski and R. Stern, Orientation-reversing involutions on homology 3-spheres, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979), 449–451.
(9) A. Hatcher and W. Thurston, Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements, preprint.
(10) H.M. Hilden and J.M. Montesinos, A method of constructing 3-manifolds and its application to the computation of the μ-invariant, Proc. Symp. Pure. Math. 32 (1977), 61–69.
(11) F. Hirzebruch, W.D. Neumann and S.S. Koh, Differentiable Manifolds and Quadratic Forms, Marcel Dekker, Inc., New York.
(12) W.C. Hsiang and P. Pao, The homology 3-spheres with involutions, Proc. Amer. Math. Soc. 75 (1979), 308–310.
(13) W. Jaco and P. Shalen, A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds, Proc. Symp. Pure Math. 32 (1977), 71–84.

(14) K. Johannson, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Springer Lecture Notes 761.
(15) S. J. Kaplan, Constructing framed 4-manifolds with given almost framed boundaries (preprint)
(16) L. H. Kauffman, Branched coverings, open books and knot periodicity, Topology 13 (1974), 143-160.
(17) A. Kawauchi, Three dimensional homology handles and circles, Osaka J. Math. 12 (1975), 565-581.
(18) A. Kawauchi, On 3-manifolds admitting orientation-reversing involutions, J. Math. Soc. Japan (to appear).
(19) A. Kawauchi, Vanishing of the Rochlin invariants of some Z_2-homology 3-spheres, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
(20) Y. Matsumoto, An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin (preprint)

(21) T. Matumoto, Triangulation of manifolds, Proc. Symp. Pure. Math. 32 (1978), 3-7.
(22) J. Milnor, Spin structures on manifolds, L'Enseignement Math. 9 (1963), 198-203.
(23) G.D. Mostow, Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces, Ann. of Math. Studies 78 (1976), Princeton Univ. Press.
(24) R. Robertello, An invariant of knot cobordism, Comm. Pure. Appli. Math. 18 (1965), 543-555.
(25) V.A. Rochlin, New results in the theory of 4-dimensional manifolds (Russian), Dokl. Acad. Nauk. SSR, 84 (1952), 221-224.
(26) L.C. Siebenmann, On vanishing of the Rohlin invariant and non finitely amphicheiral homology 3-spheres, Notes, I.H.E.S. (1979).
(27) D. Sullivan, Travaux de Thurston sur les groupes quasi-Fuchiens et les varietes hyperboliques de dimension 3 fiberees sur S^1 Seminaire BOURBAKI 32e année, 1979/80, n°555.
(28) W. Thurston, The Geometry and Topology of 3-Manifolds, Princeton Univ. (1978/1979) (preprints)

F多様体とその応用

東大理　上　正明

§1－1　F多様体

FreedmanとQuinnは4次元トポロジーにおいて高次元と同様の理論を成立させるために $F^{(4)}$ 多様体の概念を導入した

定義 (i) M^4 が F^4多様体であるとは M が4次元 generalized manifold (ENR homology manifold) でその singular points が 1-LCC にうめこまれた孤立点であるものをいう

(ii) M^5 が F^5多様体であるとは $\mathrm{int}\,M^5$ が top manifold. $\partial M \subset M$ が collared な F^4多様体であるような5次元 generalized manifold with boundary をいう。

*) $X \subset M$ が 1-LCC とは 任意の点 $x \in X$ とその近傍 U に対し, ある近傍 V が存在して $\pi_1(V-X) \to \pi_1(U-X)$ が 0-map になることである。

まずF-多様体が導入された動機に触れておく。一般に C^∞ closed 1-connected 4次元多様体 M に対し $\{\alpha, \beta\} \subset H_2M$: hyperbolic pair (i.e. $\alpha\cdot\alpha = \beta\cdot\beta = 0$, $\alpha\cdot\beta = 1$) を $S^2\times S^2 - \mathrm{int}\,D^4$ の (smooth) embedding で表わせるか、が問題である。4次元において Whitney trick が成立しないことが障害となっているが Casson [Ca] は immersed 2 handle の無限列によって表しうることを、さらに Freedman [F1] は Casson's flexible handle の内部にある compactum F (以下 Freedman's compactum と呼ぶ) を適当にとれば表しうることを示した。(しかも各元 α, β は 1点 p を除いて locally flat。p で locally homotopically unknotted な topological 2-disk で表わされる) $M' = M/F$ (F を1点につぶす) とおくとこれが F^4 多様体になることが容易にわかる。以上の議論を精密化して (normal framing を考慮) 次のことが示された。

<u>Th [F-Q] 1</u> M^4; F^4 多様体. X^4; Poincaré space (ともに 1-connected) $g: M^4 \to X^4$ degree 1 normal map とする。もし $\sigma(M) = \sigma(X)$

(signature) ならばある homotopy 同値 $f: M^4 \simeq X^4$ が存在して $g\ M^4 \to X^4$ と normally bordant になる

注1. M^4 が F^4 多様体ならば $M^4 \times \mathbb{R}$ ($M^4 \times S^1$) は topological manifold になる([C-B-L]の定理) 従って stable normal framing が定義される

注2. F^4 多様体が topological 4-manifold になるかどうかについては何も知られていない Freedman[F1]は任意の homology 3 sphere について それを boundary とする contractible F^4 manifold を構成した。上記の事が正しければ topological Rochlin th の反例が得られる。

注3. 1-connected な F^4 多様体の h-cobordism class は intersection form と singular point における Rochlin invariant で決定される [F-Q]. これ以外には invariant は知られていない。

注4. $M \times \mathbb{R}$ を考えれば smooth category で proper surgery ができることが示されている [F2]

Th[F-Q]2 $(M^5, \partial_0 M\ \partial_1 M)$ を smooth 1 connected h-cobordism とする。このとき次のようなものが存在する; N^4: F^4多様体 $n \in N^4$ 唯一つの singular point, $f_i: \partial_i M \to N$ cell-like map;
$h: M_{f_0} \underset{N}{\cup} M_{f_1} \approx M$ (homeo) で $h|_{\partial_i M} = id$
(但. M_f は f の mapping cylinder.)
上記の〰〰のような構造を mapping cylinder structure と呼ぶことにする。

1-2. Quinn の End theorem

次のような状況を考える

M^n: n dim manifold; X locally compact metric space. $e: M \to X$ continuous map.

[Q-2] において Quinn は与えられた closed subset $C \subset X$ に対し $e^{-1}(C) \subset M$ を改変しながら帰納的に h-cobordism を構成したり (Quinn の Thin-h-cobordism theorem) e に対応する manifold の end の completion が存在するための条件 (absolute or relative end theorem) を与えた。詳細は略すが (§2 参照.) 一例

として M^n,($\partial \ne M$)が1-connected, with 1-LC end ならば($n \geq 6$). Quinnの論法にはobstructionはなく, $M \underset{ph.eq}{\simeq} N \times [0,1] \Rightarrow M \approx N \times [0,1]$, あるいはMのendはつねにcompletionされることが構成的に示される。

我々の目的はQuinnの結果を5次元に拡張し(或いは§1-1における結果を§1-2冒頭の状況に拡張する)若干の応用をのべることにある

§2-1 F^5-thin h-cobordism theorem

<u>Proposition 2.1</u> M^4を1 connected 4 manifold $M \# S^2 \times S^2$においてhyperbolic pair $[S^2 \vee S^2] \subset H_2(M \# S^2 \times S^2)$に対応するFreedman's compactumを$F \times I$, $M' = M \# S^2 \times S^2/F$とおくと MとM'は$F^5$-h-cobordantである.

(Remark) h-cobordismとしてFの近傍の外でproductになるものがとれる。

次にF^5-thin h-cobordism theoremをのべる

Theorem 2.2 X を locally compact metric space. $X \supset C \supset D$ closed subsets $\varepsilon > 0$ positive X が $C^{2\varepsilon}$ において locally 1-connected とする.（$C^{2\varepsilon}$ は C の 2ε-近傍）

このとき次の条件 (*) をみたすような $\delta = \delta(X, C, D, \varepsilon) > 0$ がとれる.

(*) compact 1 connected F^5-manifold $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$ と proper map $e : M \to X$ で $e^{-1}(C^{\varepsilon} - D^{\varepsilon/2})$ は C^{∞} structure をもち M, $\partial_2 M$ は $(\delta, 1)$ connected [1] $(M, \partial_0 M)$ は (δ, h) cobordism over $C^{2\varepsilon}$ [2], product over D^{ε}（e に関して）なるものに対して

ある $e' : M' \longrightarrow X$ で $e = e'$ over $D^{\varepsilon} \cup X - C^{\varepsilon}$ $(M', \partial_0 M')$ は product over C. しかも $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$ と $(M', \partial_0 M', \partial_1 M')$ は h-cobordant なるものが存在する □

さらに別の形として (*) を次の (**) におきかえたものも成立する.（Th 2-3）

(**) compact 1 connected F^5 manifold $(M, \partial_0 M, \partial_1 M)$ と proper map $e : M \longrightarrow X$

で $e^{-1}(C^{\varepsilon}-D^{\varepsilon/2})$ は C^{∞} structureをもち，M, $\partial_i M$ は$(\delta,1)$ connected $(M,\partial_0 M)$ は(δ,h) cobordism over $C^{2\varepsilon}$ かつ D^{ε}上 mapping cylinder structure (of diameter $<\delta$) ~~持~~もつとき，このstructureは C上 diameter $<\varepsilon$の mapping cylinder structureに拡張される。

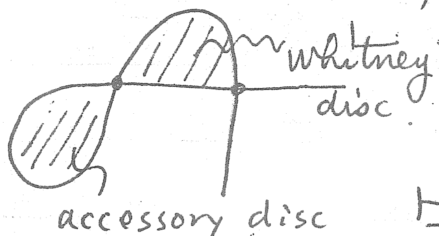
1) Mが <u>$(\delta, 1)$ connected over C</u> とは $S^1 \xrightarrow{f} e^{-1}(C)$ なるmapで $e\circ f \simeq 0$ in C なるとき fのδ-lift $D^2 \to e^{-1}(C^{\delta})$が存在することである。

2) Mが <u>(δ, h) cobordism over C</u> とは $e^{-1}(C)$が $\partial_0 M\cap e^{-1}(C)$, $\partial_1 M\cap e^{-1}(C)$ へそれぞれ δ-homotopyによってdeformすることである。

(定理の主張が高次元のQuinnの定理より複雑になるのはやむを得ない。)

Th 2.2 の証明は高次元におけるQuinnの手法，Proposition 2.1 及び次の事実に依って行なわれる。(Th 2.3はさらに <u>Th [F.Q] 2</u> の手法にも依存している)

<u>Fact [F1][F-Q]</u> hyperbolic pair $[a, b] \subset H_2(M)$ に対応する Freedman's compactum は $[a, b]$ を表わす framed immersion $S^2 \vee S^2 \xrightarrow{g} M$ から出発して $g(S^2 \vee S^2) \simeq S^2 \vee S^2 \vee^k S^1$ の Whitney circle に対して (locally homotopically unknotted な) Whitney disc 及び accessory disc を貼って得られる。しかもそれらの disc は <u>Casson's Hierarchy</u> $\mathcal{H} = \{ f_0(D^2), \underset{i}{\cup} f_1^i(D^2), \cup f_2^i(D^2), \cup f_3^i(D^2) \}$ を構成してその近傍にとることができる。(詳しくは [F1][F-Q][Si]).



<u>Corollary 2-4</u> $(W, \partial_0 W, \partial_1 W)$ を 1-connected F^5-h cobordism とする。このとき W は mapping cylinder structure をもち、さらに、ある product F^5-h cobordism と h-cobordant である。

これは Th[F-Q]2 の拡張を与えている

Corollary 2.4を示すために次のLemmaが必要である

<u>Lemma</u> 2.5 $(W, \partial_0 W, \partial_1 W)$ as in Cor 2.4

に対して適当な ~~proper~~ arc $k \subset W$ を

抜くと $(W-k, \partial_0 W-k, \partial_1 W-k)$ は smooth proper

h cobordism. さらに任意の $\delta>0$, $D\subset[0,\infty)$

に対して、適当な proper map $e: W-k \to [0,\infty)$ をと

ると $W-k$ は (δ, h)-cobordism over D である。

§ 2-2 Structure of $X\times\mathbb{R}$

[F-Q] においては Browder-Livesay-Levine の定理の F^5 version が示されている

ここでそのある種の local-version を与える

<u>Th 2.6</u> X を 1 connected closed homology 4-manifold で nonmanifold set $N(X)$ が isolated であるとする。

さらに $X-N(X)$ が smooth 1 connected manifold で $X\times\mathbb{R}$ が topological manifold であるとする(*)

このとき $N(X)$ の任意の compact な近傍 N に対して

次のようなものが存在する。

M^4: $\cong \overline{X-N}\bigcup_{\partial N=\partial Q} Q$ なる形の F^4

多様体。 $g: X\times\mathbb{R}\cong M\times\mathbb{R}$ homeo

で $g|\overline{X-N}\times\mathbb{R}\approx(f^{-1}|\overline{X-N})\times id_{\mathbb{R}}$

注1. (*)の条件は実は不要

$N(x)$が0-dimensional setでも同様

§3 Resolution theoremへの応用

(compact) metric space X (次元$=n$)について n次元topological manifold Mとcell-like map $f: M\to X$のpairを<u>Xのresolution</u>と呼ぶ $n\geq 5$においては既にQuinn [Q-3]によりすべてのn次元homology manifoldがresolutionをもつことが知られている。 $n=4$の場合にF^4多様体によるresolutionを考えるとき次の(弱い形の)定理が示される

<u>Th 3.1</u> XをTh 2.6におけるhomology 4-manifoldとする. このとき次のようなものが存在する

$$M_0\xrightarrow{f_0}M_1\xleftarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3\xleftarrow{f_4}M_4=X$$

ここで M_0: F^4多様体

M_i 4次元homology manifold

f_i: cell-like map.

注。X が polyhedral な homology 4 manifold ならば §1-1 注2における Freedman's contractible F^4 manifold によって容易に F^4 多様体による resolution が得られる。

注. 条件をゆるめたときには. F^4-多様体による ε-resolution: (つまり map $f: M \to X$ であって $\exists g: X \to M$ に対し $fg \simeq 1_X$ (ε homotopic) かつ $gf \simeq 1_M$ by a homotopy of diameter $< \varepsilon$ when composed with f.) の存在が. Quinn の Approximate end theorem の F-version を示すことによってわかるがそれ以上のことは不明である.

References

[C-B-L] J.W.Cannon, J.L.Bryant, R.C.Lacher; "the structure of generalized manifolds having nonmanifold stes of trivial dimension" Geometric Topology, Academic Press (1979)

[F-1] M.Freedman, A fake $S^3\times R$, Ann.Math 110 (1979)

[F-2] M.Freedman, A converse to the (Milnor-Kervaire Theorem)×R, Pacific Journal of Math. 82 (1979)

[F-Q] M.freedman and F.Quinn, A slightly singular 4-manifolds, to appear in Topology.

[Q-1] F.Quinn, The stable topology of 4-manifold to appear.

[Q-2] F.Quinn, Ends of Maps I, Ann.Math 110 -2 (1979)

[Q-3] F.Quinn, Resolutions of homology manifolds (An informal Sketch)

[Si] L.Siebenmann, Amorces de la chirurgie en dimension quatre un S^3 R exotique, Seminar Bourbaki Expose 536, 1978/79.

ベクトル場の作るLie環のコホモロジー

埼玉大学（教養部）　柴田勝征

表題のテーマについて、Haefliger [8] が大変簡にして要を得た紹介をしているので、以下 §1〜§3 は [8] に従って述べる。

§1. 定義と例

M をパラコンパクトな C^∞-多様体とし、$\mathcal{L}_M$ を M 上の C^∞-ベクトル場全体の集合とすると、$\mathcal{L}_M$ はブラケット積 $[u,v]=u(v)-v(u)$ に関して Lie 環をなすが、さらに C^∞-位相（任意のコンパクト集合で、すべての階数の偏導関数が一様収束する時に収束と定義する）によって、位相 Lie 環となる。

$\mathcal{L}_M$ 上の k 次交代線型写像 $f: \mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M \times \cdots \times \mathcal{L}_M \to \mathbb{R}$ で、上の位相に関して連続なもの全体の集合を $C^k(\mathcal{L}_M)$ で表わし、$C^*(\mathcal{L}_M)=\bigoplus_{k\geq 0} C^k(\mathcal{L}_M)$ に微分 d を

$$(df)(v_1,\cdots,v_{k+1})=\sum_{i<j}(-1)^{i+j} f([v_i,v_j],v_1,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,\hat{v}_j,\cdots v_{k+1})$$

と定義する。$C^*(\mathcal{L}_M)$ は DGA (differential graded algebra) となり、これを Gelfand-Fuks コチェイン、そのコホモロジー

$H^*(\mathcal{L}_M)$ を Gelfand-Fuks コホモロジーと呼ぶ。(Gelfand - Fuchs [2])。

また、M に Lie 群 G が効果的に作用している場合は、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $\mathcal{L}_M$ の部分 Lie 環とみなせるが、$C^*(\mathcal{L}_M)$ のうちで G- Basic な(即ち、G-不変で、$\mathfrak{g}$ の元を含む積の上でゼロとなる)もの全体の作る部分環を $C^*(\mathcal{L}_M;G)$ で表わす。そのコホモロジーを $H^*(\mathcal{L}_M;G)$ で表わす。

[例 1-1] (Gelfand - Fuchs [1]) $M=S^1$ のとき、

$$H^*(\mathcal{L}_{S^1}) = R[u]\otimes\Lambda(v)\ ;\ \deg u = 2,\ \deg v = 3$$

但し、u, v は下のコサイクルで代表される:

$$u\left(f(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta},\ g(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \int_{S^1}\begin{vmatrix} f' & f'' \\ g' & g'' \end{vmatrix}\, d\theta$$

$$v\left(f(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta},\ g(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta},\ h(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \int_{S^1}\begin{vmatrix} f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ h & h' & h'' \end{vmatrix}\, d\theta$$

[例 1-2] (Haefliger [8]) $M=S^1$ に $G=SO_2$ が回転として作用する時、

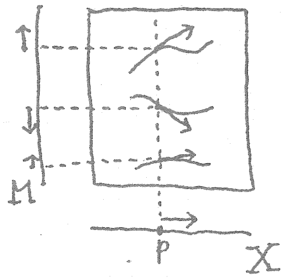
$$H^*(\mathcal{L}_{S^1};SO_2) = R[u,e]/(u\cdot e)\ ;\ \deg u = \deg e = 2$$

但し、u は上の通りで、e は Euler 類(定数倍を除いて)に対応する元で、下のコサイクルで代表される。

$$e\left(f(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta},\ g(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \int_{S^1}\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}\, d\theta\ .$$

§2. 葉層構造との関係

C^∞-多様体XとMとの直積$X\times M$を、Mをファイバーとする自明なファイバー束と見る。この上に、ファイバーMに横断的な、葉の次元がXの次元に等しい葉層構造$\mathcal{F}$が与えられると、Xの任意の点pにおける任意の接ベクトルは、$\{p\}\times M$の任意の点における葉の接ベクトルに一意的に持ち上げられ、それらをM方向に射影するとM上のベクトル場が得られる。この対応によって、自然なDGA写像



$$\chi_{\mathcal{F}}: C^*(\mathcal{L}_M) \to \Omega^*(X)$$

が得られる。但し、$\Omega^*(X)$はXのde Rham環(微分形式の環)である。コホモロジーを取る事により、自然な環準同型 $\chi_{\mathcal{F}}: H^*(\mathcal{L}_M) \longrightarrow H^*(X;\mathbb{R})$ が得られる。(Haefliger [6]にていねいな解説がある。)

自明でない束(底$=X$, ファイバー$=M$, 構造群$=G$)も同様に、$\chi_{\mathcal{F}}: C^*(\mathcal{L}_M;G) \to \Omega^*(X)$ から自然な環準同型

$$\chi_{\mathcal{F}}: H^*(\mathcal{L}_M;G) \to H^*(X;\mathbb{R})$$

を得る。$H^*(\mathcal{L}_M)$または$H^*(\mathcal{L}_M;G)$のゼロでない$\overbrace{\text{元}}^{u}$に対して、$\chi_{\mathcal{F}}(u)\neq 0$となる$X$と$\mathcal{F}$とが存在するかが問題となる。

§3. 形式的ベクトル場と対角複体

Mの1点をxとし、M上のベクトル場のxにおける無限ジェットの作るLie環$\mathcal{L}_M^x$に商位相を入れると、R^nの形式的ベクトル場の作る位相Lie環

$$\mathfrak{a}_n = \{ \textstyle\sum_{i=1}^n v_i(x_1,\cdots,x_n)\partial/\partial x_i \,;\, v_i(x_1,\cdots,x_n)\in R[[x_1,\cdots,x_n]] \}$$

と同型である。$H^*(\mathfrak{a}_n)$ $(\cong H^*(\mathcal{L}_M^x))$を計算するために、次のDGAを定義する。

$$\hat{W}_n = \Lambda(h_1,\cdots,h_n)\otimes(R[c_1,\cdots,c_n]/(\deg > 2n))$$

$$\deg h_i = 2i-1,\ \deg c_i = 2i,\ dh_i = c_i,\ dc_i = 0 \text{。}$$

[定理3.1] (Gelfand-Fuchs [3])

$\underline{H^*(\mathfrak{a}_n) \cong H^*(\hat{W}_n)}$

上の同型と、$H^*(\hat{W}_n)$を計算する事により、

(1) $H^i(\mathfrak{a}_n)=0$ $(1\leqq i\leqq 2n$ または $i>n^2+2n)$、

(2) $H^*(\mathfrak{a}_n)$の積は自明 $(x\cdot y=0$ if $\deg x>0, \deg y>0)$

などがわかる。また、$\dim_R H^*(\hat{W}_n)<\infty$と、適当なスペクトル列の構成により、次の定理が得られた。

[定理3.2] (Gelfand-Fuchs [2]) <u>Mが</u> $\dim_R H^*(M;R) < \infty$ <u>を満たすなら</u>、<u>すべての</u> $i\geqq 0$ <u>に対して</u> $\dim_R H^i(\mathcal{L}_M) < \infty$ <u>が成り立つ</u>。

さて、定理3.1により「局所的コホモロジー」$H^*(\mathcal{L}_M^x)$がわかったが、ここから「大域的コホモロジー」$H^*(\mathcal{L}_M)$へ行く中間的段階として、次の「対角複体」を考える。Mの de Rham 環 $\Omega^*(M)$に値を持つ、$\mathcal{L}_M$上の多重線型、交代的な連続写像 $f: \mathcal{L}_M \times \cdots \times \mathcal{L}_M \longrightarrow \Omega^*(M)$ 全体の作る鎖複体 $C^*(\mathcal{L}_M, \Omega^*(M))$ の部分複体として、f の値 $f(v_1, \cdots, v_k) \in \Omega^*(M)$ がMの各点xにおいて、$v_1, \cdots, v_k$ のxにおける有限ジェットにしか依らぬもの全体を集めて $C_\Delta^*(\mathcal{L}_M, \Omega^*(M))$ と書き、Mの「対角複体」と呼ぶ。

[定理3.3] (Guillmin, Losik) コホモロジーの同型を induce する DGA 写像

$$\Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n \longrightarrow C_\Delta^*(\mathcal{L}_M, \Omega^*(M))$$

が存在する。但し左辺は、テンソル積 $\Omega^*(M) \otimes \hat{W}_n$ に微分dを、$d(f \otimes 1) = d(f) \otimes 1$, $d(1 \otimes c_i) = 0$,

$d(1 \otimes h_i) = 1 \otimes c_i - \tilde{p}_{i/2} \otimes 1$ と定義した DGA であって、$\tilde{p}_{i/2}$ はiが奇数なら$=0$、iが偶数の時はMの$i/2$次のポントリャーギン類を代表する微分係式である。(代表のえらび方を変えても DGA として同型となる。)

§4. ポストニコフ分解

一般に、DGA写像 (differential graded algebra homo.) $h: A \to B$ がコホモロジーの同型を導くとき、hを QISO (quasi-isomorphism) と呼ぶことにする。また、DGA 写像 $g: C \to D$ の<u>ポストニコフ分解</u>とは、DGA 写像

$$g \otimes \psi : C \underset{\tau}{\otimes} S_*(V^*) \longrightarrow D$$

であって、ここに、① V^*は或る graded ベクトル空間で、簡単のため、$V^i = 0$ $(i \leq 1)$ という条件を仮定する。② $S_*(V^*)$ は V^*上の有階自由対称代数（偶数次元基上の多項式環 ⊗ 奇数次元基上の交代代数）。③ $S_*(V^*)$上の微分の像は常に decomposable 。④ $g \otimes \psi$ は QISO。

特に g が D の unit 写像 $1_R : R \hookrightarrow D$ のときは、g のポストニコフ分解の事を特に、D のポストニコフ分解と呼ぶ。

さて、$H^*(\hat{W}_n)$ を、$d \equiv 0$ である DGA とみなすと、Vey の結果により、$\psi : H^*(\hat{W}_n) \longrightarrow \hat{W}_n$ という QISO が存在する。従って、$H^*(\hat{W}_n)$ のポストニコフ分解がわかれば、$\hat{W}_n$ のポストニコフ分解がわかる事になる。ところが $H^*(\hat{W}_n)$ の積が自明である事から、次の定理により $H^*(\hat{W}_n)$ のポストニコフ分解が求められる。

[定理 4.1]（Haefliger [7] にていねいな解説がある。）

V_* を $V_i=0$ $(i \leqq 0)$ である有階ベクトル空間とし、$L=L(V_*)$ を V_* 上の自由生成有階 Lie 環とする。また ΣV_*, ΣL を V_*、L の suspension $((\Sigma V_*)_i = V_{i-1})$ とすると、自然な inclusion $V_* \hookrightarrow L$ は下の QISO を induce する：

$$\gamma : C^*(L) = S_*(\Sigma L)' \longrightarrow (\mathbb{R} \oplus \Sigma V_*)'$$

但し、$(\ )'$ は dual space を表わし、$\gamma : C^i(L) \to 0$ $(i \geqq 2)$、$\gamma : C^1(L) = (\Sigma L)' \to (\Sigma V_*)'$、$\gamma = id : C^0(L) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であり、右辺は自明な積と $d \equiv 0$ である微分を持つ DGA とみなしている。

簡単のため、$V_n = \Sigma L(\Sigma^{-1} \tilde{H}^*(\hat{W}_n)')$ とおくと、上の定理により、$\hat{W}_n$ のポストニコフ分解は $S_*(V_n') \cong S^*(V_n)$ という形をしている事がわかった。但し、$S^*(V_n)$ は、V_n 上の多重線型な交代的写像 $f : V_n \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$ の作る多元環である。V_n は各 grading で有限次元ベクトル空間だから、f が多重線型なら、各 grading で連続となっている。

次に、$P_n = \mathbb{R}[p_1, p_2, \cdots, p_{[n/2]}]$; $\deg p_i = 4i$ という多項式環（普遍ポントリャーギン類環）を考え、さらにテンソル積 $P_n \otimes \hat{W}_n$ の上に微分 d を

$$d(p_i)=0,\quad d(c_i)=0,\quad d(h_i)=c_i-p_{i/2}$$

と定義する。(i が奇数の時、$p_{i/2}=0$ と約束する。)この複体を $P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n$ と書き、自然な inclusion $P_n\hookrightarrow P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n$ のポストニコフ分解を求めたい。一般的なポストニコフ分解の存在と一意性の定理から、ともかくポストニコフ分解 $1\otimes\psi: P_n\otimes S_*(V)\longrightarrow P_n\otimes\hat{W}_n$ は存在する。そして簡単なスペクトル列の議論から、ポストニコフ分解の"ファイバー" $S_*(V)$ は、inclusion map の"ファイバー" $\hat{W}_n$ のポストニコフ分解 $S^*(V_n)$ と同型である事もわかる。単純なホモロジー代数の問題だから、すぐ出来そうに見えるが、実際やってみると極めて複雑である。

[問題4.2] (Haefliger [4])

$P_n\hookrightarrow P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n$ のポストニコフ分解 $1\otimes\psi: P_n\otimes S^*(V_n)\longrightarrow P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n$ において、$P_n\otimes S^*(V_n)$ の differential d と DGA 写像 ψ を explicit に決めよ。

(注) $GL^\delta(n;\mathbb{R})$ を、$GL(n;\mathbb{R})$ に離散位相を入れた空間とし、F_n を $BGL^\delta(n;\mathbb{R})\xrightarrow{\text{"id"}}BGL(n;\mathbb{R})$ のホモトピー・ファイバーとすると、次の可換図式がある:

$$\begin{array}{ccccc}
P_n=H^*(P_n:d\equiv 0) & \longrightarrow & H^*(P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n) & \longrightarrow & H^*(\hat{W}_n)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
H^*(BGL(n;\mathbb{R});\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^*(BGL^\delta(n;\mathbb{R});\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^*(F_n;\mathbb{R})。
\end{array}$$

我々は、問題4.2を完全には解決できていないので、次のような事を考える。

$\pi: B \to A$ および $\pi\otimes\psi_1 : B\otimes S_*(U_1^*) \to A$

をDGA写像とする時、$\pi\otimes\psi_1$ が π の部分的ポストニコフ分解である、とは、① U_1^* が $U_1^i=0$ $(i\leqq 1)$ をみたす graded ベクトル空間で、② $S_*(U_1^*)$ は U_1^* 上の有階自由対称代数、③ $S_*(U_1^*)$ の元の、d による像は常に decomposable であって、④ $\pi\otimes\psi_1$ のポストニコフ分解

$$(\pi\otimes\psi_1)\otimes\psi_2 : (B\otimes S_*(U_1^*))\otimes S_*(U_2) \longrightarrow A$$

が存在して、それが π のポストニコフ分解にもなっている事を言う。

一般に π と $\pi\otimes\psi_1$ が与えられた場合に、条件④を確かめるのは極めてむずかしいであろうが、我々の場合の様に π が代数的 fibration $B \hookrightarrow B\otimes C$ というタイプの場合は簡単である。

我々は、問題4.2の部分的解決として、かなり大きな部分的ポストニコフ分解 $P_n\otimes S_*(U_1^*) \to P_n\otimes\hat{W}_n$ を得たのであるが、explicit な記述は複雑になるので省略する。この部分的解決により、次頁に述べる定理4.3が発見された。

ポストニコフ分解 $1\otimes\psi : P_n\otimes S_*(V_n') \to P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n$ において、左辺の P_nー多元環として $\overset{(自由)}{の}$ 生成元系 $\{x_\alpha ; \alpha\in A\}$ をひとつ固定する。x_α が almost s-parallelizable な生成元であるとは、x_α が他の生成元 x_β の微分の像の中に、

$$d(x_\beta) = a\cdot p_\omega x_\alpha + \cdots \qquad (a\neq 0\in R,\ p_\omega\in P_n)$$

と現われるのは、$\deg(p_\omega) = 4\cdot\deg(\omega) \geq n$ の場合に限る事を言う。上の条件不等式が $\deg(p_\omega) > n$ と置き換えられるような x_α は、s-parallelizable な生成元と呼ぶ。

[定理4.3] $P_n \hookrightarrow P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n$ のポストニコフ分解 $1\otimes\psi :$ $P_n\otimes S_*(V_n') \to P_n\underset{\tau}{\otimes}\hat{W}_n$ の左辺の P_nー多元環として $\overset{自由}{の}$ 生成元系 $\{x_\alpha ; \alpha\in A\}$ をうまくえらぶと、その中に無限個の

$\begin{cases} \text{s-parallelizable な生成元が存在する。} & (n\not\equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき}) \\ \text{almost s-parallelizable な生成元が存在する。} & (n\equiv 0 \bmod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$

この定理を使って、$H^*(\mathcal{L}_M)$ の無限生成性の定理（定理5.4）が証明された。

（追記）上の定理4.3では、$n\geq 2$ を仮定する。

§5. Haefliger のモデル

一般に、DGA Aが、DGA Bのモデルであるとは、AとBを結ぶ有限個のQISO (quasi-isomorphism)

$$A \to A_1 \leftarrow A_2 \to A_3 \leftarrow \cdots \to A_{k-1} \leftarrow A_k \to B$$

が存在する事を言う。Haefliger [5]は、(1) $H^*(\hat{W}_n)$、(2) $\Omega^*(M)$、(3) Mのポントリャーギン類、を用いて $C^*(\mathcal{L}_M)$ のモデルを構成した。以下に、それを解説する。

まず $\Omega^*(M)$ の中で、Mのi次ポントリャーギン類を代表する微分形式$\hat{p}_i$をえらび、写像 $P_n \longrightarrow \Omega^*(M)$ ($p_i \mapsto \hat{p}_i$) によって $\Omega^*(M)$ を P_n-多元環と考えると、定理3.3の Guillemin-Losik モデル $\Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n$ は、$\Omega^*(M) \underset{P_n}{\otimes} (P_n \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n)$ と表わされる事は定義から明らかである。従って $\Omega^*(M) \hookrightarrow \Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n$ のポストニコフ分解は、$P_n \hookrightarrow P_n \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n$ のポストニコフ分解を用いて

$$1 \underset{P_n}{\otimes} (1 \otimes \psi) : \Omega^*(M) \underset{P_n}{\otimes} (P_n \underset{\tau}{\otimes} S^*(V_n)) \longrightarrow \Omega^*(M) \underset{P_n}{\otimes} (P_n \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n)$$

と表わされる。Guillemin-Losik の QISO と、自然な inclusion を結合すると、下の $\Omega^*(M)$-微分多元環の写像を得る:

$$\Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} S^*(V_n) \to \Omega^*(M) \underset{\tau}{\otimes} \hat{W}_n \to C^*_\Delta(\mathcal{L}_M, \Omega^*(M)) \subset C^*(\mathcal{L}_M, \Omega^*(M))。$$

これの $\Omega^*(M)$-dual を取ると、$\Omega^*(M)$-微分 coalgebra の写像

$$\varphi'_M : \Omega^*(M)\otimes C_*(\mathcal{L}_M) \longrightarrow S_*^{\Omega^*(M)}(\Omega^*(M)\otimes V_n)$$

が得られる。ここに右辺は、$\Omega^*(M)$-加群 $\Omega^*(M)\otimes V_n$ の $\Omega^*(M)$ 上での有階対称積 ($\cong \Omega^*(M)\underset{c}{\otimes} S_*(V_n)$) を表わす。$\varphi'_M$ に、自然な inclusion を結合して $\psi_M : C_*(\mathcal{L}_M) \hookrightarrow \Omega^*(M)\otimes C_*(\mathcal{L}_M) \to S_*^{\Omega^*(M)}(\Omega^*(M)\otimes V_n)$ を得るが、Quillen の DG-coalgebra の一般論により、$\mathbb{R}$-coalgebra $S_*(\Omega^*(M)\otimes V_n)$ 上の differential と DG-coalgebra 写像 Ψ_M で、下の図式を可換にするものが唯ひとつ存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & C_*(\mathcal{L}_M) \arrow[dl, "\Psi_M"'] \arrow[dr, "\psi_M"] & \\
S_*(\Omega^*(M)\otimes V_n) \arrow[rr, "\pi"] & & S_*^{\Omega^*(M)}(\Omega^*(M)\otimes V_n)
\end{tikzcd}$$
。

[定理5.1] (Haefliger [5]) 上の DG-coalgebra 写像 Ψ_M は連続であり、Ψ_M の continuous dual

$$\Phi_M : S^*(\Omega^*(M)\otimes V_n) \longrightarrow C^*(\mathcal{L}_M)$$

は QISO である。

QISO $\alpha : A^* \to \Omega^*(M)$ があって、$A^i = 0$ ($i<0$, $i \geqq 2n$) のときは、$\alpha\otimes 1 : A^*\underset{c}{\otimes} S^*(V_n) \to \Omega^*(M)\underset{c}{\otimes} S^*(V_n)$ について、上と同様に A^*- および $\Omega^*(M)$-dual をとり、Quillen の構成をおこない、さらに continuous dual を取ると、DGA 写像 $\Lambda : S^*(\Omega^*(M)\otimes V_n) \to S^*(A^*\otimes V_n)$ を得

る。

[定理5.2] (Haefliger [5])

$$\Lambda:\ S^*(\Omega^*(M)\otimes V_n) \longrightarrow S^*(A^*\otimes V_n)$$

はQISOである。

特に、$S(M)$をMの特異複体、$S^\infty(M)$をC^∞-特異複体、$\Omega^*_Q(S(M))$を複体$S(M)$上の有理係数多項式を係数とするde Rham環とする時、QISOの列

$$\Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(S^\infty(M)) \longleftarrow \Omega^*_Q(S(M))\otimes R$$

の中辺、右辺を degree $> n$ および degree $> n+1$ でうまくtruncateし、上の定理の証明方法を適用すれば、Novikovの有理(実)ポントリャーギン類の位相不変性から次の系を得る。

[系5.3] (Haefliger [5] 以後、well-known) Gelfand-Fuchsコホモロジー$H^*(\mathcal{L}_M)$は位相不変量である。

また、$\Omega^*(M)$が有限次元のモデル

$$A^* \to A_1^* \leftarrow A_2^* \to \cdots \leftarrow A_k^* \to \Omega^*(M)\ ;\ \dim_R A^* < \infty$$

を持てば、定理5.1と5.2により、$H^*(\mathcal{L}_M)$の計算が、有限タイプ(各grading で $\dim_R < \infty$)のDGAである$S^*(A^*\otimes V_n)$のコホモロジーの計算に帰着されるから、解析学を離れて、単純なホモロジー代数の機械的計算に還

元される。「Mがコンパクトであれば$\Omega^*(M)$は有限次元のモデルを持つ」と予想されているが、証明も反例も知られていない。しかし、① $H^1(M;\mathbb{R})=0$ の場合、または② Mが Kähler の場合、または③ Mが Lie 群か、その対称 homogeneous 空間の場合、などには上の予想は正しい。我々は、具体的計算により、次の結果を得た。

[定理5.4] $\Omega^*(M)$が有限次元のモデルを持つとき、次の2条件は同値である：(1) $H^*(\mathcal{L}_M)$は環として無限生成，
(2) $\dim_{\mathbb{R}} M \geq 2$ かつ $\bigoplus_{i\geq 1} H^i(M;\mathbb{R}) \neq 0$。

(証明) (1)$\Rightarrow$(2)：例1-1 および定理5.1, 5.2 および、
$\dim_{\mathbb{R}} H^*(S^*(V_n)) = \dim_{\mathbb{R}} H^*(\hat{W}_n) < \infty$ から明らか。

(2)$\Rightarrow$(1)； $x \neq 0$, $x \in H^i(M;\mathbb{R})$ $(i\geq 1)$ なる元 x の存在と、定理4.3を用いて、explicit に無限個の生成元を構成する。詳細は略す。

(注) 上の定理5.4は IMU Congress (1970. Nice) における Gelfand の予想「Mがコンパクト、向きづけ可能ならば、$H^*(\mathcal{L}_M)$は常に、環として有限生成であろう」の、ほぼ全否定になっている。

── 引 用 文 献 ──

[1] Gelfand-Fuchs : The cohomology of the Lie algebra of vector fields on the circle, Funct. Anal. 3 (1968), 92-93

[2] 〃 - 〃 : The cohomology of the Lie algebra of tangent vector fields… (I), Funct. Anal. (1969) 32-52

[3] 〃 - 〃 : The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields, Izvestia Ak. SSSR 34 (1970) 322-337

[4] Haefliger : Sur la cohomologie de Gelfand-Fuchs, Springer Lecture Note Math. 484 (1975), 121-152.

[5] 〃 : Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs, Ann. Sci. E.N.S. 9 (1976), 503-532.

[6] 〃 : Cohomology of Lie algebras and foliations, Springer Lecture Note 652 (1978), 1-12.

[7] 〃 : Whitehead products and differential forms, Springer Lecture Note 652 (1978), 13-24.

[8] 〃 : On the Gelfand-Fuks cohomology, L'Enseignement math., 24 (1978) 143-160.

コンパクト変換群論におけるいくつかの話題
対称度を中心にして

東大 理　服部晶夫

§0 序論

MをコンパクトC^∞多様体，Gをコンパクトリー群とし，GのMへのC^∞作用が与えられているとする。すなわち，C^∞写像

$$\phi : G \times M \longrightarrow M$$

で，$\phi(g, x) = gx$ と通例のように書いたとき，

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x \ , \quad 1x = x$$

を満たしているものが与えられているとする。MのC^∞自己同型写像の全体の群をDiff(M)と書くと，Gの作用が効果的である場合は，Gは自然にDiff(M)の部分群と考えられる。しかも，Diff(M)にコンパクト開位相をいれると，Gにそれから誘導される位相はGのリー群としての位相と一致する。

逆に，Diff(M)のコンパクト部分群は必然的にリー群となり，しかも，自然に定まる作用

$$G \times M \longrightarrow M$$

はC^∞となることが知られている[M-Z]。

このように，Mのコンパクトリー変換群を調べることと，Diff(M)のコンパクト部分群とその作用を調べることとは同義である。Diff(M)の中で，コンパクト群全部の和集合をとっても"薄い"集合にしかならず，そこに含まれる元gはDiff(M)の中では特殊な挙動を示すものと考えられが，一方，多様体Mの固有な性質がコンパクト群の作用に敏感に反映しているともみることができ，その間の関係を明らかにすることは興味ある研究の対象である。

このような観点からみると，Mを与えたとき，Diff(M)の部分群としてどのようなコンパクトリー群が含まれるか，また，一つのコンパクト群GのDiff(M)への埋め込みには共役を除いてどの程度の可能性があるかという問題は基本的であろう。しかし，これに対する一般的な解答を期待するのは無理のようである。それに関連して，Diff(M)に含まれるコンパクト部分群Gの次元$\dim G$の上限を$N(M)$と記し，W.-Y. Hsiang [Hs]に従って，Mの対称度と呼ぶことにすると，$N(M)$を決定すること，

あるいは $N(M)$ に対するよい上界を求めることは，前の問題に較べればはるかに近づき易いものである。同様の問題は，Diff(M) に含まれるトーラスの次元の上限に対しても考えられ，これは対称度の場合よりも易しい問題であるかもしれない。

今回の講演では，上記の問題に関連する事項を中心として，コンパクト変換群に関するいくつかの結果を，新旧とりまぜ，紹介することを目標とする。§1では一般の多様体に対する結果，§2では $K(\pi,1)$ 多様体Mの場合，§3ではMがエキゾチック球面やホモトピー複素射影空間など特別の形の多様体である場合について述べる。

本論にはいる前に，コンパクト変換群に関する基本的事項を復習しておく。詳しくは [Br] または [U] を見られたい。

まず，Mにリーマン計量を与えると，その計量を保つ C^∞ 変換全体 Isom(M) はコンパクトリー群になることに注意しよう [Ko]。ここで，Mがコンパクトであることが本質的にきいている。いま，コンパクト群 $G \subset$ Diff(M) が与えられたとする。Mのリーマン計量を任意

にとり，各点でそれをGにより平均化することにより，G不変なリーマン計量を作ることができ，その計量に関するIsom(M)をとると，Gはコンパクト群Isom(M)の部分群になる。したがって，すべてのコンパクト群G⊂Diff(M)を求めることは，すべてのリーマン計量に対してIsom(M)を求めることに帰着するのである。今後，一つのコンパクト変換群Gを固定して考えるときは，上のようなG不変リーマン計量を同時に考えることが多い。

一般に，群作用

$$G \times M \longrightarrow M$$

が与えられたとき，$x \in M$ に対し

$$Gx = \{gx \ ; \ g \in G\}$$

$$G_x = \{g \in G \ ; \ gx = x\}$$

とおき，それぞれ，x を通るG軌道 (orbit)，x の等方部分群 (isotropy subgroup) という。明らかに，連続な全単射

$$\rho : G/G_x \longrightarrow Gx$$

があり，Gがコンパクトならば Gx はMの閉部分多様体で，ρ は可微分同相写像となる。以下，Gがコンパクトなときは Gx を G/G_x と同一視する。

Gの作用の微分をとることによりGは接バンドルTMに作用する。G不変リーマン計量を定めておいて，MのG不変部分多様体Xに対し

$$TM|X = TX \oplus N$$

と，Xの接バンドルTXと法バンドルNとの和に直交分解すると，NはG不変である。Nの十分小さい半径の円球バンドルN_εをとると，

$$\exp : N_\varepsilon \longrightarrow M$$

はXのG不変な開管状近傍の上へのG同変な可微分同相となる。

なお，$x \in M$に対し，xでの接空間T_xMはG_x不変である。すなわち，T_xMはG_xの表現空間になる。この表現を等方表現（isotropy representation）という。

群作用においてもっとも重要なものは，その軌道の配列状況である。Gがコンパクトであるときは，つぎの定理により，この状況は非常に簡明である。

<u>可微分断面定理</u>（<u>Differentiable slice theorem</u>）

$x \in M$に対し，T_xMを

$$T_xM = T_xGx \oplus N_x$$

と直交分解する。G_x の等方表現により N_x は不変である。そのとき，軌道 Gx の法バンドル N は，G_x 主バンドル $G \longrightarrow G/G_x$ の随伴ベクトルバンドル

$$G \underset{G_x}{\times} N_x$$

と同値である。∎

N_x において，十分小さい半径 ε の開球 $N_{x,\varepsilon}$ をとり，$S_x = \exp(N_{x,\varepsilon})$ とおくと，上の定理により

$$GS_x = \{gy ;\ g \in G,\ y \in S_x\} = \bigcup_{y \in S_x} Gy$$

は Gx の G 不変開管状近傍で，S_x は G_x 不変であり，しかも

$$gS_x \cap S_x \neq \phi \implies g \in G_x.$$

が成り立つ。このような S_x を軌道 Gx の断面(slice)という（実は，かなり一般の空間上でのコンパクト群の作用に対しても断面が存在することが知られている)。簡単にいうと，Gx のまわりには他の軌道 Gy が整然と並んでいるのだが，注意すべきことは，Gx の近くのどの点に対しても，その点の等方部分群は G_x の部分群と共役になることである。

一般に，Gの部分群Hの共役類を(H)と書き，M上のG作用に対し

$$\{(G_x)\ ;\ x\in M\}$$

を考えよう。この元（すなわち(G_x)の形の共役類）をその作用の軌道型（orbit type）という。

上記の定理からつぎの二つの結果が導かれる。

軌道型の有限性定理　コンパクト多様体M上のコンパクト群の作用に対し，軌道型は有限個しかない。

主軌道型の存在定理　コンパクト連結多様体M上のコンパクト群Gの作用に対して，

$$(G_{x_0})\leqq(G_x)\qquad {}^{\forall}x\in M$$

となる軌道型(G_{x_0})が存在する。この軌道型を主軌道型（principal orbit type）という。ここで，$(H)\leqq(H')$は

$$\exists g\in G,\quad gHg^{-1}\subset H'$$

を意味する。

(H)を一つの軌道型とし，

$$M_{(H)}=\{x\in M\ ;\ (G_x)=(H)\}$$

とおく。やはり先の定理を用いることにより，$M_{(H)}$は

Mの部分多様体で

$$\overline{M_{(H)}} = \bigcup_{(H) \leqq (H')} M_{(H')}$$

となる。さらに，主軌道型(H)に対しては$M_{(H)}$はMの稠密な開部分多様体となる。なお，$M_{(G)}$はその作用の不動点集合

$$M^G = \{x \in M;\ gx = x,\ ^\forall g \in G\}$$

に他ならず，これはMの閉部分多様体である。このように，Mは部分多様体の族$\{M_{(H)}\}$によりきれいに分割されている(*stratified set*)。

最後に，次の点について注意しておこう。主軌道型$(H) = (G_{x_0})$に対応する軌道G/HのM内での余次元は$\min \operatorname{codim} Gx$と一致する。この余次元も，対称度などとともに，群作用の簡明さを測る一つの尺度となる。例えば，余次元0はMがGの等質空間であることと同値である。なお，今回の講演の主題とは外れるが，軌道型の個数が少ない作用も簡単なものと考えられ，精密な考察が可能である。

§1 対称度に関する一般的結果

以下，特にことわらない限り，Mは連結なコンパクトn次元C^∞多様体（境界のない）を表すものとする。次のよく知られた定理から始める。

定理 1.1 cf. [Ko]　$N(M) \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$ が成りたつ。等号はMが通常の球面S^nか射影空間$\mathbb{R}P^n$の場合に限り起る。∎

証明の方針を述べる。任意にMのリーマン計量をとり，それに関する正規直交枠（frame）の全体のバンドルを$\mathfrak{F}(M) \longrightarrow M$とする。$\mathrm{Isom}(M)$は微分を通して$\mathfrak{F}(M)$に作用するが，任意に$v_0 \in \mathfrak{F}(M)$をとったとき，その等方部分群$\mathrm{Isom}(M)_{v_0}$は単位元だけからなる。すなわち，$\mathrm{Isom}(M)$は$v_0$を通る軌道として$\mathfrak{F}(M)$の中に埋め込まれる。$\dim \mathfrak{F}(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$だから

$$\dim \mathrm{Isom}(M) \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

でなければならぬ。等号が成立すると，$\mathrm{Isom}(M)$は$\mathfrak{F}(M)$と一致するか，またはMが向きづけ可能で，$\mathrm{Isom}(M)$が$\mathfrak{F}(M)$の一つの連結成分と一致するかのいづれかであり，いづれにせよMは定曲率等質空間になる。これにさらに簡単な考察を加えると$M = S^n$かP^nの

可能性しかないことがわかる。

定理1.1に関連してつぎの間隙定理がある。

<u>定理 1.2</u> [Mann] $n \neq 4, 6, 10$ とする。その場合，

$$\frac{n(n-1)}{2}+1 < N(M) < \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+3 < N(M) < \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{(n-k)(n-k}{2}+\frac{k(k+1)}{2} < N(M) < \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$$

$$(k=1, 2, \cdots, n)$$

のいづれかとなるようなMは存在しない。∎

以上が高い対称度をもつMに関する一般的結果でめぼしいものである。他には [K-M-S-S] を参照されたい。

つぎに，$N(M)=0$ となる判定条件にうつる。$N(M)=0$ となることは，$\mathrm{Diff}(M)$ のコンパクト部分群が有限群に限ることを意味する。すなわち，$N(M)>0$ は自明でない連結，コンパクト部分群 G が $\mathrm{Diff}(M)$ に含まれることと同値である。しかるに，そのような連結コンパクトリー群は極大トーラスを含み，したがって S^1 を部分群として含む。ゆえに，$N(M)>0$ と $\mathrm{Diff}(M)$ の

中にS^1が含まれること，すなわち，自明でない作用
$S^1\times M\longrightarrow M$ が存在することとは同値である。

<u>定理 1.3</u> [A-H] Mをスピン多様体とする。すなわち，$w_1(M)=0$，$w_2(M)=0$ であるとする。もし，$N(M)>0$ ならば

$$\hat{A}(M)=0$$

が成り立つ。したがって，$\hat{A}(M)\neq 0$ ならば $N(M)=0$ である。■

ここで，MのPontrjagin類を形式的に

$$p(M)=\prod(1+x_i^2)$$

と書き，特性類 $\hat{\mathfrak{a}}(M)$ を

$$\hat{\mathfrak{a}}(M)=\prod\frac{x_i}{e^{\frac{x_i}{2}}-e^{-\frac{x_i}{2}}}$$

で定義する。Mに向きをつけ，対応する特性数を

$$\hat{A}(M)=\hat{\mathfrak{a}}(M)[M]$$

と記す。

証明の方針は次のようである。Mのスピン構造を定めておく。自明でないS^1作用があるとし，その作用で不変なリーマン計量をとり，それとスピン構造からDirac作用素を構成すると，DはS^1で不変になる（必要があれ

ば，最初の作用の"二重被覆作用"をとる)。したがって，
Dの指数 ind D が群S^1の指標として定義されるが，
それにAtiyah-Singerの指数定理を適用すると

$$(\mathrm{ind}\, D)(z) = \sum_i r_i(z) \qquad , z \in S^1$$

の形に書ける。ここで，S^1作用の不動点集合M^{S^1}を連結成分F_iの和に分けたとき，$r_i(z)$は多様体F_iとその法バンドルN_i（S^1の作用するバンドルとみる）で定まるzの有理関数で，zを$\mathbb{C}$上に動かして考えると，

$$r_i(0) = 0, \qquad r_i(\infty) = 0$$

となることがたしかめられる。したがって，

$$(\mathrm{ind}\, D)(0) = 0, \quad (\mathrm{ind}\, D)(\infty) = 0$$

でなければならないが，ind D がS^1の指標だから，ind D は z の Laurent 多項式である。ゆえに，

$$\mathrm{ind}\ D \equiv 0$$

となるが，再び Atiyah-Singer により

$$(\mathrm{ind}\, D)(1) = \hat{A}(M)$$

だから，$\hat{A}(M) = 0$ を得る。

概複素多様体における同種の問題に対しては次の結果がある。

<u>定理1.4</u>　[H]　Mを連結なコンパクト概複素多様体で，$H^1(M;\mathbb{Z})=0$ となるものとする。いま，Mの才1 Chern 類が整数k_0で割れる，すなわち

$$c_1(M)=k_0x \quad , \quad x\in H^2(M;\mathbb{Z})$$

の形であるとする。Mの概複素構造を保つ可微分同型の全体の群がS^1を含むならば

$$\left\{e^{\frac{kx}{2}}\hat{\mathfrak{A}}(M)\right\}[M]=0$$

が $k\equiv k_0 \mod 2$，$|k|<|k_0|$ となるすべての整数kに対して成り立つ。∎

定理1.3，1.4に関連して次の形の定理があることに注意する。χはEuler数，Signは Hirzebruch 指数を表す。

<u>定理1.5</u>　[Ko]，[A-S]，[H-T]，[Ka]，[K-R] 作用 $S^1\times M \longrightarrow M$ に対し，

$$\chi(M) = \chi(M^{S^1})$$

$$\mathrm{Sign}(M) = \mathrm{Sign}(M^{S^1})$$

が成り立つ。∎

性格は全く異なるが，最近，矢野はGromov不変量による次の判定条件を得た。一般に，空間Xの実係数

のq次元特異鎖

$$c=\sum a_\sigma \sigma \quad , \quad a_\sigma \in \mathbb{R}$$
σ: q次元特異単体

に対し，$\|c\| = \sum |a_\sigma|$ とおき，ホモロジー類 $\alpha \in H_q(X;\mathbb{R})$ に対し

$$\Gamma(\alpha) = \inf\{\|c\| ; [c]=\alpha\}$$

とおく。向きづけ可能なコンパクト多様体 M に対しては，$[M]$ を一つの向きに関する基本ホモロジー類とし

$$\Gamma(M) = \Gamma([M])$$

をMの Gromov 不変量という。$\Gamma(M)$ はMのホモトピー不変量である。

定理1.6 [Ya] Mは向きづけ可能な連結，コンパクトC^∞多様体とする。$\Gamma(M) \neq 0$ ならば $N(M)=0$ である。∎

この定理の応用は次の点で与える。

連結コンパクトリー群Gは，適当に有限被覆をとると，トーラスと半単純群の直積になる。したがって，Gが非可換なら，GはS^3か$SO(3)$を含まねばならない（S^3は$SO(3)$の普遍被覆群であることに注意）。したがって，そのようなGが $Diff(M)$ に含まれていれば，Mは自明で

ない作用

$$S^3 \times M \longrightarrow M$$

をもつ。このような作用が存在するとき，その軌道の配列の状況の微分幾何学的な考察により，Lawson-Yau は次の定理を得た。

定理 1.7 [L-Y]$_1$　Diff(M) が自明でない非可換連結コンパクトリー群 G を含むなら，M はスカラー曲率が到る所正となるリーマン計量をもつ。■

M がスピン多様体であるときは，$\pi : M \longrightarrow pt$（一点）の Gysin 準同型 $\pi_! : KO^0(M) \longrightarrow KO^{-n}(pt)$ を用いて，M のスピンコボルディズム不変量

$$\alpha(M) = \pi_!(1) \in KO^{-n}(pt) \quad (n = \dim M)$$

が定義される。$\alpha(M)$ は，M のリーマン計量を定めると，それに随伴する Dirac 作用素 D の核 Ker D の次元で表されるが，リーマン計量のスカラー曲率が到る所正であるならば Ker D $= 0$ となる（Lichnerowicz の定理。例えば，[Hit] を見よ）。したがって，そのとき $\alpha(M) = 0$ 。これと定理 1.7 を組み合せて次を得る。

定理 1.8　M はスピン多様体で，$\alpha(M) \neq 0$ とする。そのとき，Diff(M) に含まれる連結コンパクト群はトー

ラスに限る。■

$KO^{-n}(pt)$ は $n\equiv 0 \mod 4$ のときは $\mathbb{Z}$ と同型で，$\alpha(M)$ は $\hat{A}(M)$ または $\frac{1}{2}\hat{A}(M)$ と一致するので，その場合定理1.8は定理1.3に含まれてしまう。$n\equiv 1, 2 \mod 8$ のときは $KO^{-n}(pt)\cong \mathbb{Z}_2$ で，$n\equiv 1 \mod 8$ のときには $N(M)>0$ かつ $\alpha(M)\neq 0$ となる例があることに注意する。

つぎに，高次 $\hat{A}$-指数の定義を与える。Mは向きづけられた多様体とする。自然な準同型

$$\pi_1(M) \longrightarrow H_1(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^{b_1}$$

(b_1 は1次元ベッチ数)は自然な写像 $\varphi: M \longrightarrow T^{b_1}$ を誘導する。$u\in H^*(T^{b_1};\mathbb{Z})$ に対し，

$$\{\varphi^*(u)\smile \hat{\mathfrak{A}}(M)\}[M]$$

を u に対応する高次 $\hat{A}$ 指数 という。Mがスピン多様体のときは，これは整数になる。高次 $\hat{A}$ 指数を Dirac 作用素から作ったある作用素族 の指数と解釈し，Lichnerowicz の定理の拡張をそれに適用することにより，Gromov-Lawson は次の定理を証明した。

<u>定理1.9</u> [G-L] Mはスピン多様体で，高次$\hat{A}$指数が零でないとする（$\exists u : \{\varphi^*(u) \cup \hat{\mathfrak{A}}(M)\}[M] \neq 0$）。そのとき，$M$はスカラー曲率が到る所正となるようなリーマン計量をもち得ない。とくに，Diff(M)に含まれる連結コンパクト群はトーラスに限る。∎

この定理には種々の変種があり（cf. [G-L]），それらは次の§2と密接な関連がある。

§2 $K(\pi, 1)$多様体の場合

$K(\pi, 1)$多様体上の連結コンパクト群の作用については，次の結果が重要である。

<u>定理2.1</u> [C-R]，Mを連結，コンパクト$K(\pi, 1)$多様体とし，連結コンパクトリー群Gが位相変換群としてMに効果的に作用しているとする。そのとき，

(i) Gはトーラスで，その次元は$\pi_1(M)$の中心の階数(rank)を越えない。

(ii) 等方部分群はすべて有限群である。

(iii) $G \neq \{e\}$ならば，$\chi(M) = 0$でなければならぬ。∎

この定理はMが単に位相多様体であっても成り立つものである。証明の骨子は，M上のトーラスT^lの効果

的作用に対して，必らず

$$f_*^x : \pi_1(T^l, e) \longrightarrow \pi_1(M, x)$$

が単射になるという事実をまず示すことにある。ここで，$f^x(g) = gx$。一般に，連結多様体 M 上の T^l の作用が上の条件を満たしているとき，その作用は単射的であるという。トーラスの単射的作用については次が成り立つ。

定理2.2 [C-R]$_2$ T^l が M に単射的に作用しているとする。そのとき，単連結多様体 W と被覆 $T^l \times W \longrightarrow M$ が存在し，しかも，その被覆変換は T^l の $T^l \times W$ の才1因子への左からの作用と交換し，初めに与えられた T^l の M の上の作用を誘導する。∎

$K(\pi, 1)$ 多様体の典型例は正でない断面曲率をもつコンパクトリーマン多様体で，その場合は普遍被覆空間は $\mathbb{R}^n$ と可微分同相である。この場合は，微分幾何学的手法により，定理2.2によりも精密な構造定理がある。例えば[L-Y]$_2$ を見られたい。

M が負の断面曲率をもつコンパクトリーマン多様体なら，$\pi_1(M)$ の中心は自明である [Pr]。した

がって，定理 2.1 により次を得る。

定理 2.3　Mは負の断面曲率をもつ連結コンパクトリーマン多様体のホモトピー型をもつとする。そのとき，$N(M)=0$ である。∎

Schoen-Yau はこの定理をつぎのように一般化している。

定理 2.4　[S-Y]　Mを連結なコンパクトC^{∞}多様体，Nを負の断面曲率をもつコンパクトリーマン多様体，$f: M \longrightarrow N$ は連続写像で，或る $\alpha \in H_k(M;\mathbb{Z})$ に対し $f_*(\alpha) \neq 0$ であるとする。そのとき，

$$
\begin{aligned}
N(M) &\leqq \frac{1}{2}(\dim M - k)(\dim M - k + 1) \qquad (k \geqq 2)\\
&\leqq \frac{1}{2}(\dim M - 1)\dim M + 1 \qquad (k=1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。とくに，$\dim M \geqq 2$ で $k=\dim M$ とれるときは

$$N(M)=0$$

となる。∎

定理2.3 及び定理2.4 の後半に対しては，定理1.6 を用いる簡単な別証がある。実際，[I-Y] により，

負曲率をもつコンパクトリーマン多様体 N に対し、 $k \geq 2$
$\alpha \in H_k(N;\mathbb{R})$ で $\alpha \neq 0$ ならば $\Gamma(\alpha) > 0$ であることが示された。とくに、N が向きづけ可能ならば $\Gamma(N) > 0$ である。また、Γ の性質から

$$\Gamma([M]) \geq \Gamma(f_*[M])$$

だから、$f_*([M]) \neq 0$ なら、$\Gamma(M) > 0$ となる。よって、N, M の対称度は 0 となる。

最後に、定理 2.4 に関連し、次の形の定理 1.9 の拡張を挙げておく。

<u>定理 2.5</u> [G-L] M をコンパクトスピン多様体、N を正でない断面曲率をもつ向きづけ可能なコンパクトリーマン多様体、$f: M \longrightarrow N$ を連続写像で、

$$\{f^*(\mu) \smile \hat{\mathfrak{a}}(M)\}[M] \neq 0$$

となるものとする（$\mu \in H^{\dim N}(N)$, $\mu[N] = 1$）。そのとき、M はスカラー曲率が正となるようなリーマン計量をもち得ない。とくに、$G \subset \mathrm{Diff}(M)$ となる連結コンパクト群はトーラスに限る。∎

この定理は [G-L] で $\pi_1(N)$ などに多少の条件をつけて証明が与えられており、一般の場合は第 II 部で行うと予告されている。また、[S-Y] では、M, N がとも

に実解析的で，Gの作用も実解析的とすると，ある $w \in H^*(N)$ に対し

$$\{f^*(w) \smile \hat{\mathfrak{a}}(M)\}[M] \neq 0$$

でも，Gがトーラスに限るという結論が成り立つと述べられているが，証明にはそのままでは完全でないと思われる個所がある。なお，定理2.5において，Nが単に $K(\pi,1)$ 多様体であるとしても，Gがトーラスに限るという結論は正しいというBrowder-Hsiangの結果があるようである。

§3 特別の多様体の対称度

一般には，多様体の微分構造を変えると，その対称度も大きく変化するであろうという感じがあり，球面や実射影空間，複素射影空間など手近にある多様体に対しその点を考察するのはテストケースとしての興味が大きい。

球面の対称度に関してはいくつかの結果があり，或程度その感じが実証されている。そのうちめぼしいものを以下に挙げる。まず，通常の S^n に関しては，定理1.1により

$$N(S^n) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

であることに注意する。

定理 3.1 [Hs] エキゾチック球面 Σ^n に対し，

$$N(\Sigma^n) < \frac{1}{8}n^2+1 \qquad (n \geqq 40)$$

である。また，$n=8k+1$ のとき，Kervaire 球面 Σ_0^n に対しては

$$N(\Sigma_0^n) = \frac{1}{8}n^2+\frac{7}{8}$$

である。

定理 3.2 [Hs-Hs] Σ^n が平行可能な多様体の境界にならないならば

$$N(\Sigma^n) < \frac{1}{16}(n+1)^2+5 \qquad (n \geqq 35)$$

定理 3.3 [S] Σ^n の無限系列で

$$N(\Sigma^n) \leqq \frac{30}{7}n$$

が成り立つようなものがある $(n \longrightarrow \infty)$。∎

定理 1.8 の応用として，Lawson-Yau は次の定理を得た。

定理 3.4 [L-Y]$_1$ Σ^n がスピン多様体の境界にならないならば，Diff(Σ^n) の連結コンパクト部分群はトーラスに限り，しかもその次元は $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ を越えない。とくに

$$N(\Sigma^n) \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

である。∎

次に，複素射影空間$\mathbb{C}P^m$と同じホモトピー型をもつ多様体Mを考えよう。このようなMは無数にある。例えば，mが偶数のとき，$\tau\in KO(\mathbb{C}P^m)$がそのようなMの接バンドルの類となるためには

$$J(\tau)=J(\tau(\mathbb{C}P^m))$$
$$\mathcal{L}(\tau)[\mathbb{C}P^m]=1$$

となることが必要かつ十分である（$\mathcal{L}$はHirzebruch多項式）。これに関しては次のPetrieの予想があり，先に述べたように，テストケースとして解決が待たれるものである。

<u>Petrieの予想</u>［P］　Mは$\mathbb{C}P^m$と同じホモトピー型をもつとする。もし，$N(M)>0$ならば，MのPontrjagin類は

$$p(M)=(1+x^2)^{m+1}\quad (x\in H^2(M;\mathbb{Z})は生成元)$$

の形になるであろう。

この予想は現在までのところ$m\leqq 4$まで肯定的に解決されている［Yo］$_1$，［D］。なお，作用$S^1\times M\longrightarrow M$に制限をつけた場合の部分的解決がある［Yo］$_2$，［Wang］，［T-W］，［Mas］。いずれの場合も，作用

$S^1 \times M \longrightarrow M$ の不動点集合の連結成分の個数に制限をつけたもので，その場合には，各連結成分とその法バンドルの S^1バンドルとしての可能性が全部決定される。

なお渡部は次の結果を得ている。

定理3.5 [Wat] $N(\mathbb{C}P^m) = \dim SU(m+1) = m^2+2m$ である。また，エキゾチックなM に対しては

$$N(M) < \frac{1}{2}(m^2+3m+2) \qquad (m \geqq 13)$$

が成り立つ。 ∎

その他，いくつかの特別の多様体に対する対称度の評価に関する結果もあるが，それらについては省略する。

§4 結語

この報告は，対称度を中心にしたもので，変換群論の報告としてはもちろん偏ったものである。Diff(M)のコンパクト部分群を見るという立場だけからいっても，扱ったものは連結部分群ばかりで，非連結なもの，特に有限部分群の作用については全く触れるところがなかった。有限群の作用を種々の立場から研究することは興味ある課題であるが，ここでは最後に，

対称度の問題と関連して，Diff(M)がコンパクト群を全く含まないようなMの存在が知られていることを附け加えておく（[C-R-W]，[Bl]）。これらの例は，いずれも自明でない基本群をもっている。単連結な多様体で上のような性質をもつものが存在するかどうかは今のところ全く分っていないようである。

文献

[A-H] Atiyah, M.F. and Hirzebruch, F., Spin manifolds and group actions Essays on Topology, Springer, 1970.

[A-S] Atiyah, M.F. and Singer I.M., The index of elliptic operators, III, Ann. of Math. 87 (1968), 564-604.

[Br] Bredon, G., Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, 1972.

[Bl] Bloomberg, E.M., Manifolds with no periodic homeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. 202 (1975), 67-78.

[C-R]$_1$ Conner, P.E. and Raymond, F., Actions of compact Lie groups on aspherical manifolds, Topology of Manifolds, Markham, 1971.

[C-R]$_2$ Conner, P.E. and Raymond, F., Injective operations of the toral groups, Topology, 11 (1971), 283-296.

[C-R-W] Conner, P.E., Raymond, F. and Weinberger, P., Manifolds with no periodic maps, Proc. 2nd Conf. on Compact Transf. Groups, Amherst, 1971, Part II, 81-108 (Springer Lecture Notes 299).

[D] Dejter, I.J., Smooth S^1-manifolds in the homotopy type of $\mathbb{C}P^3$, Michigan Math. J. 23 (1976), 83-95.

[G-L] Gromov, M. and Lawson, H.B., Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group, I, Ann. of Math. 111 ~~(1980), 209-230.~~

[H] Hattori, A., Spin^c-structures and S^1-actions, Invent. math. 48 (1978), 7-31.

[H-T] Hattori, A. and H. Taniguchi, Smooth S^1-action and bordism, J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 701-731.

[Hit] Hitchin, N., Harmonic spinors, Advances in Math. 14 (1974), 1-55.

[Hs] Hsiaug, W-Y., On the bound of the dimensions of the isometry groups of all possible Riemannian metrics on an exotic spheres, Ann. of Math. 85 (1967), 351-358.

[Hs-Hs] Hsiaug, W.-C. and Hsiaug, W.-Y., On the degree of symmetry of homotopy spheres, Ann. of Math. 89

(1969), 52-67.

[Ka] Kawakubo, K., Equivariant Riemann-Roch theorems, localization and formal group law, to appear in Osaka J. Math.

[K-R] Kawakubo, K. and Raymond, F., The index of manifolds with toral actions and geometric interpretations of the $\sigma(\infty, (S^1, M))$ invariant of Atiyah and Singer, Proc. 2nd Conf. on Transf. Groups, Amherst, 1971, Part I, 228-232 (Springer Lecture Notes 298).

[Ko] Kobayashi, S., Transformation Groups in Differential Geometry, Springer, 1972.

[K-M-S-S] Ku, H.T., Mann, L.N., Sicks, J.L. and Su, J.C., Degree of symmetry of a product manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969), 133-149.

[L-Y]$_1$ Lawson, H.B. and Yau, S.T., Scalar curvature, non-abelian group actions, and the degree of symmetry of exotic spheres, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 232-244.

[L-Y]$_2$ Lawson, H.B. and Yau, S.T., Compact manifolds of non-positive curvature, J. Diff. Geometry, 7 (1971), 211-218.

[Mann] Mann, L.N., Gaps in the dimensions of transformation groups, Ill. J. Math. 10 (1966), 532-546.

[Mas] Masuda, M., On smooth S^1-actions on cohomology complex projective spaces whose fixed point sets consist of four components, preprint.

[M-Z] Montgomery, D. and Zippin, L., Transformation Groups, Interscience, 1955.

[P] Petrie, Smooth S^1-actions on homotopy complex projective spaces and related topics, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 105-153.

[Pr] Preissmann, A., Ouelques propriétés globales des espaces de Riemann, Comment. Math. Helv. 15 (1943), 175-216.

[S] Schulz, R., Circle actions on homotopy spheres bounding plumbing manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 36 (1972), 297-300.

[S-Y] Schoen, R. and Yau, S.T., Compact group actions and the topology of manifolds with non-positive curvature, Topology, 18 (1979), 361-380.

[T-W] Tsukada, E. and Washiyama, R., S^1-actions on cohomology complex projective spaces with three components of the fixed point sets, Hiroshima Math. J. 9 (1979), 41-46.

[U] 内田 伏一，変換群とコボルディズム論，紀伊国屋，1973.

[Wang] Wang, K., Differentiable circle group actions on homotopy complex projective spaces, Math. Ann. 214 (1975), 73-80.

[Wat] Watabe, T., On the degree of symmetry of complex quadric and homotopy complex projective space, Sci. Rep. Niigata Univ. 11 (1974), 85-94.

[Ya] Yano, K., Gromov invariant as an obstruction for S^1-actions, Preprint.

[I-Y] Inoue, H. and Yano, K., The Gromov invariant of negatively curved manifolds, Preprint.

$[Yo]_1$ 吉田朋好，コホモロジー複素射影空間上のS^1作用について，数学 29 (1977), 154-164.

$[Yo]_2$ Yoshida, T., On smooth semi-free S^1-actions on cohomology complex projective spaces, Publ. RIMS Kyoto Univ. 11 (1976), 483-496.

Wu 類とその応用について

広島大総合科　吉田敏男

§1. Introduction

M を closed manifold とし, w_i と v_i をそれぞれ M の i-th Stiefel-Whitney 類, Wu 類とする。このとき Wu の定理から

(1.1) $$v_n = \sum_{i=1}^{n} \theta^{n-i} w_i$$

(Prop.3.2), ここで $\theta^l \in \mathcal{A}(2)$ は Sq^l の conjugation $c(Sq^l)$ ([5, II, §4]) で帰納的に

$$\theta^l = Sq^l + \sum_{i=1}^{l-1} Sq^i \theta^{l-i} = Sq^l + \sum_{j=1}^{l-1} \theta^{l-j} Sq^j \quad (l \geqq 0)$$

で定義されるものである.

ここでの話の目的は (1.1) を用いてある closed manifold の Wu 類を直接的に Stiefel-Whitney 類で表わしそれをある manifold の unoriented bordism 類を調べるのに応用することである.

そのために §2 で θ^l について考え次の (1.2) (Th.2.4) を得る.

以下, 正整数 k に対して $k' = 2^{k-1}$ とする.

(1.2) $n = 2^k - 1$ のとき

$$\theta^n = Sq^{k'} Sq^{(k-1)'} \cdots Sq^1$$

・ $n = 2^k - 1 - t_1' - \cdots - t_\ell'$ $(k \geqq t_1 > \cdots > t_\ell \geqq 1)$ のとき

$$\theta^n = \sum_{1 \leqq p_1 < \cdots < p_\ell \leqq k} Sq^{I(p_1, \cdots, p_\ell)}$$

，ここで $I(p_1, \cdots, p_\ell) = (i_1, \cdots, i_k)$ は

$i_{p_s} = (k - p_s + 1)' - t_s'$ $(s = 1, \cdots, \ell)$, $i_p = (k-p+1)'$ $(p \neq p_1, \cdots, p_\ell)$

で $Sq^{(i_1, \cdots, i_k)} = Sq^{i_1} \cdots Sq^{i_k}$ とする．ただし $Sq^i = 0$ $(i < 0)$ とする。

(1.2) から次の知られている

$$\theta^{2n+1} = \theta^{2n} Sq^1$$

(Cor. 2.8) と D.M. Davis [2, Th. 2] (Cor. 2.9(ii)-(iii)) を得る。

§3 では $\theta^{2n+1} = \theta^{2n} Sq^1$ を用いて (1.1) を Th. 3.6 の形にし

$$v_{2n+1} = \sum_{i \geqq 1} (w_1)^{2^i - 1} v_{2n+2-2^i}$$

(Th. 3.7) を得る．従って，oriented manifold の奇数次元 Wu 類は 0 である([3, Lemma 3])。

§4 において考える closed manifold M はその total Stiefel-Whitney 類が次の条件

(1.3) $$wM = 1 + \sum_{b \geqq 1} w_{b'} \quad (b' = 2^{b-1})$$

をみたすものである。このとき $w_{b'} w_{c'} = 0$ $(c \geqq b+2)$ (Prop. 4.2) に注意し，(1.2) を用いて次の (1.4) (Th. 4.3) を得る。

$$(1.4)\quad \begin{cases} v_i = \sum_{b=1}^{a} (w_{b'})^{(a-b+1)'} & \text{if } i = a' \geqq 1, \\ v_i = \sum_{b=1}^{a_2} \sum_{j=a_2+1}^{a_1} (w_{b'})^{(i-j')/b'} (w_{2b'})^{(j-b)'} & \text{if } i = a_1' + a_2' \ (a_1 > a_2 \geqq 1), \\ v_i = 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(1.3) をみたす manifold の例は §4 の終りでのべてある.

§5 では (1.3) をみたす closed manifold M を考え, (1.4) と $v_i = 0$ ($i > \dim M/2$) を用いて Stiefel-Whitney 数を調べて次の結果を得る.

Theorem. M を closed manifold とする. 次の3条件のうち1つがみたされるならば M の unoriented bordism 類 $[M]$ は 0 である:

(1) Total Stiefel-Whitney 類 wM は (1.3) をみたし

$\dim M = p_1' + \cdots + p_k' + 1$ ($p_1 > \cdots > p_k > 1$ で $k \geqq 2$).

(2) $wM = 1 + w_{b'} + w_{c'}$ ($c > b \geqq 1$) で $\dim M$ は 2 のべきでない.

(3) $wM = 1 + w_i$ ($i \geqq 1$).

§2. Some relations in the mod 2 Steenrod algebra

$\mathcal{A}(2)$ を mod 2 Steenrod algebra とする。正整数の列 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ に対して

$$Sq^I = Sq^{i_1}\cdots Sq^{i_k}\in\mathcal{A}(2),\ |I|=i_1+\cdots+i_k$$

とおき，$\theta^n\in\mathcal{A}(2)$ を

(2.1) $$\theta^0=1,\quad \theta^n=\sum_{|I|=n}Sq^I\ (n\geqq 1)$$

とおく。このとき次の (2.1)′ を得る.

(2.1)′ $$\theta^n=Sq^n+\sum_{i=1}^{n-1}Sq^i\theta^{n-i}=Sq^n+\sum_{j=1}^{n-1}\theta^{n-j}Sq^j\ (n\geqq 0)$$

$I=(i_1,\cdots,i_k)$ と $T=(t_1,\cdots,t_l)$ を正整数の列とし，

(2.2) $$Sq^I-(T)=\sum_{1\leqq p_1<\cdots<p_l\leqq k}Sq^{I-T(p_1,\cdots,p_l)}$$

とおく，ここで $I-T(p_1,\cdots,p_l)=(j_1,\cdots,j_k)$ は

$$j_{p_s}=i_{p_s}-t_s\ (s=1,\cdots,l),\ j_p=i_p\ (p\neq p_1,\cdots,p_l)$$

で $Sq^{(j_1,\cdots,j_k)}=Sq^{j_1}\cdots Sq^{j_k}$ とする．ただし $Sq^j=0\ (j<0)$.

従って

(2.2)′ $$Sq^I-(T)=Sq^I\ (l=0),\quad Sq^I-(T)=0\ (l>k);$$

$$Sq^I-(T)=Sq^{i_1-t_1}\{Sq^{I_1}-(T_1)\}+Sq^{i_1}\{Sq^{I_1}-(T)\}=\{Sq^{I_k}-(T_l)\}Sq^{i_k-t_l}+\{Sq^{I_k}-(T)\}Sq^{i_k}$$

である，ここで $J=(j_1,\cdots,j_m)$ のとき $J_s=(j_1,\cdots,j_{s-1},j_{s+1},\cdots,j_m)$.

さらに $Sq^I-(t)=Sq^I-(J(t))$ とおき

$$\theta^n-(t)=\sum_{|I|=n}\{Sq^I-(t)\}\ (n,t\geqq 0)$$

とおく，ここで $J(t)=(2^{t-1},2^{t-2},\cdots,1)$.

次の prop. は $(2.1)'$, $(2.2)'$ と n に関する帰納法で示される.

Prop. 2.3.
$$\theta^n-(t)=\begin{cases}0 & (n<2^t-1),\\ \theta^{n-2^t+1} & (n\geqq 2^t-1\geqq 0).\end{cases}$$

§2 の目的は次の定理を示すことである.

Theorem 2.4. (i) $n=2^k-1$ のとき
$$\theta^n=Sq^{J(k)}\quad (J(k)=(k',(k-1)',\cdots,1)).$$

(ii) $n=2^k-1-t_1'-\cdots-t_l'=2^k-1-|T|$

, ここで $T=(t_1',\cdots,t_l')$ $(k\geqq t_1>\cdots>t_l\geqq 1,\ l\geqq 1)$. このとき
$$\theta^n=Sq^{J(k)}-(T)\ (J(k)=(k',(k-1)',\cdots,1)).$$

ここで右辺は (2.2) で与えられるものである.

この定理と $(2.2)'$ から次の cor. を得る.

Cor. 2.5. n は上の定理の (ii) のものとし, $k>t_1$ のとき
$$\theta^n=Sq^a\theta^{n-a}+Sq^{k'}\theta^{n-k'}\quad (a=k'-t_1').$$

Th. 2.4 を示すために次のことを用意する.

$P(=RP^\infty)$ を ∞-次元実射影空間とし, P^m を P の m-fold Cartesian 積とする. $u\in H^1(P;Z_2)=Z_2$ を生成元とし
$$u_1\times\cdots\times u_m\in H^m(P^m;Z_2)\ (u_1=\cdots=u_m=u)$$
を考える. さらに正整数の列 $A=(a_1,\cdots,a_m)$ に対して
$$u(A)=u_1(a_1)\times\cdots\times u_m(a_m)\in H^*(P^m;Z_2)\ (u(a)=u^{a'},\ a'=2^{a-1})$$
とおく. Prop. 2.3 を用いて次の prop. を得る. そこで $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)$

は $\varepsilon_i=0$ or 1 の列で $A=(a_1,\cdots,a_m)$ のとき $A+\varepsilon=(a_1+\varepsilon_1,\cdots,a_m+\varepsilon_m)$ また $\|A\|=a'_1+\cdots+a'_m$ とする。

Prop. 2.6. $H^*(P^m;Z_2)$ において

(i) $$Sq^a u(A)=\sum_{\|A+\varepsilon\|=\|A\|+a}u(A+\varepsilon),$$

(ii) $$\theta^n(u_1\times\cdots\times u_m)=\sum_{\|A\|=n+m}u(A).$$

上の(ii)において $n=m$ のとき次の lemma を示すことができる。そこで A,B は n 個の正整数からなる列で，ε と ρ は n 個の 0 or 1 からなる列とする。

Lemma 2.7. (i) $n=2^k-1\geqq 1$ のとき

$$\theta^n(u_1\times\cdots\times u_n)=\sum_{\|A\|=k'+n-1}\sum_{\|A+\varepsilon\|=2n}u(A+\varepsilon).$$

(ii) $n=2^k-t'-s$ $(k>t\geqq 1,\ 1\leqq s\leqq t')$ のとき

$$\theta^n(u_1\times\cdots\times u_n)=\sum_{\|A\|=k'-s+n}\sum_{\|A+\varepsilon\|=2n}u(A+\varepsilon)$$
$$+\sum_{\|B\|=k'-t'-s+n}\sum_{\|B+\rho\|=2n}u(B+\rho).$$

<u>Theorem 2.4の証明</u> (i) $\theta^1=Sq^1$ より $k=1$ のとき明か。(i)が $k-1$ に対して成り立つと仮定すると

$$Sq^{J(k)}=Sq^{k'}\theta^{k'-1}.$$

Prop. 2.6 と Lemma 2.7 (i) から

$$Sq^{k'}\theta^{k'-1}(u_1\times\cdots\times u_n)=Sq^{k'}\sum_{\|A\|=k'-1+n}u(A)$$
$$=\sum_{\|A\|=k'-1+n}\sum_{\|A+\varepsilon\|=2n}u(A+\varepsilon)=\theta^n(u_1\times\cdots\times u_n)\ (n=2k'-1).$$

従って次の (*) ([5, Cor. 3.3]) から k のときにも成り立つ。

(*): $Sq^I \longrightarrow Sq^I(u_1\times\cdots\times u_m)$ が induce する準同形 $\mathcal{a}(2)\longrightarrow H^*(P^m;Z_2)$ は degree $\leqq m$ で単射である。

(ii) の証明も同様である。

次の cor. は $Sq^{2a-1}Sq^a=0$ と Th. 2.4 から得られる。

Cor. 2.8. $\quad \theta^{2n+1}=\theta^{2n}Sq^1$.

次の cor. の (ii), (iii) は [2, Th. 2] で得られている。

Cor. 2.9. (i) $\theta^{2k'}=Sq^{2k'}+Sq^{k'}\theta^{k'}$.

(ii) $\theta^{2^k-l}=Sq^{J(k;l)}\theta^{l'-l}$ $(k\geqq l\geqq 1)$,

ここで $J(k;l)=(k',(k-1)',\cdots,l')$.

(iii) $\theta^{2^k-k-1}=Sq^{k'}\theta^{k'-k-1}+Sq^{(k'-1,(k-1)'-1,\cdots,1)}$ $(k\geqq 2)$.

証明は帰納法で示される。

次の prop. はすでに知られていることと思うが，(2.1)′ と n に関する帰納法で示される。

Prop. 2.10. 任意の cohomology 類 x, y について

$$\theta^n(xy)=\sum_{i+j=n}(\theta^i x)(\theta^j y).$$

§3. Odd dimensional Wu classes

M^d を closed d-manifold とし，$v_i\in H^i(M^d;Z_2)$ を M の i-th Wu 類とする。即ち基本ホモロジー類を $\mu\in H_d(M^d;Z_2)$ として

$$\langle v_i x,\mu\rangle=\langle Sq^i x,\mu\rangle\ (\forall x\in H^{d-i}(M^d;Z_2)).$$

W_n の定理([4, Th. 11.14])

(3.1) $$w_k = \sum_{i=0}^{k} Sq^i v_{k-i}$$

と n に関する帰納法により次の prop. を得る。

Prop. 3.2. $v_n = \sum_{i=1}^{n} \theta^{n-i} w_i$.

§3の目的である Th. 3.6—3.7 を示すのに次の lemmas を用意する. そこで正整数の列 $I=(i_1, \cdots, i_l)$ に対して $l(I)=l$, $\|I\| = i_1' + \cdots + i_l'$ とする.

Lemma 3.3. (i) $l = l_1' + \cdots + l_k' = \|L\|$ ($L=(l_1, \cdots, l_k)$, $l_1 > \cdots > l_k \geq 1$) のとき

$$\sum_{l(I)=l} w_1^{2\|I\|} \theta^{m-2\|I\|} w_n = \sum_{l(J)=k} w_1^{\|J+L\|} \theta^{m-\|J+L\|} w_n,$$

ここで $J+L=(j_1+l_1, \cdots, j_k+l_k)$ ($J=(j_1, \cdots, j_k)$) で $\theta^j = 0$ ($j<0$).

(ii) $l = 2^s - 1 \geq 1$ のとき

$$\sum_{l(I)=l} w_1^{2\|I\|} \theta^{m-2\|I\|} w_n = w_1^{2l} \theta^{m-2l} w_n + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i \geq 2} w_1^{\varphi(s;k,i)} \theta^{m-\varphi(s;k,i)} w_n,$$

ここで $\varphi(s;k,i) = (s+i)' + (s+2-k)' - 2$.

この lemma と t に関する帰納法により次の lemma を得る.

Lemma 3.4. (i) $t' = 2^{t-1} \geq 2$ として

$$\sum_{q=t'-1}^{2t'-2} \sum_{l(I)=q} w_1^{2\|I\|} \theta^{m-2\|I\|} w_n = w_1^{2t'-2} \theta^{m+2-2t'} w_n.$$

(ii) $$\sum_{q \geq 1} \sum_{l(I)=q} w_1^{2\|I\|} \theta^{m-2\|I\|} w_n = \sum_{t \geq 3} w_1^{t'-2} \theta^{m+2-t'} w_n.$$

Prop. 2.10, Cor. 2.8 および Lemma 3.4 から次の lemma を得る。

Lemma 3.5.

(i) $\theta^{2l}(w_1 w_{2m}) = \sum_{t\geqq 2} w_1^{t'-1}\theta^{2l+2-t'}w_{2m} + \sum_{t\geqq 3} w_1^{t'-2}\theta^{2l+2-t'}w_{2m+1}$,

(ii) $\theta^{2l}(w_1 w_{2m+1}) = \sum_{t\geqq 2} w_1^{t'-1}\theta^{2l+2-t'}w_{2m+1}$.

Prop.3.2, Cor.2.8 と上の lemma から次の定理を得る.

Theorem 3.6. $a \geqq 1$ のとき

(i) $v_{2a} = \sum_{p\geqq 1}\theta^{2a-2p}w_{2p} + \sum_{p\geqq 0,\, t\geqq 2} w_1^{t'-1}\theta^{2a-2p-t'}w_{2p+1}$.

(ii) $v_{2a+1} = \sum_{p\geqq 1,\, t\geqq 2} w_1^{t'-1}\theta^{2a+2-2p-t'}w_{2p} + \sum_{p\geqq 1,\, t\geqq 3} w_1^{t'-2}\theta^{2a+2-2p-t'}w_{2p+1}$.

この定理から次の定理を得る.

Theorem 3.7. $v_{2a+1} = \sum_{i\geqq 2} w_1^{i'-1} v_{2a+2-i'}$ $(i' = 2^{i-1})$.

§4. Wu classes of certain manifolds

ここでは次の条件(4.1)をみたす closed manifold M を考える.

(4.1) $\quad wM = 1 + \sum_{b\geqq 1} w_{b'}$, $\quad w_{b'} \in H^{b'}(M; Z_2)$

Prop.4.2. $c \geqq b+2$ のとき, $w_{b'}w_{c'} = 0$ である.

証明は $0 = Sq^{2b'}w_{c'-b'} = w_{b'}w_{c'}$ に注意すればよい.

§4の目的は次の定理を示すことである.

Theorem 4.3. (4.1)をみたす M の i-th Wu 類は

$i = a_1' + a_2' + \cdots + a_k'$ $(a_1 > a_2 > \cdots > a_k \geqq 1)$ として

(i) $k=1$ ならば $v_i = \sum_{b=1}^{a_1} (w_{b'})^{(a_1-b+1)'}$

(ii) $k=2$ ならば $v_i = \sum_{b=1}^{a_2}\sum_{j=a_2+1}^{a_1} (w_{b'})^{(i-j')/b'}(w_{2b'})^{(j-b)'}$.

(iii) $k \geqq 3$ ならば $v_i = 0$.

ここでいくつかの lemmas を用意する.

Lemma 4.4. (i) $b'=2^{b-1}\geqq 1$, $t'=2^{t-1}\geqq 1$, $i\geqq 1$ のとき

$$Sq^i(w_{2b'})^{t'}=\begin{cases}(w_{b'})^{t'}(w_{2b'})^{t'} & \text{if } i=b't',\\ (w_{2b'})^{2t'} & \text{if } i=2b't',\\ 0 & \text{otherwise}.\end{cases}$$

(ii) $Sq^I w_{2b'}=0$ if $|I|$ is not a multiple of b'.

Lemma 4.5. $q\geqq p+1\geqq 3$ のとき

$$Sq^{2b'(q'-p')}(w_{2b'})^{q'-p'+1}=\begin{cases}(w_{2b'})^{2q'-2p'+1} & \text{if } p>2,\\ (w_{2b'})^{2q'-3}+(w_{b'})^2(w_{2b'})^{2q'-4} & \text{if } p=2.\end{cases}$$

Lemma 4.6. $q\geqq p+1\geqq 3$ のとき

$$Sq^{2b'(q'-p'-1)}(w_{2b'})^{q'-p'+1}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{if } p\geqq 4,\\ (w_{b'})^4(w_{2b'})^{2q'-10} & \text{if } p=3,\\ (w_{2b'})^{2q'-4}+(w_{b'})^2(w_{2b'})^{2q'-5}+\begin{cases}0 \\ (w_{b'})^4(w_{2b'})^{2q'-6}\end{cases} & \begin{array}{l}\text{if } p=2 \text{ and } q=3,\\ \text{if } p=2 \text{ and } q\geqq p+2.\end{array}\end{cases}$$

Lemma 4.7. $l\geqq 0$, $J(k;b)=(k',(k-1)',\cdots,b')$ として

(i) $Sq^{J(b+l;b)}w_{2b'}=\sum_{i=0}^{l}(w_{b'})^{4l'-4i'+1}(w_{2b'})^{2i'}$,

(ii) $Sq^{(b+l+1)'-b'}Sq^{J(b+l;b)}w_{2b'}=0$.

上の結果と Th. 2.4 を用いて次の lemma を得る.

Lemma 4.8. (i) $a\geqq b\geqq 1$ のとき

$$\theta^{a'-b'}w_{b'}=(w_{b'})^{(a-b+1)'}$$

(ii) $i=a_1'+a_2'$ $(a_1>a_2\geqq 1)$, $a_1>b\geqq 1$ のとき

$$\theta^{i-2b'}w_{2b'}=\begin{cases}\sum_{j=a_2+1}^{a_1}(w_{b'})^{(i-j')/b'}(w_{2b'})^{(j-b)'} & \text{if } b\leqq a_2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

証明. (i) $b=1$, $a=b$ のときは明か. $a>b>1$ とする. このとき $a'-b'=a'-1-|J(b-1)|$ $(J(b-1)=((b-1)',(b-2)',\cdots 1))$ であるから Th. 2.4 (ii) より

$$\theta^{a'-b'}w_{b'}=\{Sq^{J(a-1)}-(J(b-1))\}w_{b'}=\sum_J Sq^J w_{b'},$$

ここで $J=(j_1,\cdots,j_{a-1})$ は $1\leqq p_1<\cdots<p_{b-1}\leqq a-1$ に対して

$$j_{p_s}=(a-p_s)'-(b-s)'\ (s=1,\cdots,b-1),\ j_p=(a-p)'\ (p\neq p_1,\cdots,p_{b-1}).$$

Lemma 4.4 (i) から $Sq^j w_{b'}=0$ $(0<j<b'/2)$ だから

$$Sq^J w_{b'}=0\quad((p_2,\cdots,p_{b-1})\neq(a-b+2,\cdots,a-1)).$$

ゆえに

$$\theta^{a'-b'}w_{b'}=Sq^{J(a-1;b)}w_{b'}+\sum_{l=b}^{a-1}Sq^{J(a-1;l+1)}Sq^{l'-b'/2}Sq^{J(l-1;b-1)}w_{b'}$$

となり Lemma 4.7 (ii) から (i) を得る.

(ii) $a_2>b\geqq 1$ のとき: $i-2b'=2a_1'-1-(a_1'-a_2')-(2b'-1)$ だから Cor. 2.5 より

$$\theta^{i-2b'}=Sq^{(a_1-1)'}\theta^{(a_1-1)'+a_2'-2b'}+Sq^{a_1'}\theta^{a_2'-2b'}.$$

ゆえに次元の関係から

$$\theta^{i-2b'}w_{2b'}=Sq^{(a_1-1)'}\theta^{(a_1-1)'+a_2'-2b'}w_{2b'}.$$

これをくりかえして

$$\theta^{i-2b'}w_{2b'} = Sq^{J(a_1-1;a_2)}\theta^{2a_2'-2b'}w_{2b'}.$$

ここで(i)とLemma 4.7(i)を用いて結論を得る。

$a_2=b$ のとき：$i-2b'=a_1'-1-(b'-1)$ だから(i)の証明と同様に

$$\theta^{i-2b'}w_{2b'} = \{Sq^{J(a_1-1)-(J(b-1))}\}w_{2b'} = Sq^{J(a_1-1;b)}w_{2b'}.$$

ゆえにLemma 4.7(i)から結論を得る。

$b>a_2$ のとき：$i-2b'$ は b' の倍数でないからLemma 4.4(ii)より明か。

<u>Theorem 4.3の証明</u>　(i), (ii) は Prop. 3.2, (4.1)とLemma 4.8から明らかである。(iii)の証明はいくつかのlemmasを用意して $\theta^{i-b'}w_{b'}=0$ $(1 \leqq b \leqq a_1)$ を示すことで得られる。

ここで(4.1)をみたすclosed manifoldsの例をのべる。

Example 4.9. RP^n を n 次元実射影空間とすると

$$wRP^n = 1+u^{b'}+u^{a'} \quad (n=a'+b'-1,\ a>b\geqq 1),$$

ここで $u\in H^1(RP^n;Z_2)=Z_2$ は生成元。

Closed d-manifold V 上の(diff. real) k-plane bundle $\zeta \longrightarrow V$ に対して $p: RP(\zeta)\longrightarrow V$ を associated projective space bundle とする。$RP(\zeta)$ は closed $(d+k-1)$-manifold である。

ξ_n を RP^n 上の canonical line bundle とし，$m\xi_n$ を ξ_n の m 個の Whitney sum とする。$p_i: RP^n\times RP^n \longrightarrow RP^n$ $(i=1,2)$ を i-th factor への projection とし

$$\xi(n,m) = p_1^* m\xi_n \oplus p_2^* m\xi_n$$

とおく．$p : RP(\xi(n,m)) \longrightarrow RP^n \times RP^n$ (with fiber RP^{2m-1}) について [1, (23.3)] を用いて次の例を得る．

Example 4.10. $n = a' + b' - 1$, $m = a'$ $(a > b \geqq 1)$ のとき

$$wRP(\xi(n,m)) = 1 + p^*\{(u_1^{b'} + u_2^{b'}) + (u_1u_2)^{b'} + (u_1u_2)^{a'}\},$$

ここで $u_i = p_i^* u \in H^1(RP^n \times RP^n; Z_2)$ で $u \in H^1(RP^n; Z_2)$ は生成元。

Example 4.11. $n = b' - 1$, $m = a'$ $(b > a \geqq 1)$ のとき

$$wRP(\xi(n,m)) = 1 + p^*(u_1^{a'} + u_2^{a'}).$$

Remark 4.12. $w_{b'} = 0$ (for some $b \geqq 1$) ならば $w_i = 0$ $(b' \leqq i < 2b')$.

証明は $Sq^{i-b'} w_{b'} = w_i + \sum_{j=b'}^{i-1} \binom{b'+j-i-1}{j-b'} w_{i-j} w_j$ $(b' < i < 2b')$ を用いて i についての帰納法で得られる．

§5. Unoriented bordism classes of certain manifolds

ここでの目的は closed manifold M が (4.1) をみたすとき M の unoriented bordism 類 $[M]$ を調べることである．

Lemma 5.1. $\dim M = p' + q' + m$ $(p > q,\ q' > m \geqq 0)$ のとき

$$(w_{b'})^{\alpha} (w_{2b'})^{\beta} = 0 \quad (2 \leqq b \leqq q),$$

ただし α, β は次の (1)〜(5) とする：

(1) $\alpha = 1 + (p' + q')/b'$, $\beta = 1$.

(2) $\alpha = 1 + (p' - q' + s')/b'$, $\beta = 2 + (q' - s')/b'$ $(b < s \leqq q)$.

(3) $\alpha = 1 + p'/2b'$, $\beta = 1 + q'/b'$.

(4) $\alpha = 1 + t'/b'$, $\beta = 1 + (p' - 2t')/2b'$ $(q \leqq t \leqq p-2)$.

(5) $\alpha = 1$, $\beta = 2 + p'/2b'$.

$b = 1$ のときは(1)〜(5)のα, βに対して$(w_1)^{\alpha}(w_2)^{\beta-1} = 0$が成り立つ。また$wM = 1 + w_{b'} + w_{2b'}$ $(b \geqq 1)$のときは(1)〜(5)のα, βに対して$(w_{b'})^{\alpha-1}(w_{2b'})^{\beta-1} = 0$が成り立つ。

上のlemmaの証明はTh.4.3の(i),(ii)と$v_i = 0$ $(i > \dim M/2)$からStiefel-Whitney類に関する等式を書きその両辺に$w_{b'}w_{2b'}$をかけ($b=1$のときはw_1をかけ，$wM = 1 + w_{b'} + w_{2b'}$のときはそのまま)て得られる$w_{b'}$, $w_{2b'}$に関する等式の間の関係を調べて得られる。

Lemma 5.1からMのStiefel-Whitney数を調べてR. Thomの定理を用いて次の定理を得る。

Theorem 5.2. Mは(4.1)をみたすclosed manifoldとし，

(5.3) $\dim M = p_1' + \cdots + p_k'$ $(p_1 > \cdots > p_k \geqq 1,\ p' = 2^{p-1})$ とする。

(i) $k \geqq 4$で$(w_{b'})^{\dim M/b'} = 0$ $(2 \leqq b \leqq p_k)$ならば$[M] = 0$。

(ii) $\dim M$が奇数で$k \geqq 3$ならば$[M] = 0$。

Theorem 5.4. (i) $wM = 1 + w_{b'} + w_{c'}$ $(c > b \geqq 1)$で(5.3)において$k \geqq 2$ならば$[M] = 0$。

(ii) $wM = 1 + w_i$ $(i \geqq 1)$ならば$[M] = 0$。

Remark 5.5. Closed $(2n+2(=2^t))$-manifold $RP(n,n,0) = RP(p_1^*\xi_n \oplus p_2^*\xi_n \oplus p_3^*\xi_0)$ $(n = t'-1,\ t = 2,3,4)$ (cf. [6], [7])は

$$[RP(n,n,0)] \neq 0, \quad w_i RP(n,n,0) = 0 \ (i \geq 3).$$

References

[1] P.E. Conner and E.E. Floyd, Differentiable Periodic Maps, Erg. d. Math. 33, Springer-Verlag, 1964.

[2] D.M. Davis, The antiautomorphism of the Steenrod algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 235–236.

[3] W.S. Massey, On the Stiefel-Whitney classes of a manifold, Amer. J. Math. 82 (1960), 92–102.

[4] J. Milnor and J. Stasheff, Characteristic Classes, Ann. of Math. Studies 76, Princeton Univ. Press, 1974.

[5] N.E. Steenrod, Cohomology Operations, Ann. of Math. Studies 50, Princeton Univ. Press, 1962.

[6] R.E. Stong, On fibering of cobordism classes, Trans. Amer. Math. Soc. 178 (1973), 431–447.

[7] T. Yoshida, A note on vector fields up to bordism, Hiroshima Math. J. 8 (1978), 63–69.

On pseudofree S^1-actions on homotopy (4m+1)-spheres

角谷信一郎　(阪大理 D.2)

§1. Introduction

MontgomeryとYangは、[11]において、pseudofree S^1-actionという概念を定義し、7次元ホモトピー球面上のpseudofree S^1-actionを完全に分類した。そこでさらに高次元ホモトピー球面上のpseudofree S^1-actionを分類、研究することが問題となる。しかし、Montgomery-Yangの用いた方法は、7次元ホモトピー球面独特の性質に基づいており、そのまま拡張することは、困難の様に思われた。ところが、最近T. Petrieは、[12, 13]において、彼独自の方法で、(4m+3)次元ホモトピー球面上に数多くの興味深いpseudofree S^1-actionの例を構成した。(ただし[12, 13]の目的とすること、及びその背景は、pseudofree S^1-actionの研究だけでは、ない。)そこで、筆者は、その方法を利用して、(4m+1)次元($m \geq 3$)ホモトピー球面上に互に異なる無限に多くのpseudofree S^1-

actionの例を構成した（see §2 Theorem）。

さてMontgomery－Yangの結果を見ると、7次元ホモトピー球面上のpseudofree S^1－actionは、singular orbitとそのslice representation、そしてequivariant Pontrjagin classの3つの量で完全に分類されている。もちろん高次元では、この3つの量だけでは、完全な分類は無理であるが、これらが重要な着眼点であることは確かである。実際Petrie［13］の(4m+3)次元ホモトピー球面上のpseudofree S^1－actionの例は、singular orbitとそのslice representationに注目して構成されており、これらについてほぼ決定的な結果を得ている。そこで、筆者の場合は、equivariant Pontrjagin classに注目してみた。なお、S^1－actionがfreeの場合には、すでにHsiang［4］で、互に異なる数多くのfree S^1-actionの例を、orbit manifoldのPontrjagin classに着目して構成している。筆者の例は、このHsiangの結果を、(4m+1)次元ホモトピー球面上のpseudofree S^1－actionの場合に拡張したものとも考えられる。

§2. Notation と Theorem

<u>Definition 2.1.</u> ([11]) compact smooth manifold M 上の smooth S^1-action が、pseudofree であるとは、effective な S^1-action で、すべての isotropy group は有限群で、さらに singular orbit は有限個で、しかも空でないものを言う。

<u>Definition 2.2.</u> M を compact pseudofree S^1-manifold とする。このとき $I(M)=\{(S^1/\mathbb{Z}_n, \{V_x\}) \mid S^1/\mathbb{Z}_n$ は M の singular orbit, $\{V_x\}$ は $x\in S^1/\mathbb{Z}_n \subset M$ での slice representation space の同値類$\}$ と置く。

さて、S^1 を絶対値1の複素数と考える。$p=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ を正整数の列とする。このとき m 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ 上の S^1-action φ_p を

$$\varphi_p(\lambda, (z_1, z_2, \ldots, z_m)) = (\lambda^{p_1} z_1, \lambda^{p_2} z_2, \ldots, \lambda^{p_m} z_m)$$

によって定める。さらに $S^{2m-1}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ で $\mathbb{C}^m$ の中の単位球面で、φ_p を制限して得られる S^1-action を、持つものを表わすことにする。このとき $S^{2m-1}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ 上の S^1-action が、pseudofree (resp. free)

であるためには、$(p_i, p_j) = 1$ for $i \neq j$ かつ $p_i > 1$ for some $1 \leqq i \leqq m$ (resp. $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = 1$) であることが必要かつ十分である。

<u>Definition 2.3.</u> G_i $(i \geqq 1)$ で球面の安定ホモトピー群 $\pi_{n+i}(S^n)$ $(n \geqq i+2)$ を表わし、$\mathcal{S}(k) = \prod_{i=1}^{k} |G_i|$ と置く。ここで $|G_i|$ は、群 G_i の位数である。

ES^1 で universal S^1-space を表わす。このとき次の Theorem が得られる。

<u>Theorem</u> $m \geqq 3$, $p_1, p_2, \ldots, p_{2m+1}$ を正整数で $(p_i, p_j) = 1$ for $i \neq j$ かつ $(p_i, \mathcal{S}(4m-1)) = 1$ for $1 \leqq i \leqq 2m+1$ を満すものとする。このとき無限個の closed pseudofree (free) S^1-manifold Σ が存在して、次の性質を満している。

(i) Σ は $S^{4m+1}(p_1, p_2, \ldots, p_{2m+1})$ と S^1-homotopy equivalent である,

(ii) $I(\Sigma) = I(S^{4m+1}(p_1, p_2, \ldots, p_{2m+1}))$,

(iii) total equivariant Pontrjagin class

$$p(ES^1_{\mathfrak{p}} \times_{S^1} T\Sigma) \in H^*(ES^1_{\mathfrak{p}} \times_{S^1} \Sigma ; \mathbb{Z})$$

$$\cong H^*(ES^1_{\mathfrak{p}} \times_{S^1} S^{4m+1}_{\mathfrak{p}}(p_1, \dots, p_{2m+1}) ; \mathbb{Z})$$

は、すべて互に異っている。（ここで $T\Sigma$ は Σ の tangent bundle である。）

Remark 2.4.

$H^*(ES^1_{\mathfrak{p}} \times_{S^1} S^{4m+1}_{\mathfrak{p}}(p_1, \dots, p_{2m+1}) ; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c]/(qc^{2m+1})$
（ただし $\deg c = 2$，$q = \prod_{i=1}^{2m+1} p_i$）であり，Theorem の(ii)より

$$p(ES^1 \times_{S^1} T\Sigma) \equiv \prod_{i=1}^{2m+1} (1 + p_i^2 c^2) \mod q$$

となっている。

残りの紙面で、この Theorem の証明の方針を解説する。なお詳細は Kakutani [6,7] を参照していただきたい。

§3. Petrie の構成法について

まず、Petrie [12,13] の構成法を，解説する。

Petrie は 次の Problem を考えた。

<u>Problem</u> G を compact Lie group, X を closed smooth G-manifold とする。このとき次の条件を満す (Y, f) を沢山（組織的に）求めよ。ただし Y は closed smooth G-manifold で、$f : Y \to X$ は G-map で、G-action を forget すると、homotopy equivalence となっている。

Petrie は、この Problem を解く program を与えた。それは、次の3つの問題 (3.1), (3.2), (3.3) を解いて行くことである。

(3.1) quasi-equivalence

ξ と η を X 上の smooth G-vector bundle とする。このとき、$\omega : \xi \to \eta$ proper, fiber-preserving な G-map で、各 fiber 上 degree 1 なもの（これを quasi-equivalence と呼ぶ）は、いつ存在するか？

(3.2) G-transversality

もし quasi-equivalence $\omega : \xi \to \eta$ が存在したとき、いつ $\theta : \xi \to \eta$ proper, smooth G-map で、θ は η の zero-section ($\cong X$) に transversal で、ω と θ は proper G-homotopic である様なものが存在するか？

(3.3) G-surgery

もし (3.2) の $\theta : \xi \to \eta$ が存在したとき、$\overline{Y} = \theta^{-1}(X)$, $\overline{f} = \theta|\overline{Y} : \overline{Y} \to X \subset \eta$ と置くと、$\overline{Y}$ は closed smooth G-manifold, $\overline{f}$ は smooth G-map となっているが（さらに $T\overline{Y} = \overline{f}^*(TX - \eta + \xi)$ in $KO_G(\overline{Y})$ となっている。）、$(\overline{Y}, \overline{f})$ を equivariant に surgery して、Problem の要求する (Y, f) を得られないか？

これら (3.1), (3.2), (3.3) は、[13] でそれぞれ深く考察されているが、筆者もこの方針に従って、特に $G = S^1$, $X = S^{4m+1}(p_1, p_2, \cdots, p_{2m+1})$ の場合に考えて行く。なお Theorem を証明するためには、(3.2) については、free action の場合のみが問題となるので、全く問題点はなく、(3.3) もすでに [13] でよい結果

が得られているので、大きな問題点はない。従って (3.1) を考察することが、Key point となっている。

§4. Theorem の証明の outline

この section では、$M = S^{4m+1}(p_1, p_2, \ldots, p_{2m+1})$ とし、$p_1, p_2, \ldots, p_{2m+1}$ は、Theorem の仮定を満していものとする。

まず、(3.2) に対応する次の Proposition が証明できる。

<u>Proposition 4.1.</u> V と W を complex S^1-representation space で次の条件を満すものとする。

(a) $V|\mathbb{Z}_{p_i} = W|\mathbb{Z}_{p_i}$ $(1 \leqq i \leqq 2m+1)$,

(b) $\omega : M \times V \longrightarrow M \times W$ quasi-equivalence が存在している。

$\Longrightarrow$ ${}^{\exists}N$: oriented, connected, closed, pseudofree S^1-manifold と ${}^{\exists}\bar{\theta} : N \longrightarrow M$ smooth S^1-map ;

(i) $\deg \bar{\theta} = +1$,

(ii) $TN = \bar{\theta}^*(TM) - \underline{\underline{W}} + \underline{\underline{V}}$ in $KO_{S^1}(N)$,

(iii) $I(N) = I(M)$。

このPropositionは、ω が $\theta : M \times V \to M \times W$ smooth proper S^1-mapで、θ が $M \times \{0\}$ なるものに proper S^1-homotopic になっていることよりわかる。（これは、条件(a)に注意すると、free action の場合の equivariant transversality の問題である。see [8], [9], [13]。）

<u>Definition 4.2.</u> ξ を M 上の S^1-vector bundle とする。このとき、$p(\xi/S^1) \in H^*(M/S^1 ; \mathbb{Q})$ を、

$$\pi^*(p(\xi/S^1)) = p(ES^1 \times_{S^1} \xi) \in H^*(ES^1 \times_{S^1} M ; \mathbb{Q})$$

によって定める。ここで、$\pi : ES^1 \times_{S^1} M \to M/S^1$ は natural projection である。（このとき $\pi^* : H^*(M/S^1 ; \mathbb{Q}) \to H^*(ES^1 \times_{S^1} M ; \mathbb{Q})$ は isomorphism となっている。）

M/S^1 は orientable な rational homology manifold である。そこで fundamental class $[M/S^1] \in H_{4m}(M/S^1 ; \mathbb{Z})$ $(\cong \mathbb{Z})$ を1つ固定しておく。また $L(-)$ を Hirzebruch の L-polynomial とする。

次の Proposition は、(3.3) に対応している。

Proposition 4.3. もし、

$$\langle L(p((TM-\underline{\underline{W}}+\underline{\underline{V}})/S^1)), [M/S^1]\rangle = \langle L(p(TM/S^1)), [M/S^1]\rangle$$

ならば、$(N, \bar{\theta})$ を equivariant surgery して、次の条件を満す (Σ, f) を得る。ただし Σ: oriented, closed, pseudofree S^1-manifold, $f: \Sigma \to M$: S^1-map であって、

(i) f は S^1-homotopy equivalent かつ $\deg f = +1$,

(ii) $T\Sigma = f^*(TM) - \underline{\underline{W}} + \underline{\underline{V}}$ in $KO_{S^1}(\Sigma)$,

(iii) $I(\Sigma) = I(M)$。

この Proposition は、Petrie [13; Theorem 11.1], Iberkleid [5], および Atiyah [2], Atiyah-Bott [3] の G-signature theorem 等を組み合わせると、得られる。

以上により、次の lemma が示されると、直ちに Theorem が得られる。

Lemma 4.4. $\exists x = [V] - [W] \in R(S^1)$; nx $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は、次を満している。

(i) $x | \mathbb{Z}_{p_i} = 0 \quad (1 \leqq i \leqq 2m+1)$,

(ii) $\omega : M \times V \longrightarrow M \times W$ quasi-equivalence が存在している,

(iii) $\langle L(p((TM + \underline{\underline{nx}})/S^1)), [M/S^1] \rangle = \langle L(p(TM/S^1)), [M/S^1] \rangle$,

(iv) $p(ES^1 \times_{S^1} (TM + \underline{\underline{nx}})) \in H^*(ES^1 \times_{S^1} M ; \mathbb{Z})$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ はすべて互に異っている。

このlemmaの条件(ii)が、問題(3.1)と対応している。実は、条件(i)の下では、条件(ii)は、

(ii)′ $J([S^{4m+1}(1, \ldots, 1) \times_{S^1} V] - [S^{4m+1}(1, \ldots, 1) \times_{S^1} W]) = 0 \quad \text{in } J(\mathbb{C}P^{2m})$,

と同値になることがわかる(Kakutani [6; Theorem 6.2])。

さて、(ii)′, (iii), (iv)を満す $x \in R(S^1)$ が存在することは、Hsiang [4] の idea を利用すると、わかる。さらに(i)の条件を満すものが存在することは、

$\mathbb{C}P^{2m}$ と $L^{2m}(q)$ $(= S^{4m+1}(1,\dots,1)/\mathbb{Z}_q$: lens space, $q = \prod_{i=1}^{2m+1} p_i)$ の K-group (see for example Atiyah [1], Mahammed [10]) を利用して確かめられる。

References

[1] M. F. Atiyah : K-theory, Benjamin, 1967.

[2] ―――――― : Elliptic operators and compact groups, Lecture Notes in Math. 401, Springer, 1974.

[3] M. F. Atiyah and R. Bott : A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes : II. Applications, Ann. of Math., 88 (1968), 451-491.

[4] W. C. Hsiang : A note on free differentiable actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres, Ann. of Math., 83 (1966), 266-272.

[5] W. Iberkleid : Pseudo-linear spheres, Michigan Math. J., 25 (1978), 359-370.

[6] S. Kakutani : Equivariant KO-rings and J-groups of

spheres which have linear pseudofree S^1-actions, to appear.

[7] ―――――― : Some examples of pseudofree S^1-actions on homotopy (4m+1)-spheres, preprint.

[8] S. Landweber : On equivariant maps between spheres with involutions, Ann. of Math., 89 (1969), 125-137.

[9] C.N. Lee and A.G. Wassermann : On the groups JO(G), Memoirs of A.M.S., 159 (1975).

[10] M.N. Mahammed : A propos de la K-théorie des espaces lenticulaires, C.R. Acad. Sc. Paris, 271 (1970), 639-642.

[11] D. Montgomery and C.T. Yang : Differentiable pseudo-free circle actions on homotopy seven spheres, Lecture Notes in Math. 298, Springer (1971).

[12] T. Petrie : Equivariant quasi-equivalence, transversality and normal cobordism, Proc. Internat. Congr. Math. (Vancouver 1974), 534-541.

[13] T. Petrie : Pseudoequivalences of G-manifolds, Proc. Sympos. Pure Math., 32 (1978), 169-210.

η－不変量と共形的はめ込み

京大 理学部　坪井堅二

§0 Introduction

定義

1) M：C^∞-manifold，g, g'：M上のRiemannian metrics

$g \sim g'$：conformally related

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists f : M \longrightarrow \mathbb{R}_+ : C^\infty$ s.t. $g' = f \cdot g$

2) $(M, g), (M', g')$：Riemannian manifolds

$(M, g) \cong (M', g')$：Conformally isomorphic

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists \varphi : M \cong M' : C^\infty$-diffeomorphism s.t. $g \sim \varphi^* g'$

3) (M, g)：Riemannian manifold

g_0：standard metric on $\mathbb{R}^N$

$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$：conformal immersion

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ φ：C^∞-immersion かつ $g \sim \varphi^* g_0$

"conformal" は "isometric" よりも 当然 弱い 条件 で

である。すなわち，isometric ⇒ conformally isomorphic，conformal に immerse できない ⇒ isometric に immerse できない etc.

<u>Example</u> $S^n - \{\text{one point}\} \cong \mathbb{R}^n$ これは，よく知られているように，stereographic projection による。

$M = (M, g)$：Riemannian manifold がある codimension の Euclid 空間にいつ isometric（又は conformal）に immerse できるかという問題を考える。一般に"十分大きい"codimension ではる isometric に immerse できる（従って conformal にも immerse できる）ということはわかっているが，"あまり大きくない"codimension では，isometric に immerse できるかどうかは，入るとも入らないともわからない場合が多い。Chern, Simons は [3]，[8] において，Chern - Simons invariant 又は S-character と呼ばれる conformal invariant を定義して，それを用いて M がある codimension の Euclid 空間に conformal に immerse できるための必要条件（従って，isometric に immerse できるための必要条件でもある）を与えた。Chern - Simons invariant は Millson が [6] において，正定曲率の standard metric を与えた Lens space に対して計算したものなどがあるが，一般には具体的に計算することは困難な

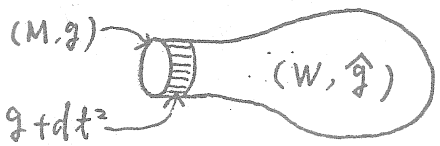
場合が多い。一方, Atiyah, Patodi, Singer は[1]において closed oriented $4k-1$-dimensional Riemannian manifold M に対して, その Eta invariant と呼ばれる実数を定義した。Eta invariant は manifold の種類, metric の種類という両面において Chern-Simons invariant よりも広い計算の可能性をもっている。そこで, Chern-Simons invariant と Eta invariant とを結びつけることにより, closed oriented $4k-1$-dimensional Riemannian manifold M がある codimension の Euclid 空間に conformal に immerse できるための必要条件を Eta invariant によって表現し, それを用いて新しい "nonvanishing Chern-Simons invariant" の例をつくることがここにおける話題である。

§1. Chern-Simons invariant

以下, $M=(M,g)$: closed oriented $4k-1$-dimensional Riemannian manifold とする。$\dim M \not\equiv 0 \pmod 4$ であるから, よく知られているように, M 又は $2M = M \cup M$ は oriented cobordism の意味において zero-cobordant である。そこで, 以下簡単のため, M: zero-cobordant とする。M: not zero-cobordant の場合は M の代わりに 2M をとることにより, 以下の

議論は全く同様に成り立つ。

W: compact oriented $4k$-dimensional manifold with boundary M とする。W には $\partial W = M$ の適当な collar neighborhood $M \times [0,1]$ で M の metric g と $[0,1]$ の standard metric dt^2 の product $g + dt^2$ になっているような metric $\hat{g}$ を任意にひとつとって与える。(partition of unity により上のような $\hat{g}$ をつくることは可能である。)



P_i: i-th Pontrjagin polynomial

$Q = Q(a_1, \cdots, a_k)$: $\mathbb{Z}$-coefficient polynomial of weight k (i.e. $Q(a_1^4, a_2^8, \cdots, a_k^{4k})$: homogeneous of degree $4k$) とする。このとき

$Q(P(\hat{g})) = Q(P_1(\hat{g}), \cdots, P_k(\hat{g}))$: $4k$-form on W

<u>定義</u> $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni SQ(P_1, \cdots, P_k)(M, g) \underset{\text{def.}}{=} \overline{\int_W Q(P(\hat{g}))}$

(ここで $\overline{}$ は mod $\mathbb{Z}$ reduction を表わす)

これを，$Q(P_1, \cdots, P_k)$ に対する (M, g) の Chern-Simons invariant と呼ぶ。

<u>Fact</u> (1) $SQ(P_1, \cdots, P_k)(M, g)$ は W，W における M の collar neighborhood のとり方，collar neighborhood における

product metric の W への拡張 $\tilde{g}$ のとり方に depend せず (M, g) によって決まる

(2) さらに、$SQ(P_1, \cdots, P_k)(M, g)$ は (M, g) の conformal structure のみに depend する。すなわち、g, g' を M 上の conformally related な metrics とするとき $SQ(P_1, \cdots, P_k)(M, g) = SQ(P_1, \cdots, P_k)(M, g')$ である。(c.f. [9] §1.)

$P_i^{\perp}$: i-th inverse Pontrjagin polynomial

(i.e. $(1 + P_1 + \cdots + P_i + \cdots)(1 + P_1^{\perp} + \cdots + P_i^{\perp} + \cdots) = 1$)

$1 \leqq {}^{\forall}s \leqq k$ に対して上記と同様に、M の conformal invariant $SQ(P_s^{\perp}, \cdots, P_k^{\perp})(M, g)$ が定義される。

次の Theorem は Simons [8] の Theorem 5.4 と Theorem 5.15 からただちに出る。

<u>Key Theorem</u> M が codimension d で R^{4k-1+d} に conformal に immerse できる。$\Rightarrow SQ(P_s^{\perp}, \cdots, P_k^{\perp})(M, g) = 0$ for ${}^{\forall}s \geqq [\frac{d}{2}] + 1$ & ${}^{\forall}Q$: $\mathbb{Z}$-coeff. poly. of weight k

Key Theorem の一番弱い形として、$s = k$ とおいて、次の Corollary が出る。

<u>Corollary</u> M が codimension $2k-1$ で $\mathbb{R}^{6k-2}$ に

conformalにimmerseできる。$\Rightarrow SP_k^{\pm}(M,g)=0$

§2. Eta invariant

定義 L_k：Hirzebruch L-polynomial のweight k term

sign(W)：cup productによって定義されるsymmetric bilinear form $H^{2k}(W,\partial W;\mathbb{R})\otimes H^{2k}(W,\partial W;\mathbb{R})\longrightarrow \mathbb{R}$ のsignatureとして、

$\mathbb{R}\ni \eta(M)\,(=\eta(M,g)) \overset{\text{def}}{=} \int_W L_k(P_1(\hat{g}),\cdots,P_k(\hat{g})) - \mathrm{sign}(W)$

これを、(M,g)のEta invariantと呼ぶ。

Fact $\eta(M)$は(M,g)のconformal structureのみで決まる。

（証明は§1. Factの証明と同様である。）

この定義のままでは、Eta invariantはsign(W)という項がついた分だけ、かえってChern-Simons invariantよりも計算が困難になってしまう。しかしここで、Atiyah, Patodi, Singer[1]による次の結果がある。

Theorem $\Gamma=C^\infty(M,\bigoplus_p\Lambda^{2p}T^*M)$：even forms on M

$D:\Gamma\longrightarrow\Gamma$：first order self-adjoint elliptic differential operator defined by

$D\phi=(-1)^{k+p+1}(*d-d*)\phi$ for $2p$-form ϕ

（ここに $*$：Hodge's star operator）

λ：eigenvalue of D with (finite) multiplicity $m(\lambda)$

とする。$\forall s \in \mathbb{C}$ に対して．$\eta(s) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{\lambda \neq 0} \mathrm{sign}(\lambda) \cdot m(\lambda) \cdot |\lambda|^{-s}$
($\mathrm{sign}(\lambda) = 1$ if $\lambda > 0$, -1 if $\lambda < 0$) とおくと．$\mathrm{Re}(s)$
が十分大なるとき．$\eta(s)$ は絶対収束して．holomorphic function を表わす。さらに．$\eta(s)$ は meromorphic function として全平面に解析接続され．0 を pole にもたない。
このとき．$\eta(M, g) = \eta(0)$ が成り立つ。

上の Theorem により，$\eta(M)$ には Chern-Simons invariant よりも広い計算の可能性が開ける。例えば，M が orientation-reversing isometry をもつ Riemannian manifold を有限群の free action で割った形をしている場合には．$\eta(M)$ は Atiyah, Singer の G-signature formula により．計算されることが [4] で示された。

<u>Example</u> (C.f. [10] §1.) $p \geq 1$, $q_1, \cdots, q_{2k}$: relatively prime to p として．$M = L(p; q_1, \cdots, q_{2k}) = S^{4k-1}/\sim$: Lens space
($\mathbb{C}^{2k} \supset S^{4k-1} \ni (z_1, \cdots, z_{2k}) \sim (e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}q_1}{p}} z_1, \cdots, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}q_{2k}}{p}} z_{2k})$)
とする。M の metric g は次の条件をみたす限り任意でよいとする。(正定曲率の standard metric すなわち．S^{4k-1} の standard metric から induce された metric は条件を明らかにみたしている。)

(☆) $r : S^{4k-1} \longrightarrow M$: covering projection として.

(S^{4k-1}, r^*g) は orientation-reversing isometry をもつ。

このとき、

(☆☆) $\eta(M) = \dfrac{(-1)^k}{p} \displaystyle\sum_{s=1}^{p-1} \prod_{j=1}^{2k} \cot \frac{s q_j \pi}{p}$ となる。

<u>§3. Eta invariants and Conformal immersions</u>

<u>定義</u> $N_k \underset{\text{def.}}{=} \min\{ n \in \mathbb{N} \mid n \cdot L_k : \mathbb{Z}\text{-coeff. poly.} \}$

$$= \prod_{q:\text{prime},\, 3 \le q \le 2k+1} q^{\left[\frac{2k}{q-1}\right]}$$

($N_1 = 3$, $N_2 = 45$, $N_3 = 945$, $N_4 = 14175$ etc)

$$(1 + p_1 + \cdots + p_i + \cdots)(1 + p_1^\perp + \cdots + p_i^\perp + \cdots) = 1$$

$\Rightarrow p_i = -p_i^\perp - p_{i-1}^\perp p_1 - \cdots - p_1^\perp p_{i-1}$ であるから

induction により $\exists Q_k$: $\mathbb{Z}$-coeff. poly. of weight k

s.t. $N_k \cdot L_k(p_1, \cdots, p_k) = Q_k(p_1^\perp, \cdots, p_k^\perp)$

このとき、$\delta Q_k(p_1^\perp, \cdots, p_k^\perp)(M, g) = \overline{\int_W Q_k(p_1^\perp(\hat{g}), \cdots, p_k^\perp(\hat{g}))}$

$= \overline{N_k \int_W L_k(p_1(\hat{g}), \cdots, p_k(\hat{g}))} = \overline{N_k \{ \int_W L_k(p(\hat{g})) - \mathrm{sign}(W) \}}$

$= \overline{N_k \cdot \eta(M)}$ 従って key Theorem によって次の結果が出る。

<u>Proposition</u> M が codimension 1 で $\mathbb{R}^{4k}$ に conformal に immerse できる。$\Rightarrow$ $\overline{N_k \cdot \eta(M)} = 0$ i.e. $N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z}$

しかし、codimension 1 ではあまりおもしろくないので、

もっと codimension を上げることを考える。

$Q_k(p_1^\perp, \cdots, p_k^\perp) = n_k p_k^\perp + (\text{decomposable part of } p_1^\perp, \cdots, p_{k-1}^\perp)$

($p_i^\perp = -p_i - p_{i-1} p_1^\perp - \cdots - p_1 p_{i-1}^\perp$ であるから induction により)

$= n_k p_k^\perp + \underbrace{(\text{decomposable part of } p_1, \cdots, p_{k-1})}_{\circledast}$

すなわち $\overline{N_k \cdot \eta(M)} = S Q_k(p_1^\perp, \cdots, p_k^\perp)(M, g)$

$\qquad = n_k S p_k^\perp(M, g) + S(\circledast)(M, g)$

<u>定義</u> (M, g) : partially Pontrjagin flat

$\overset{\Leftrightarrow}{\text{def.}}$ $R(p_1(\Omega), \cdots, p_\ell(\Omega)) = 0$ as differential 4ℓ-form on M for $^\forall R$: monomial of weight $\ell \geqq [\frac{k+1}{2}]$

(ここで、$p_i(\Omega)$: M の metric g に対する M 上の i-th Pontrjagin form)

<u>Lemma</u> (c.f. [10] §3.) (M, g) : partially Pontrjagin flat とする。

(i) $\pi : O(M) \longrightarrow M$: orthonormal frame bundle として、

$\pi^* : H^{4k-1}(M; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{4k-1}(O(M); \mathbb{R}/\mathbb{Z})$: injective

$\Rightarrow S(\circledast)(M, g) = 0$

(ii) $H^{4i}(M; \mathbb{Z}) \ni P_i(TM)$: i-th Pontrjagin class of TM とする。

$^\exists C \in \mathbb{N}$ s.t. $C \cdot P_i(TM) = 0$ for $1 \leqq ^\forall i \leqq [\frac{k}{2}] \Rightarrow C \cdot S(\circledast)(M, g) = 0$

<u>Remarks</u> 1) (M, g) : conformally flat i.e. flat な Euclid 空間と local に conformally isomorphic

$\Rightarrow P_i(\Omega)=0$ for $^\forall i \geqq 1 \Rightarrow (M,g)$: partially Pontrjagin flat

2) M : parallelizable $\Rightarrow \pi^* : H^q(M;A) \to H^q(O(M);A)$: injective for $^\forall q$, $^\forall A$: abelian group

3) M : stably parallelizable $\Rightarrow P_i(TM)=0$ for $^\forall i \geqq 1$

Key Theorem の Corollary 及び 上の Lemma により以下の結果が出る。

<u>Theorem 1</u> (M,g) : partially Pontrjagin flat かつ $\pi^* : H^{4k-1}(M;\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{4k-1}(O(M);\mathbb{R}/\mathbb{Z})$: injective と仮定する。このとき、M が codimension $2k-1$ で $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に immerse できる。

$$\Rightarrow \begin{cases} N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M : \text{zero-cobordant} \\ 2N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M : \text{not zero-cobordant} \end{cases}$$

特に $k=1$ すなわち $\dim M=3$ の場合を考える。

よく知られているように、M^3 : zero-cobordant, parallelizable で Theorem 1 の仮定をみたす。$N_1=3$ より、

<u>Corollary</u> 3-dimensional closed oriented Riemannian manifold M が $\mathbb{R}^4$ に conformal に immerse できる。

$\Rightarrow 3 \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z}$

一方、Hirsh - Smale Theory により M は smooth

には必ず $\mathbb{R}^4$ に immerse できる。

<u>Theorem 2</u> M: partially Pontrjagin flat かつ $\exists c \in \mathbb{N}$ s.t. $c \cdot p_i(TM) = 0$ for $1 \leq {}^{\forall} i \leq [\frac{k}{2}]$ と仮定する。このとき M が $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に immerse できる。

$$\Rightarrow \begin{cases} c N_k \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{zero-cobordant} \\ 2c N_k \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{not zero-cobordant} \end{cases}$$

(<u>注</u> c: even のときには、M: not zero-cobordant でも $c \cdot N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z}$ であることがいえる。)

<u>§4. Examples</u>

<u>Example 1</u> 3次元正定曲率空間は完全に分類されていて、S^3 を巡回群、広い意味での複多面体群 又は それらの直積で割ったものしかない。(c.f. 中岡[7]) S^3 を巡回群で割ったもの すなわち Lens space については Millson が[6]においてその Chern-Simons invariant を調べているので、ここでは複多面体群で割ったものについて調べてみる。metric も 正定曲率の standard metric を含む、もう少し一般な metric を考えることにする。

S^3 = Lie group of length one quaternions

$\alpha : S^3 \cong SU(2)$, $\alpha(z_1 + z_2 j) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$

$(z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1)$

$S^3 \supset G$: finite subgroup として G は S^3 に right multiplication によって作用するものとする。

商空間 S^3/G には次の条件をみたす metric g を任意にひとつ与える。S^3 の standard metric から induce される正定曲率の metric なら明らかにこの条件をみたす。

(☆) $r : S^3 \longrightarrow S^3/G$: covering projection として (S^3, r^*g) は orientation-reversing isometry をもつ

$G \ni h$ に対して $e^{\theta(h)}, e^{-\theta(h)}$: eigenvalues of $\alpha(h)$ とするとき $(S^3/G, g)$ の Eta invariant は次の式で計算される。

(☆☆) $\eta(S^3/G) = \dfrac{1}{|G|} \sum_{h \neq 1} \cot^2\left(\dfrac{\theta(h)}{2}\right)$ ($|G|$: order of G)

G として次の3つを考える。(c.f. 中岡[7])

$O^* = \{$generated by $P = i,\ Q = j,\ B = -\dfrac{1+i+j+k}{2},\ R = \dfrac{i-k}{\sqrt{2}}\}$

$\cong$ 複8面体群 $(|O^*| = 48)$

$T^* = \{$subgroup of O^* generated by $P, Q, B\}$

$\cong$ 複4面体群 $(|T^*| = 24)$

$I^* = \{$generated by $U = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} + \dfrac{1}{2}i + \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}j,\ V = -i\}$

$\cong$ 複20面体群 $(|I^*| = 120)$

このとき (☆☆) により $\eta(S^3/T^*), \eta(S^3/O^*), \eta(S^3/I^*)$

を計算機で求めることができる。

$\eta(S^3/T^*)=1.36111\cdots$, $\eta(S^3/O^*)=1.68055\cdots$, $\eta(S^3/I^*)=2.00555\cdots$

従って、Theorem 1 の Corollary により S^3/T^*, S^3/O^*, S^3/I^* はいずれも $\mathbb{R}^4$ に conformal に immerse できない。

<u>Example 2</u> $L^{15}=L(137;1,10,100,41,136,127,37,96)$: 15-dimensional Lens space とおく。これは Millson が [6] において正定曲率の standard metric を与えた Lens space の Chern-Simons invariant を調べたときに用いた Example である。ここでは L^{15} の metric g は次の条件をみたす限り任意でよいとする。(standard metric は明らかにこの条件をみたす)

(i) $p: S^{15}\to L^{15}$: covering projection として (S^{15}, p^*g) : orientation-reversing isometry をもつ

(ii) g : partially Pontrjagin flat

このとき $\eta(L^{15})$ は §2 の一番最後の formula で計算できる。一方、Ewing, Moolgavkar, Smith, Stong [5] の結果により L^{15} : stably paralelizable とわかる。従って $p_i(TL^{15})=0$ for $i\geq 1$ で、Theorem 2 で $c=1$ ととれる。$N_4=14175$ であるから

$2CN_4\,\eta(L^{15}) \bmod \mathbb{Z} = 0.8759\cdots$

従って．L^{15}は codimension 7で$\mathbb{R}^{22}$に conformalに immerseできない。一方．L^{15}は stably parallelizableであるから．Hirsh-Smale Theoryにより．$\mathbb{R}^{16}$に smoothに immerseできる。

References

[1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77(1975), 43-69.

[2] M.F. Atiyah and I.M. Singer, The index of elliptic operators III, Ann. of Math. 87(1968), 546-604.

[3] S.S. Chern and J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math. 99(1974), 48-69.

[4] H. Donnelly, Eta invariants for G-spaces, Indiana Univ. Math. J. 27(1978), 889-918.

[5]. J. Ewing, S. Moolgarkar, L. Smith and R.E. Stong, Stable parallelizability of Lens spaces,

J. Pure Appl. Algebra 10(1977), 177-191.

[6] J.J. Millson, Examples of nonvanishing Chern-Simons invariants, J. Differential Geometry 10(1974), 589-600.

[7] 中岡稔，不動点定理とその周辺，岩波書店(1977)

[8] J. Simons, Characters associated to a connection, (to appear)

[9] K. Tsuboi, Eta invariants and Chern-Simons invariants, 数理研講究録 (to appear)

[10] K. Tsuboi, Eta invariants and conformal immersions, Publ. RIMS, Kyoto Univ. (to appear)

K群の分類空間のBanach代数的考察

藤井一幸　　九州大学理学部

Hを$\mathbb{C}$上の可分Hilbert空間，BをそのCalkin代数とする。Bのユニタリー元全体を$U(B)$，Bの元で巾等，hermitianかつそのスペクトルが$\{0,1\}$であるようなものの全体を$\hat{ID}_*(B)$とするときこれらはBanach多様体になる。このときコンパクト，ハウスドルフ空間Xに対し同型

$$K(X) \cong [X, U(B)], \quad K^{-1}(X) \cong [X, \hat{ID}_*(B)]$$

が知られており，Bottの周期性定理は

$$U(B) \simeq \Omega \hat{ID}_*(B), \quad \hat{ID}_*(B) \simeq \Omega U(B) \quad \text{ホモトピー同値}$$

という形で述べられる（[2]，[16]，[17]）。

§1においてある種のBanach多様体に対し接続，測地線などの概念を定義できることを示し，§§2-3において上記の$U(B)$，$\hat{ID}_*(B)$（$\hat{ID}_*(2,B)$）等を定義し，Banach多様体になることを示し，更に測地線などを求める。§4においてホモトピー同値$U(B) \to \Omega \hat{ID}_*(B)$を測地線を用いて具体的に与える。

§1　Banach多様体の幾何学

本節では有限次元多様体又はHilbert多様体に

おいて定義される接続，共変微分，測地線，曲率等の概念をある種の Banach 多様体に対して拡張を試みる。

M を $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間 E を座標空間とする Banach 多様体とする。M はある Banach 空間 V の正則部分多様体であるとし，各点 $p \in M$ における接ベクトル空間 $T_p(M)$ は V の部分空間と考える。このとき接ベクトル束 $T(M)$ は $V \times V$ の部分空間である。更に M は

(1.1) 各点 $p \in M$ に対し p に関してなめらかな射影

$$G(p): V \rightarrow T_p(M) \subset V$$ が定まる。

を満たすものとする。$G(p)$ をガウス写像と呼ぶ。このとき $T_p(M)$ は V の相補空間である。即ち，$N_p(M)$ を $G(p)$ の核として $T_p(M) \oplus N_p(M) = V$ が成り立つ。なお Hilbert 多様体の場合は内積を用いて自然に $G(p)$ が定義できる。さて M 上の C^∞-ベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$ とするとき，$X \in \mathfrak{X}(M)$ は写像 $X: M \rightarrow T(M) \subset V \times V$ で $X_p = (p, \phi_p)$，$\phi_p \in T_p(M)$ $(\forall p \in M)$ なるものである。
このとき $\phi: M \rightarrow V$ が C^∞ であることと X が C^∞ であることは同値であり，X を ϕ と同一視し，$X \in \mathfrak{X}(M)$ は C^∞-写像 $X: M \rightarrow V$ とみなす。

(1.2) 定義　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して接続 $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$

を　$(\nabla_X Y)_p = G_p \circ (dY)_p(X_p)$　と定義する。

これの局所表示は次のようになる。点 $p \in M$ のまわりの座標近傍系を (U, φ), $\varphi : E \to U$, $\varphi(0) = p$ とする。X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して C^∞-写像 $\xi, \eta : E \to E$ が存在して局所的に $X_{\varphi(z)} = (d\varphi)_z(\xi_z)$, $Y_{\varphi(z)} = (d\varphi)_z(\eta_z)$ と一意的に表わせる。これより計算すると

$$(\nabla_X \varphi)_{\varphi(z)} = (d\varphi)_z((d\eta)_z(\xi_z)) + G_{\varphi(z)} \circ (d^2\varphi)_z(\eta_z, \xi_z)$$

が得られる。従って　$\nabla_X \varphi \in \mathfrak{X}(M)$ がわかる。

この定義は Hilbert 多様体の場合の定義と一致し，よく知られた接続の公式（[5]）をみたすことは容易にわかる。

次に共変微分を定義しよう。p_t $(t \in I)$ を M 上の C^∞-曲線（$p_0 = p$），Y_t を p_t に沿うベクトル場，$Y_t \in T_{p_t}(M)$ とする。

(1.3) 定義　共変微分 $\frac{\delta Y_t}{\delta t}$ を　$\left(\frac{\delta Y_t}{\delta t}\right)_{p_t} = G_{p_t} \circ \left(\frac{dY_t}{dt}\right)_{p_t}$ と定義する。

(1.4) 定義　恒等的に $\frac{\delta Y_t}{\delta t} = 0$ ならば Y_t を曲線 p_t に沿う平行ベクトル場と呼ぶ。

このことは各 $t \in I$ に対して　$Y_t \in T_{p_t}(M)$, $\frac{dY_t}{dt} \in N_{p_t}(M)$ であることを意味する。$\dot{p}_t = \frac{dp_t}{dt}$ は p_t に沿うベクトル場である。

(1.5) 定義　$\dot{P}_t$ が平行ベクトル場であるとき P_t を測地線と呼ぶ。

これは　$\dot{P}_t \in T_{P_t}(M)$, $\ddot{P}_t \in N_{P_t}(M)$ を意味する。

次に曲率を定義しよう。

(1.6) 定義　$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して 次のように定義する

$$K(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

［注意］ 以上の概念は M上の Banachベクトル束に対しても定義できるが，ページ数の関係上 ここでは省略する。

§2 K群の表現空間

H を $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ 上の可分 Hilbert空間とし，B をその Calkin代数とする。即ち，H上の有界線形作用素，コンパクト作用素のつくる空間を $L(H)$, $C(H)$ とすれば $C(H)$ は $L(H)$ の両側イデアルになり $B = L(H)/C(H)$ である。$L(H)$ の可逆作用素，ユニタリー作用素，Fredholm作用素，巾等作用素，hermitian巾等作用素のつくる空間を各々 $GL(H)$, $U(H)$, $\mathcal{F}(H)$, $ID(H)$, $ID_*(H)$ で表わす。同様に B の可逆元，ユニタリー元，巾等元，hermitian巾等元のつくる空間を各々 $GL(B)$, $U(B)$, $ID(B)$, $ID_*(B)$ で表わす。

(2.1)　$\widehat{ID}_*(B) = \{ x \in ID_*(B) \mid \sigma(x) = \{0,1\} \}$ と

おく。ここに σ は B のスペクトルを表わす。

このとき次のことはよく知られている（[2],[7],[9],[11]）。

(2.2) 命題　(i) $\pi : L(H) \to B$ を射影とするとき

$\pi^{-1}(GL(B)) = \mathcal{F}(H)$。

(ii) $GL(H)$, $U(H)$ は可縮。

(iii) $GL(B)/GL(B)^\circ \cong U(B)/U(B)^\circ \cong \mathbb{Z}$, 但し $\circ$ は単位元を含む連結成分を表わす。

(iv) $ID_*(B) = \{0\} \cup \{1\} \cup \widehat{ID}_*(B)$。

(2.3) 定理（[2]）　$\mathcal{F}(H)$, $U(B)$ は K 群の表現空間である。即ち，X をコンパクト，ハウスドルフ空間とするとき

$K(X) \cong [X, \mathcal{F}(H)] \cong [X, U(B)] \cong [X, U(B)^\circ \times \mathbb{Z}]$。

また，K^{-1} については H が $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間のとき

$K^{-1}(X) \cong [X, \widehat{ID}_*(B)]$。

さて上記で H を $H \oplus H (\cong H)$ でおきかえると B は matrix 代数 $M(2,B)$ におきかえられる。また $\widehat{ID}_*(B)$ は

$\widehat{ID}_*(2,B) = \{ P \in M(2,B) \mid P^2 = P,\ P^* = P,\ \sigma(P) = \{0,1\} \}$

におきかえられるが，これは $\widehat{ID}_*(B)$ と同相だから

(2.4) 系　$K^{-1}(X) \cong [X, \widehat{ID}_*(2,B)]$。

(2.5) 定義.　$B^2 = B \oplus B$ の元をたてベクトルで表わし I を B の単位元とする。このとき次のように定義する。

$V_2(B) = \{ A \in B^2 \quad A^*A = I \}$,

$\tilde{V}_2(B) = V_2(B)$ の $A_0 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$ を含む連結成分。

$M(2,B)$ のユニタリー元全体を $U(2,B)$, $\begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix}$ を含む $U(2,B)$ の連結成分を $U(2,B)^\circ$ とする。$E_0 = \begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} \in \hat{ID}_*(2,B)$ に対し

(2.6) 補題. $\hat{ID}_*(2,B) = \{ AE_0A^{-1} \mid A \in U(2,B)^\circ \}$,

$\tilde{V}_2(B) = \{ KA_0 \quad K \in U(2,B)^\circ \}$。

§3 Banach 多様体 $\hat{ID}_*(2,B)$, $U(B)$, $\tilde{V}_2(B)$

本節では前節において定義した $\hat{ID}_*(2,B)$, $U(B)$, $\tilde{V}_2(B)$ が第1節における (1.1) を満たす Banach 多様体であることを示しこれらの接続, 測地線等を求める。$M = \hat{ID}_*(2,B)$, $U(B)$, $\tilde{V}_2(B)$ に対し第1節の V は各々 $M(2,B)$, B, B^2 である。

(i) 座標近傍系のとり方

(a) $M = \hat{ID}_*(2,B)$, $V = M(2,B)$ の場合

(2.5) より $P \in \hat{ID}_*(2,B)$ を $P = AE_0A^{-1}$, $A \in U(2,B)$ と表わす。

$$(*)_A = \left\{ Q \in \hat{ID}_*(2,B) \;\middle|\; \begin{matrix} (I,0)\, A^{-1}QA \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ I - (0,I)\, A^{-1}QA \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \in GL(B) \right\}$$

は $P = AE_0A^{-1}$ を含む $\hat{ID}_*(2,B)$ の開集合である。また別の

$D \in \mathfrak{U}(2,B)$ によって　$DE_0D^{-1} = AE_0A^{-1}$ となるとき $(*)_D = (*)_A$ が成り立つことがわかる。従って $P = AE_0A^{-1}$ に対して $\mathfrak{U}_A = (*)_A$ とおく。このとき写像 ϕ_A, ω_A を

$$\phi_A : \mathfrak{U}_P \to B, \quad \phi_A(Q) = (0, I)A^{-1}QA\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\left\{(I, 0)A^{-1}QA\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\right\}^{-1},$$

$$\omega_A : B \to M(2,B), \quad \omega_A(Z) = A\begin{pmatrix} I & -Z^* \\ Z & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -Z^* \\ Z & I \end{pmatrix}^{-1}A^{-1}$$

と定義する。このとき $\phi_A \circ \omega_A = 1_B$, $\omega_A \circ \phi_A = 1_{\mathfrak{U}_P}$ が成り立つ。従って $\hat{ID}_*(2,B)$ は $\{(\mathfrak{U}_{AE_0A^{-1}}, \phi_A)\}_{A \in \mathfrak{U}(2,B)}$ を局所座標系として Banach 多様体 (modelled on B) となり，$M(2,B)$ の正則部分多様体である。

$A\begin{pmatrix} I \\ Z \end{pmatrix}A_Z^{-1}(I\ Z^*)A^{-1}$

(b)　$M = \mathfrak{U}(B)$, $V = B$ の場合.

$A \in \mathfrak{U}(B)$ に対し　$\mathfrak{U}_A = \{D \in \mathfrak{U}(B) \mid A + D \in GL(B)\}$

は A を含む $\mathfrak{U}(B)$ の開集合である。次に $\mathcal{L}(B)$ を

$\mathcal{L}(B) = \{b \in B \mid b^* = -b\}$ とおく。そのとき写像 ϕ_A, ω_A を次のように定義する。

$$\phi_A : \mathfrak{U}_A \to B, \quad \phi_A(D) = (-I + A^{-1}D)(I + A^{-1}D)^{-1},$$

$$\omega_A : \mathcal{L}(B) \to B, \quad \omega_A(Z) = A(I + Z)(I - Z)^{-1}.$$

このとき $\phi_A \circ \omega_A = 1_{\mathcal{L}(B)}$, $\omega_A \circ \phi_A = 1_{\mathfrak{U}_A}$ が成り立つ。従って $\mathfrak{U}(B)$ は $\{(\mathfrak{U}_A, \phi_A)\}_{A \in \mathfrak{U}(B)}$ を局所座標系として Banach 多様体 (modelled on $\mathcal{L}(B)$) -- 特に Banach Lie 群 -- となり，B の正則部分多様体である。

(c) $M = \tilde{V}_2(B)$, $V = B^2$ の場合.

$\mathcal{L}_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \in B^2 \quad X^* + X = 0 \right\}$ とおく。(2.5) により $\tilde{V}_2(B)$ の元は KA_0, $A_0 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$, $K \in U(2,B)$ と表わせた。 $A = KA_0$ の近傍を

$$U_A = \{ D \in \tilde{V}_2(B) \mid I + A^*D \in GL(B) \}$$

と定義する。これは $\tilde{V}_2(B)$ の開集合である。U_A の元 D は

$$D = K\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} ; \quad I + a \in GL(B), \quad a^*a + b^*b = I$$

と一意的に表わせる。写像 ϕ_K, ω_K を

$$\phi_K : U_A \to \mathcal{L}_2(B), \quad \phi_K(D) = 2\begin{pmatrix} (I+a^*)^{-1} - (I+a)^{-1} \\ b(I+a)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\omega_K : \mathcal{L}_2(B) \to B^2, \quad \omega_K\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} I + \frac{X}{2} - \frac{Z^*Z}{4} \\ Z \end{pmatrix}\left(I - \frac{X}{2} + \frac{Z^*Z}{4}\right)^{-1}$$

と定義する。このとき $\phi_K \circ \omega_K = 1_{\mathcal{L}_2(B)}$, $\omega_K \circ \phi_K = 1_{U_{A_0}}$ が成り立つ。従って $\tilde{V}_2(B)$ は $\{(U_{KA_0}, \phi_K)\}_{A \in U(2,B)}$ を局所座標系として Banach 多様体 (moddelled on $\mathcal{L}_2(B)$) となり, B^2 の正則部分多様体である。

(ii) 接空間, ガウス写像, 測地線等.

計算結果は次のとうり。共変微分は接続とほぼ同じ形になるので省略する。

(a) $\hat{ID}_*(2,B)$ の場合.

(1) 接空間. $P \in \hat{ID}_*(2,B)$ に対して

$$T_P(\widehat{ID}_x(2,B)) = \{ X \in M(2,B) \mid XP + PX = X,\ X^* = X \}.$$

(2) Gauss 写像　$Y \in M(2,B)$ に対して

$$G_P(Y) = PY(I-P) + (I-P)Y^*P\ 。$$

(3) 測地線　P を通り X $(t=0)$ を接ベクトルとする

$$P_t = e^{t[X,P]}Pe^{-t[X,P]},\quad t \in \mathbb{R}\ 。$$

(4) 接続　P を $\omega_A(Z)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ を $X_{\omega_A(Z)} = (d\omega_A)_Z(\xi_Z)$, $Y_{\omega_A(Z)} = (d\omega_A)_Z(w_Z)$ と表わして

$$(\nabla_X Y)_{\omega_A(Z)} = (d\omega_A)_Z\left((dw)_Z(\xi_Z) - w_Z\Lambda_Z^{-1}Z^*\xi_Z - \xi_Z\Lambda_Z^{-1}Z^*w_Z\right)$$

, 但し　$\Lambda_Z = I + Z^*Z$ 。

(5) 曲率　P, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ を (4) と同じく, 更に $Z \in \mathfrak{X}(M)$ を $Z_{\omega_A(Z)} = (d\omega_A)_Z(\eta_Z)$ と表わすと

$$\{K(X,Y)Z\}_{\omega_A(Z)} = (d\omega_A)_Z(\Box),$$

$$\Box = (\xi_Z\Lambda_Z^{-1}w_Z^*M_Z^{-1} - w_Z\Lambda_Z^{-1}\xi_Z^*M_Z^{-1})\eta_Z - \eta_Z(\Lambda_Z^{-1}\xi_Z^*M_Z^{-1}w_Z - \Lambda_Z^{-1}w_Z^*M_Z^{-1}\xi_Z),$$

但し, $\Lambda_Z = I + Z^*Z$, $M_Z = I + ZZ^*$ 。

これは 更に

$$\{K(X,Y)Z\}_{\omega_A(Z)} = [[X_{\omega_A(Z)}, Y_{\omega_A(Z)}], Z_{\omega_A(Z)}]$$

となる。

(b) $U(B)$ の 場合.

(1) 接空間　$A \in U(B)$ に対して

$$T_A(U(B)) = \{ X \in B \mid X^*A + A^*X = 0 \}.$$

(2) Gauss 写像　$Y \in B$ に対して

$$G_A(Y) = (Y - AY^*A)/2 .$$

(3) 測地線　A を通り X $(t=0)$ を接ベクトルとする

$$A_t = A e^{tA^*X} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(4), (5) -- (a) のそれらとほぼ同じ形。

(C) $\tilde{V}_2(B)$ の場合

(1) 接空間　$A \in \tilde{V}_2(B)$ に対して

$$T_A(\tilde{V}_2(B)) = \{ X \in B^2 \mid X^*A + A^*X = 0 \}.$$

(2) Gauss 写像　$Y \in B^2$ に対して

$$G_A(Y) = Y - A\left(\frac{Y^*A + A^*Y}{2}\right) .$$

(3) 測地線　A を通り X $(t=0)$ を接ベクトルとする

$$A_t = e^{t(XA^* - AX^*)} A e^{-tA^*X} 。$$

(4), (5)　接続, 曲率はよくわからない。

[注意] 上記接続, 曲率等の計算に用いる方法は Yang-Mills 場の self-duality 方程式の Instantons 解の構成に応用することができる ([3], [4], [6])。

§4 Bott の周期性定理.

本節では $\mathbb{C}$ 上の Banach 多様体のみ考える。(2.2) (2.3) によれば複素 K 群に対する Bott の周期性定理は

$$(4.1) \qquad \mathbb{U}(B) \simeq \Omega\, \widehat{\mathbb{ID}}_*(2,B), \quad \widehat{\mathbb{ID}}_*(B) \simeq \Omega\, \mathbb{U}(B) \quad \text{ホモトピー同値}$$

(4.9) 定理　$S : U(B) \to \Omega(\tilde{V}_2(B); A_0, U'(B))$ を

$$S(a)(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{2} \\ a\sin\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}, \quad a \in U(B), \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

で定義するとき，S は F のホモトピー逆写像であり $S(a)$, $a \in U(B)$, は $\tilde{V}_2(B)$ の A_0 から $U'(B)$ の元へ到る測地線である。

(4.10) 系　$\pi_* \circ S : U(B) \to \Omega(\hat{ID}_*(2,B); E_0, P_0)$,

$$(\pi_* \circ F)(a)(t) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\pi t}{2} & a^{-1}\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2} \\ a\sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2} & \sin^2\frac{\pi t}{2} \end{pmatrix}$$

はホモトピー同値写像であり，$(\pi_* \circ F)(a)$, $a \in U(B)$, は $\hat{ID}_*(2,B)$ の E_0 から P_0 へ到る測地線である。

$\Omega(\hat{ID}_*(2,B); E_0, P_0)$ は通常の loop 空間 $\Omega\hat{ID}_*(2,B)$ とホモトピー同値であり，$\hat{ID}_*(2,B)$ は $\hat{ID}_*(B)$ と同相であるから (4.10) より $U(B) \simeq \Omega\hat{ID}_*(B)$ である。

(4.1) の後半のホモトピー同値 $\hat{ID}_*(B) \simeq \Omega U(B)$ は写像

$$\hat{ID}_*(B) \to \Omega U(B) : p \mapsto e^{\pi i t P}, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

により与えられることが知られている ([16], [17])。この写像は §3 (ii), (b), (3) よりあきらかに測地線を与える。

References

(1) M.F.Atiyah ; K-Theory, Benjamin , 1967

(2) M.F.Atiyah & I.M.Singer ; Index Theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. I.H.E.S., 37, 1969, 305-326.

(3) F.A.Berezin ; Instantons and Grassmann Manifolds, Funct. Anal. its appli., 13(2), 1979, 135-136.

(4) V.G.Drinfel'd & Yu I. Manin ; A Description of Instantons, Commu. Math. Phys., 63, 1978, 177-192.

(5) J.Eells ; A Setting for Global Analysis, Bull. A.M.S., 72., 1966, 751-807.

(6) B.V.Fedosov ; Index of an Elliptic System on a Manifold, Funct. Anal. its Appli., 4(4) 1970, 312-320.

(7) K.Fujii ; A Representation of complex K-Groups by means of a Banach Algebra, Mem. Fac. Sci. Kyushy Univ., 32(2), 1978, 255-265.

(8) ——— ; Hilbert-Schmidt 作用素上の高寸関数, Note, 1980.

(9) U.Koschorke ; Infinite Dimensional K-Theory and Characteristic Classes of Fredholm Bundle Maps, Proc. Symp. Pure Math., 15, 1970, 95-133.

(10) M.Karoubi ; Espaces Classifiants et K-Théorie, Trans.A.M.S.,14,1970, 74-115.

(11) N.Kuiper ; The Homotopy type of the Unitary Group of Hilbert Space, Topology, 3, 1965, 19-30.

(12) S.Lang ; Differential Manifolds, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

(13) H.Ôike ; Grassmann 多様体上の微分幾何 (仮題) Note, 1978.

(14) R.S.Palais ; Homotopy Theory of Infinite-Dimensional Manifolds, Topology 5, 1966, 1-16.

(15) I.Raeburn ; The Relationship between a Commutative Banach Algebra and its Maximal Ideal Space, Jour. Funct. Anal. 25, 1977, 366-390.

(16) J.L.Taylor ; Banach Algebras and Topology, Algebras in Analysis, Academic Press, New York, 1975.

(17) R.Wood ; Banach Algebras and Topology, Topology 4, 1966, 371-389.